数理方程经典问题专题整理

分离变量法求解基本解

基本解方法是一种基于转化思想的数理方程求解方法。其本质想法为，将一般的定解问题转化为（特殊的）基本解满足的定解问题，通过求解基本解满足的定解问题得到基本解，进而利用积分公式得到原定解问题的解。所以，总的来讲，基本解方法求解定解问题的流程为：根据定解问题的类型写出基本解满足的定解问题，求解得到基本解，利用积分公式得到原定解问题的解。其中，由定解问题得到基本解满足的定解问题和由基本解得到元定金问题的解这两个步骤是转化的过程，有着固定的方法。而求解基本解满足的定解问题，本质上是求解定解问题，所以，仍然可以使用所学的求解定解问题的方法求解。除此以外，由于问题的特殊性，经常会选择使用镜像法求解。但同时也要注意，有些时候会需要使用例如分离变量法求解。

求解半条形区域 $D: 0 < x < a, y > 0$ 内 $Poisson$ 方程第一边值问题的格林函数。

解：由题意知，要求解定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi, y-\eta) \quad (0 < x, \xi < a, \quad y, \eta > 0) \\ G|_{x=0} = G|_{x=a} = G|_{y=0} = 0 \\ G|_{y\to+\infty} \text{ 有界} \end{cases}$$

分析定解问题的类型知道，可以选择分离变量法求解。由于是非齐次方程，采用利用固有函数展开法求解。首先求解齐次方程得到固有值和固有函数系。对于这类问题，即求解拉普拉斯算子的固有值问题，对应的定解问题可写为

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0 \quad (0 < x < a, y > 0) \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = 0 \\ v|_{y\to+\infty} \text{ 有界} \end{cases}$$

令 $v = X(x)Y(y)$, 得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0 \quad (0 < x < a) \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0 \quad (y > 0) \\ Y(0) = 0, \quad Y(+\infty) \text{ 有界} \end{cases}$$

其中, $\mu + \nu = \lambda$. 分别解得

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$
$$\nu = \omega^2, Y(y, \omega) = \sin\omega y, \quad \omega > 0$$

进而得到原定解问题对应的固有值和固有函数

$$\lambda_{n\omega} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega^2, \quad v_n(x, y, \omega) = \sin\frac{n\pi}{a}x\sin\omega y$$

将非齐次项在固有函数系上展开

记 $G = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} C_n(\omega)\sin\omega y\mathrm{d}\omega\sin\frac{n\pi}{a}x$, 代入 G 的方程, 得

$$\begin{aligned} -\Delta_2 G &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega^2\right]\sin\omega y\mathrm{d}\omega\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x \\ &= \delta(x-\xi, y-\eta) \end{aligned}$$

这是 $\delta(x-\xi, y-\eta)$ 关于 $\left\{\sin\frac{n\pi}{a}x\right\}$ 的正弦展开, 展开系数

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega^2\right]\sin\omega y\mathrm{d}\omega &= \frac{2}{a}\int_0^a \delta(x-\xi, y-\eta)\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\delta(y-\eta) \end{aligned}$$

此式又可看成是 $C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega^2\right]$ 的正弦变换, 由反变换公式求出

$$\begin{aligned} C_n(\omega)\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega^2\right] &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\delta(y-\eta)\right]\sin\omega y\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{a\pi}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\omega\eta \end{aligned}$$

故

$$C_n(\omega) = \frac{4a}{\pi\left[(n\pi)^2 + (a\omega)^2\right]}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\omega\eta$$

所以, 格林函数

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\eta\sin\omega y}{(n\pi)^2 + (a\omega)^2}\mathrm{d}\omega\right]\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\frac{n\pi}{a}x$$