算法基础第一次作业

艾语晨 PB18000227

2020 年 10 月 10 日

目录

第 1 章　第二周作业

第 1.1 题

1. 考虑以下查找问题:
输入: n 个数的一个序列 $A = a_1, a_2, ..., a_n$ 和一个值 v.
输出: 下标 i 使得 $v = A[i]$ 或者当 v 不在 A 中出现时, v 为特殊值 NIL.
(a). 写出**线性查找**的伪代码, 它扫描整个序列来查找 v. 使用一个 Loop Invariant (循环不变式) 来证明你的算法是正确的.
(b). 假定 v 等可能的为数组中的任意元素，平均需要检查序列的多少元素？最坏情况又如何呢？用 Θ 记号给出线性查找的平均情况和最坏运行时间.

a.

假设数组的下标从 1 开始，伪代码如下：

Algorithm 1: Searching in an Array

Input: An array $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ and the target value v

Output: $output$，为下标 i 使得 $v = A[i]$，或当 v 不在 A 中出现时，为特殊值 NIL

```
output = NIL
for i = 1 to A.length do
    if A[i] == v then
        output = i
if not output > 0 then
    output = NIL
return output
```

用循环不变式来证明此算法是正确的：循环不变式：在循环每一次迭代的开始，包含元素 $A[1..i-1]$ 的子数组构成了当前已比较过的元素集合，剩余的子数组 $A[i..n]$ 对应于待比较的元素

1. **初始化**：在第一次迭代之前（当 $i = 1$ 时），已比较过的部分为空，所以该部分是比较过的，而且没有匹配，所以输出为 NIL，这表明第一次循环迭代之前循环不变式成立

2. **保持**：每一次循环迭代中，都比较第 i 个位置的数组元素，比较之后无论是否匹配都会归入已比较过的部分，并根据比较是否成功修改输出
3. **终止**：在循环终止时，由于导致 **for** 循环终止的条件是 $i > A.length = n$，以及 i 每一次循环加一，故有 $i = n + 1$。这时所有元素均比较完毕。因此算法正确

b.

平均需要检查 $\frac{1+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$ 个元素才可以得到结果，最坏情况是 n 次（当 $v = A[n]$ 时），这两个都是 $\Theta(n)$ 的

第 1.2 题

2 假定 $f(n)$ 与 $g(n)$ 都是渐进非负函数，判断下列等式或陈述是否一定是正确的，并简要解释你的答案
a $f(n) = O(f(n)^2)$.
b $f(n) + g(n) = \Theta(max(f(n), g(n)))$.
c $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$.
d if $f(n) = \Omega(g(n))$, then $f(n) = o(g(n))$. (注意是小 o)

a.

不一定。

证明. 如取 $f(n) = \frac{1}{n}$，则有 $f(n)^2 = \frac{1}{n^2}$，又由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty$，故 $\frac{1}{n^2}$ 不能作为 $f(n)$ 的渐进上界 □

b.

正确。

证明. 当 n 足够大时，$\max\{f(n), g(n)\} = O(f(n)) = O(g(n))$。不妨设当 $n \geq n_0$ 时，有 $\max\{f(n), g(n)\} = f(n)$，且 $f(n), g(n)$ 非负，则可以取 $c_1 = 1$，$c_2 = 2$，则可以满足 $c_1 \max\{f(n), g(n)\} = f(n) \leq f(n) + g(n) \leq 2f(n) = c_2 \max\{f(n), g(n)\}$，即证 □

c.

正确。

证明. $O(f(n))$ 满足对所有 $n \geq n_0 \geq 0$，有 $0 \leq O(f(n)) \leq f(n)$。当 $O(f(n)) = f(n)$ 时，$LHS = 2f(n) = \Theta(2f(n)) = \Theta(f(n)) = RHS$；当 $O(f(n)) = o(f(n))$ 时，有 $LHS = f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n) + o(f(n))) = \Theta(f(n)) = RHS$ □

d.

错误。

证明. 若 $f(n)=\Omega(g(n))$，则对所有 $n>n_0$，有 $0\le cg(n)\le f(n)$，但 $f(n)=o(g(n))$ 要求对于所有 $n>n_0$，有 $cg(n)>f(n)\ge 0$，故矛盾 $\square$

第 1.3 题

3 证明 $lg(n!)=\Theta(nlg(n))$(课本等式 3.19), 并证明 $n!=\omega(2^n)$ 且 $n!=o(n^n)$.

图 1.1: 第三题题目

证明. 由 Stirling 公式可得：

$$\begin{aligned}\lg(n!) &= \lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\lg(2\pi n)+n\lg\left(\frac{n}{e}\right)+\lg\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \Theta\left(lg(n)+nlg(n)+lg\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \Theta(nlg(n))\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{2}\times\frac{5\times6\times\cdots}{2\times2\times\cdots}=\frac{3}{2}\times\frac{5\times6\times\cdots}{2\times2\times\cdots}=\infty$$

$\square$

第 1.4 题

4 使用代入法证明 $T(n)=T(\lceil n/2\rceil)+1$ 的解为 $O(lgn)$.

证明. 假设 $T(1)=\Theta(0)=\Theta(\lg 1)$。假设当 $k<n$ 时，有 $T(k)\le c\lg(k)$，则当 $k=n$ 时，有（取 $c\ge 1$）

$$\begin{aligned}T(n) &= T(\lceil n/2\rceil)+1\\ &\le c\lg(\lceil n/2\rceil)+1\\ &\le c\lg n\end{aligned}$$

需满足 $c\ge\dfrac{1}{\lg(\frac{n}{\lceil n/2\rceil})}$。取 $c=\frac{1}{\lg(3/2)}$ 即可 $\square$

第 1.5 题

5 对递归式 $T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$, 利用递归树给出一个渐进紧确解, 其中 $a \geq 1$ 和 $c > 0$ 为常数.

递归树如图所示:

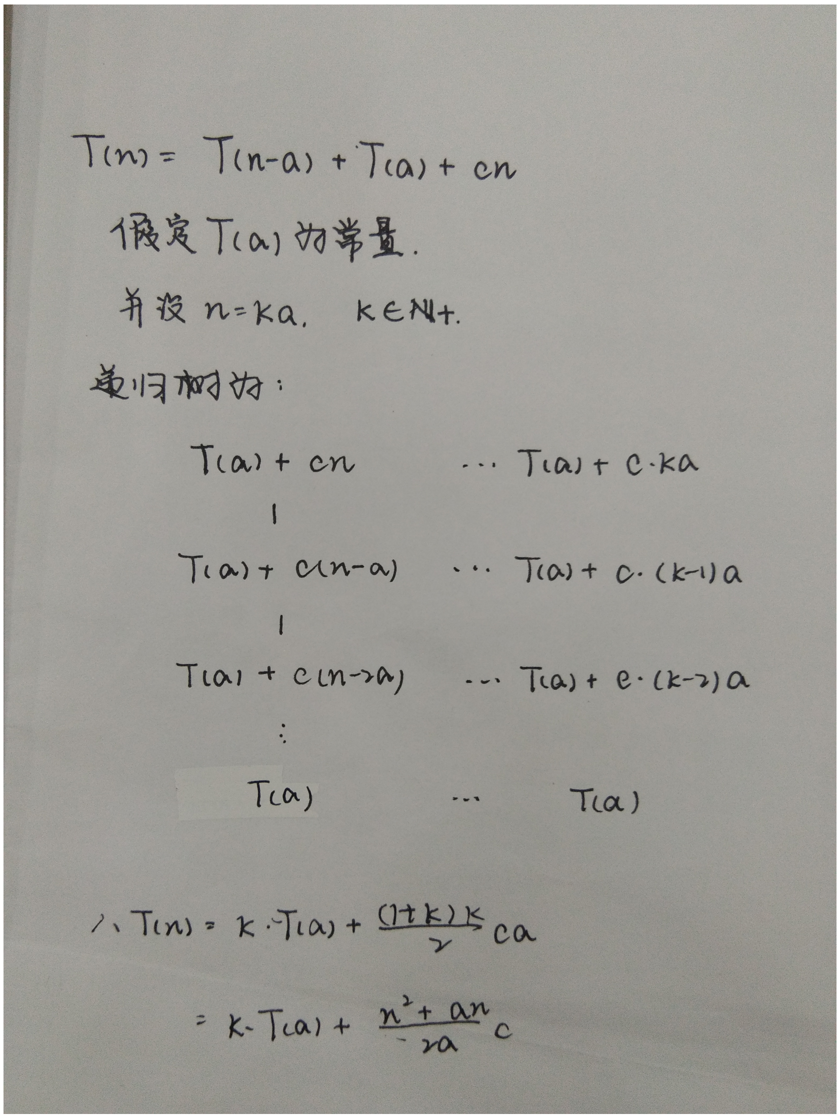

图 1.2: Recursion Tree

故可以猜想 $T(n) = \Theta(n^2)$

6 对下列递归式, 使用主方法求出渐进紧确解:
(a). $T(n)=2T(n/4)+\sqrt{n}$
(b). $T(n)=2T(n/4)+n^2$.

> **定理4.1（主定理）** 令 a≥1 和 b>1 是常数，f(n) 是一个函数，T(n) 是定义在非负整数上的递归式：
>
> T(n) = aT(n/b) + f(n)
>
> 那么T(n)有如下渐进界：

1. 若对某个常数 ε>0 有 $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ 。
2. 若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$ 。
3. 若对某个常数 ε>0 有 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$，且对某个常数 c<1 和所有足够大的 n 有 af(n/b) ≤ cf(n)，则 T(n) = Θ(f(n)) 。

第 1.6 题

a.

对于本题，$a=2$，$b=4$ $f(n)=\sqrt{n}$，因此 $n^{\log_b a}=\sqrt{n}=\Theta(\sqrt{n})=f(n)$，故 $T(n)=\Theta(\sqrt{n}\lg n)$

b.

对于本题，$a=2$，$b=4$ $f(n)=n^2$，因此 $n^{\log_b a}=\sqrt{n}=\Theta(\sqrt{n})=\Omega(n^2)=f(n)$，故 $T(n)=\Theta(n^2)$

第 1.7 题

7 主方法能应用于递归式 $T(n)=4T(n/2)+n^2 lgn$ 吗? 请说明为什么可以或者为什么不可以. 给出这个递归式的一个渐进上界.

不可以应用主方法，因为 $a=4, b=2$，故 $n^{\log_2 4=n^2}$。如 PPT $topic2$ $page64$ 所言，对于 $\forall\varepsilon>0$，有 $n^\varepsilon=\omega(\lg n)$，故不能在多项式意义下对 $f(n)$ 和 $n^2\lg n$ 进行比较，故不能应用主方法