固定弦的受迫振动问题：（可能出现共振）

在求解过程中，注意是否有意义！

例 14.2 求解定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A_0\sin\omega t,\qquad 0<x<l,\ t>0,\tag{14.60a}$$

$$u\big|_{x=0}=0,\qquad u\big|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0,\tag{14.60b}$$

$$u\big|_{t=0}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\qquad 0\leq x\leq l,\tag{14.60c}$$

其中 a, A_0 及 ω 均为已知常数.

解 设

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),\tag{14.61}$$

其中的齐次化函数 $v(x,t)$ 取为

$$v(x,t)=f(x)\sin\omega t.\tag{14.62}$$

选择 $f(x)$，使得 $v(x,t)$ 满足非齐次方程及齐次边界条件，即

$$-\omega^2 f(x)-a^2f''(x)=A_0,\tag{14.63a}$$

$$f(0)=0,\qquad f(l)=0.\tag{14.63b}$$

非齐次常微分方程 (14.63a) 的通解为

$$f(x)=-\frac{A_0}{\omega^2}+A\sin\frac{\omega}{a}x+B\cos\frac{\omega}{a}x.$$

利用齐次边界条件 (14.63b) 可以定出

$$B=\frac{A_0}{\omega^2},\qquad A=\frac{A_0}{\omega^2}\tan\frac{\omega l}{2a}.$$

于是

$$f(x)=-\frac{A_0}{\omega^2}\left[\left(1-\cos\frac{\omega}{a}x\right)-\tan\frac{\omega l}{2a}\sin\frac{\omega}{a}x\right]=-\frac{A_0}{\omega^2}\left[1-\frac{\cos(\omega(x-l/2)/a)}{\cos(\omega l/2a)}\right].\tag{14.64}$$

这样就能导出 $w(x,t)$ 所满足的定解问题，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l,\ t>0,\tag{14.65a}$$

$$w\big|_{x=0}=0,\quad w\big|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0,\tag{14.65b}$$

$$w\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=-\omega f(x),\qquad 0\leq x\leq l.\tag{14.65c}$$

容易求出此定解问题的一般解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.\tag{14.66}$$

利用上面的初始条件就可以定出

$$D_n=0,\tag{14.67a}$$

$$C_n=-\frac{2\omega}{n\pi a}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=-\frac{2A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\frac{1-(-)^n}{n^2}\frac{1}{(n\pi a)^2-(\omega l)^2}.\tag{14.67b}$$

这说明，只有 $n=$ 奇数 时，C_n 才不为 0．这样，最后就求出了

$$w(x,t)=-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right]\tag{14.68}$$

和

$$\begin{aligned}u(x,t)=&-\frac{A_0}{\omega^2}\left[1-\frac{\cos\omega(x-l/2)/a}{\cos(\omega l/2a)}\right]\sin\omega t\\&-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right].\end{aligned}\tag{14.69}$$

在上面的解题过程中，还忽略了一个特殊情形，即驱动力的角频率 ω 正好是弦的某些固有频率，例如 $\omega_{2k+1}=(2k+1)\pi a/l$，$k$ 为某个确定的自然数时，弦在驱动力的作用下会发生共振现象．表现在求解过程中，作为常微分方程边值问题 (14.63) 的解，(14.64) 式即失去意义，此后的解题过程均需作相应的修改．事实上，最后的解应该就是 (14.69) 式在 $\omega\to\omega_{2k+1}$ 下的极限值．最简单的作法是将 (14.64) 式中的 $f(x)$ 也按本征函数组 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{l}x, n=1,2,3,\cdots\right\}$ 展开 (其实在 (14.67b) 式中已完成了此项计算)，

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{\omega l}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中的 C_n 见 (14.67b) 式．整理即得

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{4A_0l^2}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\\&\times\left[(2n+1)\pi a\sin\omega t-(\omega l)\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right].\end{aligned}\tag{14.70}$$

当 $\omega\to\omega_{2k+1}$ 时，此和式中的 $n=k$ 项为不定式，应单独提出，而用洛必达法则求出极限值，

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{4A_0l^2}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\left\{\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\right.\\&\left.\times\left[(2n+1)\pi a\sin\omega t-(\omega l)\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right]\right\}\\&+\frac{4A_0l^2}{\pi^2 a}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{1}{[(2k+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\\&\times\left[(2k+1)\pi a\sin\omega t-(\omega l)\sin\frac{2k+1}{l}\pi at\right]\\=&\frac{4A_0l^2}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\left\{\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\right.\\&\left.\times\left[(2n+1)\pi a\sin\omega t-(\omega l)\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right]\right\}\\&-\frac{2A_0l}{\pi^2 a}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\left[t\cos\frac{2k+1}{l}\pi at-\frac{l}{(2k+1)\pi a}\sin\frac{2k+1}{l}\pi at\right].\end{aligned}\tag{14.71}$$

其中 $\sum'$ 表示和式中不含 $n=k$ 项．