中国科学技术大学 2020 年春季学期数理逻辑期中考试参考答案

2020.5.1

一 （$3 \times 7 = 21$ 分） 判断题（在题号前的括号里打 ✓ 或 ×）

（ ）1. L 公式 $(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$ 是永真式。

解： ✓ 由以下真值表可知公式为永真式

(	p	$\to$	q	)	$\to$	((	r	$\to$	p	)	$\to$	(	r	$\to$	q	))
	0	1	0		1		0	1	0		1		0	1	0	
	0	1	0		1		1	0	0		1		1	0	0	
	0	1	1		1		0	1	0		1		0	1	1	
	0	1	1		1		1	0	0		1		1	1	1	
	1	0	0		1		0	1	1		1		0	1	0	
	1	0	0		1		1	1	1		0		1	0	0	
	1	1	1		1		0	1	1		1		0	1	1	
	1	1	1		1		1	1	1		1		1	1	1	

（ ）2. 后件是永真式的蕴含式是永真式。

解： ✓ （P41 命题 4）由蕴涵词的真值表可知

p	$\to$	q
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

对于 $L(X)$ 的任一赋值 v，

$$v(q) = 1 \Rightarrow v(p \to q) = 1$$

（ ）3. 在命题演算中，有效（正确）的推理都可以转化为永真式。

解： ✓ 命题演算 L 的语法推论和语义推论是一致的，有

$$\vdash p \Leftrightarrow \vDash p$$

（ ）4. 项 $f(a, x_1)$ 对公式 $\forall x_1\,(R_1(b,\, x_1) \to R_2(x_1,\, x_2))$ 中的 x_2 自由。

解： × 用 $f(a, x_1)$ 代换公式中自由出现的 x_2 后，新公式中 $f(a, x_1)$ 中的 x_1 受 $\forall x_1$ 约束，因此项对公式中的 x_2 不是自由的。

（ ）5. 任何命题公式都有唯一的合取范式和析取范式。

解： × 显然错误，公式的合取范式或析取范式通常都不是唯一的。

（ ）6. 命题“所有自然数是整数”不能在 L 中适当表达，但可以在 K 中适当表达。

解： ✓ 命题演算 L 以简单命题为最小的考察对象，无法对其进行进一步分解，谓词演算 K 深入分析“原子命题”的内部结构并引入量词运算，可以适当表达命题。设 K 中的 $R = R_1^1$，自然数集 $\mathbb{N}$ 是 K 的一个解释域，$\overline{R_1^1}$：属于整数集，现考察 K 中原子公式 p：

$$\forall x\, R_1^1(x)$$

在解释域 $\mathbb{N}$ 中解释为“所有自然数是整数”。

（ ）7. 若 $\Gamma \vDash p$，则每一个 Γ 的模型都满足 p。

解： ✓ 由（P92）谓词演算 K 中语义推论的定义立刻可知。

解： ✓ ✓ ✓ × × ✓ ✓

二 （20 分） 在命题演算 L 中，试分别用直接证明（根据定义直接证明）和简化证明的方法证明：$\vdash \neg\neg p \to p$。

解： 直接证明

证明.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p) & \text{(L1)} \\
(2) & (\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)) & \\
 & \quad \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) & \text{(L2)} \\
(3) & (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p) & (1), (2), \text{MP} \\
(4) & \neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p) & \text{(L1)} \\
(5) & \neg\neg p \to \neg\neg p & (3), (4), \text{MP} \\
(6) & \neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) & \text{(L1)} \\
(7) & (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p) & \text{(L3)} \\
(8) & ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) & \\
 & \quad \to (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))) & \text{(L1)} \\
(9) & \neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) & (7), (8), \text{MP} \\
(10) & (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))) & \\
 & \quad \to \big((\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) & \\
 & \quad \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))\big) & \text{(L2)} \\
(11) & (\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) & \\
 & \quad \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) & (9), (10), \text{MP} \\
(12) & \neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p) & (6), (11), \text{MP} \\
(13) & (\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p) & \text{(L3)} \\
(14) & ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)) & \\
 & \quad \to (\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))) & \text{(L1)} \\
(15) & \neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)) & (13), (14), \text{MP} \\
(16) & (\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))) & \\
 & \quad \to ((\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p))) & \text{(L2)} \\
(17) & (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)) & (15), (16), \text{MP} \\
(18) & \neg\neg p \to (\neg\neg p \to p) & (12), (17), \text{MP} \\
(19) & (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)) \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)) & \text{(L2)}
\end{array}
$$

(20) $(\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ (18), (19), MP

(21) $\neg\neg p \to p$ (5), (20), MP

□

直接证明共 12 分，公理、MP 规则使用错误每处减 1 分，由错误的中间公式完成证明的最多减 10 分，格式错误（公式没有依据、没有标号、MP 规则没有指出相关公式）减 3 分，使用了 HS 规则（演绎定理的推论）或命题等公理与 MP 规则之外的证明手段、证明没有结束或没有得到待证公式本部分不得分

简化证明

证明. 由演绎定理，只用证 $\{\neg\neg p\} \vdash p$。
下面是 p 从 $\{\neg\neg p\}$ 的一个证明：

(1) $\neg\neg p$ 假定

(2) $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ (L1)

(3) $\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$ (1), (2), MP

(4) $(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ (L3)

(5) $\neg p \to \neg\neg\neg p$ (3), (4), MP

(6) $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ (L3)

(7) $\neg\neg p \to p$ (5), (6), MP

(8) p (1), (7), MP

□

简化证明共 8 分，演绎定理等语法定理使用错误减 2 分，公理、MP 规则、命题等使用错误每处减 1 分，格式错误（公式没有依据、没有标号、HS 与 MP 规则没有指出相关公式等）减 3 分，证明没有结束或没有得到待证公式本部分不得分

三 （15 分） 在谓词演算中证明 $\vDash \forall x\,(p \to q) \to (\forall x\, p \to \forall x\, q)$。

解：（练习 20 1-3°）

证明. 反证，假设 $\nvDash \forall x\,(p \to q) \to (\forall x\,p \to \forall x\,q)$，则存在 K 的解释域 M 和 $\varphi \in \Phi_M$，使得

$$|\forall x\,(p \to q) \to (\forall x\,p \to \forall x\,q)|\,(\varphi) = 0$$

即有 $|\forall x\,(p \to q)|\,(\varphi) = 1$ 且 $|\forall x\,p \to \forall x\,q|\,(\varphi) = 0$，进而有 $|\forall x\,p|\,(\varphi) = 1$ 且 $|\forall x\,q|\,(\varphi) = 0$。

由 $|\forall x\,q|\,(\varphi) = 0$ 可知，存在 φ 的 x 变通 φ' 使得 $|q|\,(\varphi') = 0$，同时由 $|\forall x\,p|\,(\varphi) = 1$ 可知，有 $|p|\,(\varphi') = 1$。由 $|\forall x\,(p \to q)|\,(\varphi) = 1$ 可知，$|p \to q|\,(\varphi') = 1$，这与 $|p|\,(\varphi') = 1$ 且 $|q|\,(\varphi') = 0$ 矛盾！因此假设不成立，原语义推论得证。 □

本题还可通过谓词演算 K 的可靠性做出证明

证明. 先证明 $\vdash \forall x\,(p \to q) \to (\forall x\,p \to \forall x\,q)$，由演绎定理，只用证 $\{\forall x\,(p \to q), \forall x\,p\} \vdash \forall x\,q$，其中除了 x 外不使用其他 Gen 变元，且 x 是不在 $\forall x\,(p \to q)$ 或 $\forall x\,p$ 中自由出现的。下面是 $\forall x\,q$ 从 $\{\forall x\,(p \to q), \forall x\,p\}$ 的一个证明：

(1)	$\forall x\,p$	假定
(2)	$\forall x\,p \to p$	(K4)
(3)	p	(1), (2), MP
(4)	$\forall x\,(p \to q)$	假定
(5)	$\forall x\,(p \to q) \to (p \to q)$	K4
(6)	$p \to q$	(4), (5), MP
(7)	q	(3), (6), MP
(8)	$\forall x\,q$	(7), Gen

因此

$$\vdash \forall x\,(p \to q) \to (\forall x\,p \to \forall x\,q)$$

得证，由 K 的可靠性可知

$$\vDash \forall x\,(p \to q) \to (\forall x\,p \to \forall x\,q)$$

□

使用语义方式进行证明：证明不正确本题不得分，证明整体正确但局部描述错误（对解释域、解释等的存在、任意描述不准确、变通概念有误）每处 3 分；**通过可靠性进行证明：**没

有对可靠性的具体表述而直接进行形式证明的减 8 分，证明中演绎定理等语法定理使用错误减 4 分，公理、MP 规则、命题等使用错误每处减 2 分，没有关于 Gen 变元的相关表述减 5 分，格式错误（公式没有依据、没有标号、HS 与 MP 规则没有指出相关公式等）减 4 分，证明没有结束或没有得到待证公式本部分不得分

四 （13 分） 求与下列公式等价的前束合取范式，并给出求解过程：

$$\forall x_1\, R_1^2(x_1,\, x_2) \to \forall x_1 \forall x_2\, R_2^2(x_1,\, x_2)$$

解：适当改变公式中的约束变元得到以下等价的公式 p_1：

$$p_1 = \forall x_1\, R_1^2(x_1,\, x_2) \to \forall x_3 \forall x_4\, R_2^2(x_3,\, x_4)$$

从 p_1 出发，反复利用 P77 命题 2-2° 和 2-3°，得到以下的等价公式：

$$\begin{aligned}
p_2 &= \forall x_3\ \big(\forall x_1\, R_1^2(x_1,\, x_2) \to \forall x_4\, R_2^2(x_3,\, x_4)\big)\\
p_3 &= \forall x_3 \forall x_4\ \big(\forall x_1\, R_1^2(x_1,\, x_2) \to R_2^2(x_3,\, x_4)\big)\\
p_4 &= \forall x_3 \forall x_4 \exists x_1\ \big(R_1^2(x_1,\, x_2) \to R_2^2(x_3,\, x_4)\big)\\
p_5 &= \forall x_3 \forall x_4 \exists x_1\ \big(\neg R_1^2(x_1,\, x_2) \vee R_2^2(x_3,\, x_4)\big)
\end{aligned}$$

p_5 即所求（注意到量词后的部分是只有一个析取支的合取范式）。

以下公式也是与原公式等价的前束合取范式：

$$\begin{aligned}
p_6 &= \forall x_4 \forall x_3 \exists x_1\ \big(\neg R_1^2(x_1,\, x_2) \vee R_2^2(x_3,\, x_4)\big)\\
p_7 &= \exists x_1 \forall x_3 \forall x_4\ \big(\neg R_1^2(x_1,\, x_2) \vee R_2^2(x_3,\, x_4)\big)\\
p_8 &= \exists x_1 \forall x_4 \forall x_3\ \big(\neg R_1^2(x_1,\, x_2) \vee R_2^2(x_3,\, x_4)\big)
\end{aligned}$$

同时从 p_4 出发，以 $R_1^2(x_1,\, x_2)$ 和 $R_2^2(x_3,\, x_4)$ 为原子命题变元，由命题演算公式中 $x_1 \to x_2$ 的等值主合取范式及代换定理可得原公式还等价于

$$\begin{aligned}
p_9 =& \forall x_3 \forall x_4 \exists x_1 \Big(\big(\neg R_1^2(x_1,\, x_2) \vee \neg R_2^2(x_3,\, x_4)\big)\\
&\wedge \big(R_1^2(x_1,\, x_2) \vee \neg R_2^2(x_3,\, x_4)\big) \wedge \big(R_1^2(x_1,\, x_2) \vee R_2^2(x_3,\, x_4)\big)\Big)
\end{aligned}$$

没有得到最终结果或得到与原公式不等价的公式本题不得分（若求解步骤部分正确可酌情给分），缺少必要的求解过程减 10 分，前束合取范式格式不正确（包括：量词不是前束的、前束量词前存在否定词、范式不是合取的等）减 8 分，求解过程中命题使用不正确每处减 1 分

五 （16 分） 甲、乙、丙、丁四人参加离散数学考试后，A、B、C 三人猜测考试结果。A 说："丙第一，乙第二"，B 说："丙第二，丁第三"，C 说："甲第二，丁第四"。结果每人都猜对了一半，假设无并列名次，问甲、乙、丙、丁的实际名次如何？

解：用 x_i，$i=1,2,\cdots,6$ 分别表示"甲第二"、"乙第二"、"丙第一"、"丙第二"、"丁第三"、"丁第四"，题设条件可形式化为

$$\left\{x_3 \nleftrightarrow x_2,\ x_4 \nleftrightarrow x_5,\ x_1 \nleftrightarrow x_6,\ \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge x_4),\ \neg(x_3 \wedge x_4),\ \neg(x_5 \wedge x_6)\right\}$$

解如下的真值方程组(1)~(8)

(1) $$v_3 \nleftrightarrow v_2 = 1$$

(2) $$v_4 \nleftrightarrow v_5 = 1$$

(3) $$v_1 \nleftrightarrow v_6 = 1$$

(4) $$\neg(v_1 \wedge v_2) = 1$$

(5) $$\neg(v_1 \wedge v_4) = 1$$

(6) $$\neg(v_2 \wedge v_4) = 1$$

(7) $$\neg(v_3 \wedge v_4) = 1$$

(8) $$\neg(v_5 \wedge v_6) = 1$$

试取 $v_2 = 1$，由(1)、(4)及(6)可知，$v_3 = 0, v_1 = 0, v_4 = 0$，分别代入(2)及(3)可知，$v_5 = 1, v_6 = 1$，代入(8)得

(9) $$\neg(v_5 \wedge v_6) = 0$$

(8)与(9)矛盾。改取 $v_2 = 0$，由(1)可知，$v_3 = 1$，代入(7)可知 $v_4 = 0$，代入(2)可知 $v_5 = 1$，代入(8)可知 $v_6 = 0$，代入(3)可知 $v_1 = 1$，分别代入(4)、(5)、(6)均成立。得到方程组(1)~(8)的一个解 (1, 0, 1, 0, 1, 0)，这说明"甲是第二"、"乙不是第

二”、“丙是第一”、“丙不是第二”、“丁是第三”、“丁不是第四”，即甲、乙、丙、丁的实际名次为丙第一、甲第二、丁第三、乙第四。

没有对题设做详细的形式化描述而直接得到形式化结果减 4 分，形式化原问题不完整或不正确减 6 分，形式化语义上求解有误减 2 分，没有得到正确结果减 10 分。

六 （15 分） 下述推理是否有效？为什么？

所有羊都吃草；
所有死羊都不吃草；
所以，所有死羊都不是羊。

解：推理有效。在解释域

M：所有生物个体 $\overline{R_1^1}$：羊（的集合）
$\overline{R_2^1}$：死羊（的集合）
$\overline{R_3^1}$：吃草（生物的集合）

上，题述推理可以形式化为

$$\left\{\forall x\left(R_1^1(x) \rightarrow R_3^1(x)\right),\ \forall x\left(R_2^1(x) \rightarrow \neg R_3^1(x)\right)\right\} \vdash \forall x\left(R_2^1(x) \rightarrow \neg R_1^1(x)\right)$$

以下公式从 $\{\forall x\,(R_1^1(x) \rightarrow R_3^1(x)),\ \forall x\,(R_2^1(x) \rightarrow \neg R_3^1(x))\}$ 可证

(1)	$\forall x\left(R_1^1(x) \rightarrow R_3^1(x)\right)$	假定
(2)	$\forall x\left(R_1^1(x) \rightarrow R_3^1(x)\right) \rightarrow \left(R_1^1(x) \rightarrow R_3^1(x)\right)$	(K4)
(3)	$R_1^1(x) \rightarrow R_3^1(x)$	(1), (2), MP
(4)	$\left(R_1^1(x) \rightarrow R_3^1(x)\right) \rightarrow \left(\neg R_3^1(x) \rightarrow \neg R_1^1(x)\right)$	换位律
(5)	$\neg R_3^1(x) \rightarrow \neg R_1^1(x)$	(3), (4), MP
(6)	$\forall x\left(R_2^1(x) \rightarrow \neg R_3^1(x)\right)$	假定
(7)	$\forall x\left(R_2^1(x) \rightarrow \neg R_3^1(x)\right) \rightarrow \left(R_1^1(x) \rightarrow \neg R_3^1(x)\right)$	(K4)
(8)	$R_2^1(x) \rightarrow \neg R_3^1(x)$	(6), (7), MP
(9)	$R_2^1(x) \rightarrow \neg R_1^1(x)$	(5), (8), HS

(10) $\forall x\left(R_2^1(x) \to \neg R_1^1(x)\right)$ (9), Gen

证明中除了 x 没有使用其他 Gen 变元。由 K 的可靠性，有

$$\left\{\forall x\left(R_1^1(x) \to R_3^1(x)\right), \forall x\left(R_2^1(x) \to \neg R_3^1(x)\right)\right\} \vDash \forall x\left(R_2^1(x) \to \neg R_1^1(x)\right)$$

因此推理是有效的。

没有对题设做详细的形式化描述而直接得到形式化结果减 4 分，形式化原问题不完整或不正确减 6 分，证明中演绎定理等语法定理使用错误减 4 分，公理、MP 规则、命题等使用错误每处减 2 分，没有关于 Gen 变元的相关表述减 3 分，格式错误（公式没有依据、没有标号、HS 与 MP 规则没有指出相关公式等）减 4 分，证明没有结束或没有得到待证公式减 6 分，判断错误减 10 分（对错误结果言之有理可酌情减 5 到 10 分）。