数理方程B复习大纲

第一章：数学物理中的偏微分方程

1、偏微分方程定义以及简单的偏微分方程的通解求解.

2、理解波动方程、热传导方程、Poison方程和Laplace方程的物理背景，第一、二、三类边界条件、初始条件的物理解释.

3、由具体的物理问题写出其相应的定解问题，即泛定方程和定解条件（此不作为考试要求）.

4、熟练掌握利用d′Alembert公式计算一维无界的弦振动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解的d′Alembert公式：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+at) + \phi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

其次，对于半无界弦的振动问题，要能够根据所给的定解条件对$\phi(x)$，$\psi(x)$作适当的奇延拓($u(0,t) = 0$)或偶延拓($u_x(0,t) = 0$)，转化为无界弦的问题，从而再由d′Alembert公式给出解的表达式.

5、灵活应用叠加原理与齐次化（冲量）原理.

第二章：分离变量法

1. 理解与掌握分离变量法的基本思想、方法、条件、求解步骤.

2. 能用分离变量法熟练求解一维有界问题、球形域（圆盘）上的Dirichlet问题$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad M \in V \\ u|_{\partial V} = \phi(M) \end{cases}$

对一维有界问题，应掌握下列三种情况的处理$\Big($**在此仅以**一维波动(弦振动)方程加第一类边界条件为例，逐步深入$\Big)$:

（1）齐次方程、齐次边界.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \phi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

解法：分离变量并利用边界条件确定固有函数系，将解表示为级数，然后利用初始条件确定系数.

（2）非齐次方程、齐次边界.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0,\ 0 < x < l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \phi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

解法I: 级数法. 首先利用其所对应的齐次方程、齐次边界条件来确定固有函数系，从而得其形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

然后把自由项$f(t,x)$ 按照相应的固有函数系展开并代入到原方程中去，通过比较系数确定$T_n(t)$—-此处要解一系列关于t的非齐次常微分方程，通常会用到Laplace变换法.

解法II: 由叠加原理, 将原问题的解归结为w与v的求解，且$u = w + v$:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < l \\ w(t,0) = w(t,l) = 0 \\ w(0,x) = \phi(x),\ w_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \quad \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, 0 < x < l \\ v(t,0) = v(t,l) = 0 \\ v(0,x) = 0,\ v_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

求解w即为第一种情况（齐次方程且齐次边界），求解v可用齐次化原理: 若r为

$$\begin{cases} r_{tt} = a^2 r_{xx}, \qquad t > 0, 0 < x < l \\ r(t,0) = r(t,l) = 0 \\ r(\tau,x) = 0,\ r_t(\tau,x) = f(\tau,x) \end{cases}$$

的解，则$v = \int_0^t r(t,\tau,x)d\tau$. 而求$r$又归结到情况一.

解法III: 特解法，对$f(t,x)$中只出现x时有效. 求特解$v(x)$满足$a^2 v_{xx} + f(t,x) = 0$和齐次边界($v(0) = 0,\ v_t(0) = 0$)，并令$w = u - v$，则求解w又可归结到情况一.

（3）非其次方程、非齐次边界.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0,\ 0 < x < l \\ u(t,0) = A(t),\ u(t,l) = B(t) \\ u(0,x) = \phi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

主要想法是：先把边界条件化为齐次，从而转化为情况二中求解. 令$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$, 其中$v(t,x)$ 满足齐次边界条件：通常令$v(t,x)$为x的线性函数(若边界为第二类，则令$v(t,x) = \alpha(t)x^2 + \beta(t)x$). 这样把$u$的方程化为$w$ 的方程，它是齐次边界条件的.

对Laplace方程，或者某些能化为Laplace方程的Poison边值问题(**找特**

解！)，分离变量法过程中要注意可能会用到一些隐含的周期、轴对称、解函数有界等条件，并出现一些经典的常微分方程如Euler方程、Bessel 方程、Legendre方程等的求解，所以这些方程的求解要非常熟悉.

第三章：特殊函数

在柱坐标系和球坐标系中采用分离变量法，常得到两类方程：Bessel方程与Legendre方程，其(有界)解分别为两类特殊函数：Bessel函数和Legendre多项式.

一、Bessel函数

1. Bessel方程很多定解问题（例如三种用柱坐标表示的典型方程，但不局限于此）用分离变量法求解过程中会出现ν阶Bessel方程:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

其通解为

$$y = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$$

其中$N_\nu(x)$在$x = 0$处无界.

2. 由1中结论，知Bessel方程的固有值问题

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \left(\lambda x^2 - n^2\right) y = 0, \quad 0 < x < a; \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \\ y(0) < \infty \end{cases}$$

固有值与固有函数为

$$\lambda_n = \omega_n^2, \quad y_n = J_\nu(\omega_n x)$$

其中ω_n 为$\alpha J_\nu(\omega a) + \beta\omega J_\nu'(\omega a) = 0$的第$n$个正根.

3. Fourier-Bessel级数展开. 通常，原始方程的解会表示为

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(t) \cdot J_\nu(\omega_n x)$$

为求组合系数A_n，代入初值条件，即要求函数级数展开系数.

$$\phi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_\nu(\omega_n x) \quad \Longrightarrow \quad C_n = \frac{\int_0^a x \cdot \phi(x) \cdot J_\nu(\omega_n x) dx}{\int_0^a x \cdot J_\nu^2(\omega_n x) dx}$$

注意积分中权函数为$\rho(x) = x$.

二、Legendre函数

1、球形域上轴对称Laplace方程的推导（**过程需要理解与掌握**），使用分离变量法可得Legendre方程：

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

只有当$\lambda = n(n+1)$(n为整数)时，有唯一有界解为$y = P_n(x)$. $P_n(x)$为第n个Legendre多项式. $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{3x^2-1}{2}, \cdots$

2、同理，为求原方程的解，通常要利用初始条件，计算函数的Fourier-Legendre级数.

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \quad \Longrightarrow \quad C_n = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx}$$

积分式中权为1.

3、在球坐标下Laplace方程$\Delta u=0$的通解为

$$u\left(r,\theta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n\left(\cos\theta\right)$$

其中系数$\left\{A_n,\ B_n\right\}$由有界性和边界条件确定.

第四章：积分变换法

对有界区域问题，应考虑分离变量法，前面已讨论；对无界区域，应考虑Fourier变换法；对半无界区域，应考虑Laplace变换法(有时也可对时间变量t做Laplace变换).

需要理解和掌握用积分变换法解方程的思路和步骤，并有一定的计算能力（计算反变换时通常要计算无穷积分）.

一、Fourier变换法

1. Fourier变换与反变换公式

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx,\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

2. Fourier变换的一些常用性质：线性、**微分关系式**、卷积、高维Fourier变换....

$$F[\delta(x,y,z)]=1,\quad F[\Delta u]=-\lambda^2 F[u]$$

3. Fourier变换解方程.

二、Laplace变换法

1. Laplace变换与反变换公式

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

2. Laplace变换的一些常用性质：线性、**微分关系式**、卷积....常见函数的Laplace变换(简单、记不住的要会用公式算）：

$$\mathcal{L}[t^n]=\frac{1}{p^{n+1}},\quad \mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{w}{p^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

3. Laplace变换解方程.

第五章：基本解与解的积分表示

1. 理解并掌握基本解（包括Green函数）在不同类型问题下的定义、基本解与一般方程解的关系、基本解的求法（Cauchy问题情况下，适用于Fourier变换条件).

2. 理解Green函数的定义、物理意义、方程的解如何由Green公式表示，并理解半空间（半平面）以及球面上（圆盘上）的Green函数的求法（**镜像法**），能够以此得出Dirichlet问题的解.

主要重点：

①二维、三维拉普拉斯方程的基本解分别为

$$U=\frac{1}{2\pi}\ln r,\qquad U=-\frac{1}{4\pi r}$$

②由镜像法和①立得：

上半平面的Green函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{1}{r(M,M_1)}\right),$$

上半空间的Green函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{1}{r(M,M_1)}\right),$$

球形域的Green函数就是

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r(M,M_1)}\right).$$

其中M_1为M_0的“对称点”.

以上公式，切莫死记，要从基本解和镜像法去理解.

③Poison公式: 二维Poison方程$\begin{cases}\Delta u(M)=-f(M)\\ u|_S=\phi(M)\end{cases}$的解可以由Green函数表示为

$$u(M_0)=-\oint\limits_{\partial S}\phi(M)\frac{\partial G}{\partial n}dl+\int\limits_S G\cdot f(M)ds.$$

三维与二维类似.

④两类发展方程Cauchy问题

$$u_t=Lu,\qquad u_{tt}=Lu$$

的基本解定义、解（由基本解表达）的积分表示.