

数理逻辑 · 第一次小测
考试时间：90 分钟 满分：100 分

一. (21 分) 判断并写出判断依据。

1. 任何命题符号是公式。
2. 不是所有公式都有等值主析取范式。
3. 对任意 p , 不存在 Γ 使得 $\Gamma \vdash p$ 且 $\Gamma \vdash \neg p$ 。
4. 对所有解释 I : $I((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) = t$, 则 p 与 q 逻辑等值。
5. 反证律和归谬律可相互证明。
6. 已被证明的公理, 定理, 定律具有普适性, 在任何系统都能运用。
7. 在 L 中, $\Gamma \vdash p$ 是可判定的。

答: 1. 对 (称为原子公式),
2. 对 (若公式是矛盾式, 则没有等值主析取范式),
3. 错 (若 Γ 是不相容的, 则对任何 p , $\Gamma \vdash p$),
4. 错 (中间的符号是合取不是析取),
5. 对 (结合双否律可证明),
6. 错 (课本 28 面, 有些系统不承认 L3 和反证律)
7. 否

二. (5 分) 简答题。

L 的内定理和定理有什么区别

答: 若存在 p 的一个形式证明, 则称 p 是可证的, 即 p 为 L 的一个内定理

三. 证明题。

1. (20 分) 直接证明。
 - i. $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), q\} \vdash p \rightarrow r$
 - ii. $\{p \rightarrow (q \rightarrow r)\} \vdash (((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r)$
2. (20 分) 简化证明。
 - i. $\vdash (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$
 - ii. $\vdash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow p)$

答:
(1). i
1. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ L_1
2. q
3. $p \rightarrow q$ $MP1, 2$
4. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
5. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ L_2
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ $MP4, 5$
7. $p \rightarrow r$ $MP3, 6$
(1).ii

1. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ L1
 2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 已知
 3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ L2
 4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 2, 3, MP
 5. $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ L1
 6. $q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ 4, 5, MP
 7. $(q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)))$ L2
 8. $(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ 6, 7, MP
 9. $q \rightarrow (p \rightarrow r)$ 1, 8, MP
 10. $(q \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow r))$ L2
 11. $(q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow r)$ 9 10, MP
 12. $((q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow r))$ L2
 13. $((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow r)$ 11 12, MP
 14. $((((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow r)) \rightarrow (((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))) \rightarrow (((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r))$ L2
 15. $((((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (((q \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r))$ 13, 14, MP
- (2).i
依演绎定理, 只需证 $\{\neg p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow q\} \vdash p$,
 $\{\neg p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow q, \neg p\} \vdash \neg q$, 且
 $\{\neg p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow q, \neg p\} \vdash q$
 依反证律得 $\{\neg p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow q\} \vdash p$, 得证。
- (2).ii
1. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
 2. $(\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q))$ L2
 3. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ 1 2, MP
 4. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ L3
 5. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow p)$ 3 4 HS

四. (18 分) 求析取合取范式。

设 $A = p_0 \vee (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3))$, $B = \neg(p_1 \wedge \neg p_0 \wedge (p_3 \rightarrow \neg(\neg p_2 \rightarrow p_0 \wedge \neg p_0)))$

1. 求 A 的合取范式。
2. 求 B 的析取范式。
3. 试问 A 与 B 是否逻辑等价? 证明你的结论。

答: 1. 答案 $(p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee p_3)$
 2. 答案 $p_0 \vee \neg p_1 \vee (p_3 \wedge p_2)$
 3. 是

五. (16 分) 判断下面的公式是重言式或矛盾式或偶然式。

1. $((p_1 \wedge (\neg p_2)) \wedge (p_1 \rightarrow (\neg p_2)))$
2. $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$

答: 1. 偶然式
 2. 重言式