doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2016.06.008

拉普拉斯反变换的计算

滕岩梅
（北京航空航天大学 数学与科学学院，北京 100191）

摘　要　在工程以及其它应用领域中常遇到求拉普拉斯反变换的问题.本文将拉普拉斯变换与它在工程中应用相结合，详细介绍了计算拉普拉斯反变换的几种有趣且行之有效的方法.

关键词　拉普拉斯反变换；留数；部分分式；卷积

中图分类号　O177.6　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2016)06-0020-02

Computation of Inverse Laplace Transform

TENG Yanmei
(School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, PRC)

Abstract　In the engineering and other applied fields, the problem of inverse Laplace transform is often encountered. In this paper, the Laplace transform and its application in engineering are linked to introduce in detail some interesting and effective methods for the computation of inverse Laplace transform.

Keywords　inverse Laplace transform; residue; partial fraction; convolution

拉普拉斯变换在电路分析、通讯、信号处理等领域都有广泛应用，在实际使用中常常遇到求拉普拉斯反变换，其公式为 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}\,ds$，是一个复积分，计算通常比较困难.

电路、系统分析等领域里有理分式是常见函数，下面先介绍此类函数积分的几种计算方法.

设 $F(s)$ 是有理分式，即 $F(s)=\dfrac{A(s)}{B(s)}$，其中 $A(s)$，$B(s)$ 是互质多项式，$A(s)$ 的次数为 m，$B(s)$ 的次数为 n，并且 $m<n$.

1. 留数方法

定理 1[1]　设 $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$，$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是 $F(s)$ 的所有有限奇点，适当选取 a 使这些奇点全在 $\mathrm{Re}(s)<a$ 的范围内，则有

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k],t>0.$$

例 1　求函数 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)s^3}$ 的拉普拉斯逆变换.

解　因为 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)s^3}$ 在整个复平面上有 3 个奇点 $i,-i,0$，分别为 1 级、1 级和 3 级极点，由上面定理知

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{3}\mathrm{Res}[\frac{1}{(s^2+1)s^3}e^{st},s_k]=$$

$$\mathrm{Res}[\frac{1}{(s^2+1)s^3}e^{st},s=i]+$$

$$\mathrm{Res}[\frac{1}{(s^2+1)s^3}e^{st},s=-i]+$$

$$\mathrm{Res}[\frac{1}{(s^2+1)s^3}e^{st},s=0]=$$

$$\lim_{s\to i}\frac{e^{st}}{(s+i)s^3}+\lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{(s-i)s^3}+\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}[\frac{e^{st}}{(s^2+1)}]''=$$

$$\cos t-1+\frac{1}{2}t^2.$$

2. 部分分式法

分两种情况讨论

1、单极点

如果 $F(s)$ 是有理分式且 $F(s)=\dfrac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$，其中 $A(s)$ 为次数小于 n

收稿日期：2015-05-28　　**修改日期**：2016-02-17

基金项目：北京航空航天大学重点教改项目(201413)；北京航空航天大学重大教改项目(4303013)

作者简介：滕岩梅(1974—)，女，黑龙江人.博士，副教授，研究方向：泛函分析，非线性泛函分析. E-mail: ymteng@buaa.edu.cn

的多项式，令

$$F(s)=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-s_n},$$

则　$k_i=\lim\limits_{s\to s_i}(s-s_i)F(s),i=1,2,\cdots,n.$

例 2　计算函数 $F(s)=\dfrac{s^2+2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$ 的拉普拉斯逆变换.

解　$F(s)$ 在整个复平面上有 3 个单极点 -1，$-1+2i$，$-1-2i$，令

$$F(s)=\frac{s^2+2}{(s+1)(s^2+2s+5)}=$$

$$\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+1-2i}+\frac{k_3}{s+1+2i}$$

则　$k_1=\lim\limits_{s\to -1}(s+1)F(s)=\dfrac{3}{4}$，

$$k_2=\lim_{s\to -1+2i}(s+1-2i)F(s)=\frac{1+4i}{8},$$

$$k_3=\lim_{s\to -1-2i}(s+1+2i)F(s)=\frac{1-4i}{8},$$

因此

$$F(s)=\frac{3}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1+4i}{8}\frac{1}{s+1-2i}+\frac{1-4i}{8}\frac{1}{s+1+2i}.$$

所以 $F(s)$ 的拉普拉斯反变换为

$$f(t)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1+4i}{8}\mathrm{e}^{(-1+2i)t}+\frac{1-4i}{8}\mathrm{e}^{-(1+2i)t}.$$

注意　如果 $F(s)$ 存在复共轭单极点时，所对应的系数也是共轭复数.

2、重极点[2]

如果 $F(s)$ 是有理分式且 $F(s)=\dfrac{A(s)}{(s-s_1)^n}$，其中 $A(s)$ 为次数小于 n 的多项式，令

$$F(s)=\frac{k_{11}}{(s-s_1)^n}+\frac{k_{12}}{(s-s_1)^{n-1}}+\cdots+\frac{k_{1(n-1)}}{(s-s_1)^2}+\frac{k_{1n}}{s-s_1},$$

则

$$k_{11}=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)^nF(s),$$

$$k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\lim_{s\to s_1}\frac{\mathrm{d}^{i-1}[(s-s_1)^nF(s)]}{\mathrm{d}s^{i-1}},$$

其中 $i=2,\cdots,n.$

这个公式是容易推出的，例如 $F(s)=\dfrac{A(s)}{(s-s_1)^2}$，设 $F(s)=\dfrac{k_1}{(s-s_1)^2}+\dfrac{k_2}{s-s_1}$，则

$$F(s)(s-s_1)^2=k_1+(s-s_1)k_2,$$

求导后取极限即得系数 k_2.

例 3　求函数 $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

解　$F(s)$ 在整个复平面上有 1 个奇点 1，为 2 级极点，令

$$F(s)=\frac{s}{(s-1)^2}=\frac{k_{11}}{(s-1)^2}+\frac{k_{12}}{s-1},$$

则

$$k_{11}=\lim_{s\to 1}(s-1)^2F(s)=1,$$

$$k_{12}=\lim_{s\to 1}[(s-1)^2F(s)]'=1,$$

因此

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1},$$

求拉普拉斯的反变换得 $f(t)=t\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t$.

3. 卷积方法

利用卷积定理，可以将复杂函数 $F(s)$ 分解为简单函数 $F_1(s)$，$F_2(s)$ 的乘积，分别求出 $F_1(s)$，$F_2(s)$ 的拉普拉斯反变换 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 后，再进行 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 卷积运算就可以求出 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换 $f(t)$.

例 4　求函数 $F(s)=\dfrac{(s-3)^2}{[(s-3)^2+4]^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

解　由于

$$F(s)=\frac{(s-3)^2}{[(s-3)^2+4]^2}=$$

$$\frac{(s-3)}{(s-3)^2+4}\frac{(s-3)}{(s-3)^2+4}=$$

$$F_1(s)\cdot F_1(s),$$

又 $\dfrac{s}{s^2+4}$ 的拉普拉斯逆变换为 $\cos 2t$，所以 $F_1(s)=\dfrac{s-3}{(s-3)^2+4}$ 的拉普拉斯逆变换为 $\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$，因此 $F(s)=\dfrac{(s-3)^2}{[(s-3)^2+4]^2}$ 的拉普拉斯逆变换为

$$f(t)=\mathrm{e}^{3t}\cos 2t*\mathrm{e}^{3t}\cos 2t=$$

$$\int_0^t \mathrm{e}^{3\tau}\cos 2\tau\,\mathrm{e}^{3(t-\tau)}\cos 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{3t}[\cos 2t+\cos(4\tau-2t)]\mathrm{d}\tau=$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t}[2t\cos(2t)+\sin(2t)].$$

接下来考虑更一般的情况.

1、函数 $F(s)$ 为非真分式时，我们可以通过长除法[3]把它变为真分式＋多项式的形式，

下面通过具体例子来说明.

（下转第 23 页）

例 2　求 $\int (x^4+2x^2)\sin 2x\mathrm{d}x$.

解　因为求函数 x^4+2x^2 的各阶导数简单，而函数 $\sin 2x$ 依次求积分比较简单，故得

x^4+2x^2	$4x^3+4x$	$12x^2+4$	$24x$	24
$\sin 2x$	$\frac{-\cos 2x}{2}$	$\frac{-\sin 2x}{4}$	$\frac{\cos 2x}{8}$	$\frac{\sin 2x}{16}$

所以有

$$\int (x^4+2x^2)\sin(2x+1)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{-(x^4+2x^2)\cos 2x}{2}+\frac{(4x^3+4x)\sin 2x}{4}+$$
$$\frac{(12x^2+4)\cos 2x}{8}-\frac{24x\sin 2x}{16}+\int\frac{24\sin 2x}{16}\mathrm{d}x=$$
$$(-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4})\cos 2x+(x^3-\frac{x}{2})\sin 2x+C$$

例 3　求 $\int x^3(2x+1)^9\mathrm{d}x$

解　因为函数 x^3 的 4 阶导数为零，函数 $(2x+1)^{10}$ 依次求积分比较简单，故得

x^3	$3x^2$	$6x$	6
$(2x+1)^9$	$\frac{(2x+1)^{10}}{2\cdot 10}$	$\frac{(2x+1)^{11}}{2^2\cdot 10\cdot 11}$	$\frac{(2x+1)^{12}}{2^3\cdot 10\cdot 11\cdot 12}$

$$\int x^3(ax+b)^{20}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{x^3(2x+1)^{10}}{20}-\frac{3x^2(2x+1)^{11}}{440}+$$
$$\frac{x(2x+1)^{12}}{1760}-\int\frac{6(2x+1)^{12}}{2^3\cdot 10\cdot 11\cdot 12}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{x^3(2x+1)^{10}}{20}-\frac{3x^2(2x+1)^{11}}{440}+$$
$$\frac{x(2x+1)^{12}}{1760}-\frac{(2x+1)^{13}}{45760}+C$$

例 4　求 $\int\frac{x^4}{(x+2)^3}\mathrm{d}x$.

解　因为求函数 x^4 的各阶导数简单，函数 $\frac{1}{(x+2)^3}$ 依次求积分比较简单，故得

x^4	$4x^3$	$12x^2$
$\frac{1}{(x+2)^3}$	$\frac{1}{-2(x+2)^2}$	$\frac{1}{2(x+2)}$

$$\int\frac{x^4}{(x+2)^3}\mathrm{d}x=\frac{x^4}{-2(x+2)^2}-\frac{4x^3}{2(x+2)}+$$
$$\int\frac{12x^2}{2(x+2)}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{x^4}{-2(x+2)^2}-\frac{2x^3}{(x+2)}+6\int(x-2+\frac{4}{x+2})\mathrm{d}x=$$
$$\frac{x^4}{-2(x+2)^2}-\frac{2x^3}{(x+2)}+3x^2-12x+24\ln|x+2|+C$$

参考文献

[1]　同济大学应用数学系. 高等数学:上册[M]. 5 版. 北京:高等教育出版社，2002：56－57.

[2]　陈文灯，黄先开，曹显兵. 数学复习指南(理工类)[M]. 北京：世界图书出版公司，2000.

(上接第 21 页)

例 5　求函数 $F(s)=\frac{s^3+5s^2+3s+1}{s^2+2s+1}$ 的拉普拉斯逆变换.

解　作长除法

$$\begin{array}{r}
s+3\\
s^2+2s+1\,\overline{)\,s^3+5s^2+3s+1}\\
\underline{s^3+2s^2+s\quad\;\;}\\
3s^2+2s+1\\
\underline{3s^2+6s+3}\\
-4s-2
\end{array}$$

因此

$$F(s)=s+3-\frac{4s+2}{s^2+2s+1}=s+3-\frac{4s+2}{(s+1)^2},$$

因为 $\frac{4s+2}{(s+1)^2}$ 的拉普拉斯反变换为 $\lim\limits_{s\to-1}[(4s+2)e^{st}]'=4e^{-t}-2te^{-t}$，因此 $F(s)$ 的拉普拉斯反变换为

$$f(t)=\delta'(t)+3\delta(t)-4e^{-t}+2te^{-t}.$$

2、当函数 $F(s)$ 包含指数函数时，注意 s 是复参变量，$\lim\limits_{s\to\infty}e^{st}\neq 0$，不能用留数方法进行计算. 这时我们可以用延迟性质[1]计算积分.

例 6　求函数 $F(s)=\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-2)}$ 的拉普拉斯反变换.

解　因为 $F_1(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}$ 的拉普拉斯反变换为 $f_1(t)=e^{2t}-e^t$，由延迟性质知 $F(s)=\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-2)}$ 的拉普拉斯反变换为 $f(t)=(e^{2(t-2)}-e^{(t-2)})u(t-2)$.

参考文献

[1]　高宗升，滕岩梅. 复变函数与积分变换[M]. 5 版. 北京：北京航空航天大学出版社，2010，第八章.

[2]　唐正明，郝希准，肖顺文，等. 复杂象函数 Laplace 反变换与信号精确时域解[J]. 数学技术与应用，2010，(5)：163－165.

[3]　北京大学数学系. 高等代数[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社，2013，第一章.