

中国科学技术大学

2014-2015 学年第二学期

数理方程 B 毕业班期末试卷

按照真题整理, 仅供学习交流使用

一、(6 分) 设 $u = u(x, y)$, 求方程 $u_{xy} = x^2y$ 的通解.

二、(12 分)

(1) 解固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda x = 0 & (0 < x < 5) \\ X'(0) = X(5) = 0 \end{cases}$$

(2) 把方程 $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$ 化成施刘型方程.

三、(20 分)

(1) 用分类变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (t > 0, a > 0, 0 < x < \pi) \\ u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

(2) 求 $\varphi(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \psi(x) = \delta(x - 3)$ 时定解问题的解.

2020 春数理方程 08 班

四、(12 分) 求解非齐次定解问题

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & (t > 0, 0 < x < 1) \\ u(t, 0) = 0, u(t, 1) = 1 \\ u(0, x) = \varphi(x) + x \end{cases}$$

2020 春数理方程 08 班

五、(14 分) 采用球坐标, 求轴对称情形下三维球外边值问题 (提示: 需用勒让德多项式).

$$\begin{cases} \Delta_3 u(r, \theta) = 0 & (r > R, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ u|_{r=R} = \sin^2 \theta, u|_{r=+\infty} = 0 \end{cases}$$

2020 春数理方程 08 班

六、(14 分) 用分离变量法, 求柱坐标下轴对称边值问题.(提示: 需用贝塞尔方程和贝塞尔函数)

$$\begin{cases} \Delta_3 u(r, z) = 0 & (0 \leq r < a, 0 < z < d) \\ u|_{z=0} = f(r), u|_{z=d} = 0 \\ u_r|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

2020 春数理方程 08 班

七、(12 分) 设八分之一空间 $V = \{(x, y, z) \mid 0 < y < x\}$, 利用镜像法求 V 内场势方程第一边值问题的格林函数.

八、(10 分) 求解初值问题

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt} + 2u_t + u & (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

备注：参考公式过于模糊，只能大概辨识，包括：三类坐标系下拉普拉斯算子表达，贝塞尔方程、通解以及三类编辑条件对应模长公式，勒让德方程、勒让德多项式定义以及模长，傅里叶变换公式.