定解条件与定解问题

波动方程的定解条件

1. **初始条件**：弦在初始时刻 $t=0$时位移和速度

$$u(0,x)=\varphi(x),\qquad u_t(0,x)=\psi(x),\qquad 0\le x\le l$$

这里 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为已知函数

2. **边界条件**：一般来说有三种

（1）端点位置变化已知：

$$u(t,0)=g_1(t),\qquad u(t,l)=g_2(t),\qquad t\ge 0$$

特别地，当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，称弦具有固定端.

（2）端点位置受到变化且垂直于弦线的外力：

$$T_0u_x(t,0)=g_1(t), \qquad T_0u_x(t,l)=g_2(t), \qquad t\geq 0$$

其中 $T_0u_x(t,0)$, $T_0u_x(t,l)$ 为弦线左（右）端处张力在 u轴方向的分量.

当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时，称为弦具有自由端.

（3）端点位置与弹性物体相连：

弦两端分别连接在弹性系数为 $K_1,K_2\,(>0)$ 的两个弹簧上，弹簧的自然长度分别为 l_1,l_2

同时，这两个弹簧的下端连接在由函数 $Q_1(t),Q_2(t)$ 所表示的位置上.

此时，弹簧实际的伸缩量为 $u(t,0)-Q_1(t)-l_1$. 在区间 $[0,\Delta x]$ 上由Newton定律有

$$T_0u_x(t,\Delta x)-k_1(u(t,0)-Q_1(t)-l_1)+f_0\nabla x=\rho\nabla xu_{tt}$$

令 $\Delta x \to 0$ 可得 $T_0 u_x(t,0) - k_1(u(t,0) - Q_1(t) - l_1) = 0, t \geq 0$

或写为：$u_x(t,0) - \sigma_1 u(t,0) = g_1(t), t \geq 0$

类似可得 $x = l$ 端边界条件为

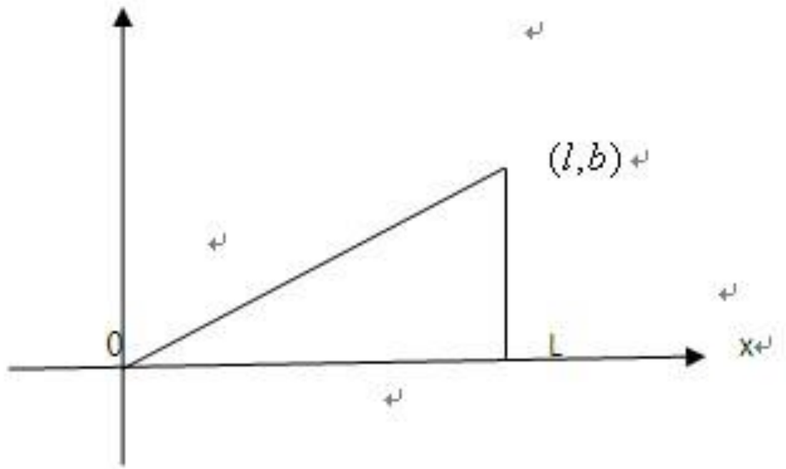
$$u_x(t,l) + \sigma_2 u(t,l) = g_2(t), t \geq 0$$

因此，在具有弹性支撑的边界，弦的边界条件为：

$$u_x(t,0) - \sigma_1 u(t,0) = g_2(t), t \geq 0$$
$$u_x(t,l) + \sigma_2 u(t,l) = g_2(t), t \geq 0$$

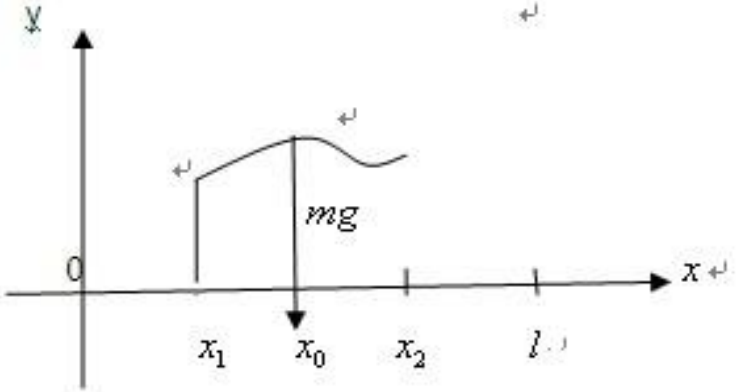
例：长为 l 的均匀细弦，左端固定，另一端被拉离平衡位置到 (l,b) 静止，然后放手让其振动，写出定解问题.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & 0<x<l,t>0 \\ u(t,0)=0,\ u_x(t,l)=0 & t\ge 0 \\ u(0,x)=\dfrac{b}{l}x,\ u_t(0,x)=0, & 0\le x\le l \end{cases}$$



例：长为 l 的均匀细弦，两端固定，初始位移为 $\varphi(x)$，初始速度为零，在某点 $x_0\in(0,l)$ 处挂一小球，推导其定解问题.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+(-mg)\delta(x-x_0) & 0<x<l,\ t>0 \\ u(t,0)=0,\ u(t,l)=0 & t\ge 0 \\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=0, & 0\le x\le l \end{cases}$$



热传导方程的定解条件

1. **初始条件**：导体在初始时刻 $t=0$ 时温度分布

$$u(0,x)=\varphi(x)$$

这里 $\varphi(x)$ 为已知函数

2. **边界条件**：通常分三类

（1）端点处温度已知：

$$u|_S=\varphi(t,x,y,z)\big((x,y,z)\in S\big)$$

（2）已知边界处向外流出的热流密度 $q(t,x,y,z)$：

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_S = -\frac{q(t,x,y,z)}{k}$$（$\vec{n}$ 为边界的外法向量）

$q>0$ 表示有热量流出，$q<0$ 表示有热量流入，$q=0$ 表示绝热.

（3）边界位置与外界有热交换：

h：热交换系数；θ：外界温度

$$\begin{cases} q = -k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_s & \text{Fourier热传导定律} \\ q = h(u-\theta) & \text{Newton热传导定律} \end{cases} \Longrightarrow \left(k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + hu\right)\Big|_s = h\theta$$

对一维热传导问题，边界为两端点. 此时：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{x=0} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{x=l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} \end{cases}$$

Possion方程

Possion方程第一边值问题：$\begin{cases}\Delta u = f(M) & (M \in V) \\ u|_s = \varphi(M)\end{cases}$

物理意义：区域V之内有电荷密度为$-f(M)\varepsilon_0$的电荷分布，表面限定电势为$\varphi(M)$，

求V之内的电势分布函数$u(M)$.

边界条件：我们通常只考虑第一类边界条件（限定边界上的电势）：

$$u|_S = \varphi(x,y,z) \qquad ((x,y,z) \in S)$$