极坐标下的$\triangle_2 u = 0$的边值问题

问题：考虑无限长圆柱体内部稳态温度分布场$u(x, y, z)$. 其内部无热源，边界温度为 $F(x, y)$.

- 由圆柱的对称性以及柱面温度分布于z无关，可设柱内温度分布为$u(x, y)$.
- 设圆柱体为：$x^2 + y^2 < a^2$, $-\infty < z < \infty$.
- 柱内温度分布$u(x, y)$满足2维Laplace方程第一边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (r = \sqrt{x^2 + y^2} < a) \\ u|_{r=a} = F(x, y). \end{cases}$$

- 原边界条件不适合直接用分离变量法.

- 采用极坐标形式, 即作变元代换 $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$ ， 定解问题变为：

$$\begin{cases} r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \left(r < a, \theta \in [0, 2\pi]\right) \\ u|_{r=R} = F(a\cos\theta, a\sin\theta) = f(\theta). \end{cases} \tag{1}$$

- 下面用分离变量法求解上述问题.

1：分离变量

- 令$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$,代入泛定方程(1)得

$$r^2R''\Theta+rR'\Theta+R\Theta''=0,$$

两边同除$u=R\Theta$,则有

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda(\text{常数}).$$

- 泛定方程分解成两个常微分方程: $\begin{cases} r^2R''+rR'-\lambda R=0 \\ \Theta''+\lambda\Theta=0 \end{cases}$
- 注意到函数$\Theta(\theta)$以2π为周期, 即

$$\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi)$$

可得固有值问题：

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0 \\ \Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi) \end{cases}$$

2：解固有值问题

1. $\lambda = -k^2 < 0(k > 0)$

   方程通解为：$\Theta(\theta) = Ae^{k\theta} + Be^{-k\theta}$.
   显然，此解不具有周期性，除非$A = B = 0$.

2. $\lambda = 0$

   方程通解为：$\Theta = A\theta + B$.
   考虑周期性边条件,得$A = 0, \Theta = B = constant$.

3. $\lambda = k^2 > 0(k > 0)$.

   方程通解为：$\Theta = C\cos k\theta + D\sin k\theta$. 由周期性边条件有

$$C\cos k(\theta + 2\pi) + D\sin k(\theta + 2\pi) = C\cos k\theta + D\sin k\theta$$

k取非负整数.

固有值和固有函数（小结）

- 固有值问题

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi), \end{cases} \tag{1}$$

- 固有值为

$$\lambda_k = k^2, k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

- 固有函数为

$$\begin{cases} \Theta_0(\theta) = \dfrac{C_0}{2} \\ \Theta_k(\theta) = C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta \end{cases}$$

解关于R的方程：

- 把λ_k代入关于R的方程：

$$\lambda_0 = 0: \qquad r^2 R_0'' + rR_0' = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \neq 0: \qquad r^2 R_k'' + rR_k' - k^2 R_k = 0.$$

- 此为 Euler 方程，令$t = \ln r$，将之变为常系数方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 R_0}{\mathrm{d}t^2} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 R_k}{\mathrm{d}t^2} - k^2 R_k = 0. \end{cases}$$

- 这两个常微分方程的解为

$$\begin{cases} R_0(r) = A_0 + B_0 t = A_0 + B_0 \ln r, \\ R_k(r) = A_k e^{kt} + B_k e^{-kt} = A_k r^k + B_k r^{-k} \end{cases}$$

3：特解

$$\begin{cases} \Theta_0(\theta) = \dfrac{C_0}{2} \\ \Theta_k(\theta) = C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} R_0(r) = A_0 + B_0 t = A_0 + B_0 \ln r, \\ R_k(r) = A_k e^{kt} + B_k e^{-kt} = A_k r^k + B_k r^{-k} \end{cases}$$

- 由问题的物理实际，$u(x,y)$需满足有界性: $|u(x,y)| < +\infty$.
- 当$r \to 0$时,$R(r)$的解中$\ln r$和r^{-k}趋于无穷，故 $B_k = 0, k \geq 0$
- 满足方程、周期条件和有界性条件的特解为

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{C_0}{2} \\ u_k = r^k(C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta), \quad k \geq 1 \end{cases}$$

定叠加系数

设u有级数解

$$u(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)$$

代入定解问题的边条件$u(r,\theta)|_{r=a}=f(\theta)$, 可得

$$\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a^k(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)=f(\theta)$$

这其实就是将以2π为周期的函数$f(\theta)$展成Fourier级数！

Fourier 级数

- 以2π为周期的函数$f(\theta)$可以展成Fourier级数

$$f(\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a^k (C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta)$$

- 其中Fourier系数

$$C_k = \frac{1}{a^k \pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

同理,

$$D_k = \frac{1}{a^k \pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

结论：

- 所求定解问题的形式解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{r}{a})^k\cos k(\varphi-\theta)\right)d\varphi$$

- 当函数$f(\theta)$是圆周上的连续函数时，可以验证上面求得的形式解就是古典解.

扩展

圆外问题

- 当考虑圆外问题时,半径r可以趋向于$+\infty$. 此时，有界性条件推出：$A_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, .$
- 满足方程、周期条件和有界性条件的特解为

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{C_0}{2} \\ u_k = r^{-k}(C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta), \quad k \geq 1. \end{cases}$$

- 定解问题的形式解为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^k \cos k(\varphi - \theta) \right) d\varphi$$

圆环内问题

- 设$a_1 < r < a_2$，半径r既不会趋于零，也不会趋于$+\infty$.

- 定解问题的形式解为

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k})(C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta)$$

其中$A_0, B_0, A_k, B_k, C_k, D_k$都可由边界条件以及Fourier系数公式确定.