拨开齐次化原理的神秘面纱

- **初见：**

在第一章的学习中，我们主要讨论了偏微分方程的基本概念，并且基于对行波法的详细分析，讨论了一种有效的求解定界问题的方法，即通解法。
在求解定解问题时，我们明确一个想法，即要对方程进行分类，根据方程的类型选取合适的方法来处理。在分类中，一个重要的类别是齐次和非齐次的划分。因为我们知道，齐次的问题往往是容易求解的，在很多方法，比如行波法、分离变量法中，我们也都要求方程的齐次。
那么，遇到非齐次的方程，我们要如何处理呢？
在第一章呢，我们遇到了一个好朋友，就是齐次化原理。

- **使用条件：**

  - 非齐次的发展方程
  - 齐次的初始条件

- **注意事项：**

齐次化原理的使用可以帮助我们将非齐次发展方程转化为齐次的方程来处理，这是我们非常希望看到的。
但是
要注意，齐次化原理的使用会使得时间变量定义域发生偏移，即从$t>0$偏移至$t>\tau$。
所以呢，在求解的时候，我们一般还需要一步时间变量偏移代换，从而重新可以处理定义在$t>0$上的问题。

- **想法由来：**

首先呢，这个想法的来由呢，我的理解是，和我们之前处理数学问题的想法是类似的。在遇到不熟悉的问题的时候呢，我们经常会有转化、化归的想法。一种思路是借鉴原来所熟悉的方法中蕴含的思想，一种思路是把不熟悉的问题直接转化为熟悉的问题。
齐次化原理的来历呢，我认为同样是基于这样的思想。
我们希望处理非齐次的发展方程，将其转化为齐次的方程。之前在习题课上我们有简单尝试过，基本的变量代换和函数代换无法使得问题解决。从等价性上考虑，我们就要考虑，结合物理意义来处理这个问题。
下面简要说明：

- 弦振动方程：
  - 原始问题：
    弦初始状态静止，初速度为 0，从$t=0$时刻开始，在连续外力的作用下的振动
  - 怎样转化：
    利用微元法。核心想法是，把弦的振动分解为若干个位移的叠加。
    这些位移是由谁产生的呢？

我们把时间$0-t$分解为若干时间分片，将连续外力对应地分解为若干份，并且让每个分片足够小，让外力在这一个小时间段内，可以看成是不变的，即$f(\tau,x)$（τ时刻外力，同样也对应τ时刻之后的一小段时间分片内的外力）。然后呢，我们这样来分析弦的振动。
由冲量定理我们知道，在这个小时间段内，$f(\tau,x)$所产生的效果是使得弦产生了一个速度增量。
我们研究每一个小时间段的弦振动情况。
因为我们是分割时间片，分别讨论的问题是，只有这一时间片有一个外力提供振动的能量来源，即，外力是从这一时刻开始作用，并持续了一小个时间片。所以，在这一时刻前，是没有外力作用，也就没有位移。（可以理解为，我们使用叠加原理，对 f 进行拆分，初位移和初速度始终是保持原始状态，即齐次）
然后呢，我们应用冲量定理，这个时间片内外力的作用效果是，使得弦获得了一个初速度：
$v_\tau = f(\tau,x)\Delta\tau$
问题，就转化为了，一个在τ时刻初始位移为 0，初速度为v_τ的，自由振动的弦的振动方程（因为，这一个时间片的外力作用的效果已经体现在初速度上）
为啥原问题里没有后面的$\Delta\tau$呢，其实这对应了我们后面的积分处理。

为了更清楚地说明这个问题，这里呢，大致地画一下。

原问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), & x\in R,\ t>0 \\ u|_{t=0} = 0, & u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

基于叠加原理进行拆分：

这里，拆分对象是时间，即将在$[0,t]$上，连续作用的外力$f(t,x)$，在将时间拆分为若干片段$[t_i, t_i+\Delta t]$时，对应地转化为了：

第i段外力作用下：（记为τ时刻）

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(\tau,x), & x\in R,\ t>0 \\ w|_{t=0} = 0, & w_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

上述方程中，$f(\tau,x)$ 只持续了 $\Delta\tau$ 时间，由上述分析，问题可转化为：

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2 w_{xx} & (t>\tau,\ x\in R) \\ w|_{t=\tau}=0, & w_t|_{t=\tau}=f(\tau,x)\Delta\tau \end{cases}$$

最后呢，我们对这若干段进行求和：

$$\Rightarrow u=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau} w(t,x,\tau)$$

若记：$\hat{w}=w/\Delta\tau$

则：方程可写作：

$$\begin{cases} \hat{w}_{tt}=a^2 \hat{w}_{xx} & (t>\tau,\ x\in R) \\ \hat{w}|_{t=\tau}=0, & \hat{w}_t|_{t=\tau}=f(\tau,x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u=\lim_{\Delta\tau\to 0} w(t,x,\tau)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\hat{w}\cdot\Delta\tau$$

$$=\int_0^t \hat{w}(t,x,\tau)\,d\tau$$

这样我们就得到了齐次化原理对应的公式。

那么，我们总结一下：

$f(t,x)$：作用在弦上的连续外力

$\Rightarrow u(t,x)$ 弦的位移

将 $[0,t]$ 分为若干段，

$$f(t,x) \longrightarrow \sum f(\tau,x)$$

$$u(t,x) \longrightarrow \sum \underbrace{w(t,x,\tau)}_{\Downarrow}$$

外力在 $[\tau,\tau+\Delta\tau]$ 时间段内作用，所引起的弦的振动

$w(t,x,\tau)$ 满足：

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}+f(\tau,x) & (t>0,x\in R) \\ w|_{t=0}=0, \ w_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

冲量原理

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx} & (t>\tau,x\in R) \\ w|_{t=\tau}=0, \ w_t|_{t=\tau}=\underline{f(\tau,x)\Delta\tau} \end{cases}$$

（$[\tau,\tau+\Delta\tau]$ 内外力作用效果转化为：$t=\tau$ 时刻初速度：

$f(\tau,x)\Delta\tau$ ； $\Delta v=v|_{t=\tau}=f(\tau,x)\Delta\tau$ ）

然后我们作代换： $w = \breve{w}\Delta\tau$

$$\Rightarrow \begin{cases} \breve{w}_{tt} = a^2 \breve{w}_{xx}, & (t>\tau,\ x\in R) \\ \breve{w}|_{t=\tau} = 0, & \breve{w}_t|_{t=\tau} = f(\tau, x) \end{cases}$$

$$u = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum w(t,x,\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum \breve{w}(t,x,\tau)\cdot\Delta\tau$$

$$= \int_0^t w(t,x,\tau)\,d\tau$$

最后呢，解释一下 τ 是什么？

τ 呢，其实代表，我们对时间段 $[0, t]$ 分割后，任意一个小段所在时刻，