用傅立叶变换求解.

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \quad (x\in R,\ y>0) \\ u(x,0) = f(x) \\ \text{当 } x^2+y^2 \to \infty \text{ 时},\ u(x,y) \to 0 \end{cases}$$

第一步：选取合适的坐标变量进行傅立叶变换：

$x\in R$ 满足要求，且 $u|_{x\to\infty}\to 0$

所以：对 x 作傅立叶变换：

$$\hat{u}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\cdot e^{-i\lambda x}\,dx$$

利用微分性质：$\widehat{u_{xx}} = -\lambda^2 \hat{u} \qquad \widehat{u_{yy}} = \dfrac{d^2\hat{u}}{dy^2}$

将 PDE $\longrightarrow$ ODE

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\hat{u}}{dy^2} - \lambda^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}|_{y=0} = \cancel{\hat{f}(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\,dx \triangleq \hat{f}(\lambda). \end{cases}$$

第二步：求解 ODE：

$$\hat{u} = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}$$

$$\hat{u}|_{y\to\infty} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda>0 \text{ 时：} A=0. \\ \lambda<0 \text{ 时：} B=0 \end{cases} \Rightarrow \hat{u} = C\cdot e^{-|\lambda| y}.$$

$$\hat{u}|_{y=0} = \hat{f}(\lambda) \Rightarrow \hat{u} = f(\lambda)\, e^{-|\lambda| y}$$

第三步：反变换：

$$u(x,y) = F^{-1}[f(\lambda)] * F^{-1}[e^{-|\lambda| y}]$$

$$F^{-1}[f(\lambda)] = f(x) \qquad F^{-1}[e^{-|\lambda| y}] = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda| y} e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{y^2+x^2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = f(x) * \frac{y}{y^2+x^2} = \frac{y}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{y^2+(x-\xi)^2}\,d\xi.$$