薄膜二维振动数理方程的推导与求解

张俊生

（青海民族学院 电子工程与信息科学系，青海 西宁 810007）

摘　要：偏微分方程经常出现在物理学、工程技术和其它科学的许多分支中。在现行的数学物理方法教材中，数理方程只涉及到一维的弦振动方程、杆振动方程和热传导方程等，对二维薄膜的振动只作了扼要的介绍。试图对薄膜振动方程加以推导和求解。

关键词：薄膜；振动；微分方程；推导；求解

中图分类号：O411.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1008-3871(2006)06-0029-03

1　问题的提出

在现行的数学物理方法教材中，数理方程只涉及到一维的弦振动方程、杆振动方程和热传导方程等，对二维薄膜的振动只作了扼要的介绍。作为数学物理方法教学的补充与完善，对薄振动方程加以推导和求解是很有必要的。

2　偏微分方程的建立（导出）

建立（导出）数理方程一般要经历三个步步骤：先从所研究的系统中划出一小部分，分析邻近部分与这一小部分的相互作用；然后根据物理学的规律（如 *Newton* 第二定律、能量守恒定律、奥——高定律等），以算式表达这个作用；最后化简、整理、即得到所研究问题满足的偏微分方程[1]。

薄振动方程在数学物理的许多问题中出现，在导出薄膜振动方程之前，先作简化假设：

（1）膜是柔软及有弹性的，即它不能抵抗弯矩，所以在任何时刻它的张力总是在膜的切平面内；（2）膜的每一块元素都没有伸张变形，因此根据胡克定律，张力是常数；（3）膜的重量与膜所受张力相比很小；（4）膜的偏移与膜的最小直径相比很小；（5）位移后的膜在任一点上的斜率与1相比很小；（6）膜只作横振动。

建立如下图的坐标系，考察膜的一块微小元素。因为偏移与斜率都很小，这块元素的面积可近似等于 $\triangle x\triangle y$。如果 T 为每单位长度上的张力，则作用在这块元素各边上的力是 $T\triangle x$ 和 $T\triangle y$。作用在膜的这块元素上的垂直方向的力是

$$T\triangle x\sin\beta - T\triangle x\sin\alpha + T\triangle y\sin\delta - T\triangle y\sin\gamma \qquad (1)$$

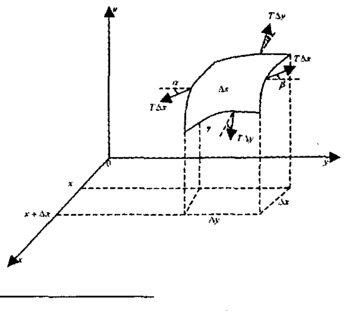
因为斜率很小，所以 $\sin\beta \approx \tan\beta \approx \beta, \sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$

$\sin\delta \approx \tan\delta \approx \delta, \sin\gamma \approx \tan\gamma \approx \gamma$　式(1)可变为

$$T\triangle x(\tan\beta - \tan\alpha) + T\triangle y(\tan\delta - \tan\gamma) \qquad (2)$$

根据 *Newton* 第二定律有

$$T\triangle x(\tan\beta - \tan\alpha) + T\triangle y(\tan\delta - \tan\gamma) = \delta\triangle s u_{u} \qquad (3)$$



收稿日期：2006—04—18

作者简介：张俊生（1948—），男，陕西户县人，教授。研究方向：物理学科教学论。

其中δ为面密度,$\Delta s = \Delta x \Delta y$是这块元素的面积。$u_{tt}$在所考察的区域中的某一点上取值。由微积分学可知

$$\tan\alpha = u_y(x_1, y)$$
$$\tan\beta = u_y(x_2, y + \Delta y)$$
$$\tan\delta = u_x(x, y_1)$$
$$\tan\gamma = u_x(x + \Delta x, y_2)$$

其中x_1和x_2是x在x和$x + \Delta x$之间的值,y_1和y_2是y在y和$y + \Delta y$之间的值。把这些值代入(3)式得

$$T\Delta x[u_y(x_2, y + \Delta y) - u_y(x_1, y)] + T\Delta y[u_x(x, y_1) - u_x(x + \Delta x, y_2)] = \delta \Delta x \Delta y u_{tt} \quad (4)$$

(4)式两边同除以$\delta \Delta x \Delta y$,得

$$\frac{T}{\delta}\left[\frac{u_y(x_2, y + \Delta y) - u_y(x_1, y)}{\Delta y} + \frac{u_x(x, y_1) - u_x(x + \Delta x, y_2)}{\Delta x}\right] = u_{tt} \quad (5)$$

令$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$并对(5)式取极限,得

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad (6)$$

或记为$u_{tt} = a^2 \Delta_2 u$　(6)′

其中$a^2 = \dfrac{T}{\delta}$　(6)式称为膜自由振动的偏微分方程。如果薄膜有横向外力作用,记单位面积上的横向外力为$F(x, y, t)$,则薄膜的受迫振动方程为

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t) \quad (7)$$
$$u_{tt} - a^2 \Delta_2 u = f(x, y, t) \quad (7)'$$

其中$f(x, y, t) = \dfrac{F(x, y, t)}{\delta}$为作用于单位质量上的横向外力。

3　方程的求解举例[2]

现对无限大薄膜的二维受迫振动一般方程加以求解。

假设定解问题为,(假设广义位移为v)。

$$\left\{\begin{array}{ll} v_{tt} - a^2(v_{tt} + v_{yy}) = c^2 v & (-\infty < x, y < \infty, t > 0) \\ v(x, y, 0) = \varphi(x, y) & v_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \end{array}\right\} \quad (1)$$

其中,c为已知常数。

解:分析 — 这方程不是标准的波动方程

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \qquad (-\infty < x, y, z < \infty, t > 0)$$

必须使之变为标准的波动方程,从而好用 *Poisson* 公式求解。

令$u(x, y, z, t) = e^{\frac{c}{a^2}} v(x, y, t)$,于是

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = e^{\frac{c}{a^2}} v_{tt} \\ u_{xx} = e^{\frac{c}{a^2}} v_{xx} \\ u_{yy} = e^{\frac{c}{a^2}} v_{yy} \\ u_{zz} = \dfrac{c^2}{a^2} e^{\frac{c}{a^2}} v \end{array}\right\} \quad (2)$$

将(2)一并代入原定解问题(1)式得

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$
$$u|_{t=0} = e^{\frac{c}{a^2}} \varphi(x, y)$$
$$u|_{t=0} = e^{\frac{c}{a^2}} \psi(x, y)$$　利用 *Poisson* 公式

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi(M')}{at} ds + \iint_{S_{at}^M} \frac{\psi(M')}{at} ds\right]$$求解得

$$v(x,y,t) = e^{-\frac{c}{a^2}}u(x,y,z,t)$$

$$= e^{-\frac{c}{a^2}} \cdot \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M}\frac{e^{\frac{c}{a^2}}\varphi(x',y')}{at}ds + \iint_{S_{at}^M}\frac{e^{\frac{c}{a^2}}\psi(x',y')}{at}ds\right]$$ 若 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 的具体形式给出,则可求出具体问题的定解问题的解。

参考文献:

[1] 梁昆淼.数学物理方法[M].北京:高等教育出版社,1998.

[2] Tyn Myint. U. 徐元钟译.数学物理中的偏微分方程[M].上海:上海科学技术出版社,1983.

(责任编辑:李晓霞)

Inferential Reasoning and Solution of Thin film 2D Vibration M & P Equation

ZHANG Jun - sheng

(Department of Electronic Engineering and Information Science,

Qinghai Nationality University, Xining 810007, Qinghai)

Abstract: Sub - differential equation often shows up in many branches of physics, engineering techniques and other sciences. However, the current teaching materials of mathematical equations only include 1D string vibration equation, pole vibration equation and heat conductivity equation while only a brief introduction is given to 2D thin film vibration. This paper is an attempt to give inferential reasoning and solution to thin film vibration equation.

Key words: membrance; librate; differential eguation; guide; bispel

(上接第 26 页)

$$= \frac{x_2 - x_1}{2}f''(\xi)(\xi_1 - \xi_2) > 0$$

这里 $\left(x_1 < \xi_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \xi_2 < x_2\right)$, $(\xi_1 < \xi < \xi_2)$

例 5 设 $f(x)$, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f'(x)$ 在 (a,b) 内存在,如 $f(a) = f(b) = 0$,且有 $c \in (a,b)$,使得 $f(c) < 0$,证明在 (a,b) 内存在 ξ,使 $f'(\xi) > 0$

证明 分别在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上应用中值定理,得

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi_1) \qquad (a < \xi_1 < c)$$

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(\xi_2) \qquad (c < \xi_2 < b)$$

从而 $f'(\xi_1) = \frac{f(c)}{c - a} < 0$, $f'(\xi_2) = \frac{-f(c)}{b - c} > 0$

再将 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上用中值定理,断定在内存在 (ξ_1, ξ_2) 内存在 ξ,使

$$f'(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} > 0$$

参考文献:

[1] 刘玉琏,傅沛仁.数学分析讲义(上)[M].北京:高等教育出版社,1992.

[2] 吉林大学数学系.数学分析[M].北京:人民教育出版社,1978.

(责任编辑:王瑞斌)