中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 B 期末复习试卷

数理方程 **08** 班制作，仅供学习交流使用

特别说明：这份复习试卷由作业题目中的易错问题组成，易错点分析详见每周的批改作业反馈。

一、求解下列 $Cauchy$ 问题。

（1）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u \\ u|_{t=0} = \varphi(r) \\ u_t|_{t=0} = \phi(r) \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x)(-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

其中 $a \neq 0$，且 a 为常数。

二、求解下列固有值问题

（1）

$$
\begin{cases}
y'' - 2ay' + \lambda y = 0 (0 < x < 1, a \text{ 为常数}) \\
y(0) = y(1) = 0;
\end{cases}
$$

（2）

$$
\begin{cases}
(r^2 R')' + \lambda r^2 R = 0 (0 < r < a) \\
|R(0)| < +\infty, R(a) = 0
\end{cases}
$$

提示：令 $y = rR$.

三、求解圆内狄氏问题的解

（1）

$$
\begin{cases}
\Delta_2 u = 0 (r < a) \\
u|_{r=a} = A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta
\end{cases}
$$

（2）

$$
\begin{cases}
\Delta_2 u = 0 (r < a) \\
u_r(a, \theta) - hu(a, \theta) = f(\theta) (h > 0)
\end{cases}
$$

四、利用分离变量法求解定解问题

（1）

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,x) = x(l-x), u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = 0 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 (a < r < b) \\ u(a,\theta) = u_1, \frac{\partial u(b,\theta)}{\partial n} = u_2 \end{cases}$$

（3）

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \operatorname{sh} x (0 < x < l, t > 0) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

五、设圆柱的半径为 R, 高为 h, 侧面在温度为零的空气中自由冷却，下底温度恒为零，上底温度为 $f(r)$, 求柱内温度分布。

六、特殊函数的性质应用

（1）计算积分

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^{2}\right)\left[p_{n}'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x$$

（2）把函数 $f(x)=|x|$ 按勒让德函数系展开

七、利用积分变换法求解定解问题

（1）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(-\infty < x < +\infty, y > 0) \\ u(x,0) = f(x) \\ \text{当} x^2 + y^2 \to +\infty \text{ 时}, u(x,y) \to 0 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad x > 0, y > 0 \\ u|_{y=0} = f(x), \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad u(x,y) \text{ 有界}. \end{cases}$$

提示：利用余弦变换。

八、利用拉普拉斯方程的基本解求解下列方程的基本解

（1）

$$u_{xx} + \beta^2 u_{yy} = 0(\beta > 0, \beta \text{ 为常数})$$

（2）

$$\Delta_2 \Delta_2 u = 0$$

参　考　公　式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$
\begin{aligned}
\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}
$$

2. Legendre 方程: $\left[\left(1-x^2\right)y'\right]'+\lambda y=0$; n 阶 Legendre 多项式：

$$
P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n
$$

Legendre 多项式的母函数: $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, |t|<1$
Legendre 多项式的模平方: $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$
Legendre 多项式满足的递推公式 ($n\geq 1$)

$$
\begin{aligned}
&(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\\
&nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0\\
&nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0\\
&P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)
\end{aligned}
$$

3。3. ν 阶 Bessel 方程: $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$;$\nu$ 阶 Bessel 函数:
$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$
Bessel 函数的的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方分别为

$$
\begin{aligned}
N_{\nu 1n}^2 &= \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right)\\
N_{\nu 2n}^2 &= \frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right)\\
N_{\nu 3n}^2 &= \frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{3n}^2}+\frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)
\end{aligned}
$$

Bessel 函数满足的微分关系和递推公式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}
\end{aligned}
$$

4. 傅里叶变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$; 傅里叶逆变换

$$
\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}\lambda;\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}
$$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t) e^{-p t} \mathrm{d} t, p=\sigma+i s$

$$L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha} ; L\left[t^\alpha\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=\delta(M)$ 的基本解：
二维, $U(x, y)=-\frac{1}{2 \pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x, y, z)=-\frac{1}{4 \pi r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7. Green 第一公式: $\iint_{\partial V} u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d} S=\iiint_V u \Delta v \mathrm{d} V+\iiint_V \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d} V$
Green 第二公式: $\iint_{\partial V}\left(u \frac{\partial v}{\partial n}-v \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d} S=\iiint_V(u \Delta v-v \Delta u) \mathrm{d} V$