数理方程

by Origami

零、写在前面

首先，这个课叫数学物理方程，所以说，一定要记得看一下方程的物理含义！！！尤其是第一章的（热传导、泊松）方程，及其边界条件的物理含义，因为题可能只是给你一个物理问题（小声），比如 2.3 的例 3.

关于记公式：最好自己知道推导过程，实在不行直接记下来（公式+例题）也可以凑合，在考试之前可以问一下老师会大概提供什么公式

解决问题：

1. 问题类型判断：（边界条件、定义域，etc）
2. 方程类型：（k阶）（非齐次）（线性）（PDE）
3. 解的结构：$eg. \begin{cases} 齐次方程的通解 \\ 非齐次方程的特解 \end{cases}$

求解偏微分方程特解的解法：

- ODE：常数变易法 / 待定函数法
- PDE：观察非齐次项的形式 $\Rightarrow$ 特解形式
    - 例如：当 $f(t, x) = f(x)$，设特解 $u_p = u_p(x)$（约等于没说emm）

一、数学物理中的偏微分方程（行波法）

转化与借鉴：转化呢，是想办法通过变换/拆分来得到熟悉的问题形式；而借鉴呢，是本来不能搞出来这种形式，但是采取了类似于这些方法的思路

通解法

- 求出泛定方程通解（可直接积分、可化为第一种的）
- 根据已知条件将未知函数和定解条件、已知函数建立联系

三个典型方程

波动方程（发展方程）

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 u + f(t,x,y,z)$

热传导方程（发展方程）

- $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_3 u + f(t,x,y,z)$

泊松方程（稳定方程）

- $\Delta_3 u = f(x,y,z)$

叠加原理和齐次化原理

叠加原理

- 奇技淫巧：对于特解形式，当非齐次项中只含有一个变量时，特解可以选择同样只含有这个变量

齐次化原理

- 应用于：非齐次发展方程（目标：变成齐次）
- 运用条件：齐次初始化条件
- 公式：略（有两个，分别对应于一阶和二阶的定解问题）
- 基本思路：时间偏移，即通过初始时间（对 t 的定义域）从 0 变更为 τ，达到消除非齐次项的目的

行波法

- 适用条件：直线（半直线，需限制条件或延拓）的波动方程定解问题（初始条件？边界条件？
- 借鉴：（通解法）
- 可转化：（延拓法）

二、分离变量法

有界区域的定解问题优先考虑分离变量法

助教GaoYuan：

- 分离变量法的核心是，要把解表达成在固有函数系上展开的形式；求解系数的积分，其实是想把定解条件也展开，然后比较对应项系数
- 分离变量法的核心思想：把解和定解条件，都在固有函数系上展开，然后比较对应项系数，进而得到解

Caution：所有比较系数是建立在 Fourier 展开，三角函数系的正交性的基础之上的，即 $\int_0^{2\pi} sin(2n+1)x \cdot sin(2m+1)xdx = 0$ ，所以按照 2.1 里面那种积分求 C_n, D_n 的方法是通法，对于任意形式的 $\varphi(x), \psi(x)$ 均可行，只是在面对三角函数等较为特殊的边界条件时，实际上三角函数就是固有函数级数的项，故省去一步积分

重点来看一下积分求 C_n，D_n 这两个参数：

- 首先呢，我们已经得到了一个 $u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(C_n cos)$

补充（题外话）

留数定理

见课本的前半部分

利用留数定理计算积分：也在课本的前半部分（回去找找之前整理的一些）

函数的傅立叶展开

由于三角函数系的完备性，对于任意在 (-π, π) 上可积并绝对可积的函数 $f(x)$，可以做如下展开
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, cos\, nx + b_n\, sin\, nx)$，

其中
$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, mx\, dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sim\, mx\, dx \quad (m = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

有界弦的自由振动

~~这部分是套路~~

- 分离变量法 4 个步骤
    1. 分离变量（强拆，$u(x,t) = X(x)T(t)$. 别问为什么，问就是不考不用管）
        1. 助教GaoYuan：
            1. 原理：物理上的驻波理论
            2. 数学思想：转化/化归 PDE $\longrightarrow$ ODE
    2. 解固有值问题（λ 分 =、<、> 0 的三种情况讨论，利用边界条件（就是 x 取特值的）排除边值问题只有零解的情况，得到 固有值 λ_n，固有函数$X_n(x)$ ，将固有值带入确定 T 的常微分方程，相乘得到 $u_n(x,t)$
        1. 助教GaoYuan：
            1. 初学时是这样，如果是S-L方程，则 $\lambda \geq 0$ ($\lambda = 0 \Leftrightarrow$ 全为第一类边界条件)
    3. 特解列叠加可得 u 的级数形式解
        1. 我觉得这一步求和都从 $n = 0$ 开始就行（反正 $sin(\#)$ 里面 # 是 0 就是 0 了 /摊手）
    4. 由初始条件来确定级数解里面的系数 C_n，D_n，原理是傅立叶变换的积分式（各个项之间正交，见 S-L 定理），解题方法是对应项对比系数

5. 然后，说明物理意义？
    1. 助教GaoYuan：
        1. 这里了解一下就行
        2. 基频、倍频，etc

极坐标下二维拉普拉斯方程的边值问题

- 二维 Laplace方程：$\Delta_2 u = 0$
- 极坐标形式：$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$
    - 没有任何限制条件的通解是
      $u(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{+\infty}(A_k r^k + B_k r^- k)(C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta)$，有关圆的区域（如圆内域,圆外域及圆环等）内的 $\Delta_2 u = 0$ 的边值问题都可以直接从上式出发来解题
- 二维边值问题（圆内狄氏问题）
    - 在圆内，而当 $r \to 0$ 时，lnr, r^{-k} 都趋于 ∞，故必有 $\forall k \in \mathbb{N}, B_k = 0$
    - 剩下的工作是比较系数
- Poisson 公式（不知道有啥用）
    - 助教GaoYuan：
        - ~~我也不清楚，可能是用于理论证明？（猜的）~~

固有值问题的施图姆 - 刘维尔理论

本章用处（是很重要的！/认真脸）

仔细看一下 S-L 定理的性质

- 助教GaoYuan：
    - 所谓分离变量法要求齐次边界条件，（我觉得）是说：对于第一种类型，就是最常见类型，要求齐次；如果出现后面两种类型，可以存在周期边界或者特殊边界条件（有界），但是不可以是这几种以外的情况。这一部分其实很重要，就是告诉你，使用分离变量法，对于边界条件有什么要求
    - 就是说，分离变量法的适用范围（对于边界条件）参见GaoYuan de 思考
    - 分离变量我们常说，齐次方程，有界区域，齐次边界，看到这种类型的方程，第一反应就是，可以分离变量。具体要不要使用分离变量，还要看题目要求。如果不指定方法，就可以分离变量
    - 而2.3节，SL定理，就是告诉我们，为啥可以分离变量，这样做为什么合理，并且告诉我们，什么时候可以分离变量，只有满足定理的条件，才可以分离变量，否则就不行
    - S-L方程系数必须满足要求，2.3告诉我们，分离变量法只能处理齐次方程，齐次边界；而2.4告诉我们，非齐次方程，非齐次边界，如果想用分离变量，应该咋办。肯定不能直接用，所以告诉我们，需要做点啥
      。总的来讲，其实S-L定理这一部分很重要，不过，如果自己体会的话，可能要学很久之后，才会慢慢感受到

补充知识：

1. n 维实线性空间

- $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$

  内积： $<x,y>=\Sigma_{i=1}^n x_i y_i$

  范数： $\parallel x \parallel=<x,x>^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

- 基 $\rightarrow$ 正交基 $\rightarrow$ 标准正交基

  $<e_i,e_j>=\delta_{ij}$

  $$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

2. 函数空间（无穷维）

- 函数空间 = 集合（函数） + 结构（距离）

  $^{eg.}$ 有一堆 红砖（集合），砌成了房子(bingjin)（定义关系） $\rightarrow$ 空间

- 无穷维内积空间：

  $\| f(x) \|=<f(x),f(x)>^{\frac{1}{2}}=(\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

  同样可以定义正交

- 正交函数系 $\rightarrow$ 完备正交函数系（正交基）

  对于$L^2[a,b]$中一列正交函数$\langle X_i(x),X_j(X)\rangle=\parallel X_i \parallel^2 \delta_{ij}$

  定义 $\forall f\in L^2[a,b]$，$f(x)=\sum_{i=1}^{+\infty} c_i X_i(x) \quad (7)$

  则称 $\{X_i(x),\, i=1,2,\cdots\}$ 为 $L^2[a,b]$ 中的一列完备正交函数系

  - 助教GaoYuan：
    - 这里强调加权 $\rho(x)$ 正交

  (7) 式称为 $f(x)$ 关于正交基 $\{X_i(x)\}$ 的广义 Fourior 展开

施图姆 - 刘维尔理论

- 分离变量法只能处理齐次方程，齐次边界

- 所以说，对于一个比较一般的二阶齐次线性偏微分方程 $L_t u+c(t)L_x u=0\ (a\leq x\leq b, t\in I)$ 进行变量分离，这里，L_t,L_x 是二阶线性偏微分算子，$^{eg.}L_x=b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b_1(x)\frac{\partial}{\partial x}+b_2(x)$，分离变量，移项，设$-\lambda$，将 X 的ODE写成 $b_0(x)y''(x)+b_1(x)y'(x)+b_2(x)y(x)+\lambda y(x)=0 \quad (*)$，

  选取函数 $\rho(x)$，$s.t. [\rho(x)b_0(x)]'=\rho(x)b_1(x)$，即 $\rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}exp\left\{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx\right\}$. (*)式两端同乘以 $\rho(x)$，令 $k(x)=\rho(x)b_0(x)$，$-q(x)=\rho(x)b_2(x)$，则得到 S-L 方程

  - 上面这一堆主要是记下来 $\rho(x)$ 的含义和形式

- Sturm-Liouville 型方程（自共轭型方程）： $\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0 \quad (**)$

- 在 S-L 方程里面，非常重要的是权重函数 $\rho(x)$，这个和求参数的积分有关（而且非常容易丢掉）

- 对（**）式中的系数做如下假定：

1. 1) 在$[a,b]$上，$k(x)$，$k'(x)$，$\rho(x)$连续；当$x\in(a,b)$时，$k(x)>0$，$\rho(x)>0$，$q(x)\geqslant 0$，而a，b至多是$k(x)$及$\rho(x)$的1级零点.

   2) $q(x)$在(a,b)上连续，而在端点处至多有1级极点. 例如，就a点而言，可有

   $$q(x)=\frac{q_1(x)}{x-a},$$

   而$q_1(x)$在$x=a$点可展开成幂级数.

- 解定解问题时，
- S - L 方程的固有值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0 & a<x<b \\ \alpha_1 X(a)-\beta X_1'(a)=0 & \\ \alpha_2 X(b)+\beta_2 X(b)=0 & \\ \alpha_i,\beta_i\geq 0 \text{ 且 } \alpha_i^2+\beta_i^2\neq 0 & i=1,2 \end{cases} \qquad (***)$$

- (*) 式的固有值、固有函数有以下性质：
  1. 非负性

     $\lambda>0$

     若 $\lambda=0$，则必须满足： $q(x)\equiv 0$，且在端点处的边界条件都是第二类边界条件
  2. 可数性

     $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$
     $lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$

     与每一个固有值相应的线性无关的固有函数有且只有一个
  3. 正交性

     不同固有值对应的固有函数，相互加权正交

     $\rho(x)$ 形式：$\rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}exp\left\{\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx\right\}$
  4. 完备性

     $\{\lambda_n(x)\}$ 构成 $L_\rho^2[a,b]$ 中的完备正交系，对于任意一个有一节连续导数及分段二阶连续导数的函数 $f(x)$，满足边界条件，那么：
     $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n(x)y_n(x)$
     $c_n(x)=\frac{1}{\|y_n(x)\|^2}\int_{I[x]}f(x)y_n(x)\rho(x)\,dx$
     $\|\ y_n(x)\ \|^2=\int_{I[x]}{y_n}^2(x)\rho(x)\,dx$

非齐次情形

分离变量法直接作用的是：泛定方程齐次、边界条件齐次
不过还有三类：(I) (II) 只有一个是非齐次的，和 (III) 两个都是非齐次的，其中 (III) 通过拆分为 (I) + (II) 来解决

对于非齐次问题，基本上是有三种方法：固有函数展开法、齐次化原理（发展方程）、特解法

这一节基本上就是对可以转化为可分离变量法的类型做了一个了结，其基本思想是将问题想办法搞出来（注意：可能意味着拆分泛定方程 or 定解条件）一个好(shu)看(xi)的（大概像2.1节的那种形式吧？）

边界条件是齐次的非齐次发展方程的混合问题

待补充

- 一般形式是：
- $\begin{cases} L_t u + L_x u = f(t,x) \quad (t>0,\ x_1<x<x_2) \\ \alpha_1 u_x(t,x_1) - \beta_1 u(t,x_1) = 0, \\ \alpha_2 u_x(t,x_2) + \beta_2 u(t,x_2) = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$
- 一般有两种：固有函数方法 和 齐次化原理
- 固有函数法

一般非齐次混合问题（边界条件也是非齐次的）

- 先把边界条件齐次化，即函数变换，

泊松方程的边值问题

- 设有空间区域 V 内的泊松方程第一边值问题：
- $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z) \quad ((x,y,z)\in V) \\ u|_S = \varphi(x,y,z) \end{cases}$
- 方法是先求出方程的一个特解 $v(x,y,z)$（特别的，当 f 是多项式，可以用待定系数法求），然后由叠加原理，
- 如果是环 / 圆内部的定解问题，注意梯度项：$\frac{\partial}{\partial n}u(r,\theta)$
- $^{eg.}$ 这个环，a在里，b在外，b的外法向是r增加的方向，所以，是同号；如果是a的外法向，就是对r求偏导然后反向

高阶 PDE

- 基本想法还是分离变量，只是由比值而来的参数数量增加
- 参见 § 2.3 的例4
- $^{eg.}$ $u_{tt} = a^2\Delta_2 u$
- 其实就是 $u = T(t)X(x)Y(y)$
- 然后带进去，$XYT'' = a^2(TYX'' + XTY'')$
- 令 $\frac{X''}{X} = -\lambda, \frac{Y''}{Y} = -\mu$

三、特殊函数

同属于分离变量法的内容

补充（复习）：Γ 函数

- Def : $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$
- Thm : Γ 函数有任意阶导数，且导数为 $\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}(lnt)^k dt$

- Thm : $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n+1)=n!,\quad n\in\mathbb{N}$
- $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{sin\, s\pi}$
- $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}u^{2s-1}e^{-u^2}du$
- s 为负值时用第二个定理（递推式）推出来

贝塞尔函数

- ν 阶贝塞尔方程：$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0\quad(\nu\geq 0)$
- 第一类 ν 阶贝塞尔函数：$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$
- 第二类 ν 阶贝塞尔函数（诺伊曼函数）：
  $N_\nu(x)=ctg\nu\pi\cdot J_\nu(x)-csc\nu\pi\cdot J_{-\nu}(x)=\frac{J_\nu(x)cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{sin\nu\pi}$

贝塞尔函数的性质

- 贝塞尔函数的积分形式：$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}cos(xsin\theta-n\theta)d\theta$
- 也可以写成指数：$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}exp\{i(xsin\theta-n\theta)\}d\theta$
- 加法公式：$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(x)J_{n-k}(y)$
- 微分关系：
  - $\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x)$
  - $\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$
  - $J_\nu'(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$
  - $J_\nu'(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$
  - 特别地：$J_0'(x)=J_{-1}(x)=-J_1(x)$
- 递推公式：
  - $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$
  - $J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_\nu'(x)$
- 渐进公式，衰减震荡性和零点
  - 当x很大时，有 $J_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+O(x^{-\frac{3}{2}})$，
    $N_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sin(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+O(x^{-\frac{3}{2}})$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}J_\nu(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}N_\nu(x)=0$
    $\lim\limits_{x\to 0}J_\nu(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}N_\nu(x)=\infty$
  - 由级数表示可得：$J_\nu(-x)=(-1)^\nu J_\nu(x)$
  - $J_\nu(x)+hxJ_\nu'(x)=0$（h为常数）也有无穷多实根

贝塞尔方程的固有值问题

-

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0\ (0<x<a,\ \nu\geqslant 0), & (1) \\ \alpha y(a)+\beta y'(a)=0, \\ y(0)\ \text{有界}, \end{cases}$$

- (1) 式指最上面那个泛定方程
- 化为 S-L 方程：$\boxed{\frac{d}{dx}(xy')+(\lambda x-\frac{\nu^2}{x})y=0}$
- 故 (1) 式的通解为：$y(x)=AJ_\nu(\omega x)+BN_\nu(\omega x)$
- y(0) 有界 $\Rightarrow$ B = 0
- 直接写出来所有正实零点（解不出来的）：$\omega_1,\omega_2,\cdots$
- 固有值 $\lambda_n=\omega_n^2\ (n\in\mathbb{N})$
- 固有函数 $y_n=J_\nu(\omega_n x)\ (n\in\mathbb{N})$
- Fourier-Bessel 级数展开：$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_nJ_\nu(\omega_n x)$
- 系数：$f_n=\frac{1}{N_\nu^2}\int_0^a xf(x)J_\nu(\omega_n x)dx$，$N_{\nu i}$ 指第 i 类边界条件
    - 第一类边界条件，即$J_\nu(\omega a)=0$：${N_{\nu 1}}^2=\frac{a^2}{2}{J_{\nu+1}}^2(\omega a)$
    - 第二类边界条件，即${J_\nu'}^2(\omega a)=0$：$N_{\nu 2}^2=\frac{1}{2}\left(a^2-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right)J_\nu^2(\omega a)$
    - 第三类边界条件，即$J_\nu'(\omega a)=-\frac{J_\nu(\omega a)}{\omega h}$，$\left(h=\frac{\alpha}{\beta}\right)$：
      ${N_{\nu 3}}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2+\left(\frac{a}{\omega h}\right)^2\right]{J_\nu}^2(\omega a)$
- 关注 P271 例2

勒让德方程的固有值问题

- 勒让德方程：
    - 球坐标形式：$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+ctg\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+\lambda\Theta(\theta)=0$
    - 令 $x=cos\theta$，记 $\Theta(\theta)=y(x)$
    - $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=\boxed{\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']+\lambda y=0}$
- 固有值问题：增加条件 $(-1<x<1),|y(\pm 1)|<+\infty$
- Thm : 记 $\lambda=l(l+1)$ 则当 l 不是整数时方程在 $[-1,1]$上没有非零有界解，当 $l=n\in\mathbb{N}_+$ 时固有值和固有函数分别为
    - $\lambda_n=n(n+1)$
    - $y_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$
    - 勒让德多项式：$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，仍为前述固有值问题的非零解，二项式展开得到下式
    - $p_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{M}\frac{(2n-2k)!}{2^n\cdot k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$，　$M=[\frac{n}{2}]$
    - n为偶数时，是偶函数；n为奇数时，为奇函数
- 加权正交性：$\rho(x)=1$，$\therefore\int_{-1}^{1}p_m(x)p_n(x)dx=0\,(m\neq n)$

- 半球形域上的固有值问题：增加条件 $(0 < x < 1), y(0) = 0\ (or\ y'(0) = 0), |y(1)| < +\infty$
  - $\lambda_n = (2n+1)(2n+2)$
  - $y_n(x) = p_{2n+1}(x)$
  - OR
  - $\lambda_n = 2n(2n+1)$
  - $y_n(x) = p_{2n}(x)$

勒让德多项式的母函数和递推公式

- 母函数：设 t 是复数，则考虑复函数：
- $\omega(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n$ （Taylor展开）
- 席拉夫里(Schlafli)公式。。。
- 递推公式：
  - $(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0$
  - $np_n(x) - xp_n'(x) + p_{n-1}'(x) = 0$
  - $np_{n-1} - p_n'(x) + xp_{n-1}'(x) = 0$
  - $p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x) = (2n+1)p_n(x)$
  - $p_{n+1}'(x) = xp_n'(x) + (n+1)p_n(x)$
  - $(m+n+1)\int_0^1 x^m p_n(x)dx = m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)dx$
  - 奇函数时 $P_n(0)$ 是0，偶函数的时候 $P_n'(0)$ 是0

函数的傅立叶-勒让德展开

- $\|p_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 {p_n}^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$
- 若 $f(x)$ 满足
  - 在（-1，1）内逐段光滑
  - $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 有限
- 则有展开 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n p_n(x)$
- $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^1 f(x)p_n(x)dx$
- 本节例3

四、积分变换

数理方程里面设计的累次积分一般可以直接交换次序而不用考虑可行性，类似的要求也是不用像数分里面一样考虑

傅立叶

补充回顾：Fourier 分析（数学分析B2 §12）

和数理方程书上的定义不太一样，比如差个负号什么的，自己统一就好了

12.4 函数的Fourier变换

- Fourier积分
  - 如果定义在整个数轴上的函数 f(x) 在任何有限区间上是逐段光滑的，并且在区间 $(-\infty,+\infty)$上可积并绝对可积，那么对于任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有
  - $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi$
  - 或者写成 $f(x)=\int_0^{+\infty}(a(\lambda)cos\lambda x+b(\lambda)sin\lambda x)\,d\lambda$，其中 $a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)cos\lambda\xi\,d\xi$，$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)sin\lambda\xi d\xi$
- Fourier变换
  - $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx$
  - 反演公式：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$
  - 余弦变换：$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(t)cos\lambda t\,dt$，以及反演公式 $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}F(\lambda)cos\lambda x\,d\lambda$
  - 正弦变换：$G(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(t)sin\lambda t\,dt$，以及反演公式 $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}G(\lambda)sin\lambda x\,d\lambda$
  - 正交性：$\int_{-\infty}^{+\infty}sin\lambda x\,sinmx\,dx=\begin{cases}0, & \lambda\neq m\\ \pi & \lambda=m\end{cases}$
- Fourier变换的性质
  - 线性关系：$F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g]$
  - 频移特性：若 $F[f]$ 存在，对任意实数λ_0，有 $F[f(x)e^{-i\lambda_0 x}]=F(\lambda+\lambda_0)$
  - 重要微分关系：$F[f^{(k)}(x)]=(i\lambda)^kF[f]$
  - 微分特性：$F'(\lambda)=F[-ixf(x)]$
  - 卷积：$f*g=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi)g(\xi)\,d\xi$
    - 满足交换律、结合律、分配律
    - $F[f*g]=F[f]F[g]$
    - 常用$F^{-1}[F(\lambda)G(\lambda)]=F^{-1}[F(\lambda)]*F^{-1}[G(\lambda)]$

用傅立叶变换解题

- 基本步骤
  - 进行傅立叶变换、正/余弦变换
  - 选择合适的变量（根据定义域、定解条件），傅立叶变换在整个实轴，正余弦变换在半实轴
    - 下面是书上对采用 Laplace 变换的考虑，用作参考
    - 在这个问题中，自变量 x,t 的变化范围都是 $(0,+\infty)$ 仅从这点看，对 x,t 都能取拉普拉斯变换。但由于在 $x=0$ 处未给出 u_x 的值，而方程中却含有 u_{xx}，因而如对 x 取拉普拉斯变换，则无法利用 (1) 式。而对 t 来说，由于 $t=0$ 时 u_t 的值已知，故宜采用对 t 的拉普拉斯变换
  - 积分变换解题时，不需要边界条件齐次化（如例3）

拉普拉斯

补充回顾：Laplace 变换（复变函数 §7）

- 定义
    - 亮点：单位函数 $h(t)=\begin{cases}1 & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$，

      $$f(t)=f(t)\cdot h(t)$$
    - 复函数 $F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$
        - 这意味着好多奇怪的性质，比如说周期性，复平面上无穷多零点，etc.（详见复变函数部分）
    - 记为 $F(p)=L[f(t)]$
- 拉普拉斯变换的性质
- 拉普拉斯变换的反演公式
    - （Fourier-Millin公式）$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$
    - 利用留数定理：设 $F(p)$ 除在 $f(t)=\sum_{k=1}^{n}Res[F(p)e^{pt},p_k]$
    -

对于积分变换法的一些说明

- 使用条件
    - 经典的Fourier变换用于坐标变量无界的情形
    - 正弦变换用于第一类边界条件的半无界问题
    - 余弦变换用于第二类边界条件的半无界问题
    - Laplace变换用于半无界问题（发展方程）
- Laplace变换基本上可以用于所有发展方程，但是由于Laplace反演变换 (涉及到留数定理的时候) 及其麻烦，所以…

五、基本解和解的积分表达式

我个人认为基本解方法和齐次化原理有点像（虽然好像别人都不太理解我在说啥orz…）

- 都是用来解决齐次化问题的
- 都是把问题转化为一个比较好看的形式
- 最终答案都是由转化之后的解和被转化掉的非齐次项构成的
- （这么一说怎么觉得和特解法又这么像呢…）

关于基本解方法理解不了的问题。。。总的来说理论上这样就OK了吧

- 第一步，我觉得就直接记住三类方程对应的定解问题所对应的格林函数满足的定解问题
- 第二步， 格林函数满足的定解问题仍然是定解问题，所以可以用之前学过的行波法、分离变量法、积分变换法求解，一般可能遇到分离变量、积分变换。除此以外要重点掌握的是镜像法。但是不要只记得镜像法而忘记其他方法。因为本质是求解定解问题
- 第三步，根据积分表达式求原问题的解，这个就是套公式计算。可能对于曲线积分、曲面积分的知识有些生疏，如果是的话可以看看上面分享的资料

δ 函数

- Def：（广义函数，通过运算/算符来定义/运算/性质）
  - $\delta(x)=\begin{cases}+\infty & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$

    $\Leftrightarrow \forall(a,b),\ \int_a^b\delta(x)dx=\begin{cases}1 & 0\in(a,b)\\ 0 & 0\notin(a,b)\end{cases}$
- δ 函数有很多优良的性质：
  - $\forall\varphi(x)\in\mathbb{C}\quad \int_a^b\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0),\quad 0\in(a,b)$

    $\mathbb{C}\ stands\ for\ continous\ function$

    $sp.\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$

    $under\ the\ circumstance\ of\ which\ the\ gravity\ is\ at\ x=\xi,$

    $\int_a^b\delta(x-\xi)dx=\begin{cases}1, & \xi\in(a,b)\\ 0, & \xi\notin(a,b)\end{cases}$

    $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi(x)dx=\varphi(\xi)$
  - 对称性：$\delta(x)=\delta(-x)$，分布意义下的偶函数：

    $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-x)f(x)dx,$

    更一般地，有：$\delta(x-\xi)=\delta(\xi-x),$

    即：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\xi-x)\varphi(x)dx=\varphi(\xi)$
  - 卷积性质：$\delta(x)$是卷积运算的单位函数

    $\delta(x)*\varphi(x)=\varphi(x)$
  - 微分性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x)f(x)dx=-f'(0)$
  - 重要 δ 函数的 Fourier 变换：$F[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{i\lambda x}dx=e^0=1,$

    $\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}cos\lambda x\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}d\lambda$，指数也可以是正$i\lambda x$

场势方程的边值问题

补充回顾：向量场的微商（数学分析B2 §9.6）

9.6.2 梯度、散度与旋度

- 梯度
  - 由 $\phi(x,y,z)$ 的全微分可得：$d\phi=\overrightarrow{grad}\,\phi\cdot d\mathbf{r}$
  - 故有 $grad\,\phi=\nabla\phi=\frac{d\phi}{dr}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$
- 散度
  - 对于一个向量场 $c=P\,\boldsymbol{i}+Q\,\boldsymbol{j}+R\,\boldsymbol{k}$
  - $div\,c=\nabla\cdot c=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$
- 旋度
  - $rot\,c=\nabla\times c=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\boldsymbol{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\boldsymbol{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\boldsymbol{k}$
- 方向导数 $\dfrac{\partial G}{\partial n}=\nabla G\cdot\vec{n}$
  - 关于怎么求法向量啊。。如果是平面，边界是曲线，就是跟切向量垂直的向量。如果是空

间，边界是曲面r=r(u,v)，就求切向量 r_u，r_v，然后做外积就可以了。。

应用格林函数

- 基本解
  - L 是坐标变量的常系数线性偏微分算子，方程 $L_u=\delta(M)$ 的解称为方程 $L_u=f(M)$ 的基本解
  - Thm：若 $f(M)$ 是连续函数，$U(M)$ 是基本解，则有
    - $u=U*f=\iiint_{R^3}U(M-M_0)f(M_0)\,dM_0$
    - 利用的叠加原理的第三种（积分叠加）
- 格林函数
  - 为了解如下第一边值问题 $I_1:\begin{cases}\Delta u=-f(M),\\ u\mid_S=\varphi(M)\end{cases}$
  - 考虑 $I_2\begin{cases}\Delta G=-\delta(M)\\ G\mid_S=0\end{cases}$
  - Def：P316（用上面基本解方法转化问题而得）
  - 物理意义：位于点 M_0 的电源在一定的边界条件下在点 M 处产生的场
  - 性质：
    - 可以分解为两部分：$u_1=\dfrac{1}{4\pi r(M,M_0)}\quad(M,M_0\in V)$，在 $M=M_0$ 处有奇异性；另一部分是正规部分 u_2，是一个调和函数（即拉普拉斯方程第一边值问题 $I_3:\begin{cases}\Delta u_2=0\\ u_2\mid_S=(G-u_1)\mid_S=-u_1|_S\end{cases}$ 的解
    - 对称性：$G(M_1;M_2)=G(M_2;M_1)$
    - 设 $f(M),\varphi(M)$ 都是连续函数，则边值问题 I_1 的解的积分表达式为 $u(M)=-\iint_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS+\iiint_V Gf(M_0)\,dV$
    - 二维情形：$u(M)=-\int_l\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}\,dl+\iint_S Gf(M_0)\,dS$
- 用镜像法求格林函数
  - 半空间上的格林函数
    - $G=\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{1}{r(M,M_1)}]$
  - 球形域上的格林函数
    - 取 M_0 的反演对称点 M_1，$\rho_0=r(M_0)$
    - $G=\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r(M,M_1)}]$
  - 半平面上的格林函数
    - $G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)}{r(M,M_0)}$
  - 圆内的格林函数
    - $G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0 r(M,M_1)}{Rr(M,M_0)}$
- 分离变量法也是求格林函数的重要方法

$u_t=Lu$ 型方程 Cauchy 问题的基本解

- Cauchy问题：定解条件中只含有初始条件的定解问题也叫初始问题（或Cauchy问题）（见 数理方程部分 1.3.1）
- 称定解问题

统一整理一下

- 总的一个思路是
  - 掌握对应方法的具体操作和适用范围。使用范围大家可以看一下板书、笔记
  - 行波法（第一章）、分离变量法（第二、三章）、积分变换法（第四章）、基本解法（第五章）
- 具体操作上，总的来讲都是三步
  - 分离变量和积分变换是把PDE转化为ODE，进而求解
  - 基本解方法是类似的，只不过转化的目标不是ODE，而是基本解满足的固有值问题
  - 分离变量：求解固有值问题得到固有函数系，求解其他ODE并且得到形式解（把解在固有函数上展开），利用定解条件求解系数（把定解条件在固有函数系上展开）
  - 积分变换：正变换，求解ODE得到像函数，像函数反变换得到解
  - 基本解：根据固有值问题写出格林函数满足的固有值问题，求解格林函数，根据固有值问题对应的解的积分表达式带入格林函数得到解