数理方程笔记

上官凝

July 13, 2020

0.1 序幕

对整个知识体系以及题目有一个整体上的认识，有助于在题目出现变数的时候以不变应万变，无为而无所不为。建议复习时食用。

0.1.1 审题理清思路

当拿到一个题目当时候，首先判断这个题是做什么的，这有助于判断其对应的思路、知识、定理、性质、特殊情况以及易错点的集群。在这一门课里面，可能会出现以下几种类型：

1. 列出定解问题
2. 求解一维无限长弦振动问题
3. 解固有值问题
4. 普通的分离变量问题
5. 非齐次的分离变量问题
6. 特殊函数的分离变量问题，即 Bessel 与 Legendre
7. 利用特殊函数的性质解决证明或计算问题
8. 积分变换法解定解问题
9. 解基本解问题
10. 求格林函数并代入积分式求出特解（两问）
11. 写出原定解问题的 Green 函数满足的定解问题

其次要看这个题目的要求，如明确指出**使用 Laplace 变换的方法**，那么就毋需考虑分离变量或者基本解方法了。还有若题目由多问，则前后问之间的提示作用也不容小觑。

0.1.2 分析定解问题

这里只是分析，解决方案详见后面

由于每一种方法有其相对应的限制条件，那么在接手一个问题的时候，就需要从整体上先对面对的问题有一个整体上的把握。

按照自上而下的顺序，首先观察一个定解问题的泛定方程，首先是两个方面：坐标变量以及时间变量的定义域（决定了解题方法的适用范围），和是否满足某些特殊形式（如 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 可以考虑行波法）。又如若坐标变量定义域为有界区间，优先考虑分离变量法（一般地，适用范围较窄的方法要较适用范围较宽的方法在计算上有所简便）。如使用行波法或分离变量法，则还有一步，即判断泛定方程是否为齐次。

其次要观察定解条件，即初始条件以及边界条件。如使用分离变量法时，若边界条件为非齐次，则须将其做齐次化处理。对于一个定解问题，它的初始条件是由 t 的阶数决定的，而边界条件是由坐标变量定义域的边界的形状决定的。比如在一个半径为 r，高为 h 的圆柱体上的定解问题，若取坐标原点为圆柱底面中心，z 轴为圆柱中心轴，则边界条件分别为 $|_{z=0}$，$|_{z=h}$，$|_{r=a}$。

然后还有一点，是如果整个问题没有涉及到某一个变量（如对于三维球坐标下的定解问题，其定解条件与泛定方程均未提及 φ，则不妨设 $u=u(r,\theta)$，可以简化问题的求解

0.1.3 明晰物理含义

归根结底这门课叫数学物理方程，所以对于数学物理的结合还是有必要的。

对于三类典型方程及其各自的三类边界条件、非齐次项对应的物理含义：

1. Poisson 方程 $\Delta u=f(M)$（稳定方程）
   泊松方程对应着稳态问题，如一个恒稳电磁场。泊松方程只有一类边界条件，其含义为这个区域边界上的对应的场势
2. 热传导方程 $u_t=a^2\Delta u+f(t,M)$（发展方程）
   u 的物理含义为热流密度
   (a) 第一类边界条件：这个边界上有稳定的温度控制源，即给出了这里的 $\varphi(t,M)$
   (b) 第二类边界条件：恒定温差（齐次情形：绝热，$u_t|_{\partial\Omega}=0$）
   (c) 第三类边界条件：自由热交换，用对应的物理定律去推导相应的条件[1]
3. 波动方程 $u_{tt}=a^2\Delta u+f(t,M)$（发展方程）
   u 的含义为波动强度
   (a) 第一类边界条件：初始位移（齐次情形：固定端，$u|_{t=0}=0$）
   (b) 第二类边界条件：初始速度（齐次情形：自由端，$u_t|_{t=0}=0$）

0.1.4 熟悉求解思想

总体上来看，求解一个定解问题有 4 种方法，即行波法、分离变量法、积分变换法、基本解方法。以一个从一般到特殊的思想来看待所有的方法，结合传说中的三步走思想[2]，可以在解决问题的过程中对自己到了哪一步，还需要做什么，甚至可以拿到多少分都有一个把握。

行波法 利用 d'Alembert 公式，在一个积分之后得到问题的最终答案。特殊情况是泛定方程有可能会是非齐次的，这个时候需要齐次化原理来解决。放一个例题：第一章的练习题 10。

[1] 见附录
[2] 详情见笔者助教所著《数理方程复习指导》

第二次习题课（week 6）

定解条件 $\begin{cases} \text{初始条件：关于}t\text{ 个数由}t\text{的偏导阶数} \\ \text{边界条件：关于坐标变量} \end{cases}$

eg. for 齐次化原理.

§1 Exercise 10.

例 求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) & (t>0,\ -\infty<x<+\infty) \\ u(0,x) = \varphi(x) & (a\neq 0,\ a\text{为 const}) \end{cases}$

由叠加原理，原定解问题的解 $u = u_1 + u_2$，其中 u_1，u_2 分别为定解问题①，②的解

① $\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$ ② $\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f(t,x) \\ u_2|_{t=0} = 0 \end{cases}$

① 代换：~~取~~ $\xi = x - at$，$\eta = t$

$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi(\xi) \end{cases}$ $\therefore u_1 = \varphi(x-at)$

② 令 $t_1 = t - \tau$ 波的平移，起点归零：好算.（齐次化原理平移出去再代换平移回来）

$\cancel{\dfrac{\partial u_2}{\partial t_1} + a\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f(t_1}$ 先用齐次化原理.

先求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ w|_{t=\tau} = f(\tau,x) \end{cases}$

代换：$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t_1} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ w|_{t_1=0} = \cancel{f(t_1,x)}\ f(\tau,x) \end{cases}$ ← τ 和 t_1，x 无关，所有代换只是形式上的

利用①的解形式，$w = f(\tau, x-at_1) = f(\tau, x-a(t-\tau))$

代入齐次化原理的形式解. $u_2 = \int_0^t f(\tau, x-a(t-\tau))\,d\tau$

$\therefore u = \varphi(x-at) + \int_0^t f(\tau, x-a(t-\tau))\,d\tau$

分离变量法 拆分变量之后，解固有值问题得到正交函数系，进一步得到通解（级数解），并利用定解条件得到特解。特殊情况包括在解固有值问题的时候，若 ODE 满足 Bessel 方程或者 Legendre 方程的形式，则利用已有结论得到结果；以及非齐次情形，需要对定解条件以及泛定方程进行齐次化处理（注意顺序），具体方法见后面

积分变换法 积分变换法不需要考虑非齐次项，但是计算量 emm... 吾不言
积分变换法有一些 points，比如边界条件 (Fourier 变换没有) 是需要变换的，但是初始条件变换过去可以只先写一个 $F[\varphi(M)]$，因为很有可能是在最后做反演变换的时候，乘起来变换回来卷积的时候就又回来了。

基本解方法 基本解分为列出来基本解问题并求解，和代入积分式计算两部分。三种典型方程都有其对应的基本解模型，以及积分式计算公式。其中 Poisson 方程用 Green 函数求解，镜像法是在特殊的求解域下，用以对基本解求解的方法，故求出格林函数后只需代入积分公式即可。

0.1.5 掌握额外技能

数学物理方程不是孤立的一门课，而是和微积分课程一脉相承的，故在这门课程的计算中，会用到：

1. 解 ODE（数学分析 B1 第六章）
2. Fourier 变换以及 Fourier 展开（数学分析 B2 第十二章）
3. Laplace 变换，反演变换以及各种性质（复变函数第七章）
4. 留数定理及其计算（复变函数第五章）
5. 计算上用不到但是证明会用到的格林公式以及场论（数学分析 B2 第九章）

还有这门课本身的一些例题上面的公式（如 Legendre 方程部分的 $(m+n+1)\int_0^1 x^m p_n(x)dx = m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)dx$ 就出自例题