捕捉分离变量法温柔气息

从数学物理方程课程整体内容看分离变量法

- 在数学物理方程这门课中，我们主要学习的内容分为两部分：
    - 偏微分方程的基本概念以及数学物理方程的建立
    - 常见的三类数学物理方程求解（二阶线性方程，后面内容默认只针对线性情况讨论）
- 求解方法主要有：
    - 行波法（基于此我们总结出一种称为通解法的思路）
    - 分离变量法（其中第三章特殊函数法辅助求解特殊固有值问题）
    - 积分变换法
    - 基本解方法
- 学习方法：
    - 问题类型、方程类型分类
        - 齐次方程、非齐次方程
        - 有界区域、半无界区域（例如半直线）、无界区域
        - 使用不同坐标系处理（比如球对称问题采用球坐标处理）
        - 非齐次发展方程（使用齐次化原理）
        - 齐次边界条件（使用分离变量的必要条件）、齐次初始条件（使用齐次化原理的必要条件）
        - 等等
    - 不同方法的适用类型（使用条件）
        - 行波法：一维无界区域波动方程(或者可以转化为一维无界区域波动方程，例如半直线问题)
        - 分离变量法：有界区域、齐次方程、齐次边界条件
        - 积分变换法：无界区域
        - 基本解方法：对于椭圆方程可以处理有界或无界区域，对于抛物和双曲方程，只能处理无界区域
    - 各种方法的具体操作
        - 行波法（基于此可以总结一种称为通解法的思路）：
            - 求解偏微分方程通解，得到未知函数表达形式
            - 将未知函数带入定解条件，得到未知函数满足的等式（方程），和已知函数建立联系，从而用已知函数表达未知函数
            - 利用已知函数对未知函数的表达，带入通解，得到定界问题的解
        - 分离变量法：
            - 分析方程，分离变量得到固有值问题以及其他的常微分方程
            - 求解固有值问题，得到固有函数系，并且将求得的固有值带入其他常微分方程求解
            - 对应项相乘得到级数表达的第 n 项，然后线性叠加，得到形式解
            - 通过定解条件确定级数形式的解中的系数

◆ 积分变换法和基本解方法在后续学习中再做讨论

➢ 分析不同方法之间的联系，从而得到对于整体内容结构的认识

◆ 基本的思路：转化和化归

◆ 借鉴以往所学内容中的思想：行波法（通解法）

◆ 转化为以往所学的熟悉的内容：分离变量法和积分变换法。这两种方法的核心想法都是希望可以把偏微分方程转化为常微分方程，只是采用不同的手段，适用于不同的类型（有界和无界，齐次和非齐次等等）

◆ 基于叠加原理，将微元法应用于求解方程：基本解方法

- **针对分离变量法中的思想和理解难点进行简要分析：**

✧ 分离变量法的思想：转化为我们熟悉的常微分方程进行求解

✧ 分离变量法的理论来源：

分离变量法又称 Fourier(傅里叶) 方法, 而在讨论波动方程时也称它为驻波法. 此法来源于物理学中如下的事实: 机械振动或电磁振动总可以分解为具有各种频率和振幅的简谐振动的叠加. 而每个简谐振动具有形式 $e^{i\omega(t+cx)} = e^{i\omega t}e^{ikx}$, $k = c\omega$, 这正是物理上所谓的驻波. 从数学角度看, 驻波就是只含变量 x 的函数与只含变量 t 的函数的乘积, 即具有变量分离的形式. 由此启发我们在解线性定解问题时, 可尝试先求出满足齐次方程和齐次边界条件的具有变量分离形式的解

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t),\ n = 1,2,\cdots,$$

然后把它们叠加起来, 记为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)T_n(t).$$

利用初始条件确定各项中的任意常数, 使其成为问题的解, 这个求解的方法叫**分离变量法**.

✧ 分离变量法的操作举例：

下面, 我们以两端固定的弦的自由振动为例介绍分离变量法. 此定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \geqslant 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{3.2.6}$$

其中, f, g 满足相容条件

$$f(0) = f(l) = 0,\quad g(0) = g(l) = 0.$$

分离变量法的步骤如下:

(1) 分离变量. 先求方程仅满足齐次边界条件的形如

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$$

的解. 将它代入方程并整理, 得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} \equiv \frac{X''(x)}{X(x)},\ X(x)T(t) \neq 0.$$

上式左端只是自变量 t 的函数, 而右端只是自变量 x 的函数. 因此, 当且仅当它们都是常数时恒等式成立, 记此常数为 $-\lambda$, 得

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,\ t > 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < l. \end{cases} \tag{3.2.7}$$

为使 $u(x,t)$ 满足边界条件, 只须要求 $X(0)=X(l)=0$ 即可.

(2) 解特征值问题. 即求使常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l, \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \tag{3.2.8}$$

有非零解的实数 λ 值及其解, 称这些 λ 值为问题 (3.2.8) 的**特征值**, 对应于 λ 的非零解 $X_\lambda(x)$ 叫做问题 (3.2.8) 的**特征函数**, 其全体组成**特征函数系**. 下面先求特征值.

(a) 当 $\lambda<0$ 时, 方程的通解为

$$X(x)=A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}+B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

代入边界条件, 得

$$\begin{aligned} &X(0)=A+B=0, \\ &X(l)=A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l}+B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l}=0. \end{aligned}$$

由此解得 $A=B=0$, 即 (3.2.8) 仅有零解, 故 $\lambda<0$ 不是其特征值.

(b) 当 $\lambda=0$ 时, 通解为 $X''(x)=0$, 代入边界条件后解得 $X(x)\equiv 0$, 所以, $\lambda=0$ 也不是特征值.

(c) 当 $\lambda>0$ 时, 若记 $\lambda=k^2(k>0)$, 则得方程的通解为

$$X(x)=A\cos kx+B\sin kx.$$

由边界条件 $X(0)=0$ 得 $A=0$, 再由 $X(l)=0$ 得 $B\sin kl=0$. 因求非零解, B 不能取为零, 故应有

$$k=\frac{n\pi}{l}\ \text{或}\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n=1,2,\cdots. \tag{3.2.9}$$

此即特征值问题 (3.2.8) 的特征值. 相应的非零解, 即特征函数是

$$X_n(x)=B\sin\frac{n\pi}{l}x,\ n=1,2,\cdots, \tag{3.2.10}$$

其中, B 是任意常数. 把 (3.2.9) 式的 λ_n 代入 (3.2.7) 的第一个方程, 解得

$$T(t)=C_n'\sin\frac{an\pi}{l}t+D_n'\cos\frac{an\pi}{l}t,$$

其中, C_n', D_n' 是任意常数.

于是, 函数

$$\begin{aligned} u_n(x,t)&=X_n(x)T_n(t) \\ &=\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \\ &\quad n=1,2,\cdots \end{aligned}$$

满足 (3.2.6) 中方程和边界条件. 其中, $C_n=BC_n'$, $D_n=BD_n'$ 是任意常数, 留待确定.

(3) 叠加所有 $u_n(x,t)$. 因为对每个 $u_n(x,t)$, 不能期望它满足问题 (3.2.6) 的初始条件, 故将它们叠加, 通过叠加原理求解. 令

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{3.2.11}$$

如果级数 (3.2.11) 一致收敛且关于 t 逐项微分后仍一致收敛, 则由初始条件得

$$\begin{aligned} u(x,0)&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x), \\ u_t(x,0)&=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=g(x). \end{aligned}$$

由 Fourier 级数理论知, 如果 f, g 有一阶连续微商且满足 $f(0)=f(l)=g(0)=g(l)=0$, 则 C_n, $D_n\frac{an\pi}{l}$ 就分别是 f, g 在区间 $[0,l]$ 上的正弦级数的系数, 于是

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \\ D_n &= \frac{2}{an\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

把它们代入 (3.2.11), 就得到问题 (3.2.6) 的解.

✧ 理解难点之存在性，即这样的级数解是否真的存在：

通过以上分析得到的解叫做形式解, 这是因为我们不知道级数 (3.2.11) 是否一致收敛, 是否可以逐项微分. 所以, 还须考虑对已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 附加什么条件后, 使以上的运算能合理地进行, 从而所得形式解的确是问题的解. 这个过程称为综合过程, 我们以定理的形式表述如下:

定理 3.2.1 (存在性) *若 $f\in C^4[0,l]$, $g\in C^3[0,l]$, 并且 f, f'', g 在 $x=0$ 和 $x=l$ 处取值为零, 则初边值问题 (3.2.6) 的古典解存在, 且可表示为级数 (3.2.11), 其中系数由 (3.2.12) 式确定.*

证明 由 (3.2.12) 中 C_n 的表达式出发, 连续四次用分部积分公式, 可得

$$C_n = \frac{2l^3}{n^4\pi^4}\int_0^l f^{(4)}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

于是

$$|C_n| \leqslant \frac{M_1}{n^4},$$

其中

$$M_1 = \frac{2l^3}{\pi^4}\int_0^l |f^{(4)}|\mathrm{d}x$$

是常数. 同理, $|D_n|\leqslant \frac{M_2}{n^4}$, 这里 M_2 也是常数. 记 $M=M_1+M_2$, 则有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(|C_n|+|D_n|) \leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}, \\ &\sum_{n=1}^{\infty}|(u_n)_t| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}(|C_n|+|D_n|) \leqslant \frac{Ma\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}, \\ &\sum_{n=1}^{\infty}|(u_n)_{tt}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{an\pi}{l}\Big)^2(|C_n|+|D_n|) \leqslant M\Big(\frac{a\pi}{l}\Big)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \\ &\sum_{n=1}^{\infty}|(u_n)_{xx}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^2(|C_n|+|D_n|) \leqslant M\Big(\frac{\pi}{l}\Big)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

由此可知, 由 (3.2.12) 所确定的级数 (3.2.11) 及其分别逐项微商一次、二次后所得的两个级数在闭域 $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant T$ 上绝对且一致收敛, 这里, T 是任意固定的正数. 所以, 形式解 (3.2.11) 的确是初边值问题 (3.2.6) 的古典解. □

值得注意的是, 这里对 f 和 g 所加的条件是很强的. 尽管通过细致的讨论可使条件减弱, 如 $f\in C^3[0,l], g\in C^2[0,l]$, 但还不能适合实际问题所提出的数据往往是分段光滑的情况. 解决这一问题的办法是, 类似上一节, 引进弱解, 就可以把形式解看作问题 (3.2.6) 的弱解. 这样做, 既扩充了解的概念, 又适应了实际问题的要求.

✧ 理解难点之固有函数系上展开：
分离变量法的本质是在线性空间中寻找一组基，即完备的固有函数系，进而将解、定解条件都在固有函数系上展开，比较对应项的系数得到解

的展开式系数。这里就涉及到一个重要的理论支持，即施刘定理。
施刘定理告诉我们：
在满足一定条件（比如有界区域，施刘方程的各项系数满足对应条件）时，可数个非负的固有值对应着完备的正交固有函数系，进而，任何函数（特别地，方程的解、定解条件）可以在其上展开得到收敛的级数表达形式。这样，我们的求解方法是有效的。
由此分析，我们之后可以更轻松地理解，在分离变量法处理非齐次方程的时候的一类方法：固有函数展开法。

- 理解难点之系数求解：
  - 正交性：加权正交，积分形式的表达（这也是为什么我们求解系数的公式是一个积分形式的表达）
  - 我们上面分析，求解过程实际上是把解和定解条件都在得到的固有函数系上展开，然后进行求解。求解的过程就转化为了求解方程解的级数表达的系数的问题。
  - 怎么求解系数：对应项比较，即解的第 n 项和定解条件第 n 项比较
  - 怎么操作：
    - 既然想比较第 n 项，那一定要想办法把第 n 项从解和定解条件对应函数中提取出来。
    - 在求解过程中，我们已经把解写出了级数形式，自然不难写出第 n 项的系数（其实我们就是要求解这个东西）。
    - 定解条件如果直接写成级数表达（可能有时候定解条件就是级数中的一项），那自然方便，可以直接比较。
    - 如果定解条件没有写成级数表达形式，那么我们需要提取出第 n 项。怎么提取呢？我们想象，把定解条件自己写成级数表达形式，这个时候系数是未知的。我们利用固有函数系的正交性，在等式两边同时乘以固有函数第 n 项以及权值函数，并进行加权积分，这样，由于正交性，其他项的积分结果为 0，相当于只有第 n 项参与运算，这样，我们就得到了第 n 项的系数。