高斯函数的傅里叶变换

这类特殊函数的傅里叶变换的一种表达形式就是之前同学提出来的那个积分表达式，这个在留数定理部分我们学习过，在那里是通过构造特殊围道应用留数定理求解，从思路上讲，构造围道存在一定难度。所以，在这里和大家分享一种简单的处理方法，但只适用于这类特殊函数，即高斯函数。

高斯函数的 FT：

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{FT} F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

观察 $f(x)$：$f'(x)=-xf(x)$ （e指函数求导特殊性）.

利用 FT 的频域微分性质：$i\lambda F(\lambda)=-iF'(\lambda)$

整理以上2式：

$$\begin{cases} f'(x)+xf(x)=0 \\ F'(\lambda)+\lambda F(\lambda)=0 \end{cases}$$

2个常微分方程形式相同

则可知：$F(\lambda)$ 满足的方程也：

存在形如：$F(\lambda)=K\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ 的解：

（因为：$f(x)$ 满足的方程有解 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$）

$\Rightarrow$. 由 $F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ominus dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$

(记: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$;

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \iint\limits_{x,y\in R} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\,dr \quad \left(|J| = r\right)$$

$$= 2\pi.$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2\pi} \;)$$

$$\Rightarrow f(\lambda) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

一般地: $e^{-ax^2} \xrightarrow{FT} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$

奇函数对称区间积分为0

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} (\cos bx + i \sin bx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-ibx}\, dx \overset{(FT)}{=\!=} \frac{1}{2} \cdot F(b)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$