数理方程经典问题专题整理

方向导数计算

基本解方法求解定解问题的核心思想是转化思想。通过将一般的定解问题转化为特殊的定解问题，即基本解满足的定解问题，从而实现求解。对于应用转化思想求解问题，一个关键问题在于，转化的目标和方法。我们明确，转化目标就是基本解满足的定解问题，方法则是一般定解问题和基本解满足的定解问题之间存在的对应关系和基本解与原问题的解之间的对应关系——积分公式。在积分公式中，可能会涉及方向导数的计算。这个专题主要讲述方向导数相关的基本概念。

方向导数定义：设函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 及其附近有定义，$l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 是一单位向量. 若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cos\alpha,b+t\sin\alpha)-f(a,b)}{t}$$

存在，则称其值为 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 沿方 $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数，记作 $\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}$. 特别地，方向导数的最大值称为梯度。

方向导数计算：若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 可微，则其在点 (a,b) 沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\sin\alpha$$

而当函数不可微的时候，要按照定义进行计算。

例：求函数数 $f(x,y)=x^2y+xy$ 在点 (1,1) 沿方向

$$I_1=(3,2),I_2=(1,5),I_3=(-2,3)$$

的方向导数.

解：因为函数 $f(x,y)=x^2y+xy$ 在点 (1,1) 可微, 且

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=3,\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=2$$

$$l_1=(3,2)//\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2),\quad l_2=(1,5)//\frac{1}{\sqrt{26}}(1,5),\quad l_3=(-2,3)//\frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)$$

所以

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l_1}=\frac{1}{\sqrt{13}}(3\times3+2\times2)=\sqrt{13}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l_2}=\frac{1}{\sqrt{26}}(3\times1+2\times5)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l_3}=\frac{1}{\sqrt{13}}[3\times(-2)+2\times3]=0$$

梯度定义：设函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 及其附近有定义，若单位向量 $\boldsymbol{l}_0$ 满足

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial l_0}=\max_{\|\boldsymbol{l}\|=1}\left\{\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}\right\}$$

则称向量

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial l_0}\boldsymbol{l}_0$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的梯度向量. 记作 $\operatorname{grad} f(a,b)$ 或 $\nabla f(a,b)$.

梯度计算：若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 可微，则向量

$$\left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x},\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right)$$

是 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的梯度向量，即

$$\operatorname{grad} f(a,b)=\left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x},\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right)$$

例：求单位向量 l, 使得 $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ 在点 (1,0,-1) 沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数最小，并求此最小值。

解：因为 $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ 在点 (1,0,-1) 可微，且

$$f_x(1,0,-1)=-1, f_y(1,0,-1)=0, f_z(1,0,-1)=1$$

所以

$$\boldsymbol{l}=-\frac{1}{|\operatorname{grad} f(1,0,-1)|}\operatorname{grad} f(1,0,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

最小方向导数值为 $-|\operatorname{grad} f(1,0,-1)|=-\sqrt{2}$