

# 算法基础第二次作业

艾语晨

2020 年 10 月 18 日

# 目录

<b>1</b>	<b>算法基础第二次作业</b>	<b>2</b>
1.1	堆排序 . . . . .	2
1.2	快速排序 . . . . .	2
(a)	递归深度 . . . . .	2
(b)	更平衡的概率 . . . . .	2

# 第 1 次作业 算法基础第二次作业

## 第 1.1 题 堆排序

不妨设最终要求升序排列。那么需要构建一个最大堆。对于一组升序排列的数据，BUILD-MAX-HEAP 过程的时间复杂度为  $O(n)$ ，而每一次调用 MAX-HEAPIFY 的时间为  $O(\lg n)$ ，共调用  $n - 1$  次，故时间复杂度为  $O(n \lg n)$ 。

对于一组降序排列的数据，BUILD-MAX-HEAP 过程的时间复杂度为  $O(n)$ ，而每一次调用 MAX-HEAPIFY 的时间为  $O(\lg n)$ ，共调用  $n - 1$  次，故时间复杂度为  $O(n \lg n)$ 。

## 第 1.2 题 快速排序

快速排序的时间复杂度递归式为：

$$T(n) = T((1 - \alpha)n) + T(\alpha n) + cn$$

### (a) 递归深度

证明. 叶节点的最小深度在所有层选择均为  $T(\alpha n)$  分支时得到，设深度为  $x_{\min}$ ，则有  $\alpha^{x_{\min}} n = 1$ ，故  $x_{\min} = -\log_{\alpha} n = -\lg n / \lg \alpha$ 。最大深度在所有层的选择均为  $T((1 - \alpha)n)$  分支时取到，设深度为  $x_{\max}$ ，则有  $(1 - \alpha)^{x_{\max}} n = 1$ ，故  $x_{\max} = -\log_{1-\alpha} n = -\lg n / \lg(1 - \alpha)$   $\square$

### (b) 更平衡的概率

证明. 设新的划分为  $1 - x : x$ ，则它的 PARTITION 产生比  $1 - \alpha : \alpha$  更平衡等价于  $|\frac{1}{2} - x| < \frac{1}{2} - \alpha$ ，即  $\alpha < x < 1 - \alpha$ ，即概率为  $1 - 2\alpha$   $\square$