文章编号：2095-624X（2017）33-0049-03

分离变量法的拓展应用

余招贤
（中山大学物理学院，广东 广州 510275）

摘　要：分离变量法是求解有限域上数学物理方程定解问题的普遍有效方法。文章首先简单介绍分离变量法的基本原理和使用分离变量法的限制条件，然后重点讨论对非齐次方程和非齐次边界条件的数学处理，使我们可以突破分离变量法的适用范围，最大限度地直接或间接使用分离变量法求解各种复杂的数学物理方程问题。

关键词：分离变量法；适用条件；拓展应用
中图分类号：O411.1；O241.82 **文献标识码：**A **收稿日期：**2017-10-21
作者简介：余招贤（1964—），男，副教授，本科，研究方向：大学物理教学。

一、引言

数学物理方程主要指从物理学及其工程技术应用科学中产生的偏微分方程（有时也包含积分方程、微分积分方程等），它是一门数学基础性强和物理应用范围广的数理基础课，同时它又被公认为大学理工科教学中一门难教、难学的基础必修课。数学物理方程是物理规律的数学表达，一般用来描述大量物理现象背后的普遍规律和共同特征。例如，波动方程描写波动现象的普遍规律，不管是声波还是电磁波都要服从波动方程。输运方程反映输运过程的基本规律，不管是由温度梯度引起的热传导，还是由物质浓度差引起的物质扩散都符合输运方程。稳定场方程描述的现象就更加广泛了，通常指物理量在不随时间变化的情况下满足的偏微分方程，但在数学物理方程中将特指拉普拉斯方程、泊松方程和亥姆霍兹方程，它们描述稳定温度场、静电场、时谐电磁波的电场或磁场空间分布等[1][2]。这些经典数学物理方程虽然能够描写物理现象的共同规律，却无法对某个具体现象和过程作出全面的描述，所以只有偏微分方程往往不足以确定具体问题的解，定解还需要提供具体问题的边界条件和初始条件，它们分别反映系统受到外界的影响，以及系统在初始时刻的物理状态，边界条件和初始条件一起统称定解条件。

一般来说，偏微分方程的解法相当复杂，数学物理方程课程中涉及三类经典方程，其解法具有典型代表性，完全可以应用到其他类型的数学物理方程求解，如量子力学的薛定谔方程。分离变量法就是一种求解偏微分方程的普遍有效方法，适用于大量的有限域上的初边值问题。本文首先简单介绍分离变量法的基本原理，其次说明分离变量法的严格适用条件，最后讨论分离变量法的各种拓展应用，重点介绍对非齐次边界条件的数学处理，对非齐次方程应用本征函数展开法，对稳定场引进自然边界条件构成本征值问题，通过这些数学处理极大地拓展了直接或间接使用分离变量法的应用范围。

二、分离变量法的基本原理

对于微分方程可以先求通解，然后利用边值条件定解。偏微分方程却一般无法采用类似方法求解，主要是因为偏微分方程的通解难找，即使找到了通解，可能也难以定解。分离变量法基本原理的提出其实是受到物理中驻波现象的启示，如两端固定弦的自由振动满足波动方程。从物理上容易看出，弦的两个端点对波有反射作用，波在两个端点之间往复反射并叠加形成驻波。这就启发我们弦上存在驻波形式的特解，驻波的特点就是波函数可以表示为时间变量函数和空间变量函数的乘积，即存在分离变量形式的特解。

现在分离变量法已经成为求解数学物理方程最有效的一种方法，虽然其核心思想源自驻波，但这并不意味着它只能应用在波动方程的求解，它完全可以推广到各种类型的数学物理方程定解问题。具体来说，分离变量法首先需要假设方程存在分离变量形式的特解，对方程分离变量，从而把偏微分方程转换成几个单变量函数满足的微分方程，对边界条件分离变量，由此得出对微分方程所描述的单变量函数的某些限制，这些限制条件和微分方程一起构成本征值问题。然后对本征值问题进行求解，求解结果不仅需要找到一组非零特解（本征函数），还要确定那些待定常数所能取到的一些特定数值（本征值）。最后把这些分离变量形式的特解叠加起来，得到满足方程和边界条件的一般解，进一步使其满足初始条件，以确定一般解中的叠加系数，方程最终获解。

三、分离变量法的条件

虽然分离变量法行之有效，应用广泛，但它的使用范围仍然受到一定的限制。分离变量法的首要前提是存在分离变量形式的特解，这种特解是否真的存在，一切都要看最终能否定解。当我们把分离变量特解代入偏微分方程，就会发现只有对齐次偏微分方程，才能真正实施分离变量的步骤，即把偏微分方程转换为一系列的单变量微分方程。而对非齐次偏微分方程，显然无法分离变量，因为非齐次项是一个不为零的已知函数，无法写成解的分离表达形式。所以分离变量法要求方程必须是齐次的。

对齐次偏微分方程进行分离变量后得到的系列微分方程，与普通微分方程有一点显著不同，那就是它们还包

含分离变量过程中引进的一些待定常数,导致这些微分方程无法单独求解,必须为其提供合适的附加条件，构成所谓的本征值问题。这些附加条件的来源多种多样，它们通常来自对原定解问题的全部或部分边界条件进行分离变量所得，也就是要求全部或部分边界条件必须是齐次的。对于稳定场问题，情况则有点复杂。稳定场的边界条件不可能全部是齐次的,否则按照解析函数理论,稳定场内部每一点上物理量的值都决定于边界上的值，即全部齐次边界条件意味着系统内的稳定场恒为零，这是没有物理意义的。例如，在直角坐标系中，对矩形或长方体边界的情况，只要求部分边界条件是齐次的，能够分离变量构成本征值问题即可。对圆形、球面或圆柱边界，一般选择极坐标、球坐标或柱坐标，这时候虽然边界条件一般是非齐次的，但我们可以对角坐标采用周期条件或有界条件，能够与相应角坐标的微分方程构成本征值问题。

构成本征值问题后进行求解，将会得到一系列的本征值和本征函数。本征函数的实质就是符合方程和边界条件（部分）的特解，这些本征函数（特解）通常具有正交、归一、完备等性质。分离变量法能够成功的另一个关键点就是，这些特解的线性叠加仍然是偏微分方程的解，并且还能满足边界条件（部分）。把这些特解叠加起来，构成满足方程和边界条件（部分）的一般解，然后利用初始条件或其余定解条件确定一般解中的未知系数。要能做到这一点，就必须要求原方程和边界条件都是线性的。

实际上，使用分离变量法，除了要求方程和边界条件满足齐次和线性条件之外，还要求边界的形状是规则的几何形状，如矩形、圆形、球形、圆柱形等，在适当选择的坐标系中，这些规则的边界可以用若干个只含有一个变量的方程来表示，这一点容易被人忽略。

四、分离变量法的各种拓展

通过前面的讨论，可以看出使用分离变量法有着严格的适用条件，即不仅要求方程和边界条件线性（部分）齐次，还要求系统的边界具有规则几何形状。实际上这些条件都是分离变量法的充分条件，而非全部是必要条件，下面说明我们可以通过一些数学手段，突破上述条件的限制，在更大的范围内继续直接或间接使用分离变量法的思想，以帮助我们解决各种复杂问题 [3][4]。

1. 对非齐次边界条件的处理

首先讨论边界条件，通常说只有齐次边界条件才能分离变量，才能和微分方程构成本征值问题，进而求解本征值和本征函数，按照分离变量法的标准理论处理问题。考虑一维波动方程的定解问题，方程是齐次的，但边界条件是非齐次的，在这种情况下方程仍然可以分离变量得到微分方程，边界条件却不能分离变量了，所以无法提供微分方程的附加条件以构成本征值问题，原则上就不能应用分离变量法了。一个变通的做法是引进一个数学辅助函数，使边界条件由非齐次变成齐次，符合边界条件分离变量的要求，这样的简单辅助函数对三类线性非齐次边界条件都很容易找到。付出的代价却是方程很可能变成非齐次，即边界条件齐次化了，方程却变为非齐次了，还是不能直接应用分离变量法。其实更普遍的情况是方程和边界条件本来都是非齐次的，但是我们总能通过寻找辅助函数，使边界条件齐次化，最坏的结果就是非齐次的方程继续是非齐次罢了。所以对任意非齐次方程附加非齐次边界条件的定解问题，我们总是可以通过适当的数学变换，把定解问题最终转化为一个非齐次方程附加齐次边界条件的情况，这种情况我们能够按照后面介绍的本征函数展开法进行有效处理。

2. 对非齐次方程的处理

下面只需考虑非齐次方程附加齐次边界条件的情况。由于方程本身不能直接分离变量，这种情况显然不能直接应用分离变量法求解。但是我们可以基于分离变量法的理论，找到一种普遍而又有效的解决方案，处理非齐次方程和齐次边界条件的典型问题。具体方法是先忽略方程的非齐次项，直接考虑一个齐次方程和齐次边界条件结合的问题。现在当然可以分离变量了，由相应本征值问题可以得到本征函数。从理论上说，尽管方程是非齐次的，定解问题的相应齐次问题的本征函数总是客观存在的，如果我们还是按照把本征函数（特解）线性叠加得到一般解的方法，这样的一般解只能是齐次方程在齐次边界条件下的一般解，肯定无法满足非齐次的方程。即使我们再由初始条件定出叠加系数，这样得到的解绝不是原定解问题的解，也绝不是原定解问题的广义解。但从本征函数完备性的角度，任何一个函数（包括原定解问题的解）都可以用本征函数展开，只不过现在的展开系数不是常系数,而是某个变量的待求函数。为了确定该函数，把原方程的每一项都用本征函数展开，就可以得到待求函数满足的非齐次微分方程，同样对原定解条件作相同的展开，得出待求函数满足的附加条件，现在原则上就可以完全解出待求函数，最终就可以得到既满足非齐次方程又满足齐次边界条件的解。另外也说明为什么必须先要将边界条件齐次化，因为只有满足与本征函数相同的（齐次）边界条件的函数，才能按照该组本征函数展开（至少在平均收敛的意义下）。以上方法称为本征函数展开法，也称为广义傅里叶级数法。所以在最一般的情况下，我们依然可以应用分离变量法的思想求解线性非齐次方程和线性非齐次边界条件的定解问题。

3. 对稳定场问题的处理

对稳定场问题，由于不存在初始条件，所以只需考虑边界条件。首先要明确，根据研究对象是否包含各种不同的“源”，稳定场方程可以是齐次的（无源,拉普拉斯方程）,或者是非齐次的（有源，泊松方程）。而如前所述，稳定场的边界条件不可能全部是齐次的，所以稳定场的边界条件一般是非齐次的，最多只能在部分边界上是齐次的。问题来了，分离变量法还能用吗?

此时需考虑两种典型的情况。第一种就是研究物理量在矩形薄板或长方体介质中的稳定分布。显然系统的边界是矩形的四条边或长方体的六个外表面，这时最好选择直角坐标系，如果系统内无源，满足齐次拉普拉斯方程，当然可以分离变量。对于边界条件来说,如果矩形的一组对边上或长方体的两组相对的外表面上的边界条件是齐次的，那么就可以对相应的齐次边界条件进行分离变量，所得的限制条件与微分方程一起构成本征值问题并求解，最后构成稳定场问题的一般解，并利用剩余的非齐次边界条件确定一般解中的叠加系

求知导刊
Journal of Seeking Knowledge Guide
2017 年 11 月
Nov.2017

文章编号：2095-624X（2017）33-0051-03

走进新时代，踏上新征程

——浅析新时代中国社会主要矛盾

刘婷玉，李怀珍
（绵阳师范学院马克思主义学院，四川 绵阳 621000）

摘　要：习近平总书记在党的十九大报告中明确指出了中国特色社会主义已经进入新时代，我国社会主要矛盾已经转化为“人民日益增长的美好生活需要和不平衡不充分的发展之间的矛盾”。这作为十九大报告中的最大变化之一，意味着我国对当前社会的发展形势有了更为精准和更为全面的判断，也不可否认，这是中国特色社会主义发展进程中的一个重大理论创新成果，对我国当前的发展更是至关重要。

关键词：新时代；社会主要矛盾；不平衡；不充分
中图分类号：D616　　**文献标识码：**A　　**收稿日期：**2017-10-11
作者简介：刘婷玉（1997—），女，四川古蔺人，本科。

一、新时代社会主要矛盾的提出

唯物辩证法告诉我们，矛盾无时不在、无处不在。突出重点、统筹一般，通过主要矛盾的解决来带动其他各项次要矛盾的解决，一直以来是中国共产党人的思想方法和工作方法。新中国建立以来，党对我国主要矛盾的判断经历了一个曲折的转变过程。1956 年，党的八大指出，社会主义三大改造已基本完成，国内的主要矛盾已经不再是工人阶级和资产阶级之间的矛盾，而是“人民对于建立先进的工业国的要求同落后的农业国的现实之间的矛盾”，是“人民对于经济文化迅速发展的需要同当前经济文化不能满足人民需要的状况之间的矛盾”。这一矛盾的实质，就是先进的社会制度同落后的社会生产力之间的矛盾。1962 年，党的八届十中全会把无产阶级同资产阶级的矛盾确定为整个

数，从而最终定解。实际上对具有矩形或长方体边界的系统进行求解时，可以进一步拓展分离变量法的适用范围，即使所有的边界条件都是非齐次的，只要方程是线性齐次的拉普拉斯方程，就可以通过简单的分解方法，即把一个矩形边界的定解问题分成两个新的定解问题，把一个长方体边界的定解问题分成三个新的定解问题，其中每一个新的定解问题都含有部分齐次边界条件，完全可以按照分离变量法求解，最后再把它们各自的解叠加起来，就可以得到原定解问题的完整答案。

第二种情况就是对二维圆或三维柱形和球面边界，最好采用平面极坐标、柱坐标和球坐标，这时边界条件只能是非齐次的，否则系统内部每一点的物理量取值为零。假如方程还是齐次的拉普拉斯方程，分离变量法还能应用吗？答案是肯定的。拉普拉斯方程一定是可以分离变量的，在平面极坐标系中拉普拉斯方程可以分解为两个微分方程，即径向方程和角向方程，在三维球坐标系中拉普拉斯方程可以分解为径向方程和两个角向方程。虽然这时边界条件是无法分离变量的，也就是不能为微分方程提供附加条件，但是极坐标或球坐标的引入自然要考虑角坐标的周期性，还有要求物理量在边界上保持有界性，这些都是对微分方程中的本征值的附加要求，可以构成相应的本征值问题。然后就可以按照分离变量法的标准步骤进行求解。当然对非齐次的稳定场方程，我们就只能通过寻找特解的方法，使其转化为齐次方程，然后即可按照上述讨论的方法进行求解。

五、结论

分离变量法的基本原理就是通过寻找可以表达为分离变量函数乘积形式的非零特解，将偏微分方程转化为微分方程,其实质是将自变量的个数减少,求出这些微分方程满足齐次边界条件或附加自然边界条件的非零特解，再作线性叠加,最终求出满足所有定解条件的解。分离变量法的严格适用条件是方程和边界条件都是线性的和齐次的，边界形状是规则的几何形状。为了最大限度拓展分离变量法的使用范围，对最一般的非齐次方程和非齐次边界条件的时域问题，可以通过引进数学辅助函数，把非齐次边界条件齐次化，然后引进建立在分离变量法理论基础上的本征函数展开法,对稳定场问题的非齐次边界条件,可以引进附加的自然边界条件以构成本征值问题，这些数学方法有效突破了分离变量法的限制条件，使我们可以解决更广泛和更复杂的数学物理方程问题。

参考文献：

[1]梁昆淼．数学物理方法[M].北京：高等教育出版社，2010.
[2]周明儒．数学物理方法[M].北京：高等教育出版社，2008.
[3]周　澜．分离变量法处理疑难边界条件问题的探究[J].江苏第二师范学院学报（自然科学版），2014（8）：19-21.
[4]王礼祥．静态场问题的分离变量法理论探究[J].西南民族大学学报(自然科学版)，2011（3）：360-367.