运筹学基础

by 鸢一折纸

二、线性规划及单纯形法

- 记得转化成**标准型**
- 可行解与最优解：满足约束条件的解为可行解，使目标函数达到最大的可行解为最优解
- 基和基变量
- 决策变量 x_j，价值系数 c_j，技术系数 a_{ij}，限额系数 b_i

> 普通单纯形法

- 找出/构造可行基：松弛变量、人工变量
- 基变换：先确定换入变量、再确定换出变量 (先竖着看再横着看)
  - 换入变量指这次变换之后成为基变量的；vice versa
  - 检验数 $max(\delta_j > 0)$；θ规则：$min(b_i / a_{ik} \mid a_{ik} > 0)$
- 解的情况 (调整顺序之后，前m个是基变量)
  - 最优解：$\sigma_j \leq 0$ (j为非基变量下标)，其中 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，即第j列的价值系数减去技术系数加权(基变量的价值系数)和
  - Important : 无穷多最优解：有非基变量检验数为0
  - 无界解：$\exists\, \sigma_{m+k} > 0$，且该列所有技术系数均为负数
- 单纯形表（略）
- **人工变量法**
  - 大M法：人工变量在目标函数中的价值系数为-M，人工变量必须换出
  - 两阶段法：
    1. 只考虑人工变量，构造含人工变量的目标函数和要求实现最小化 $min\ \omega = 0X + X_S$
       - 取 $min(\delta_j < 0)$, $min(\theta_k > 0)$
    2. 若得到最小值 $\omega_0 = 0$，则进行第二阶段
    3. 删去人工变量，并替换目标函数行的系数，再解一遍。。。
  - 无可行解：有人工变量没有换出
- **退化**：σ或θ 规则计算时，有两个以上的最小相同比值
  - Blend 法则
  - 选取 $c_j - z_j$ 中下标最小的 $\Rightarrow$ 换入变量
  - 选取 θ 比值中下标最小的 $\Rightarrow$ 换出变量
- 多余性：几何多余、数学多余、零变量

三、对偶理论与灵敏度分析

- **单纯形法的矩阵描述** 我不会...
  - 表示符号：松弛变量 X_S，目标函数中基变量系数 C_B，非基变量 C_N，新换入的变元的系数矩阵 P_k
  - 迭代后的单纯形表，各部分的数字都是用 B^{-1} 计算的，在初始单位矩阵的位置，经过迭代运算之后，就是 B^{-1} 的位置

> 单纯形法的矩阵计算

1. 初始化：人工、松弛 (初始基矩阵) 的逆 B^{-1}，$B^{-1}b$
2. 最优测试： $\sigma_N = c_N - c_B \cdot B^{-1}N$
3. 新的逆矩阵：用 $\left(-\frac{a_{1k}}{a_{lk}} \cdots \frac{1}{a_{lk}} \cdots -\frac{a_{mk}}{a_{lk}}\right)^T$ 取代对应单位矩阵的列，并右乘 B^{-1}，即得到新的 B^{-1}，$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1}$
4. 确定换入变量：$max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$
5. 确定换出变量：$\theta = min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i} \mid (B^{-1}P_k)_i > 0\right\}$
6. b 和 N 均直接从约束条件而非上次计算得

- 对偶问题
  - 对称形式：目标函数求极大值时，所有约束条件为≤号，变量非负；目标函数求极小值时，所有约束条件为≥号，变量非负
  - 对称性：
  - 弱对偶性：原问题的可行解 $\overline{X}$，对偶问题可行解 $\bar{Y}$，则 $C\overline{X} \leq \overline{Y}b$，取等时同时达到最优解
  - 对应关系如下：
  -

原问题	对偶问题
目标函数 max z	目标函数 min w
变量 $\begin{cases} n个 \\ \geq 0 \\ \leq 0 \\ 无约束 \end{cases}$	约束条件 $\begin{cases} n个 \\ \geq \\ \leq \\ = \end{cases}$
约束条件 $\begin{cases} n个 \\ \leq \\ \geq \\ = \end{cases}$	变量 $\begin{cases} n个 \\ \geq 0 \\ \leq 0 \\ 无约束 \end{cases}$
约束条件右边的项 $\vec{b}$	目标函数变量的系数 $\vec{c}$
目标函数变量的系数 $\vec{c}$	约束条件右边的项 $\vec{b}$

  - 无界性：原/对偶问题有无界解 $\Rightarrow$ 对偶/原问题无可行解
  - 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且目标函数值相等

- $\hat{Y}X_S=0$ 且 $Y_S\hat{X}=0 \Leftrightarrow \hat{X}$、$\hat{Y}$ 为优解，其中 $\hat{X}$、$\hat{Y}$ 分别为原问题、对偶问题的可行解
  - 原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解，详细的见下面👇
- 影子价格 这里我也不会...
  - 影子价格是根据资源在生产中作出的贡献而做的估价。它是一种边际价格，其值相当于在资源得到最优利用的生产条件下，资源每增加一个单位时目标函数的增加量
  - 影子价格反应资源转化成经济效益的效率，也反映了稀缺程度
  - 转 **灵敏度分析**

> 对偶单纯形法

- 关于对偶单纯形法
- - 在单纯形表中进行迭代时，在b列中得到的是原问题的基可行解，而检验数行是对偶问题的基解 (不一定是可行解)
  - 通过逐步迭代，当在检验数行得到的对偶问题的解也是可行解的时候，就是最优解，即原问题和对偶问题都是最优解
  - 优点是原问题的初始解不一定是基可行解，可以从非基可行解开始迭代
- 计算步骤：
  - 从具有对偶可行性的对偶基可行解出发，当右端 $b^*=B^{-1}b\geq 0$ 时，原问题也获得了基可行解，因而得到最优解，具体如下：
  - 对线性规划问题进行变换，使列出的初始单纯形表中所有检验数 $\sigma_j\leq 0$，即对偶问题为可行解
  - 检查 b 列，若都非负，又检验数为非正，则得到**最优解**；反之 continue
  - 确定换出变量：按照 $min\{(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i<0\}=(B^{-1}b)_l$ 来确定 x_l 为换出变量
  - 确定换入变量：检查 x_l 所在行的系数，若都大于0，则**无可行解**；反之按照θ规则 $\theta=min(\frac{c_j-z_j}{a_{lj}} \mid a_{lj}<0)=\frac{\sigma_k}{a_{lk}}$ 来确定换入变量
  - 单纯形迭代
- 注意：
  - 对偶单纯形法是先确定换出变量，后确定换入变量，与普通的相反
  - 对偶单纯形法虽然简化计算，但是大多数情况下很难找到一个初始可行基
  - 对偶单纯形法不是用来求对偶问题的

> 灵敏度分析

- 灵敏度分析
  - 是研究分析参数 c_j,b_i,a_{ij} 的波动对最优解的影响 **程度**
  -

原问题	对偶问题	结论或继续计算的步骤
可行解	可行解	表中的解仍未可行解
可行解	非可行解	用单纯形法迭代求最优解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法迭代求最优解
非可行解	非可行解	引入人工变量，编制新的单纯形表求最优解

四、运输问题

- 性质
  - 可行解特性、成本 (线性) 假设、整数解性质 (只要供应量和需求量都是整数，任何有可行解的运输问题必然有决策变量都是整数的最优解)

> 表上作业法

- 本质
  - 本质是单纯形法
  - 表中每一个格子是一个决策变量，同样会有换入变量、换出变量，只是形式上不太一样
- 步骤
  - 找出初始基可行解，m ✖ n的表给出m+n+1个值，称为数字格
  - 求非基变量的检验数，判断是不是最优解
  - 不是就调整
- 找出初始基可行解
  - 西北角法
  - 最小元素法：就近供应，从最小的元素开始，然后次小...
  - 伏格尔法：
    - 计算行差和列差 (最小运费和次小运费的差额)
    - 选择基变量：行、列差里面最大的，所在那一行/列的最小元素 x_{ij}
    - 确定基变量的值：$x_{ij} = min(a_i, b_j)$
    - 更新产销平衡表，划去为0的
- 最优解的判别
  - 所有非基变量检验数非负时为最优解
- 求检验数
  - 闭回路法
    - 遇到数字格转弯
    - 闭回路对应于线性组合
  - 位势法
    - 设 $u_1 = 0$，推导出剩下基变量的 u_i、v_j，$c_{ij} = u_i + v_j$
    - 检验数 $\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$
- 调整
  - 闭回路调整法
    - 若有两个或以上的负检验数时，选最小的为换入变量
    - 闭回路上 (-1) 的 x_{ij} 最小的为换出变量
    - 加加减减
- 特殊情况
  - 无穷多最优解：某个非基变量检验数为0
  - 退化：确定初始可行基的时候不够，需要补0，在 (确定过程中) 同时被划去的行和列上；闭回路调整出现同样问题，还是补0 (表明还是基变量)

- 产销不平衡
  - 添加假想产销地，所有运费为0
- 各地带有弹性且供不应求 (最低XX，最高YY)
  - 根据实际需求量将销地拆开为必须满足和可选满足，并增加假想产地，到可选供应地运价为0，到刚需地运价为M，实际产地运价到两销地相同

五、线性目标规划

- 目标规划与线性规划
  - 目标规划对于每个限制方程添加了正负偏差变量 d_i^+、d_i^- $(-d^+ + d^-)$
  - 正偏差分量表示决策值超过目标值的部分，vice versa
  - 绝对约束与目标约束 (必须满足和可允许误差)
  - 优先因子 (权系数)
  - 目标规划的目标函数
    - 恰好达到 $min\ z = f(d^+ + d^-)$
    - 要求不超过 $min\ z = f(d^+)$
    - 要求超过 $min\ z = f(d^-)$
- 求解
  - 图解法
  - 单纯形法
    - 检验数行变为检验数表，每个优先级的单独一行，当且仅当高优先级的检验数行对应列的检验数为0时开始考虑下面的检验数
    - 对于每一行，检查改行中是否存在负数，**且比他高优先级的对应列都是0**，有就取最小的 (+blend规则) 为换入变量
    - 由 θ 规则确定换出变量，**有一样的选有最高优先级的**
    - 有非基变量的检验数为0时，有多重解

六、整数线性规划

- LP松弛问题：不考虑整数/0-1限制条件的原整数线性规划问题
- 枚举……
- 分支定界解法 (分治思想)
  - 求LP-松弛问题的最优解 $\overline{z_0}$
  - 观察法得到整数线性规划的一个整数可行解 $\underline{z_0}$
  - 分支：$\overline{z_0}$ 的解里面找一个非零的分支变量 $x_j = b_j$，分支 $x_j \le [b_j]$ 和 $x_j \ge [b_j + 1]$
  - 定界：所有分支解里面的最大值为新上界，整数解里面最大值为新下界，kill掉上界比新下界小的分支
- Gomory割平面法
  - 求LP松弛问题的最优解

- 割平面法指出怎样找适当的割平面，$s.t.$ 切割后的可行域，有一个整数坐标的极点就是问题的最优解
- 在最后一张单纯形表 (最优解) 里面，取一个为分数值的**基变量** x_i，有 $x_i + \sum_k a_{ik} x_k = b_i$，其中 $i \in Q$ (基变量下标集合)，$k \in K$ (非基变量下标集合)
- 将 b_i 和 a_{ik} 都分解为整数部分和小数部分 $b_i = N_i + f_i$，$a_{ik} = N_{ik} + f_{ik}$，其中 $0 < f < 1$，如 $-0.45 = -1 + 0.55$
- 将 $f_i - \sum f_{ik} x_k \leq 0$ 增加为约束条件，并增加松弛变量
- 利用对偶单纯形法解 (此时为非可行解)
- 一些说明
  - 略、略
  - 重要假设：所有变量 (包括松弛变量和剩余变量) 都是非负整数
    - 在引入松弛变量和剩余变量之前，在方程两边乘以适当的常数，使得所有系数都是整数

- **0-1整数线性规划**
  - 引入问题
  - 隐枚举法：
    - 增加过滤条件：试出来一个可行解组 X，然后添加目标方程≥现在的z值，并将其置为首要条件 (P0)
    - 应该注意的是，一般重拍目标函数中 x_i 的顺序，使得系数是递增的

> 指派问题

- 匈牙利算法 (莫名图论)
  - 变换系数矩阵，使得各行各列中都有0元素
  - 试指派
    - 从只有一个0元素的行/列开始，给这个元素画圈圈 ◎，同时将该列其他0划掉记为 ø
    - 给只有一个0元素的列/行的0画圈圈，其他0划掉
    - 重复以上两步，选0元素最少的行/列开始标
    - 若 ◎ 的个数等于矩阵阶数，则得到最优解，否则：
  - 作最少直线覆盖
    - 没有 ◎ 的行打 $\surd$
    - 打 $\surd$ 的行中 $\varnothing$ 所在列打 $\surd$
    - 对打 $\surd$ 的列中 ◎ 所在的行打 $\surd$
    - 重复2、3，最终没有打对勾的划线
  - 第四步
    - 在没有被直线覆盖的部分找到最小的元素
    - 然后打 $\surd$ 的各行减去这个数，各列加上这个数
    - 重复第二步
- 指派问题的变异
  - 对于极大化，令 $b_{ij} = M - c_{ij}$，得到新的系数矩阵
  - 不可接受任务，对应交叉节点效率为M

- 供需不平衡：虚拟单位，对应行/列效率为0

十三、排队论

- Kendall记号：X/Y/Z/A/B/C
  - 相继顾客到达间隔时间分布 / 服务时间分布 T / 服务台个数 / 系统容量限制 N / 顾客源数目 m / 服务规则
  - 分布：(负)指数分布 M / 确定型 D / k阶埃尔朗分布 Ek / 一般相互独立的时间间隔分布 GI / 一般服务时间的分布 G
- 指标：
  - 平均到达率：单位时间产生事件的速率 λ
  - 平均服务率：单位时间能被服务完成的顾客数 $\mu = 1/ET$
  - 工作强度：$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
  - 有效到达率：在考虑容量或者顾客源有限的情况下的实际到达率 λ_{eff}，在 $A = B = \infty$ 的情况下 $\lambda = \lambda_{\text{eff}}$
  - 队长：在系统中的顾客数，期望为 L_S
  - 队列长：排队等待的顾客数，期望为 L_q
  - 逗留时间：顾客在系统中的停留时间，期望为 W_S
  - 等待时间：顾客在系统中的排队时间，期望为 W_q
  - 忙期：顾客到达服务机构到服务机构再次空闲的时长
  - 系统的状态：系统中顾客数 n
  - 在时刻 t，系统状态为 n 的概率：$P_n(t)$
  - 损失率 P_N：被拒绝排队的顾客平均数 λP_N
- 分布：
  - 泊松流：不需要用概统假设检验的方式去检验…
  - 埃尔朗分布
- Little 公式 (适用于顾客源稳定)
  - $L_S = \lambda_{\text{eff}} W_S$
  - $L_q = \lambda_{\text{eff}} W_q$
  - $W_S = W_q + 1/\mu$
  - $L_S = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$

> 3 ✖ 2 ➕ 1 种模型

1. 单队、单服务台
   1. 标准的 M/M/1 模型
   2. 容量有限制 M/M/1/N/∞：$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_N)$
   3. 顾客源有限 M/M/1/∞/m：$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(m - L_S)$
2. 单队、并列多服务台 $\rho = \lambda / c\mu$
   1. 标准的 M/M/c：$L_q = \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0$
   2. 容量有限制 M/M/c/N/∞：$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_N)$
      - c=N (即时制)：$L_q = 0$

3. 顾客源有限 M/M/c/∞/m：$\lambda_{eff} = \lambda(m - L_S)$，$L_S = \sum_{n=1}^{m} nP_n$

3. 一般服务时间
    - 服务时间任意分布 M/G/1
        - P-K 公式：$\rho = \lambda \cdot ET < 1$，$L_S = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 VarT}{2(1-\rho)}$
    - 定长服务时间 M/D/1
    - 埃尔朗服务时间 M/Ek/1

- 解题套路：求出来一个，然后Little公式

十四、存储论

我觉得画出货物存储量曲线是有帮助的…

> 5种模型

1. 确定性存储模型
    1. 不允许缺货，生产时间很短
    2. 不允许缺货，生产需一定时间
    3. 允许缺货，生产时间很短
    4. 允许缺货，生产需一定时间
    5. 价格有折扣/或者阶梯增长的存储问题
2. 随机性存储模型
    - 不考，我没看

- 参数
    - 订购费用 C_3，每一次都有，固定值
    - 补充存储：生产批量 Q，生产时间 T，生产速度 P
    - 消耗存储：需求速度 R，缺货损失 C_2，最大缺货量 B
    - 存储：存储的最高数量 S，单位存储费 C_1
- 解题过程
    - 根据供求关系、模型、所需参数，列出单位时间总费用 (平均费用) 满足的方程 $C(t)$
    - $C(t)$ 的含义是一个订货-消耗周期内，所需各种费用的平均值
    - 求导得到极值点 $t = t_0$ (分段函数另外讨论)，也就是最佳周期
    - 由 **E.O.Q** 公式得到 $Q_0 = R \times t_0$