数理方程期末试题参考答案

2019 年春期末试题

一、设有一个均匀圆柱物体，半径为 a, 高为 h，侧面在温度为零的空气中自由冷却. 上底绝热，下底温度为 $g(t,x,y)$，初始温度为 $\varphi(x,y,z)$, 试写出圆柱体内温度所满足的定解问题.(不用求解)

解：

$$\begin{cases} u_t = b^2\Delta_3 u, (t>0, x^2+y^2<a^2, 0<z<h) \\ u|_{z=0} = g(t,x,y), \frac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=h} = 0 \\ \left(k\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\big|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

二、求解一维无界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4t + 2x(-\infty < x < +\infty, t>0) \\ u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = \sin 3x \end{cases}$$

解：

$$u = v + w = x^2 + t^2 - \frac{2}{3}t^3 + xt^2 + \frac{1}{3}\sin 3x \sin 3t$$

三、求解固有值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0(0<x<9) \\ y(0) = y(9) = 0 \end{cases}$$

解：

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{n\pi}{9}\right)^2, \quad y_n(x) = e^{-x}\sin\frac{n\pi}{9}x$$

四、求解一维有界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}(0<x<1, t>0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 1 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：

$$u(t,x)=x+1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{(2n+1)\pi}-(-1)^n\frac{8}{\left((2n+1)\pi\right)^2}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi t}{2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

五、求解如下泊松方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0(x^2+y^2<1,0<z<1)\\ u|_{x^2+y^2=1}=0\\ u|_{z=0}=0,\ u|_{z=1}=1-(x^2+y^2)\end{cases}$$

解：

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{\omega_n^3 sh\omega_n J_1\left(\omega_n\right)}\right)sh\omega_n z J_0\left(\omega_n r\right)$$

六、求解热传导问题

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+u(-\infty<x+\infty,t>0)\\ u(0,x)=e^{-x^2}\end{cases}$$

解：

$$\begin{aligned}u(t,x)&=e^t\left(e^{-x^2}*F^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}\right]\right)\\ &=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}*e^{-x^2}\\ &=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}e^{-(x-\xi)^2}\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{t-\frac{1}{1+4t}x^2}\end{aligned}$$

七、设平面区域 $\Omega=\{(x,y)|x+y>0\}$

1. 求出区域 Ω 的格林函数。

2. 求出区域 Ω 上的定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0\quad (x,y)\in\Omega\\ u(x,-x)=\varphi(x)\end{cases}$$

解：

(1)

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

(2)

$$u(x,y)=\frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}\mathrm{d}\xi$$

八、计算积分

$$\int_{-1}^{1}P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)\mathrm{d}x$$

解：

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)\mathrm{d}x &= 2\cdot\int_{0}^{1}P_4(x)4x^4\mathrm{d}x\\ &= 8\cdot\frac{4}{4+4+1}\cdot\frac{3}{3+3+1}\cdot\frac{2}{2+2+1}\cdot\frac{1}{1+1+1}\\ &= \frac{64}{315}\end{aligned}$$

参　考　公　式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

2. Legendre 方程: $\left[\left(1-x^2\right)y'\right]'+\lambda y=0$; n 阶 Legendre 多项式：

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Legendre 多项式的母函数: $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, |t|<1$
Legendre 多项式的模平方: $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$
Legendre 多项式满足的递推公式 ($n\geq 1$)

$$\begin{aligned}&(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\\ &nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0\\ &nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0\\ &P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)\end{aligned}$$

3。3. ν 阶 Bessel 方程: $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$;$\nu$ 阶 Bessel 函数:
$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$
Bessel 函数的的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方分别为

$$\begin{aligned}N_{\nu 1n}^2&=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right)\\ N_{\nu 2n}^2&=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right)\\ N_{\nu 3n}^2&=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{3n}^2}+\frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)\end{aligned}$$

Bessel 函数满足的微分关系和递推公式:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x)\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}\end{aligned}$$

4. 傅里叶变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$; 傅里叶逆变换

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}\lambda;\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t) e^{-p t} \mathrm{d} t, p=\sigma+i s$

$$L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha} ; L\left[t^\alpha\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=\delta(M)$ 的基本解：
二维, $U(x, y)=-\frac{1}{2 \pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x, y, z)=-\frac{1}{4 \pi r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7. Green 第一公式: $\iint_{\partial V} u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d} S=\iiint_V u \Delta v \mathrm{d} V+\iiint_V \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d} V$
Green 第二公式: $\iint_{\partial V}\left(u \frac{\partial v}{\partial n}-v \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d} S=\iiint_V(u \Delta v-v \Delta u) \mathrm{d} V$