中国科学技术大学

2016–2017学年第二学期

数理方程B期末考试试卷

■ A 卷　　　　□ B 卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评阅人								

得分	

一、(本题10分) 求方程$u_x + yu_{xy} = 0$的一般解。

得分	

二、 (本题10分)求解一维半无界弦的自由振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < +\infty, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{t=0} = x,\ u_t|_{t=0} = 2\sin x,\ 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

得分	

三、 (本题20分)考察一维有界弦振动问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(t,x),\ t>0,\ 0<x<\pi, \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{3}{2}x,\ u_t|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2},\ 0<x<\pi. \end{cases}$$

1. 当$f(t,x)=0$时，求出上述定解问题的解$u_1(t,x)$；
2. 当$f(t,x)=\sin\dfrac{x}{2}\sin\omega t,\ \omega\neq k+\dfrac{1}{2},\ k\in N$时，求出上述定解问题的解$u_2(t,x)$；
3. 指出定解问题中方程非齐次项$f(t,x)$、边界条件和初始条件的物理意义。

得分	

四、(本题15分)求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\big(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\big) + u,\ t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u|_{x=0}\text{有界},\ u_x|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

得分	

五、(本题15分)求解如下泊松方程的边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = z,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0. \end{cases}$$

得分	

六、(本题15分)设区域$\Omega=\{(x,y)|y\geqslant x\}$。

1. 求区域Ω上的泊松方程狄利克雷边值问题的格林函数;
2. 求解如下泊松方程的狄利克雷边值问题:

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\ (x,y)\in\Omega,\\ u(x,x)=\varphi(x).\end{cases}$$

得分	

七、(本题15分)考察定解问题：

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 3u,\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(0,x) = \varphi(x),\ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

1. 求出上述定解问题相应的基本解；
2. 当$\varphi(x) = x$时，求解上述定解问题。

参　　考　　公　　式

1. 拉普拉斯算子Δ_3在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

2. 二阶欧拉方程：$x^2y''+pxy'+qy=f(x)$，在作变量代换$x=e^t$ 下，可以约化为常系数线性微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=f(e^t)$。

3. Legendre方程:$\big[(1-x^2)y'\big]'+\lambda y=0$; n阶Legendre多项式：
$P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$;
Legendre多项式的母函数：$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$, $|t|<1$; Legendre多项式的模平方：$\|P_n(x)\|^2=\dfrac{2}{2n+1}$.

4. ν阶Bessel方程：$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$; ν阶Bessel函数:
$J_\nu(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}$; Bessel函数的母函数：$e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$;
Bessel函数在三类边界条件下的模平方：$N_{\nu1n}^2=\dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega_{1n}a)$, $N_{\nu2n}^2=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}]J_\nu^2(\omega_{2n}a)$, $N_{\nu3n}^2=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}+\dfrac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}]J_\nu^2(\omega_{3n}a)$.

5. 傅里叶变换和逆变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$；$\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$;
$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\lambda^2}]=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

6. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$, $p=\sigma+is$; $L[e^{\alpha t}]=\dfrac{1}{p-\alpha}$,
$L[t^\alpha]=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $L[\sin t]=\dfrac{1}{p^2+1}$, $L[\cos t]=\dfrac{p}{p^2+1}$, $L[\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}]=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$。

7. 拉普拉斯方程$\Delta_3u=\delta(M)$的基本解：
二维，$U(x,y)=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$,　$r=\sqrt{x^2+y^2}$;
三维，$U(x,y,z)=-\dfrac{1}{4\pi r}$,　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

批改时请按学生书写过程给分
方法不拘泥于参考答案给出的方法

一、(本题10分) 解：令$v(x,y)=u_x$, 则$v+yv_y=0$, 解之得$v=\dfrac{c_1(x)}{y}$. .... (5分)

故
$$u=\int vdx=\frac{f(x)}{y}+g(y),$$
其中f,g为任意可微函数. 原方程的通解为$u(x,y)=\dfrac{f(x)}{y}+g(y)$. .... (10分)

二、 (本题10分) 解：由于$u|_{t=0}=x$，$u_t|_{t=0}=2\sin x$ 在$(-\infty,\infty)$上为奇函数，故定解问题
$$\begin{cases} v_{tt}=9v_{xx}\ (t>0,-\infty<x<\infty), \\ v|_{t=0}=x,\ v_t|_{t=0}=2\sin x \end{cases}$$
的解在$x>0$上的限制即为原定解问题的解. .... (5分)

由d'Alembert公式知
$$v(t,x)=\frac{1}{2}\big((x+3t)+(x-3t)\big)+\frac{1}{2\cdot 3}\int_{x-3t}^{x+3t}2\sin\xi d\xi=x+\frac{2}{3}\sin x\ \sin 3t.\ (8分)$$

故原问题的解为$u(t,x)=x+\frac{2}{3}\sin x\cdot\sin 3t(t>0,x>0)$. ....(10分)

三、 (本题20分) 解：1. 用分离变量法，设$u(t,x)=T(t)X(x)$，可得
$$\frac{T''(t)}{T}=\frac{X''(x)}{X}=-\lambda.$$
代入齐次边界条件得固有值问题$\begin{cases} X''+\lambda X=0\ \ (0<x<\pi), \\ X(0)=0,\ X'(\pi)=0 \end{cases}$ 和$T''+\lambda T=0$. (4分)

由Sturm-Liouville定理知有可数个非负固有值$\lambda_n=\omega_n^2$. 代入解得$\omega_n=n-\frac{1}{2}$. 相应的固有值和固有函数为$\lambda_n=(n-\frac{1}{2})^2$, $X_n=\sin(n-\frac{1}{2})x$. .... (6分)

同时$T_n(t)=A_n\cos(n-\frac{1}{2})t+B_n\sin(n-\frac{1}{2})t$. 故
$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(n-\tfrac{1}{2})t+B_n\sin(n-\tfrac{1}{2})t\right)\sin(n-\tfrac{1}{2})x. \text{............ (8分)}$$

代入初始条件得
$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n-\frac{1}{2})x=\sin\frac{3}{2}x, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n(n-\frac{1}{2})\sin(n-\frac{1}{2})x=\sin\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

观察易知$A_n = \begin{cases} 1, & n=2, \\ 0, & \text{else}, \end{cases}$ $\quad B_n = \begin{cases} 2, & n=1, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$ .... (10分)

代入系数知齐次定解问题的解为

$u(t,x) = 2\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{3}{2}t\cdot\sin\frac{3}{2}x.$ .... (12分)

2. 当$f(t,x)=\sin\omega t\cdot\sin\frac{x}{2}$时，由叠加原理，定解问题的解$u(t,x)$可以拆成$u=v+w$. 其中$v(t,x)$, $w(t,x)$分别是下述定解问题的解：

$$(1).\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \quad (t>0, 0<x<\pi), \\ v|_{x=0}, \quad v_x|_{x=\pi}=0, \\ v|_{t=0} = \sin\frac{3}{2}x, \quad v_t|_{t=0}=\sin\frac{x}{2}, \end{cases} \qquad (2).\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + \sin\omega t\cdot\sin\frac{x}{2} \quad (t>0, 0<x<\pi), \\ w|_{x=0}, \quad w_x|_{x=\pi}=0, \\ w|_{t=0}=0, \quad w_t|_{t=0}=0. \end{cases}$$

.... (15分)

v的解已由第1题给出. 设$w(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n(t)\sin(n-\frac{1}{2})x$, 代入(2)得

$$\begin{cases} S_n'' = -(n-\frac{1}{2})^2S_n + F_n(t), \\ S_n(0)=0,\ S_n'(0)=0 \end{cases},\ \text{其中}F_n(t) = \begin{cases} \sin\omega t, & n=1, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

解之得$S_1 = \dfrac{2\omega\sin\frac{t}{2} - \sin\omega t}{\omega^2-\frac{1}{4}}$, $S_n=0(n>1)$. 故

$$w(t,x) = \frac{2\omega\sin\frac{t}{2}-\sin\omega t}{\omega^2-\frac{1}{4}}\cdot\sin\frac{x}{2}.$$

进而，当$f(t,x)=\sin\omega t\cdot\sin\frac{x}{2}$时，原定解问题的解为：

$u(t,x) = 2\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{3}{2}t\cdot\sin\frac{3}{2}x + \dfrac{2\omega\sin\dfrac{t}{2}-\sin\omega t}{\omega^2-\dfrac{1}{4}}\cdot\sin\frac{x}{2}.$ .... (18 分)

3. 方程非齐次项$f(t,x)$为弦受迫振动中的外力密度函数（的ρ倍); 齐次边界条件的物理意义是弦振动过程中弦的左端点固定、右端点在竖直方向自由滑动；初始条件的物理意义是弦的初始位移和初始速度. .... (20分)

四、(本题15分)解: 设 $u=X(x)T(t)$, 代入得 $\dfrac{T'}{T}-1 = \dfrac{X''+\dfrac{1}{x}X'}{X} = -\lambda$. 代入齐次边界条件得固有值问题

$$\begin{cases} x^2X'' + xX' + \lambda x^2X = 0 \quad (0<x<\pi), \\ X(0)\text{有界},\ X'(1)=0, \end{cases}$$

和$T'=(1-\lambda)T$ ....(5分)

$X(x)$的有界解为 $X(x)=J_0(\omega x)$. 固有值为 0, ω_1^2, ω_2^2, $\cdots$, $\omega_n^2,\cdots$, (ω_n 为$J_1(x)=0$ 正根), 固有函数为 1, $J_0(\omega_1 x)$, $J_0(\omega_2 x),\cdots$, $J_0(\omega_n x)$ $\cdots$. 代入解得$T(t)=e^{(1-\omega_n^2)t}$, 因此，级数解

$$u(t,x)=c_0e^t+\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0(\omega_n x)e^{(1-\omega_n^2)t} \qquad (*)$$ ....(10分)

当$t=0$ 时, $\varphi(x)=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0(\omega_n x)$，其中

$$c_0=2\int_0^1\varphi(x)xdx, c_n=\frac{2}{J_0^2(\omega_n)}\int_0^1\varphi(x)xJ_0(\omega_n x)dx,\quad n=1,2,\cdots,$$

代入 $(*)$ 即得解..(15分)

五、(本题15分) 解: 观察得方程特解为 $\frac{1}{6}z^3$ ....(3分)

设 $w=u-\frac{1}{6}z^3$

在球坐标系下定解问题变为 $\begin{cases}\Delta_3 w=0, \quad (r<1)\\ w|_{r=1}=-\frac{1}{6}\cos^3\theta.\end{cases}$ ....(5分)

球内轴对称问题的级数解为 $w=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nr^nP_n(\cos\theta)$........................(8分)

当 $r=1$时, $-\frac{1}{6}\cos^3\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nP_n(\cos\theta)$..............................(10分)

可得$C_1=-\frac{1}{10}$, $C_3=-\frac{1}{15}$, 其它皆为 0.................................(13分)

$u=w-\frac{1}{6}z^3=-\frac{1}{10}z+\frac{1}{10}z(x^2+y^2+z^2)$ ....(15分)

六、(本题15分) 解: 1. $\begin{cases}\Delta_2 G=-\delta(M-M_0)\,(M,M_0\in\Omega)\\ G\mid_{\partial\Omega}=0\end{cases}$ ....(3分)

$M=(x,y)$, $M_0=(\xi,\eta)$, $M_1=(\eta,\xi)$

$G=\frac{1}{2\pi}\Big(\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{1}{r(M,M_1)}\Big)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\eta)^2+(y-\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ ....(8分)

2. 区域Ω的外法向量为 $n=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ . . . .(10分)

$$u(\xi,\eta)=-\int_{\partial\Omega}\varphi(x)\cdot\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}dl\ =-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\Big(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big|_{\partial\Omega}\sqrt{2}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\Big(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial x}\Big)\Big|_{\partial\Omega}dx$$
$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\frac{\eta-\xi}{(x-\eta)^2+(x-\xi)^2}dx$$ . . . .(15分)

七、(本题15分) 解：1. 所求基本解即为定解问题

$$\begin{cases} U_t=4U_{xx}+3U, \quad (-\infty<x<\infty,t>0), \\ U(0,x)=\delta(x) \end{cases}$$

的解. . . . . (3分)

令$\bar{U}=F[U]=\int_{-\infty}^{\infty}U(t,x)\mathrm{e}^{i\lambda x}d\mathrm{x}$为$U(t,x)$关于变元$x$的Fourier变换. 则

$$\begin{cases} \frac{d\bar{U}}{dt}=-4\lambda^2\bar{U}+3\bar{U} \\ \bar{U}(0,x)=1 \end{cases}$$

可得$\bar{U}=\mathrm{e}^{(-4\lambda^2+3)t}$. . . . .(8分)

故

$$\begin{aligned} U &= F^{-1}[\bar{U}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{(-4\lambda^2+3)t}\mathrm{e}^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{16t}x^2+3t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2}d\lambda \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{16t}x^2+3t} \end{aligned}$$

. . . . (12分)

原定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(t,x) &= U(t,x)*\phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi\cdot\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{3t}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{16}(x-\xi)^2}d\xi \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\mathrm{e}^{3t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-x)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{16}\xi^2}d\xi \\ &= \frac{x}{\sqrt{\pi}}\cdot\mathrm{e}^{3t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\xi^2}d\xi \\ &= x\cdot\mathrm{e}^{3t} \end{aligned}$$

. . . . (15分)