# 数学物理方法之——

## §3 特殊函数

# Bessel方程的引入

**例**：设有半径为R的薄圆盘，其侧面绝缘，若圆盘边界上的温度恒保持为零度，且初始温度为已知. 求圆盘内的瞬时温度分布规律.

定解问题为：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \left(x^2 + y^2 < R^2\right) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y) \\ u\big|_{x^2+y^2=R^2} = 0 \end{cases}$$

采用分离变量法求解，设 $u(x, y, t) = V(x, y)T(t)$ 得：
$$\begin{cases} T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda V = 0 \end{cases}$$

为了求解$V(x,y)$，采用极坐标并考虑边界条件得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\lambda V=0 \quad (r<R) \\ V\big|_{r=R}=0 \end{cases}$$

再分离变量，令$V(r,\theta)=P(r)\Theta(\theta)$ 得：

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)+\mu\,\Theta(\theta)=0 \\ r^2P''(r)+rP'(r)+(\lambda r^2-\mu)P(r)=0 \end{cases}$$

得固有值问题 $\begin{cases} \Theta''(\theta)+\mu\Theta(\theta)=0 \\ \Theta(\theta)=\Theta(2\pi+\theta) \end{cases}$ 解之得：固有值为 $\mu_n=n^2 \quad (n=0,1,2.....)$

相应的固有函数为：

$$\Theta_n(\theta)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{2}(\text{为常数}) & n=0\\ a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta & n\geq 1\end{cases}$$

另一个固有值问题为：

$$\begin{cases}\boxed{r^2P''(r)+rP'(r)+(\lambda r^2-n^2)P(r)=0} \xrightarrow{} \text{Bessel方程}\\ P(R)=0,\quad |P(0)|<+\infty\end{cases}$$

为使该分离变量求解能进行下去，需要求解上面关于 $P(r)$ 的常微分方程.

在分离变量法求解中常常遇到这种方程.

**例**：在柱坐标系下，对Laplace方程（$\Delta u = 0$）或Helmholtz方程（$\Delta u + k^2 u = 0$）进行分离变量，将导出 $n$ 阶Bessel方程.

在柱坐标变换下， Laplace方程变为： $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

将 $u(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 代入方程，如果圆柱上、下两底的边界条件不是齐次的，而圆柱的侧面的边界条件是齐次的，就得出

$$\begin{cases} \Phi(\phi) = A_1 \sin n\phi + A_2 \cos n\phi \\ Z(z) = B_1 e^{\omega z} + B_2 e^{-\omega z} \\ \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\omega^2\rho^2 - n^2)R = 0 \end{cases}$$

引入新的自变量 $x = \omega\rho$， 上面最后一个方程可改写为

$$\boxed{x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0}$$

Bessel方程

其中，$n$ 为任意实数或复数， 本书中 $n$ 只限于实数.

# 线性常微分方程幂级数解

## 幂级数解

- 一般情况下，即使是线性ODE也没有初等函数解.
- 应用幂级数解法，可以得到ODE在一定区域内的解式.
- 方程在不同区域内的解式，总是互为解析延拓的；于是可以在某区域内的解式出发，通过解析延拓推出方程在其他区域的解式.

## 求幂级数解的步骤：

1. 设解可以展开成级数，代入常微分方程.
2. 比较$x$的幂次方系数，得到解中系数的递推关系式.
3. 反复利用递推关系式，求出系数的一般表达式（一般由初值决定），从而得到级数解.

# Cauchy定理

Theorem：考虑二阶线性齐次ODE定解问题：$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0 \\ y(x_0)=c_0 \\ y'(x_0)=c_1 \end{cases}$ $c_0, c_1$ 为任意实数.

若系数 $p(x), q(x)$ 在 $|x-x_0|<R$ 内解析（此时称 $x_0$ 为方程的常点），则此初值问题在

$|x-x_0|<R$ 上有唯一解析解 $y=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

系数 $C_n$ 由初始条件和方程唯一决定，且解函数的收敛半径至少是 $R$.

# Fuchs定理

Theorem: 方程 $y''+\frac{p(x)}{x-x_0}y'+\frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y=0$. $p(x)$, $q(x)$ 在 $|x-x_0|<R$ 内解析(此时称 $x_0$ 为方程的正则奇点). 则方程在 $|x-x_0|<R$ 内的基础解系为:

$$\begin{cases} y_1(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \\ y_2(x)=\begin{cases}(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n & \rho_1-\rho_2\in Z \\ c_0y_1(x)ln(x-x_0)+(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n & \rho_1-\rho_2\notin Z\end{cases}\end{cases}$$

$\boxed{a_0, b_0 \text{ 是非零常数.}}$

$f(\rho)=\rho(\rho-1)+P_0\rho+Q_0$ 称为方程关于 $x_0$ 的指标方程（比较 $x^{\rho-2}$ 的系数所得等式），

其中 $P_0,Q_0$ 为 $p(x)$, $q(x)$ 展开式的常数项. 而 $\rho_1,\rho_2$ 为 $f(\rho)$ 的两个根（称为指标数）.

# Gauss定理

**Theorem**: 方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$. $p(x)$, $q(x)$ 在 $0<|x-x_0|<R$ 内解析，但 $x_0$ 是 $p(x)$ 高于一阶的极点或 $q(x)$ 高于二阶的极点（此时称 $x_0$ 为方程的非正则奇点）. 则方程在 $0<|x-x_0|<R$ 内的基础解系为：

$$\begin{cases} y_1(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n \\ y_2(x)=\begin{cases}(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(x-x_0)^n & \rho_1-\rho_2\in Z \\ c_0y_1(x)ln(x-x_0)+(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(x-x_0)^n & \rho_1-\rho_2\notin Z\end{cases}\end{cases}$$

而且其中 $y_1(x), y_2(x)$ 的Laurant级数中负幂次项会有无穷多项.

# Bessel方程

定义：形如 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0\ (\nu\ge 0)$ 的方程称为 $\nu$ 阶Bessel方程.

$x=0$ 是方程的正则奇点. 假定方程有一个广义幂级数解，其形式为 ：

$$y=x^{\rho}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n+\cdots),a_0\ne 0$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{\rho+n}$$

把它代入方程中确定 $\rho$ 与 $a_n\left(n=0,1,2,\ldots\ldots\right)$. 代入方程得 ：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\left[(\rho+n)(\rho+n-1)+(\rho+n)+\left(x^2-\nu^2\right)\right]a_nx^{\rho+n}\right\}=0$$

化简后得：

$$\left(\rho^2-\nu^2\right)a_0x^{\rho}+\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]a_1x^{\rho+1}+\sum_{n=2}^{+\infty}\left\{\left[(\rho+n)^2-\nu^2\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{\rho+n}=0$$

于是得下列各式：$\begin{cases} a_0(\rho^2-\nu^2)=0 \\ a_1\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]=0 \\ \left[(\rho+n)^2-\nu^2\right]a_n+a_{n-2}=0,(n=2,3,\cdots) \end{cases}$

于是得到：$\rho=\pm\nu$, $a_1=0$ 暂取 $\rho=\nu$，可得：

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{n(2\nu+n)}\cdots(n=2,3,\ldots.)$$

由 $a_1=0 \Rightarrow a_1=a_3=a_5=a_7=\cdots=0$

而 $a_2=\dfrac{-a_0}{2(2\nu+2)}$，$a_4=\dfrac{a_0}{2\cdot4(2\nu+2)(2\nu+4)}$,……

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{2\cdot4\cdot6\cdots2m(2\nu+2)(2\nu+4)\cdots(2\nu+2m)},m=1,2,\cdots$$

$$=\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}$$

为了简化上面系数的表示，特选取 $a_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$ 得 ：

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{\nu+2m} m!\Gamma(\nu+m+1)}, m = 0,1,2,\cdots$$

于是得到 $\nu$ 阶Bessel方程的一个特解为：

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{\nu+2m}}{2^{\nu+2m} m!\Gamma(\nu+m+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

由D`Alembert判别法知它在 $|x| < +\infty$ 上收敛. 称之为 $\nu$ 阶**第一类Bessel函数**，记为 $J_{\nu}(x)$

$\Gamma$ 函数

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

取 $\rho = -\nu$ 时 ，用同样方法可得另一特解：

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

齐次线性ODE，找到两个特解，那通解……?

# 非整数阶Bessel函数

由于当 为非整数时有：

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \to 0, (x \to 0)$$

$$J_{-\nu}(x) \approx \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \to \infty, (x \to 0)$$

所以，此时 $J_\nu, J_{-\nu}$ 就是 $\nu$ 阶Bessel方程的两个线性无关特解，于是得非整数 $\nu$ 阶Bessel方程的通解为：

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

**例**、求如下贝塞尔方程通 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - \dfrac{1}{4})y = 0$

**解**：这是 $\frac{1}{2}$ 阶Bessel方程，故有特解 $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$ ， $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$

故通解为：$y = C_1\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x + C_2\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$

# 整数阶Bessel函数

**性质**：对于 $n$ 阶整数阶贝塞尔函数有： $J_n(x)=(-1)^n J_{-n}(x)$

**证明**： $J_{-n}(x)=(\frac{x}{2})^{-n}\sum_{m=n}^{+\infty}(-1)^m\frac{(\frac{x}{2})^{2m}}{m!\Gamma(m-n+1)}\underline{\underline{m-n\triangleq l}}(\frac{x}{2})^{-n}\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^{n+l}\frac{(\frac{x}{2})^{2l+2n}}{(n+l)!l!}$

$$=(-1)^n\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{(\frac{x}{2})^{2l+n}}{l!\Gamma(n+l+1)}=(-1)^n J_n(x)$$

**定义** $N_\nu(x)\triangleq \lim_{\alpha\to\nu}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$ ⟹ 第二类Bessel函数

可以验证，不论 $\nu$ 是否为整数，$N_\nu(x)$ 都是 $\nu$ 阶Bessel方程的特解，且

$$\lim_{x\to0}N_\nu(x)=\infty,\quad \lim_{x\to0}J_\nu(x)=C(常数)$$

故 $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ 线性无关，进而 $\nu$ 阶Bessel方程的通解为 $AJ_\nu(x)+BN_\nu(x)$.

$$N_\nu(x) \triangleq \lim_{\alpha\to\nu} \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$

由于当 $\nu$ 为整数时，上式极限是 $\frac{0}{0}$ 型的不定型极限，依据L`Hospital法则并经过较长的推导，最后得到

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)(\ln\frac{x}{2} + c) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{2m}}{(m!)^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1},$$

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)(\ln\frac{x}{2} + c) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{(m!)^2} (\frac{x}{2})^{-n+2m}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{n+2m}}{m!(n+m)!} (\sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

其中，$c = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n) = 0.5772\cdots$为Euler常数.

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \frac{1}{\Gamma(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \dots$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6 + \frac{1}{147456}x^8 - \frac{1}{14745600}x^{10} + O\left(x^{12}\right)$$

$$J_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^5 - \frac{1}{18432}x^7 + \frac{1}{1474560}x^9 - \frac{1}{176947200}x^{11} + O\left(x^{12}\right)$$

$$J_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{3072}x^6 - \frac{1}{184320}x^8 + \frac{1}{17694720}x^{10} + O\left(x^{12}\right)$$

$$J_3(x) = \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{768}x^5 + \frac{1}{30720}x^7 - \frac{1}{2211840}x^9 + \frac{1}{247726080}x^{11} + O\left(x^{12}\right)$$

$$J_4(x) = \frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{7680}x^6 + \frac{1}{368640}x^8 - \frac{1}{30965760}x^{10} + O\left(x^{12}\right)$$

$$N_n(x) \triangleq \lim_{\alpha\to n} \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$

$$\underline{\underline{n\geq 1}}\ \frac{2}{\pi} J_n(x)(\ln\frac{x}{2}+c) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{(m!)^2}(\frac{x}{2})^{-n+2m}$$

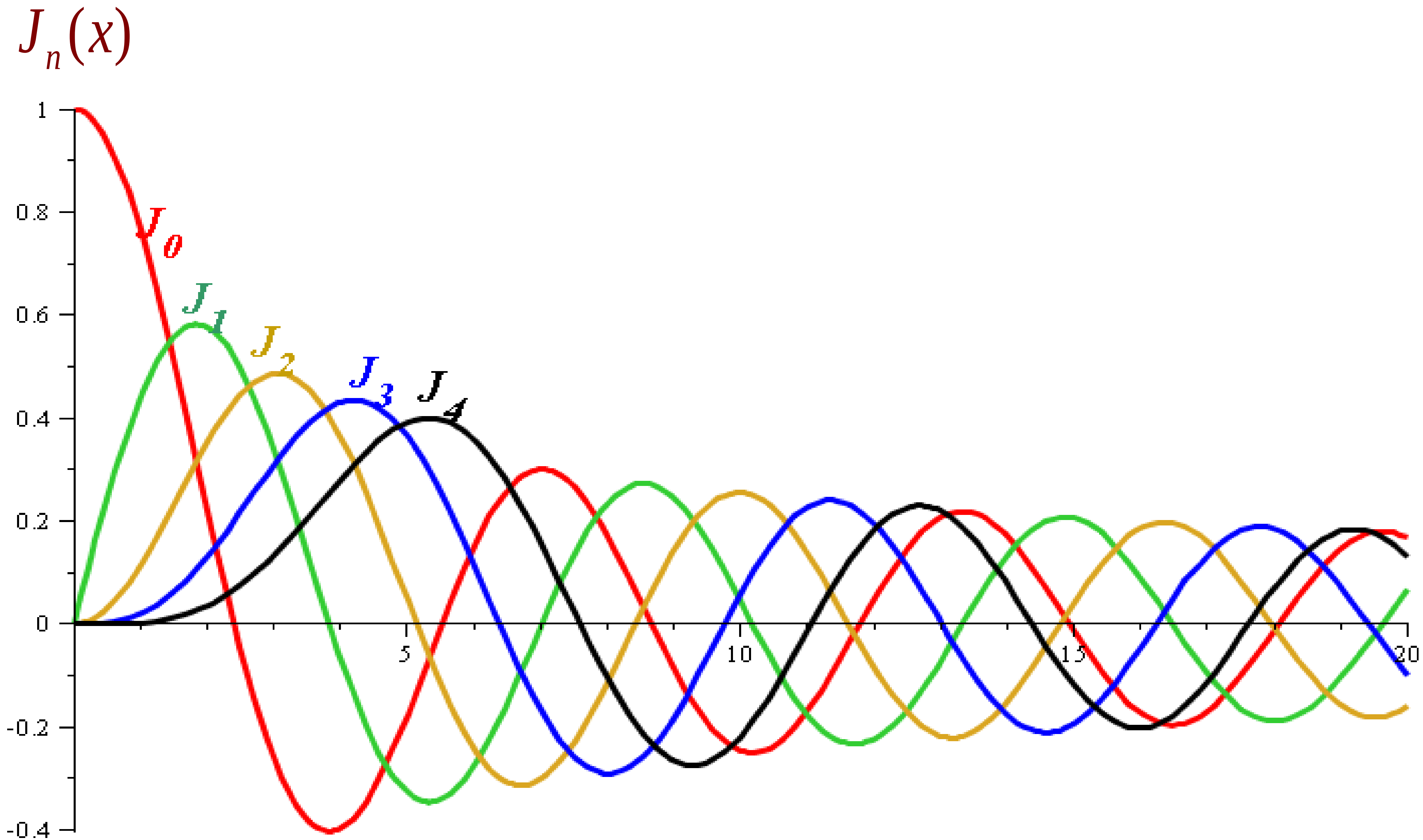
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\frac{x}{2})^{n+2m}}{m!(n+m)!}(\sum_{k=0}^{n+m-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi}(\frac{x}{2})^{-n}(x\to 0)$$

$$N_0(x) = 2\frac{-\ln 2+\ln x}{\pi} + 2\frac{\gamma}{\pi} + \left(-\frac{-\ln 2+\ln x}{2\pi} - \frac{\gamma-1}{2\pi}\right)x^2 + O\left(x^4\right) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}(x\to 0)$$

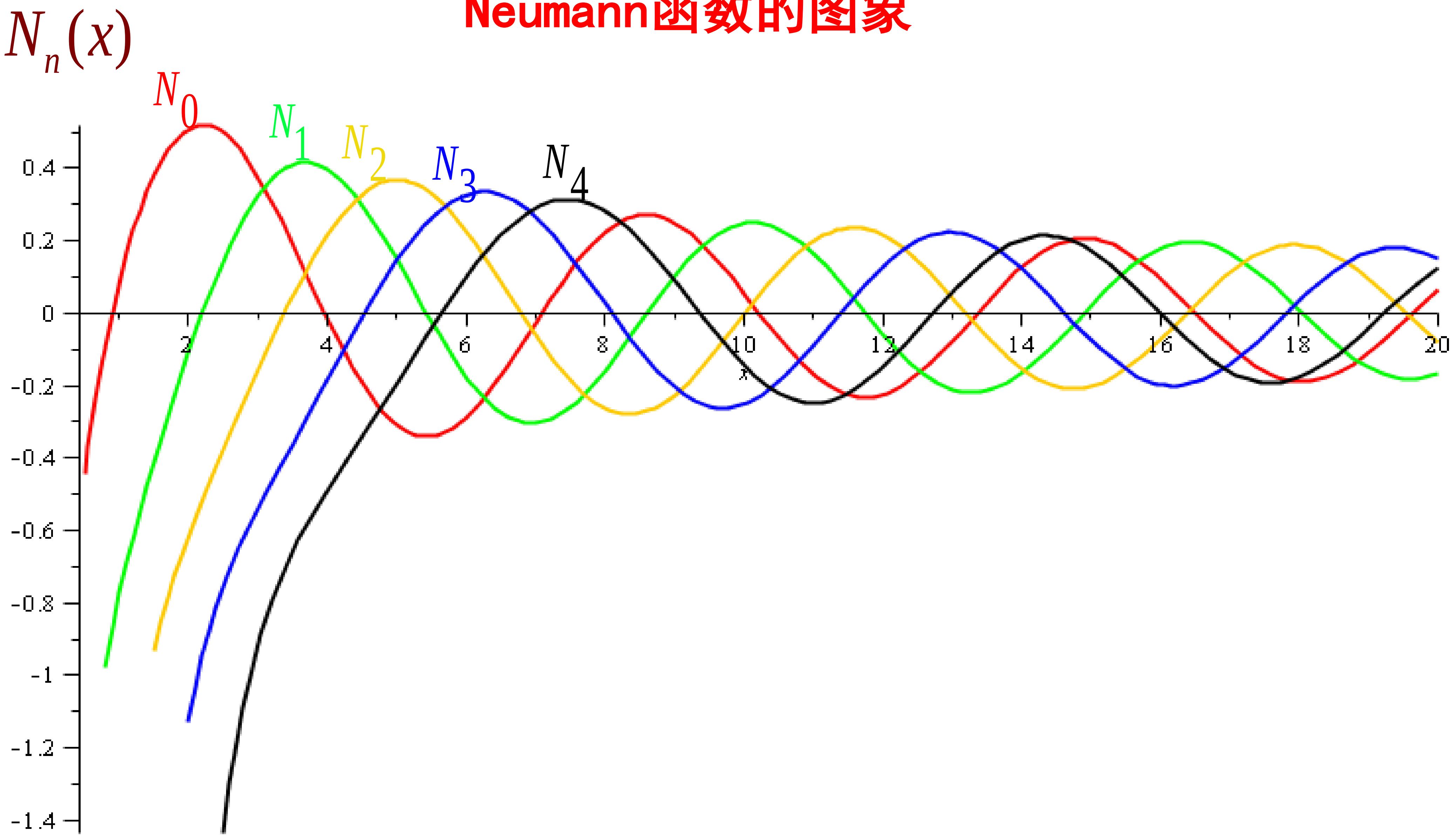
$$N_1(x) = -2\pi^{-1}x^{-1} + \left(\frac{-\ln 2+\ln x}{\pi} - 1/2\frac{-2\gamma+1}{\pi}\right)x + O\left(x^3\right)$$

$$N_2(x) = -4\pi^{-1}x^{-2} - \pi^{-1} + \left(1/4\frac{-\ln 2+\ln x}{\pi} - 1/4\frac{-\gamma+3/4}{\pi}\right)x^2 + O\left(x^4\right)$$

# Bessel函数的图象



# Neumann函数的图象



# Bessel函数的性质

## 1. 有界性

$\left|J_\nu(x)\right| < +\infty;$ $\qquad N_\nu(0) = -\infty;$ $\qquad \left|N_\nu(x)\right| < +\infty (x \neq 0)$

## 2. 奇偶性

当 $n$ 为正整数时： $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$

$$N_n(-x) = (-1)^n N_n(x)$$

## 3. 初值

$J_0(0) = 1;\ J_n(0) = 0;\ N_n(0) = -\infty$

## 4. 零点

有无穷多个对称分布的零点 $J_\nu(\mu_m^{(\nu)}) = 0$

$J_n(x)$ 和 $J_{n+1}(x)$ 的零点相间分布

$J_n(x)$ 的零点趋于周期分布：$\lim\limits_{m\to\infty}\left(\mu_{m+1}^{(\nu)} - \mu_m^{(\nu)}\right) = \pi$

## 5. 半奇数阶的Bessel函数

$$\begin{cases} J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \\ J_{-(n+\frac{1}{2})}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \left(\dfrac{\cos x}{x}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x\pi}} \sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x\pi}} \cos x \end{cases}$$

## 6. 渐进公式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0 \ (\nu \ge 0)$$

$$\xrightarrow{y=\frac{u}{\sqrt{x}}} u'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) u = 0$$

$$\xrightarrow{|x|\text{很大时}} u'' + u = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} J_\nu(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{x\pi}} \cos\left(x - \dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{\nu}{2}\pi\right) \\ N_\nu(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{x\pi}} \sin\left(x - \dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{\nu}{2}\pi\right) \\ J_n(x) \to 0, N_n(x) \to 0 (x \to \infty) \end{cases}$$

# 整数阶Bessel函数的生成函数

考虑函数 $f(z)=e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$（ $x$ 为参数）在 $0<|z|<+\infty$ 内Laurent展式：

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\frac{x}{2})^k}{k!}z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(\frac{x}{2})^l}{l!}(-z)^{-l}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{k!l!}(\frac{x}{2})^{k+l}z^{k-l}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!l!}(\frac{x}{2})^{2l+n}\right)z^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)z^n$$

定义： 称 $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ 为整数阶Bessel函数的生成函数(母函数).

由Laurent系数公式有： $J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\frac{x}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}}d\zeta\ \underline{\underline{\zeta=e^{i\theta}}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\theta}(e^{i\theta})^{-n-1}ie^{i\theta}d\theta$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\theta-n\theta)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

在 $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)z^n$ 中，取 $z=ie^{i\theta}$ 可得：

$$e^{ix\cos\theta}=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{+\infty}i^nJ_n(x)\cos n\theta$$

当 $x$ 为实数时，通过等式比较实部与虚部可得：

$$\begin{cases}\cos(x\cos\theta)=J_0(x)+2\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^mJ_{2m}(x)\cos 2m\theta\\ \sin(x\cos\theta)=2\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^mJ_{2m+1}(x)\cos(2m+1)\theta\end{cases}$$

此即为关于 $\theta$ 的函数 $\cos(x\cos\theta)$, $\sin(x\cos\theta)$ 的余弦级数与正弦级数展开.

**例：** 用生成函数证明整数阶贝塞尔函数加法公式：$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)$

**证：** 在母函数等式中用 $x+y$ 换 $x$ 得：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y)z^n = e^{\frac{x+y}{2}(z-z^{-1})} = e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})}\cdot e^{\frac{y}{2}(z-z^{-1})}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)z^k \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(y)z^m$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_m(y)z^{k+m}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)\right)z^n$$

$$\Longrightarrow \quad J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)$$

# Bessel函数的递推公式

Proposition：
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\end{cases}$$

**Pf**：只证一式，第二个式子同理可证.

$$\text{左边}=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}x^{\nu}(-1)^{m}\frac{x^{\nu+2m}}{2^{\nu+2m}m!\Gamma(\nu+m+1)}=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{x^{2\nu+2m}}{2^{\nu+2m}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{(2\nu+2m)x^{2\nu+2m-1}}{2^{\nu+2m}m!\Gamma(\nu+m+1)}=x^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{x^{\nu+2m-1}}{2^{\nu+2m-1}m!\Gamma(\nu+m)}$$

$$=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \end{cases} \xrightarrow{\text{特别地}} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_{0}(x)=-J_{1}(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xJ_{1}(x)\right]=xJ_{0}(x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^{\nu}J_{\nu}'(x)+\nu x^{\nu-1}J_{\nu}(x)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \\ x^{-\nu}J_{\nu}'(x)-\nu x^{-\nu-1}J_{\nu}(x)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_{\nu}'(x) \\ J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}J_{\nu}(x) \end{cases}$$

1. 上述关系式对 $N_{\nu}$ 也成立.

2. 对于任意整数 $n$, $J_{n}(x)$ 均可由 $J_{0}(x)$, $J_{1}(x)$ 来表示.

# 例

1. $\int x^m J_{m-1} dx = x^m J_m + c$

2. $\int x^n J_m dx = -\int x^n x^{m-1}[x^{1-m} J_{m-1}]' dx$

$$= -x^n J_{m-1} + (n+m-1)\int x^{n-1} J_{m-1} dx$$

3. $\int x^n J_0 dx = \int x^n x^{-1}[xJ_1]' dx$

$$= x^n J_1 - (n-1)\int x^{n-1} J_1 dx$$

$$= x^n J_1 + (n-1)x^{n-1} J_0 - (n-1)^2 \int x^{n-2} J_0 dx$$

对形如 $\int x^n J_m dx$ 的积分，若 $m+n$为奇，则结果可用 $J_0, J_1$ 表示；若 $m+n$ 为偶，则只能用 $\int J_0 dx$ 表示

## 3.3 Bessel方程的固有值问题

考虑Bessel方程的固有值问题

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2) y = 0 \\ |y(0)| < +\infty \\ (\alpha y + \beta y')\big|_{x=a} = 0 \end{cases}$$

，$\alpha$ 和 $\beta$ 是不同时为零的非负常数

方程可写为 $(xy')' + (\lambda x - \dfrac{\nu^2}{x}) y = 0$

相应于 $k(x) = x,\ q(x) = \dfrac{\nu^2}{x},\ \rho(x) = x$ 时的Sturm-Liouville方程.

由Sturm-Liouville定理知，固有值问题有一列非负的固有值，设 $\lambda = \omega^2$.

Bessel方程的通解为：

$$y(x) = AJ_\nu(\omega x) + BN_\nu(\omega x).$$

由于 $N_\nu(x) \to \infty (x \to 0)$，故在自然边界条件 $|y(0)| < +\infty$ 下，只能有 $B = 0$，所以

$$y(x) = AJ_\nu(\omega x)$$

代入利用边界条件，得

$$\beta\omega J'_\nu(\omega a) + \alpha J_\nu(\omega a) = 0$$

其一定有无穷多解，设为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots\ldots$

则固有值问题的解为：
$$\begin{cases} \lambda_n = \omega_n^{\ 2} \quad (n = 1, 2, 3 \cdots) \\ y_n(x) = J_\nu(\omega_n x) \end{cases}$$

注意，由Sturm-Liouville定理知 $\{J_\nu(\omega_n x)\}_{n\geq 1}$ 为正交系，即：$\int_0^a x J_\nu(\omega_m x) J_\nu(\omega_n x) dx = 0 (m \neq n)$

为计算函数按正交系$\{J_\nu(\omega_n x)\}_{n\ge1}$进行级数展开的系数，我们先计算$\int_0^a xJ_\nu^2(\omega x)dx$

$y(x)=J_\nu(\omega x)$ 满足Bessel方程

$$x(xy')'+(\omega^2x^2-\nu^2)y=0$$

两边同乘 $2y'$得：

$$2xy'(xy')'+2(\omega^2x^2-\nu^2)yy'=0$$

可写为：

$$d(xy')^2+(\omega^2x^2-\nu^2)dy^2=0$$

从0到$a$积分，得

$$a^2\omega^2(J_\nu'(\omega a))^2+(\omega^2x^2-\nu^2)J_\nu^2(\omega x)\Big|_{x=0}^{x=a}-2\omega^2\int_0^a xJ_\nu^2(\omega x)dx=0.$$

$$\Longrightarrow\quad \int_0^a xJ_\nu^2(\omega x)dx=\frac{a^2}{2}(J_\nu'(\omega a))^2+\frac{1}{2}(a^2-\frac{\nu^2}{\omega^2})J_\upsilon^2(\omega a).$$

**可进一步写出它在三类齐次边界条件下的表达式：**

$$\int_0^a xJ_\nu^2(\omega x)dx = N_\nu^2 = \begin{cases} \dfrac{a^2}{2}J_{\upsilon+1}^2(\omega a) & \text{第一类边界条件} \\ \dfrac{1}{2}\left(a^2 - \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2}\right)J_\upsilon^2(\omega a) & \text{第二类边界条件} \\ \dfrac{1}{2}\left(a^2 - \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2} + \dfrac{a^2\beta^2}{\omega^2\alpha^2}\right)J_\upsilon^2(\omega a) & \text{第三类边界条件} \end{cases}$$

**例：** $\omega_n(n=1,2.....)$是$J_0(x)=0$的所有正根. 将 $f(x)=1-x^2(0<x<1)$ 展成 $\{J_0(\omega_n x)\}$ 的级数.

**解：** 设 $1-x^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_n J_0(\omega_n x)$，其中

$$C_n=\frac{\int_0^1 x\left(1-x^2\right)J_0(\omega_n x)\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}J_1^2(\omega_n)}$$

由于

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)xJ_0(\omega_n x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\omega_n{}^2}\int_0^{\omega_n}\left(1-\frac{t^2}{\omega_n{}^2}\right)tJ_0(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\omega_n{}^2}\int_0^{\omega_n}\left(1-\frac{t^2}{\omega_n{}^2}\right)\mathrm{d}\left(tJ_1(t)\right)=\frac{2}{\omega_n{}^4}\int_0^{\omega_n}t^2J_1(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{\omega_n{}^2}J_2(\omega_n)$$

从而

$$C_n=\frac{4}{\omega_n{}^2}\frac{J_2(\omega_n)}{J_1^2(\omega_n)}=\frac{4}{\omega_n{}^2}\frac{\frac{2}{\omega_n}J_1(\omega_n)-J_0(\omega_n)}{J_1^2(\omega_n)}=\frac{8}{\omega_n{}^3J_1(\omega_n)}$$

于是有：

$$1-x^2=8\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\omega_n x)}{\omega_n{}^3J_1(\omega_n)}$$

**例**：设有半径为$1$的圆形薄盘，上下两面绝热，圆盘边界上的温度始终保持为零，且圆盘上的初始温度分布为$1-r^2$，其中$r$为圆盘内任一点的极半径，求圆盘内的瞬时温度分布规律.

**解**：由初始条件和已知，解与辐角无关. 采用极坐标变换，得定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad 0\le r\le 1, t>0$$

$$u(r,0)=1-r^2$$

$$u(1,t)=0,$$

令 $u(r,t)=P(r)T(t)$　代入方程得：

$$P(r)T'(t)=a^2T(t)\left(P''(r)+\frac{1}{r}P'(r)\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{P''(r)+\frac{1}{r}P'(r)}{P(r)}=-\lambda(\lambda>0)$$

得固有值问题

$$\begin{cases} r^2\mathrm{P}'' + r\mathrm{P}' + \lambda r^2\mathrm{P} = 0 \\ \mathrm{P}(1) = 0,\ |\mathrm{P}(0)| < +\infty \end{cases}$$

固有值问题中泛定方程为0阶Bessel方程，其通解为：

$$\mathrm{P} = AJ_0(\beta r) + BN_0(\beta r)\ (\lambda = \beta^2 \geq 0)$$

由初始条件知 $B = 0$. 设 $J_0(r) = 0$ 的所有正根为 $\{\omega_n\}_{n\geq 1}$

则固有值问题的解为 $\begin{cases} \lambda_n = \omega_n^2 \\ P_n(r) = J_0(\omega_n r) \end{cases}$

同时 $T' + \lambda a^2 T = 0 \Longrightarrow T_n(t) = A_n e^{-a^2\omega_n^2 t}$

于是解为： $u=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\omega_n r)e^{-\omega_n{}^2a^2t}$

再代入初始条件有： $1-r^2=u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\omega_n r)$

由前例知： $C_n=\dfrac{8}{\omega_n{}^3J_1(\omega_n)}$

于是原定解问题的解为：

$$u=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\omega_n r)e^{-\omega_n{}^2a^2t}}{\omega_n{}^3J_1(\omega_n)}$$