

# 算法基础第六次作业

艾语晨 PB18000227

2020 年 11 月 24 日

# 目录

<b>1</b>	<b>2</b>
1.1 钢条切割 . . . . .	2
1.2 有向无环图中的最长简单路径 . . . . .	2
1.3 最优二叉搜索树 . . . . .	2
1.4 公司聚会 . . . . .	3
1.5 包含点列的闭区间 . . . . .	3
1.6 找零问题 . . . . .	4

# 第六次作业

## 第 1.1 题 钢条切割

由题可知，最优切割收益公式为：

$$r_n = \max\{p_n, \max_{1 \leq i \leq n-1} \{r_i + r_{n-i} - c\}\}$$

算法 MEMOIZED-CUT-ROD-AUX 修改为如下：

---

**Algorithm 1:** MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p,n,r)

---

```
1 if  $r[n] \geq 0$  then
2   return  $r[n]$ 
3 if  $n == 0$  then
4    $q = 0$ 
5 else
6    $q = -\infty$ 
7   for  $i = 1$  to  $n$  do
8      $q = \max(q, p[i] + \text{MEMOIZED-CUT-ROD-AUX}(p, n-i, r))$ 
9  $r[n] = q$ 
10 return  $q$ 
```

---

## 第 1.2 题 有向无环图中的最长简单路径

设  $s'$  为一个与  $s$  相邻的顶点，则有如下递推式：

$$\text{LONGEST}(G, s, t) = 1 + \max_{s \sim s'} \text{LONGEST}(\{G - V\}, s', t)$$

其中  $G-V$  表示图  $G$  去掉顶点  $V$  和与  $V$  相连的所有边之后的子图

## 第 1.3 题 最优二叉搜索树

最优二叉搜索树如下图所示：

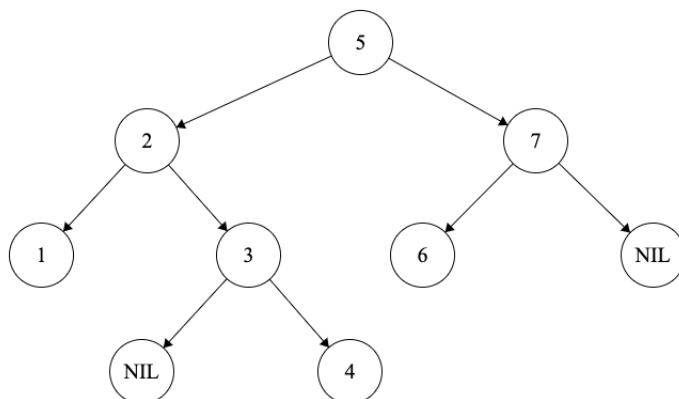
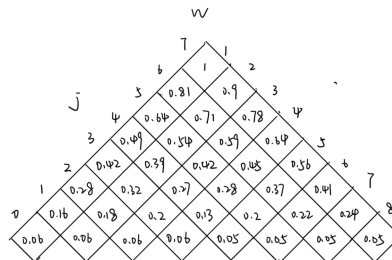
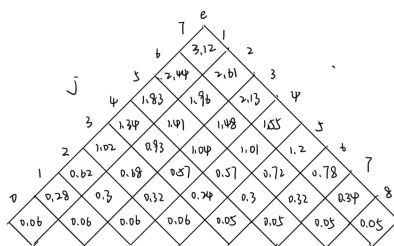


图 1.1: 最优二叉搜索树



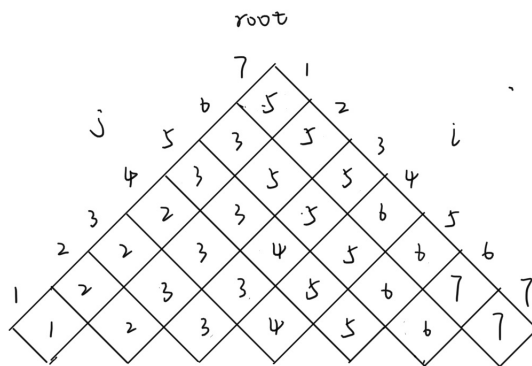
其代价为:

## 第 1.4 题 公司聚会

由于员工不能和其直接主管同时出席, 同时为了使参会人数最大化, 当一个员工出席时, 对他的所有孙子节点为 **root** 的子树进行动态规划; 若一个员工没有出席, 那么对他的所有子节点进行动态规划。又由于关系树是采用的孩子兄弟表示法, 变为如下策略: 对所有出席对结点, 对其右子树一直向右邀请出席 (所有兄弟结点), 而像左采用间隔邀请 (孙结点)。

## 第 1.5 题 包含点列的闭区间

采用分治策略。每一次将  $n$  个点列分为  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  和  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  两部分, 然后对这两部分分别递归调用。设区间左端点为  $.lend$ , 右端点为  $.rend$ , 则递推式为  $all.lend = \min\{left.lend, right.lend\}$ ,  $all.rend = \max\{left.rend, right.rend\}$ 。



由分治策略的正确性可知此算法正确性显然

## 第 1.6 题 找零问题

算法：每一次都用最大面额的找零，直到余额为 0 为止。

证明. 若贪心算法选取的不是最优解，那么一定会发生以下几种情况之一：

1. 贪心选取了 25 美分的以及 5 美分和 1 美分的，但换为 10 美分是最优解：可能的子问题总额在 25 到 35 之间，只有 30 这部分可以用 10 美分找零，但  $10 + 10 + 10 (3) > 25 + 5 (2)$ ，故贪心为最优选择
2. 贪心选取了 10 美分和 1 美分，但换为 5 美分为最优解：10 为 5 的倍数，零钱数超过 10 的时候用一个 10 美分一定比用两个 5 美分要节省

故贪心选取的是最优解

□