列写方程

- 杆的纵振动问题

例 11.1 一长为 l、横截面积为 S 的均匀弹性杆，一端 $(x=0)$ 固定、另一端 $(x=l)$ 在沿杆轴方向上受外力挤压，在压缩了 δ 后而达到平衡 (见图 11.1)．在 $t=0$ 时，撤去外力．试推导杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件．

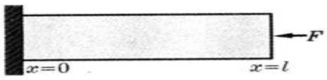

图 11.1

解 假设在垂直杆长方向的任一截面上各点的振动情况 (即位移) 完全相同．

如图 11.2 所示，取杆长方向为 x 轴方向，垂直于杆长方向的各截面均用它的平衡位置 x 标记．在任一时刻 t，此截面相对于平衡位置的位移为 $u(x,t)$．在杆中隔离出一小段 $(x, x+\mathrm{d}x)$．通过截面 x，这一小段杆受到弹性力 $P(x,t)S$ 的作用 ($P(x,t)$ 为单位面积所受的弹性力，即应力，规定沿 x 方向为正)，通过截面 $x+\mathrm{d}x$ 受到弹性力 $P(x+\mathrm{d}x,t)S$ 的作用．因此，对于这一小段应用牛顿第二定律，就得到

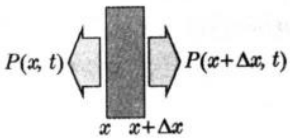

图 11.2

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=[P(x+\mathrm{d}x,t)-P(x,t)]\,S.$$

若杆的密度为常数 ρ，则 $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}x\cdot S$，

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial P}{\partial x}.$$

如果略去垂直杆长方向的形变，根据胡克定律，应力 P 与应变 $\partial u/\partial x$ 成正比，

$$P=E\frac{\partial u}{\partial x},$$

比例系数 E 称为杆的杨氏模量，它是一个物质常数．这样，就得到了杆的纵振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

其中 $a=\sqrt{E/\rho}$，是振动在杆中传播的相速度．

边界条件的推导：因为杆在 $x=0$ 处固定，所以任何时刻 t 在 $x=0$ 处有 $u(0,t)=0$．在 $x=l$ 处，在 $t=0$ 时去掉了外力，即任何时刻 t 在 $x=l$ 处为自由端，故有第二类边条件 $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0$．

初始条件的推导：因为杆在 $x=l$ 处受外力 F 而达到平衡，可以如图 11.3 取杆端 $x=l-\varepsilon$ 到 $x=l$ 的一小段，分析其受力情况．在 $x=l-\varepsilon$ 处受应力 $ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon}$，在 $x=l$ 处受外力 F．平衡时，则应有

$$ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon}+F=0,$$

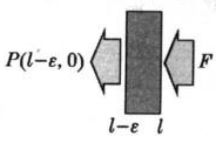

图 11.3

且因平衡时处处应力相等，所以对任意 x 在 $t=0$ 时都有

$$ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}+F=0,$$

即 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=-\dfrac{F}{ES}$. 从 0 到 x 积分可得初始分布

$$u(x,0)=-\frac{F}{ES}x,$$

已知 $u(l,0)=-\delta$，即 $\dfrac{F}{ES}=\dfrac{\delta}{l}$，所以初始分布为

$$u(x,0)=-\frac{\delta}{l}x,$$

又因 $t=0$ 时平衡，故初始速度为零，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

- 膜的横振动

例 11.2 一均匀、各向同性的弹性圆膜，四周固定，试列出膜的横振动方程及边界条件.

解 因圆膜质量均匀可设面密度 ρ 为常数，又因弹性各向同性可设任何方向单位长度上所受的张力 T 也是常数. 在非边界的膜上任取一小块 r 到 $r+\Delta r$，ϕ 到 $\phi+\Delta\phi$，现在来分析此小块横向上的受力和运动情况:

沿平行于 r 的方向，设张力与平衡位置的夹角为 α，有

在 r 边上受力 $\quad T\,r\,\Delta\phi\,\sin\alpha|_r$，

在 $r+\Delta r$ 边上受力 $\quad T\,(r+\Delta r)\,\Delta\phi\,\sin\alpha|_{r+\Delta r}$，

沿平行于 ϕ 的方向，设张力与平衡位置的夹角为 β，有

在 ϕ 边上受力 $\quad T\,\Delta r\,\sin\beta|_\phi$，

在 $\phi+\Delta\phi$ 边上受力 $\quad T\,\Delta r\,\sin\beta|_{\phi+\Delta\phi}$.

在小振动近似下，$\sin\alpha\approx\tan\alpha\approx\dfrac{\Delta u}{\Delta r}$，$\sin\beta\approx\tan\beta\approx\dfrac{\Delta u}{r\,\Delta\phi}$. 由此并根据牛顿第二定律可得

$$T\,(r+\Delta r)\,\Delta\phi\left.\frac{\Delta u}{\Delta r}\right|_{r+\Delta r}-T\,r\,\Delta\phi\left.\frac{\Delta u}{\Delta r}\right|_{r}$$
$$+T\,\Delta r\left.\frac{\Delta u}{r\,\Delta\phi}\right|_{\phi+\Delta\phi}-T\,\Delta r\left.\frac{\Delta u}{r\,\Delta\phi}\right|_{\phi}=\rho\,r\,\Delta r\,\Delta\phi\,\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}},$$

用 $\Delta r\,\Delta\phi$ 除方程两边，并让 $\Delta r\to 0$ 和 $\Delta\phi\to 0$，可得

$$T\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+T\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=\rho\,r\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right\}=0,$$

其中 $a=\sqrt{T/\rho}$.

边界条件为: $u|_{r=R}=0$.

- 热传导问题

例 11.3 一长为 l 的均匀金属细杆 (可近似地看作一维的)，通有稳定电流 I. 设杆的一端 $(x=0)$ 温度保持为 0，另一端 $(x=l)$ 保持为 u_0. 初始的温度分布为 $\dfrac{x}{l}u_0$. 试写出杆中温度场所满足的方程，边界条件与初始条件.

解 在金属细杆上取从 x 到 $x+\Delta x$ 的一小段，若假设金属细杆全杆的总电阻为 R，通过的电流为 I，则此小段上在 Δt 的时间间隔之内得到的焦耳热为 $I^2R\dfrac{\Delta x}{l}\Delta t$，由热传导的傅里叶定律 $q(x,t)=-k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 知，此小段上在 Δt 的时间间隔内传入的热量为 $[q(x,t)\cdot S-q(x+\Delta x,t)\cdot S]\,\Delta t$，这些热量全部用来升高温度. 设金属细杆的密度为 ρ，比热容为 c，在 Δt 的时间间隔内温度升高 Δu，则此小段上的能量守衡方程为:

$$k\left[\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x}\right]S\Delta t+I^2R\frac{\Delta x}{l}\Delta t=\rho\, c\, S\,\Delta x\,\Delta u.$$

等式两边用 $S\,\Delta x\,\Delta t$ 相除，并取 $\Delta x, \Delta t$ 均趋于零的极限，则得

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{I^2R}{\rho c l S},$$

其中 $\kappa=\dfrac{k}{\rho c}$ 为金属细杆的温度扩散系数.

边界条件为: $u(0,t)=0$，$u(l,t)=u_0$.

初始条件为: $u(x,0)=\dfrac{x}{l}u_0$.

- 坐标系的选取

例 11.5 有一半径为 a、表面涂黑的均匀导体无穷长圆柱, 日光垂直于柱轴照射其上，在垂直于光线的单位面积上，单位时间内吸收的热量为 M. 设周围媒质温度为 0，柱面按牛顿冷却定律向外散热. 试在适当的坐标系中写出其边界条件 (见图 11.5).

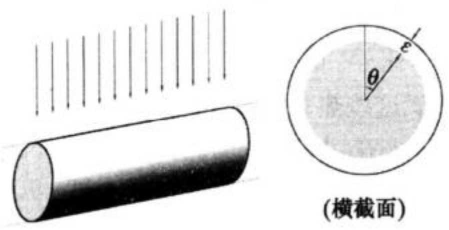

图 11.5

解 取柱坐标系，y 轴平行于光线的方向. 在 $\theta=\pi/2-\phi$ 处的表面附近作一小盒子，表面积为 S，厚度为 ε. ϕ 为极角. 在上半柱面的单位面积上吸收的热量为 $M\cos\theta$，在下半柱面的单位面积上吸收的热量为 0，在柱面的单位面积上按牛顿冷却定律散失的热量为 $H(u|_{r=a}-u_0)$，在小盒子的内壁处单位面积上传入的热量为 $-k\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a-\varepsilon}$. 因此, 小盒子的能量守衡方程为 (注意到 $\cos\theta=\sin\phi$)

$$SM\sin\phi-Sk\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a-\varepsilon}-SH(u|_{r=a}-u_0)=\rho S\varepsilon\,\overline{\frac{\partial u}{\partial t}},\quad 0<\phi<\pi,$$

$$-Sk\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a-\varepsilon}-SH(u|_{r=a}-u_0)=\rho S\varepsilon\,\overline{\frac{\partial u}{\partial t}},\quad \pi<\phi<2\pi.$$

让 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 即得边界条件:

$$\begin{cases}\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{H}{k}u\right)\right|_{r=a}=\dfrac{M}{k}\sin\phi, & 0\leqslant\phi\leqslant\pi,\\[2ex] \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{H}{k}u\right)\right|_{r=a}=0, & \pi\leqslant\phi\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

● 定解条件

例 10 弹性杆原长为 l,一端固定,另一端被拉离平衡位置 b 而静止,放手任其振动,若如图 2.7 所示,将其平衡位置选在 x 轴上,则其定解条件可写作以下 A, B, C 三种情况中的哪一种? 为什么?

A. $u|_{x=0}=0$, $u|_{t=0}=l+b$;

B. $\begin{cases} u|_{x=0}, \ u|_{x=l}=l+b \\ u|_{t=0}=0, \ u_t|_{t=0}=\varphi(x); \end{cases}$

C. $\begin{cases} u|_{x=0}=0, \ u_x|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\dfrac{b}{l}x, \ u_t|_{t=0}=0. \end{cases}$

图 2.7

解 C 是正确的,而 A,B 均是错误的.

分析 因为弹簧的纵振动所满足的是一维的波动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$$

它既是时间变量 t 的二阶线性偏微方程,也是坐标变量 x 的二阶线性偏微方程,故应有两个初始条件和两个边界条件. 仅就此而言 A 就是错的. 更何况 $u|_{t=0}\neq l+b$. 其次"另一端被拉离平衡位置 b 而静止"给出的不是边界条件,而是初始条件. 所以仅就此而言 B 也是错的.

该题讨论的是弹性杆的振动,因为放手后才能振动. 所以,放手之时即振动的初始时刻 $t=0$. 此时,杆振动的速度为零,即

$$u_t|_{t=0} = 0$$

而 $x=l$ 端拉离平衡位置使整个弹性杆伸长了 b,即这个 b 是来自整个杆各部分伸长后的贡献,而不是 $x=l$ 一端伸长的贡献,故整个系统的初始位移为

$$u|_{t=0} = \frac{b}{l}x$$

再看边界条件. 一端固定即该端没有位移,故有

$$u|_{x=0} = 0$$

另一端由于放手任其振动时未受外力,故有

$$u_x|_{x=l} = 0$$

因为若该端单位面积受有外力 $F(t)$ 时由胡克定律有

$$E\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=F(t)S$$

即

$$u_x\mid_{x=l}=\frac{S}{E}F(t)$$

例 11 长为 l 横截面积为 S 的弹性杆，一端受压，长度缩短为 $l(1-2\varepsilon)$，放手后自由振动，试写出其初始条件；若两端受压缩短为 $l(1-2\varepsilon)$，其初始条件又如何？

分析 由于杆是由于受压发生形变（放手）后才产生振动，故无论是一端受压还是两端受压发生的形变，都只会是引起振动的初始条件而不是边界条件（边界条件应是系统的边界点自始至终所受到的约束条件）

解 (1)先看一端受压的情形. 长度缩短为 $l(1-2\varepsilon)$ 即缩短了 $l-l(1-2\varepsilon)=2l\varepsilon$，亦即伸长了 $-2l\varepsilon$，这个伸长是由整个杆在开始时所提供的，设 $u(x,t)$ 为杆的位移，则类似于上例立即可写出此种情况的初始条件为

$$u\mid_{t=0}=\frac{-2l\varepsilon}{l}x=-2\varepsilon x,\ u_t\mid_{t=0}=0$$

此时，杆的不动点为 $x=0$ 处，如图 2.8(a)所示.

(2)再看两端受压的情况. 此时杆的不动点为 $x=\frac{l}{2}$ 处，如图

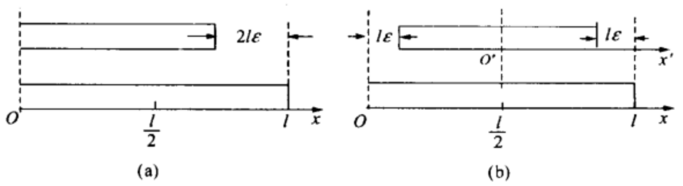

图 2.8

2.8(b)所示. 而整个杆仍伸长了 $-2l\varepsilon$，所以每端各伸长了 $-l\varepsilon$.

作坐标变换 $x'=x-\frac{l}{2}$，则由(1)的讨论知

$$u\mid_{t=0}=\frac{-\varepsilon l}{l/2}x'=-2\varepsilon\left(x-\frac{l}{2}\right)$$

故两端受压的初始条件为

$$u\mid_{t=0}=\varepsilon(l-2x),\ u_t\mid_{t=0}=0$$

例 12 长为 l 的均匀弦，两端 $x=0$ 和 $x=l$ 固定，弦中张力为 T，在 $x=x_0$ 处以横向力 F 拉弦，达到稳定后放手任其振动，试写出其初始条件.

解 设弦的 x_0 点受到一横向力作用后所发生的位移为 h，则弦的初始位移如图 2.9 所示，由两条直线的方程给出

$$u\mid_{t=0}=\begin{cases}\frac{h}{x_0}x,\ 0\leqslant x\leqslant x_0\\ \frac{h}{l-x_0}(l-x),\ x_0\leqslant x\leqslant l\end{cases}\qquad ①$$

其中 h 待求. 又设 x_0 的左右两边的弦中的张力分别为 T_1 和 T_2,则由牛顿运动定律有

$$\begin{cases} F - T_1\sin\alpha_1 - T_2\sin\alpha_2 = 0 & ② \\ T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 & ③ \end{cases}$$

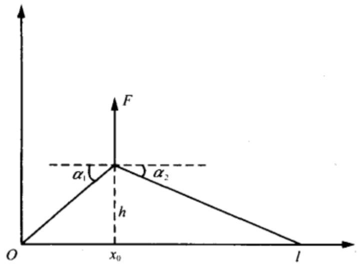

图 2.9

其中,T_1,T_2,α_1,α_2 均为辅助量. 故只要找出辅助量和已知量及 h 的关系后代入并求解方程组②~③便可求得 h.

由于在小振动情况下有

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \frac{h}{x_0},\ \sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \frac{h}{l - x_0}$$

$$\cos\alpha_1 \approx \cos\alpha_2 \approx 1,\ \mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x$$

将这些近似关系一并代入②~③式得

$$T_1 \approx T_2 = T,\ F = T\frac{h}{x_0} + T\frac{h}{l - x_0}$$

故得

$$h = \frac{Fx_0(l - x_0)}{Tl}$$

代入①式得初始位移,为

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{F(l - x_0)}{Tl}x,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ \dfrac{Fx_0}{Tl}(l - x),\ x_0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

而初始速度显然为 $u_t\big|_{t=0} = 0$

练习题目（供参考）

一长为 l 的匀质柔软轻绳，其一端固定在竖直轴上，绳 子以角速度 ω 转动，试导出此绳相对于水平线的横振动方程.

试推导一匀质细圆锥杆的纵振动方程.

设有一横截面积为 S、电阻率为 r 的均质导线，内有其 电流密度为 j 的均匀分布的直流电通过，试导出导线内的热传导 方程.

由流体力学知，理想流体的完整方程组由

Euler 型运动方程 $$\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f} \quad ①$$

连续方程 $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \quad ②$$

物态方程 $$p=f(\rho) \quad ③$$

组成. 其中，①式应看作三个分量 v_x、v_y 和 v_z 的方程；$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{\rho}$ 分别为流速、压力和密度；$\boldsymbol{f}$ 为单位质量上所受外力，试导出声波在空气中传播所满足的声波方程.

分别写出以下两道关于杆的纵振动问题的定解条件

找出他们的差异.

(1)均匀细杆长为 l，在 $x=0$ 端固定，而另一端受着一个沿杆长方向的力 Q，如果在开始一瞬间，突然停止这个力的作用，求杆的纵向振动.

(2)长为 l 而固定于 $x=0$ 一端的均匀细杆，处于静止状态中，在 $t=0$ 时，一个沿着杆长方向的力 Q 加在杆的另一端上，求在 $t>0$时杆上各点的位移.

设有一厚壁圆筒，其初始温度为 u_0，并设它的内表面

的温度增加与时间 t 成线性关系，外表面按 Newton 冷却定律进行热交换，试写出其温度分布满足的定解问题.

解 由于研究的是柔软轻绳，故弦的重量可忽略不计. 且由于惯性离心力的作用，绳的平衡位置为水平线. 如图 2.3 所示，在绳中划出一小段 $\mathrm{d}x$，考虑这一小段的受力和运动情况. 同例 1 一样，此处 $u(x,t)$ 仍表弦的位移，T_1 和 T_2 分别表小段 $\mathrm{d}x$ 段的两端所受的张力. 注意在小振幅情况下 $\sin\alpha \approx \tan\alpha = u_x$，$\cos\alpha \approx 1$，

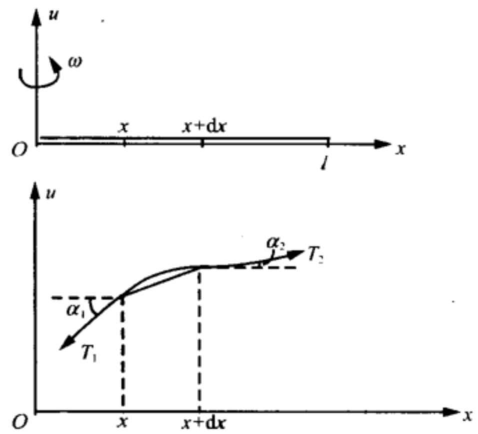

图 2.3

于是这一小段作横振动的运动方程为

$$T_2 u_x|_{x+\mathrm{d}x} - T_1 u_x|_x = \rho \mathrm{d}x \cdot u_{tt}$$

即

$$(Tu_x)|_{x+\mathrm{d}x} - (Tu_x)|_x = u_{tt}\rho \mathrm{d}x \qquad ①$$

此处 $T_1 = T_2 = T$ 是与例 1 同样的原因. 又绳在以角速度 ω 转动时，其上任意一点 x 处所受的张力 $T(x)$ 由从 x 到 l 的一段绳上的惯性离心力所提供，即

$$T(x) = \int_x^l \omega^2 x\rho \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2) \qquad ②$$

将②式代入①式得

$$\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2) \cdot u_x\right]_{x+\mathrm{d}x} - \left[\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2)\right]_x = u_{tt}\rho \mathrm{d}x$$

两边除以 $\rho\mathrm{d}x$ 并整理得

$$u_{tt} - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial}{\partial x}[(l^2 - x^2)u_x] = 0$$

解 用 $u(x,t)$ 表杆作纵振动的位移，并设杆的杨氏模量为 E，体密度为 ρ，横截面积为 $S(x)$，如图 2.4所示在杆上划出一小段

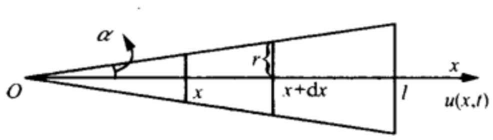

图 2.4

$\mathrm{d}x$，则该小段作纵振动时的运动方程为

$$E(Su_x)|_{x+\mathrm{d}x}-E(Su_x)|_x=(\rho S\mathrm{d}x)u_{tt}$$

即

$$(\rho S\mathrm{d}x)u_{tt}=E\frac{\partial}{\partial x}(Su_x)\mathrm{d}x$$

又

$$S=\pi r^2=\pi(x\tan\alpha)^2$$

代入上式得

$$\rho(\pi x^2\tan^2\alpha)\mathrm{d}xu_{tt}=E\frac{\partial}{\partial x}(\pi x^2\tan^2\alpha u_x)\mathrm{d}x$$

化简整理得

$$u_{tt}=\frac{a^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

其中，$a^2=\dfrac{E}{\rho}$.

解 当导线内有电流通过时，按 Joule-Lenz 定律导线会发热. 若导线不粗，热量会沿电流流动的方向传递. 如图 2.5 所示，在导

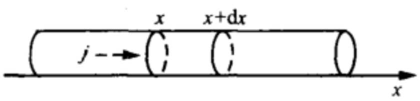

图 2.5

线内任取一小段 $\mathrm{d}x$，考虑这一小段在 $\mathrm{d}t$ 时间内的热量流动的情况. 设 k、c、ρ 分别为导线的热传导系数、比热和质量密度，u 代表温度，则由 Fourier 实验定律知，在 $\mathrm{d}t$ 时间内流入体元 $\mathrm{d}V$ 内的净热量为

$$\{[-ku_x]_x-[-ku_x]_{x+\mathrm{d}x}\}S\mathrm{d}t=\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)S\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

由 Joule-Lenz 定律知，体元 $\mathrm{d}V$ 当电流通过时产生的热量为

$$I^2R\mathrm{d}t=(jS)^2\left(\frac{r\mathrm{d}x}{S}\right)\mathrm{d}t=j^2rS\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

而体元 $\mathrm{d}V$ 温度升高 $\mathrm{d}u$ 度所需要的热量为

$$c\rho \mathrm{d}V\mathrm{d}u$$

故由热量守恒定律有

$$c\rho \mathrm{d}V\mathrm{d}u = \frac{\partial}{\partial x}(ku_x)S\mathrm{d}x\mathrm{d}t + j^2 rS\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

即 $c\rho \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = j^2 r$.

解 设 p_0 和 ρ_0 为空气在平衡状态下的压力和密度,并记 $S = \dfrac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$,即,$\rho = \rho_0(1+S)$. 由于声波在空气中传播时 S 和 $\boldsymbol{v}$ 都是很小的量,于是①式和②式中的二次项均可略去,即①式变为

$$\boldsymbol{v}_t = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p \quad ④$$

②式变为

$$\rho_t + \rho_0 \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,\ 即\ S_t + \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad ⑤$$

而声波的传播过程是绝热的,绝热过程的物态方程③是 $p = p_0(1+S)^\gamma$,它可近似为线性的

$$p = p_0(1+\gamma S) \quad ⑥$$

其中 γ 为定压比热与定容比热的比值. 方程组④~⑥是声学的完整方程组. 由④式和⑥式中消去 p 得

$$\boldsymbol{v}_t = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\nabla S \quad ⑦$$

而由⑤式和⑦式消去 $\boldsymbol{v}$ 得

$$S_{tt} - a^2\Delta S = 0 \quad ⑧$$

此即声波方程. 其中,$a^2 = \dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}$.

解 设杆作纵振动的位移为 $u(x,t)$,则

(1)其边界条件为

$$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=l} = 0$$

因为在 $x=l$ 端虽然受到一个力 Q,但这个力在开始的一瞬间已停止,所以对于整个振动过程而言 $x=l$ 端并不受力,力 Q 只是引起了初始位移. 设杆的横截面积为 S,则由 Hooke 定律有

$$E\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=0} = \frac{Q}{S}$$

所以

$$u|_{t=0} = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{Q}{ES}\mathrm{d}x = \frac{Q}{ES}x$$

显然

$$u_t|_{t=0} = 0$$

(2)这一道题的叙述虽然和上一道题貌似相似,但实际上有着很大差异. 其边界条件为

$$u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=0} = \frac{Q}{ES}$$

因为力 Q 自 $t=0$ 时作用在 $x=l$ 端后,就没有停止和撤消过. 故 Q 导致的是边界条件而不是初始条件. 由于开始时杆是处于静止状态中,所以初始条件为

$$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0$$

解 如图 2.10 所示,设圆筒的内半径为 r_1,外半径为 r_2,则由于问题的对称性,我们只需考虑温度 u 随 r 的变化情况. 显然,该问题的泛定方程和初始条件分别为

$$u_t = D\Delta u = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ u|_{t=0} = u_0$$

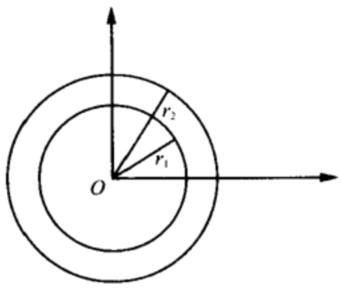

图 2.10

而内表面的温度为

$$u|_{r=r_1} = at + b$$

其中,a、b 为常数. 由 $u|_{t=0} = u_0$ 可求得 $b = u_0$,故有

$$u|_{r=r_1} = at + u_0$$

又设周围介质的温度为 u_1,则由 Newton 冷却定律有

$$-ku_r|_{r=r_2} = H(u|_{r=r_2} - u_1)$$

即

$$(u + hu_r)|_{r=r_2} = u_1$$

其中,$h = \frac{k}{H}$,k 和 H 分别为热传导系数和热交换系数. 这是第三类边界条件.