

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

则 $A_{11} = 0, A_{12} = 0$, 方程化简为

$$u_{\eta\eta} + \Phi_1 = 0 \quad (8-30)$$

此为抛物型方程的标准形式。

(3) 二阶常系数偏微分方程的进一步简化: 对于已具有标准形式的二阶常系数的偏微分方程, 若作函数代换

$$u(x, y) = e^{\lambda x + \mu y} v(x, y) \quad (\lambda, \mu \text{ 为待定常数}) \quad (8-31)$$

将 $u(x, y)$ 的方程变换为 $v(x, y)$ 的方程, 则可适当选取 λ, μ , 使关于 v 的方程中不出现一阶偏导项 v_x 和 v_y 。标准形式为

$$\text{双曲型} \quad \begin{cases} v_{xy} + \alpha v + \beta = 0 \\ v_{xx} - v_{yy} + \alpha v + \beta = 0 \end{cases} \quad (8-32)$$

$$\text{抛物型} \quad v_{xx} + \alpha v + \beta = 0 \quad (8-33)$$

$$\text{椭圆型} \quad v_{xx} + v_{yy} + \alpha v + \beta = 0 \quad (8-34)$$

二、解题指导

1. 导出数学物理偏微分方程

(1) 数学物理方程都是根据基本物理规律推导出来的。不同的物理问题遵循不同的物理规律。因此, 对于一个物理问题, 首先要弄清楚它属于物理学那一个分支, 它所遵循的是哪一些基本物理定律。这样, 推导数理方程才有正确的依据和出发点。

(2) 推导数学物理方程一般有三种方法: 微元分析法, 有限体积分析法和演绎法。

① 微元分析法是在系统中划出一“微元”, 将有关的物理定律用于这一“微元”, 建立它的运动方程。然后取趋向于无穷小的极限, 保留最低阶小量, 略去较高阶小量, 就可得到所需的偏微分方程。

② 有限体积分析法是在系统中划出一个有限大小的体积, 将质量守恒、粒子数守恒、电荷守恒等守恒定律用于此有限体积, 从而建立起积分方程, 然后利用化面积分为体积分的高斯定律或化线积分

为面积分的斯托克斯定律,将积分方程的各项化为相同维数的积分,就可以由被积函数构成的等式得到所需要的偏微分方程。

③演绎法就是将对象的具体条件直接用于基本定律,用逻辑演绎的方法得到所需的方程。例如,我们从麦克斯韦尔方程组就可以推演出真空中电磁波传播时所遵循的波动方程。有时,我们所要的数学物理方程就是基本定律给出的场方程。

[例 1] 长为 l 的柔软匀质轻绳,一端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上,由于惯性离心力的作用,此绳的平衡位置为水平线。试推导此绳相对于水平线作横向微振动的方程。

解:此为振动问题,应以牛顿运动定律作为推导的依据和出发点。题中“柔软”一词,意指绳中各点的张力 $T(x)$ 均沿其切线方向,“匀质”系指绳子的线质量密度 ρ

为一常数,“轻绳”是指 ρ 的值小,但是一切与牛顿第二运动定律有关的问题,质量是不能忽略的。

现用微元法推导方程。截取一微元,端点坐标为 $x, x+\Delta x$; 横振动用横向位移 $u(x, t)$ 来描述。按牛顿运动定律,可列出微元的运动方程:

$$T(x)\cos\alpha_2 - T(x + \Delta x)\cos\alpha_1 = (\rho\Delta s)\omega^2 x$$

$$T(x + \Delta x)\sin\alpha_1 - T(x)\sin\alpha_2 = (\rho\Delta s)u_{xx}$$

下一步是在 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限下化简上述方程:

$$\textcircled{1} \because \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}$$

在微振动近似下, $\frac{\Delta u}{\Delta x} \ll 1$, $\therefore \Delta s \approx \Delta x$ 。

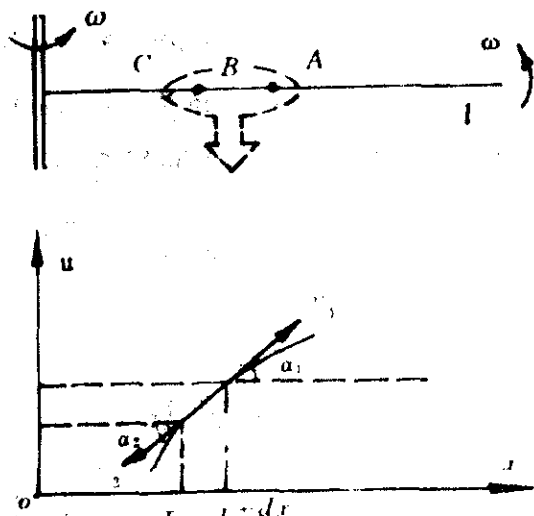


图 8-1

②在微振动近似下, $\alpha_1 \approx 0, \alpha_2 \approx 0$, 则有 $\cos \alpha_1 \approx 1, \sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = u_x|_{x+\Delta x}, \sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = u_x|_x$ 。将上述简化代入微元运动方程, 得到

$$-dT = \rho \omega^2 x dx$$

$$d(Tu_x) = \rho u_{xx} dx$$

由第一式, 并利用条件 $T(l) = 0$, 解得

$$T = \int_x^l \rho \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (l^2 - x^2)$$

代入第二式即得所需要的偏微分方程

$$\frac{1}{2} \omega^2 \frac{d}{dx} [(l^2 - x^2) u_x] = u_{xx}$$

[例 2] 电阻率为 γ 的匀质导体, 通有均匀分布的直流电流, 电流密度为 j 。试推导导体内的热传导方程。

解: 本题涉及到能量守恒、焦耳—楞次定律和傅里叶热传导定律。傅里叶热传导定律指出, 沿某方向 n 的热流强度 q (单位时间通过单位面积的热量), 与沿此方向的温度梯度大小成正比, 方向相反。若用 $u(x, y, z; t)$ 表示温度, k 表示热传导系数, 则 $q_n = -k \frac{\partial u}{\partial n}$ 。

现用微元法推导方程。在系统中取出体积元 $dx dy dz$, 写出体积元内的热平衡关系。

①流入体积元的热量:

由 $ABCD$ 面流入的热量为: $-k \frac{\partial u}{\partial x} |_x dy dz dt$

由 $EFGH$ 面流入的热量为: $-(-k \frac{\partial u}{\partial x})|_{x+dx} dy dz dt$

\therefore 沿 x 轴方向流入的总热量为

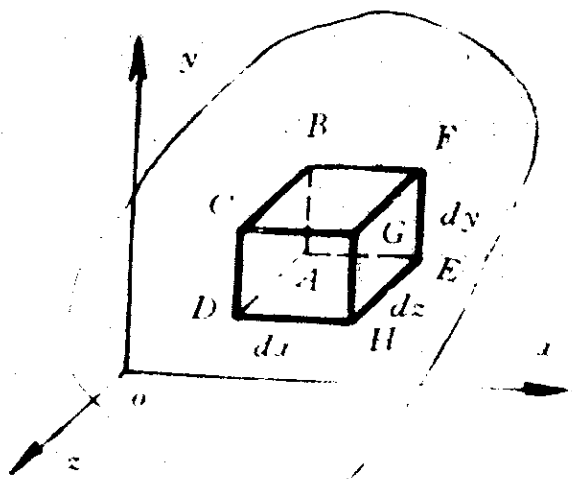


图 8-2

$$\begin{aligned} & \left[\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+dx} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_x \right] dydzdt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dydzdt \end{aligned}$$

同理可得沿 y 方向和 z 方向流入的热量分别为:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dydzdt$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial u}{\partial z} \right] dx dydzdt$$

② 体积元内产生的焦耳热: 假定电流沿 x 轴方向, 则 $I = j dydz$, $R = \gamma \frac{dx}{dydz}$ 。所以焦耳热为:

$$I^2 R dt = (j dydz)^2 \cdot \gamma \frac{dx}{dydz} dt = j^2 \gamma dx dydzdt$$

③ 体积吸收热量引起的温度的升高: 在 $t \rightarrow t + dt$ 时间内, 温度的变化率为 $\frac{\partial u}{\partial t}$, 温度的升高量为 $u_t dt$, 总共吸收的热量为 $cp(u_t dt) dV = cp u_t dx dydzdt$ 。

根据上列三项, 可列出方程:

$$\begin{aligned} cp u_t dx dydzdt &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dx dydzdt \\ &+ j^2 \gamma dx dydzdt \end{aligned}$$

注意到导体是匀质的, 故 k 为常数, 由上式立得

$$cp u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + j^2 \gamma$$

[例 3] 试推导均匀圆杆的扭转方程。假设杆的半径为 R , 切变模量为 N 。

解: 取微元 $x \rightarrow x + dx$ 为研究对象。设圆杆 x 处的截面相对于 $x = 0$ 端的角位移为 $\theta(x, t)$, 则根据刚体动力学的转动定理有

$$M \Big|_{x+dx} - M \Big|_x = I dx \theta_{tt}$$

这里 I 是匀质杆单位长度的轴转动惯量, M 为扭转力矩, 它是 x 的函数。

现在求扭转力矩 M 。取一圆筒状薄层 $r \rightarrow r+dr$ ($0 \leq r < R$)。此薄层在 x 处的截面相对于 $x=0$ 端移动了 $r\theta$ 距离, 产生的切变为 $\frac{r\theta}{x}$ 。设切力为 dF , 则切应力为 $\frac{dF}{S} = \frac{dF}{2\pi r dr}$ 。根据切变模量的定义, 有

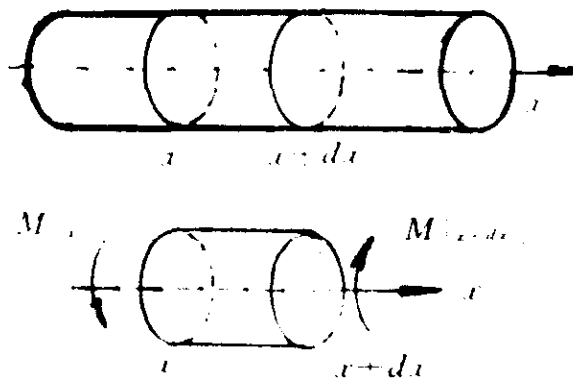


图 8-3

$$N = \frac{dF}{2\pi r dr} / \frac{r\theta}{x}$$

$$\therefore dF = \frac{2\pi N\theta}{x} r^2 dr$$

故
$$dM = r dF = \frac{2\pi N\theta}{x} r^3 dr$$

$$M = \int_0^R \frac{2\pi N\theta}{x} r^3 dr = \frac{\pi N R^4 \theta}{2x}$$

由于扭转是均匀的, 则 $\frac{\theta}{x} = \theta_x$ 。故有

$$M = \frac{\pi N R^4}{2} \theta_x$$

代入转动方程, 得

$$\frac{\pi N R^4}{2} (\theta_x|_{x+dx} - \theta_x|_x) = I dx \theta_{xx}$$

$$\therefore \frac{\pi N R^4}{2} \left[\frac{\theta_x|_{x+dx} - \theta_x|_x}{dx} \right] = I \theta_{xx}$$

令 $dx \rightarrow 0$, 立得所需的方程

$$\theta_{xx} - \frac{\pi N R^4}{2I} \theta_{xx} = 0$$

[例 4] 考察沿一细长棒的热流, 若棒的热量由放射衰变而有损失, 且其所损失的热量正比于 $e^{-\alpha x}$, 试建立 $u(x, t)$ 所满足的方程。

解: 设杆的截面积为 A , 单位体积、单位时间内因放射性衰变所

损失的热量为 $\beta e^{-\alpha x}$ (β 为常数)。

今取体积元 Adx 作为研究对象。

在 dt 时刻中净流入该体积元的热量为

$$Q_1 = \left[-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x - \left(-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} \right) \right] \cdot Adt \quad \text{图 8-4}$$

式中 k 为热传导系数。而因衰变所损失的热量为

$$Q_2 = \beta e^{-\alpha x} Adxdt$$

另一方面,因温度的升高,在 dt 时间所消耗的热量为

$$Q_3 = c\rho Adx \cdot u_t dt$$

由热的平衡方程 $Q_3 = Q_1 - Q_2$ 可得

$$c\rho u_t Adxdt = [ku_x|_{x+dx} - ku_x|_x]Adt - \beta e^{-\alpha x} Adxdt$$

两边消去 Adt ,除以 dx 后并取极限 $dx \rightarrow 0$,得到

$$c\rho u_t = ku_{xx} - \beta e^{-\alpha x}$$

[例 5] 试导出理想流体的连续方程。

解:在流体所在空间任取一有限大小的空间区域 Ω ,其界面用 Σ 表示。由连续性可得

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dv = - \oint_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$$

式中 \vec{V} 是流体的速度, $d\vec{\sigma}$ 是面积元矢量。

假定空间区域 Ω 不随时间变化,则

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dv = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

又由高斯定理,有

$$\oint_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) dv$$

于是连续性可由下式表示

$$\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dv = 0$$

考虑到空间区域 Ω 的任意性,得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

此即为理想流体的连续方程。对于无旋的流体,存在速度势 Φ ,使得

$$\vec{V} = \nabla \Phi$$

则连续方程成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla \Phi) = 0$$

若 $\rho = \text{常数}$,则进一步简化为

$$\Delta \Phi = 0 \quad (\nabla^2 \equiv \Delta)$$

此式表明不可压缩理想流体作无旋流动时,其速度势满足拉普拉斯方程。

[例 6] 试用哈密顿原理导出弦振动方程。

解:设弦长为 l ,沿 x 轴放置,弦中张力为 T ,线密度为 ρ 。现在其上任取一段 dx ,相应的弧长为 ds ,这段弦的动能为

$$dK = \frac{1}{2}(\rho dx)u_t^2$$

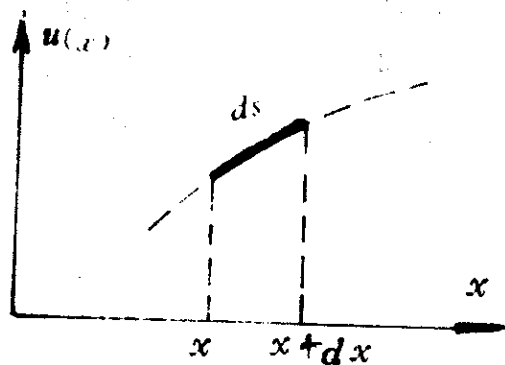


图 8-5

位能为

$$\begin{aligned} dV &= T(ds - dx) = T(\sqrt{(dx)^2 + (du)^2} - dx) \\ &= T(dx \sqrt{1 + u_x^2} - dx) \\ &\approx T(dx + \frac{1}{2}u_x^2 dx - dx) = \frac{1}{2}Tu_x^2 dx \end{aligned}$$

所以拉格朗日密度为 $\mathcal{L} = \frac{dK - dV}{dx} = \frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}Tu_x^2$

整个弦的拉格朗日函数为

$$L = \int_0^l \mathcal{L} dx = \int_0^l (\frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}Tu_x^2) dx$$

哈密顿原理是指

$$\delta \int L dt = \delta \iint \frac{1}{2} \rho (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt = 0 \quad (a^2 \equiv T/\rho)$$

其微分形式是欧拉方程。注意到 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_t, u_x)$, 所以欧拉方程的形式为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right)$$

将 \mathcal{L} 的表示式代入, 知欧拉方程的显式为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

此即弦振动方程。

[例 7] 一张四周固定张紧了的柔软的均匀薄膜, 膜上的张力 T 为常数。如果膜上有外力作用, 每单位面积上的力为 $F(x, y; t)$, 膜的面质量密度为 ρ , 试推导薄膜横向微振动方程。

解: 在薄膜上取一面积元 $dxdy$, 设薄膜的横向位移为 $u(x, y; t)$, 则其动能为

$$dK = \frac{1}{2} (\rho dxdy) u_t^2$$

位能为

$$\begin{aligned} dV &= T(d\sigma - dxdy) + (F dxdy)u \\ &= T(dxdy \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - dxdy) + F u dxdy \\ &\approx \left[\frac{1}{2} T(u_x^2 + u_y^2) + Fu \right] dxdy \end{aligned}$$

所以拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \frac{dK - dV}{dxdy} = \frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} T(u_x^2 + u_y^2) - Fu$$

整个膜的拉格朗日函数为

$$L = \iint \mathcal{L} dxdy = \iint \left[\frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} T(u_x^2 + u_y^2) - Fu \right] dxdy$$

哈密顿原理是指

$$\delta \int L dt = \delta \iiint \left[\frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} T(u_x^2 + u_y^2) - Fu \right] dx dy dt = 0$$

其微分形式就是欧拉方程。注意到 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_x, u_y, u_t)$, 我们有

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} \right)$$

此即

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y; t)$$

式中

$$a^2 = T/\rho, \quad f(x, y; t) = F(x, y; t)/\rho$$

2. 定解条件的确定

(1) 要根据方程的形式明确需要哪些初始条件。一般地说, 对时间的偏导达到二次的, 要给出两个初始条件: $u|_{t=0}$ 和 $u_t|_{t=0}$; 当对时间偏导只有一次时, 只需给出一个初始条件 $u|_{t=0}$ 。若方程的非齐次项为时间的周期函数, 或边界条件是时间的周期函数, 在考虑方程的稳态解时 ($t \rightarrow \infty$ 的极限下), 可以不提初始条件。

(2) 边界条件一般有三种类型, 要认清对不同的物理问题三种边界条件的物理意义。当方程中出现对空间坐标的高阶偏导时, 会出现其它类型的边界条件。对无界区不提边界条件。

(3) 对二阶偏微分方程来说, 衔接条件一般有两个, 分别给出 $u|_{x=x_0^+}$ 与 $u|_{x=x_0^-}$ 的关系以及 $u_x|_{x=x_0^+}$ 与 $u_x|_{x=x_0^-}$ 的关系。导出衔接条件时要正确使用相关的物理定律。

(4) 对于不提边界条件的无界区的解, 一般要附加以有界条件, 或周期条件。例如量子力学中薛定格方程的解, 要求有限 (平方可积)、连续、可微。

[例 8] 试就下列两个问题举例说明三类边界条件: (1) 一维均匀细杆的纵振动; (2) 一维细杆的热传导。

解: (1) 一维杆的纵振动: 设杆的截面积为 s , 纵位移为 $u(x, t)$ 。

① 第一类边界条件: 设已知边界点 $x=0$ (或 l) 处的位移规律为 $f(t)$, 则

$$u(x, t)|_{x=0} = u(0, t) = f(t)$$

若边界点固定, 则

$$u(u, t)|_{x=0} = u(0, t) = 0$$

②第二类边界条件:设在 $x=0$ 处受一 x 正方向上的力 $F(t)$, 该力的作用效果是使杆压缩。根据虎克定律, 胁强为 $\frac{F(t)}{s}$, 它与相对压缩(单位长度的压缩量) $\frac{u(0, t) - u(0+dx, t)}{dx} \rightarrow -u_x(0, t)$ 成正比

$$\frac{F(t)}{s} = Y[-u_x(0, t)]$$

(Y 为杨氏模量)。所以, 边界条件为

$$u_x(0, t) = -F(t)/Ys$$

若 $x=0$ 端为自由端(不受外力作用), 则

$$u_x(0, t) = 0$$

对于 $x=l$ 端, 情况略有不同。设外力 $F(t)$ 仍沿 x 正方向, 该力对杆的作用效果是使杆伸长, 所以胁强 $\frac{F(t)}{s}$ 应与相对伸长 $\frac{u(l, t) - u(l-dx, t)}{dx} \rightarrow u_x(l, t)$ 成正比, 即

$$\frac{F(t)}{s} = Yu_x(l, t)$$

$$\therefore u_x(l, t) = F(t)/Ys$$

若 $x=l$ 为自由端(外力 $F(t)=0$), 则

$$u_x(l, t) = 0$$

③第三类边界条件: 设 $x=0$ 端有弹性支座, 当 $u(0, t)=0$ 时, 弹簧的伸长为零。弹簧的弹性系数为 k 。若 $x=0$ 处的位移为 $u(0, t)$, 这时弹簧对杆的作用力为 $ku(0, t)$, 且向左(x 的负方向), 相当于 x 的正方向的力为 $-ku(0, t)$, 根据第二类边界条件的讨论, 知

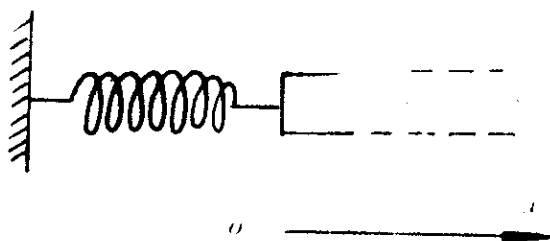


图 8-6

$$\frac{-ku(0,t)}{s} = -Y u_x(0,t)$$

$$\therefore u(0,t) - \frac{Ys}{k} u_x(0,t) = 0$$

不难推得,对 $x=l$ 点有弹性支座的情况,边界条件为

$$u(l,t) + \frac{Ys}{k} u_x(l,t) = 0$$

(2)一维细杆热传导:用 $u(x,t)$ 表示温度。

①第一类边界条件:设已知边界点 $x=0$ 的温度变化规律为 $f(t)$,则

$$u(x,t)|_{x=0} = u(0,t) = f(t)$$

若边界点保持恒温 u_0 ,则

$$u(0,t) = u_0$$

若边界点保持零度,则

$$u(0,t) = 0$$

②第二类边界条件:因热流强度 $q_x(t) = -k \frac{\partial u}{\partial n}$ (k 为热传导系数, \vec{n} 为热流方向,于是在 $x=0$ 端,热流 $q(t)$ 为流入时, \vec{n} 与 x 同方向,则 $u_x(0,t) = -q(t)/k$,若热流 $q(t)$ 为流出时, \vec{n} 与 x 反向,则 $u_x(0,t) = q(t)/k$ 。而在 $x=l$ 端,热流 $q(t)$ 为流入时, \vec{n} 与 x 反向,则 $u_x(l,t) = q(t)/k$,当热流 $q(t)$ 为流出时, \vec{n} 与 x 同向,则 $u_x(l,t) = -q(t)/k$ 。总之,若约定 $q(t) > 0$ 表示沿 x 方向, $q(t) < 0$ 为负 x 方向,则边界条件为

$$u_x(0,t) = -q(t)/k$$

$$u_x(l,t) = -q(t)/k$$

若约定 $q(t) > 0$ 表示流入, $q(t) < 0$ 表示流出,则

$$u_x(0,t) = -q(t)/k$$

$$u_x(l,t) = q(t)/k$$

若端点绝热,意即 $q(t) = 0$,第二类边界条件则取齐次形式:

$$u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0$$

③第三类边界条件:若杆的端点自由冷却,即杆端和周围介质(温度 u_0)按牛顿冷却定律交换热量,从杆端流出的热流强度和杆端与周围介质的温度差成正比,则在 $x=0$ 端,流出的热流强度 $q(t) = ku_x(0, t)$ 与温差 $(u(0, t) - u_0)$ 成正比,即 $ku_x(0, t) = h[u(0, t) - u_0]$, h 为杆端与周围介质的热交换系数。该式亦可表示为

$$u(0, t) - Hu_x(0, t) = u_0 \quad (H = k/h)$$

同样可得到对 $x=l$ 端的第三类边界条件为

$$u(l, t) + Hu_x(l, t) = u_0$$

不难看出,在 $h \gg k$ 时, $H \approx 0$, 第三类边界条件就退化为第一类边界条件: $u(0, t) = u_0, u(l, t) = u_0$ 。

[例 9] 一杆由截面相同的两段连接而成,两段的材料不同,杨氏模量分别为 Y^I, Y^{II} , 密度分别为 ρ^I, ρ^{II} 。试写出杆纵振动的衔接条件。

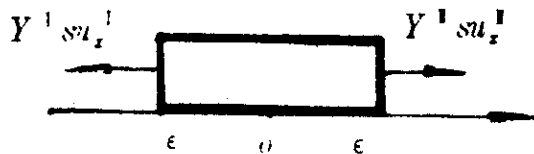


图 8-7

解:设衔接点为 $x=0$ 。由于该点两侧的位移应相等,可写出第一个衔接条件:

$$u^I(x=0^-, t) = u^{II}(x=0^+, t)$$

考虑到振动方程含 u_{xx} , 因此还要对 u_x 提出衔接条件。在 $x=0$ 的两侧截下两截面 $x=0-\epsilon, x=0+\epsilon$, 对该 2ϵ 厚的薄片列运动方程。在左侧, 受到张力为 $Y^I s \frac{\partial u^I}{\partial x} \big|_{x=0-\epsilon}$, 方向向左, 在右侧, 受到张力为 $Y^{II} s \frac{\partial u^{II}}{\partial x} \big|_{x=0+\epsilon}$, 方向向右, 若该微元的质量为 dm , 加速度为 u_{tt} , 则有

$$Y^{II} s u_x^{II} \big|_{x=0+\epsilon} - Y^I s u_x^I \big|_{x=0-\epsilon} = u_{tt} dm$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 显然 $dm \rightarrow 0$, 所以

$$Y^I u_x^I \big|_{x=0^+} = Y^{II} u_x^{II} \big|_{x=0^-}$$

此即所要的第二个衔接条件。

[例 10] 半径为 R , 表面熏黑的金属长圆柱, 受到阳光照射。阳光方向垂直于柱轴, 热流强度为 M 。写出这个圆柱的热传导问题的边界条件。

解: 现作一截面进行分析。考察界面上一点 $A(R, \varphi)$, 经过 A 点的热流有两部分: 一部分是由于在圆柱内部近界面处存在温度梯度而引起的热流, 写为

$$q_r = -k \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}, (k \text{ 为热传导系数})$$

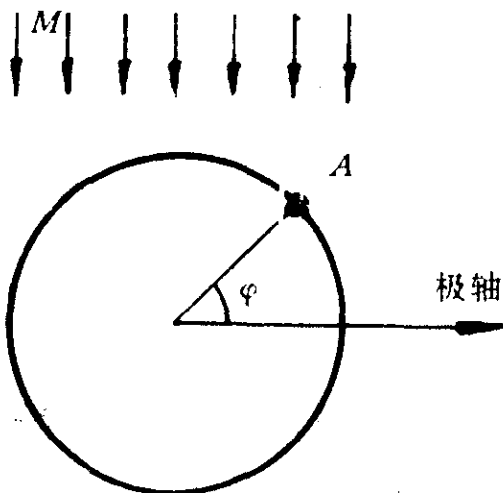


图 8 8

该热流方向与 \vec{n}_r 同向(向外); 另一部分是阳光照射贡献的, 在 A 点处的热流 M 可分解为

$$M_r = M \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$M_\varphi = M \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

前者沿 $(-\vec{n}_r)$ 方向, 后者沿 $(-\vec{n}_\varphi)$ 方向, 由于圆柱表面熏黑, 对 M_φ 部分将全部吸收。这样沿 \vec{n}_r 方向向外的总热流为

$$q_r - M_r = -k \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} - M \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

根据牛顿冷却定律, 得到

$$-k \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} - M \sin \varphi = h(u|_{\rho=R} - u_0)$$

u_0 为周围的温度。此式亦可写为

$$u_r(R, \varphi) + Hu(R, \varphi) = -q \sin \varphi + Hu_0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

式中 $H = h/k$, $q = M/k$ 。对于不受阳光照射的部分, 则可在上式中令 $q = M/k = 0$ 得到

$$u_r(R, \varphi) + Hu(R, \varphi) = Hu_0 \quad (\pi \leq \varphi \leq 2\pi)$$

[例 11] 写出静电场中不同介质界面处的衔接条件。

解: 这里用上标 I、II 标记两种介质的相应的量。根据电场的性