数理方程期末试题参考答案与解析

2020 年毕业班期末试题

参考答案与解析由数理方程 08 班制作，仅供学习交流使用

特别说明：助教张舒博撰写参考答案，助教高源制作解析，作为复习课讲义.

一、(共 18 分) 求解下列 $Cauchy$ 问题。

(1)

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u\big|_{t=0} = x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = \cos 2x \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 20 \\ u(0, y) = y^2, \quad u(x, 0) = \sin x \end{cases}$$

解：

(1) 由题意知，可以使用行波法求解。其中

$$a = 2, \quad \varphi(x) = x^2, \quad \phi(x) = \cos 2x$$

代入达朗贝尔公式得

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{(x - 2t)^2 + (x + 2t)^2}{2} + \frac{\sin 2(x + 2t) - \sin 2(x - 2t)}{8} \end{aligned}$$

(2) 由题意知，可以使用通解法求解。其中偏微分方程属于可直接积分求解类型。将偏微分方程依次以变量 x、y 为积分变量进行积分得

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + 20xy$$

其中 f, g 为任意可微函数.

接着代入定解条件，构建已知函数和未知函数之间的联系.

$$\begin{cases} u(0, y) = f(0) + g(y) = y^2 \\ u(x, 0) = f(x) + g(0) = \sin x \end{cases}$$

将上述等式相加得

$$f(0)+g(y)+f(x)+g(0)=y^2+\sin x$$

将 $x=0,y=0$ 代入上式得

$$f(0)+g(0)=0$$

进而可得

$$f(x)+g(y)=y^2+\sin x$$

代入泛定方程的形式解得

$$u(x,y)=y^2+\sin x+20xy$$

总结：这道题目的两小问考察了行波法的直接应用和通解法求解定解问题的具体操作. 一般地，对于符合行波法使用条件的问题，即一维无界区域波动方程，在没有指定求解方法的前提下我们首选行波法；从求解过程中不难发现，行波法求解比较简洁，只需要从给定的定解问题中找出 $a,\varphi(x),\phi(x)$，代入达朗贝尔公式

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

即可.

而对于无界区域的问题，在没有指定求解方法的前提下，如果偏微分方程的通解是熟悉的类型 (可直接积分求解类型、可通过函数变换转化为可直接积分求解类型、可通过变量变换转化为可直接积分求解类型)，可以考虑使用通解法求解。通解法求解定解问题的具体操作为：求解偏微分方程得到形式解，代入定解条件构建已知函数和未知函数之间的联系，用已知函数表达形式解中的未知函数并代入形式解得到定解问题的解。

二、(共 18 分) 求以下固有值问题的固有值和固有函数。

(1)

$$\begin{cases} Y''(x)+\lambda Y(x)=0,(0<x<\pi) \\ Y'(0)=0,Y'(\pi)=0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x^2Y''(x)+xY'(x)+\lambda Y(x)=0,(1<x<b) \\ Y(1)=0,Y'(b)=0 \end{cases}$$

解：

(1) 由题知，固有值问题符合施刘定理. 由施刘定理可知，$\lambda\geq 0$.

$\lambda=0$ 对应的固有函数为：$Y(x)=Ax+B$.

$\lambda=k^2(k>0)$ 对应的固有函数为：$Y(x)=C\cos kx+D\sin kx$.

对于 $\lambda=0$，代入定解条件得 $A=0$, 即对应的固有函数为 $Y(x)=1$.

对于 $\lambda = k^2(k>0)$, 代入定解条件得 $D=0, k=n$, 即对应的固有函数为
$Y_n(x) = \cos nx, n = 1,2,3,\ldots.$
综上所述，固有值为 $\lambda = n^2$, 对应的固有函数为 $Y_n(x) = \cos nx, n = 0,1,2,3,\ldots.$
(2) 由题知，固有值问题符合施刘定理. 由施刘定理可知，$\lambda > 0$.
此常微分方程为欧拉方程，可以通过变量代换转化为二阶常系数线性常微分方程求解.
令 $x = e^t$，将原方程转化为

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \lambda Y = 0$$

利用特征根法求得通解为

$$Y(t) = A\cos kt + B\sin kt$$

则可得

$$Y(x) = A\cos(k\ln x) + B\sin(k\ln x)$$

代入定解条件得

$$\begin{cases} Y(1) = A = 0 \\ Y'(b) = B\cos k\ln b \cdot \frac{k}{b} = 0 \Rightarrow k\ln b = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$$

所以固有值为

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2\ln b}\pi\right)^2$$

固有函数为

$$Y_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}\ln x)$$

其中 $n = 0,1,2,\ldots.$

总结：分离变量法求是一种求解定解问题的重要方法，其核心思想是通过将偏微分方程问题转化为常微分方程问题进行求解. 转化的方法则是，将解和定解条件在固有函数系上展开. 因此，固有值和固有函数系的求解对于分离变量法至关重要. 首先我们要明确，固有值问题就是带有参数 λ 的常微分方程定值问题，求解方法和一般的常微分方程求解方法相同。

由于存在未知参数 λ，一般求解时需要首先根据 λ 的取值确定形式解. 由施刘定理我们可以知道 λ 非负，并且只有当边界条件都为第二类边界条件时 λ 才可能取 0. 因此，我们按照施刘定理，确定 λ 的取值，然后固有值问题求解转化为一类常微分方程定值问题求解.

由于我们研究的一般是二阶线性偏微分方程的定解问题，则对应固有值问题是二阶线性常微分方程的定值问题. 如果方程是二阶线性常系数微分方程，则可以直接使用特征根法求解；如果是一般的二阶线性常微分方程，则需要通过变量代换或函数变换，将其转化为常系数微分方程求解. 特别地，这道题目的第二小问考察欧拉方程的求解，这类特殊的方程的求解方法建议掌握. 对于一般情形，使用变量代换和函数变换，可以

参考第一次习题课的讲义，以及《数理方程复习指导》.

三、(共 18 分)
(1) 求周期边界条件下

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, (t > 0, 0 < x < 1) \\ u(t,0) = u(t,1), u_x(t,0) = u_x(t,1) \end{cases}$$

的分离变量解 $u = T(t)X(x)$
(2) 求解

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, (t > 0, 0 < x < 1) \\ u(t,0) = u(t,1), u_x(t,0) = u_x(t,1) \\ u(0,x) = \sin 2\pi x, u_t(0,x) = 2\pi\cos 2\pi x \end{cases}$$

解：
(1) 首先写出分离变量形式，令 $u(t,x) = T(t)X\ x)$. 代入泛定方程得

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1), X'(0) = X'(1) \end{cases}$$

由施刘定理得 $\lambda = k^2 > 0$ $X(x) = A\cos kx + B\sin kx$.
代入定解条件得

$$\begin{cases} X(0) = A = A\cos k + B\sin k = X(1) \\ X'(0) = kB = -kA\sin k + kB\cos k = X'(1) \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} \cos k - 1 & \sin k \\ -\sin k & \cos k - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

若上述方程组有非零解，则系数行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix} \cos k - 1 & \sin k \\ -\sin k & \cos k - 1 \end{vmatrix} = (\cos k - 1)^2 + \sin^2 k = 2 - 2\cos k = 0$$

解得

$$k = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

所以固有值为

$$\lambda_n = 4n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

固有函数为

$$X_n(x) = A_n \cos 2n\pi x + B_n \sin 2n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

将固有值代入关于 t 的常微分方程，并解得

$$T_n(t) = C_n \cos 2n\pi t + D_n(t) \sin 2n\pi t, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

将 $X_n(x), T_n(t)$ 相乘并叠加得到形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos 2n\pi t + D_n \sin 2nxt) \cdot \cos 2n\pi x + (C_n' \cos 2n\pi t + D_n' \sin 2n\pi t) \cdot \sin 2n\pi x$$

(2) 由 (1) 知，形式解为

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos 2n\pi t + D_n \sin 2nxt) \cdot \cos 2n\pi x + (C_n' \cos 2n\pi t + D_n' \sin 2n\pi t) \cdot \sin 2n\pi x$$

代入初始条件，比较对应项系数得 $C_1' = 1, D_1 = 1$，其余项系数为 0.
所以定解问题的解为

$$u(t,x) = \cos 2\pi t \sin 2\pi x + \sin 2\pi t \cos 2\pi x = \sin 2\pi(t+x)$$

总结：这道题目考察分离变量法的具体操作. 分离变量法的具体操作可以概括为：首先写出分离变量形式并得到固有值问题和其他常微分方程，求解固有值问题得到固有值和固有函数，将固有值代入其他常微分方程并求解，将常微分方程的解按照最初分离变量形式的等式乘起来并叠加得到形式解，最后根据初始条件利用正交性确定系数.

关于分离变量法我们要明确其核心为将偏微分方程问题转化为常微分方程问题，转化的方法为将解和定解条件在固有函数系上展开.

我们知道，处理问题的根本原则是：先有意义后求量. 对于分离变量法，其理论支持为施刘定理. 虽然从解题上直观看，好像施刘定理只是告诉我们固有值的非负，但实际上，施刘定理告诉我们，满足施刘定理条件时：固有函数系是完备的——因此可以将解在固有函数系上展开，即形式解是有意义的；固有函数系是加权正交的——因此可以将定解条件在固有函数系上展开，即通过比较对应项系数可以得到形式解的系数这一方法可以等价地表示为可以通过加权在给定区间作定积分求解系数.

特别提醒，施刘定理保证了固有函数系的加权正交性，在使用分离变量法求解时，要注意确定权值函数.

四、(共 14 分) 求解

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(t>0, -\infty<x<+\infty) \\ u|_{t=0} = \delta(x+1) \end{cases}$$

解：由题意知，可以使用傅里叶变换法求解 (这里省略了无穷远点为 0 的条件).
首先作正变换得到

$$\begin{cases} \hat{u}_t = (-\lambda^2+1)\,\hat{u} \\ \hat{u}|_{t=0} = e^{i\lambda} \end{cases}$$

求解关于 $\hat{u}_t$ 的常微分方程定值问题得到像函数

$$\hat{u}(t,\lambda) = e^{\left(1-\lambda^2\right)t} \cdot e^{i\lambda} = e^t \cdot e^{-t\lambda^2} \cdot e^{i\lambda}$$

其中

$$\begin{aligned} F^{-1}\left[e^{-t\lambda^2}\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\lambda^1} \cdot e^{i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(\lambda-\frac{ix}{2t}\right)^2} d\lambda \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

由傅里叶变换性质可知，定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e^t \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} * \delta(x+1)\right] \\ &= \frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{4t}} \end{aligned}$$

总结：积分变换法是一种求解定解问题的重要方法. 其核心思想是转化思想，利用积分变换的性质将偏微分方程问题转化为常微分方程问题求解.

积分变换法求解定解问题的具体操作为：首先选择合适的方法及变量，作正变换、利用积分变换性质将偏微分方程问题转化为常微分方程问题，求解常微分方程定值问题得到像函数，作反变换得到定解问题的解.

注意积分变换的定义、性质，以及利用留数定理求解相关积分.

五、(共 18 分)

(1) P_n 为 n 阶勒让德函数，写出 $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$, 并计算积分 $\int_{-1}^{1}(20+x)P_2(x)\mathrm{d}x$.

(2) 求解以下定解问题，其中 (r,θ,φ) 为球坐标.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, (r<2) \\ u|_{r=2} = 3\cos 2\theta \end{cases}$$

解:
(1) 由勒让德多项式的定义

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$$

得

$$P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

代入积分表达式

$$\int_{-1}^{1}(20+x)P_2(x)dx=20\int_{-1}^{1}P_0(x)P_2(x)dx+\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)dx$$

由施刘定理知，固有函数系加权正交，所以上述积分值为 0.

另一种方法，如果没有想到将积分整理并利用正交性求解，可以直接讨论这一积分，并结合勒让德多项式的性质进行求解. 我们知道奇数阶的勒让德多项式为奇函数，偶数阶的勒让德多项式为偶函数. 所以，将积分拆成两项

$$\int_{-1}^{1}(20+x)P_2(x)dx=20\int_{-1}^{1}P_2(x)dx+\int_{-1}^{1}xP_2(x)dx$$

其中第二项为奇函数在对称区间积分，所以值为 0.

利用勒让德多项式的相关结论，对于任意正整数 n 阶勒让德多项式，有

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)dx=0$$

所以上述表达式的第一项

$$\int_{-1}^{1}P_2(x)dx=0$$

所以有

$$\int_{-1}^{1}(20+x)P_2(x)dx=20\int_{-1}^{1}P_0(x)P_2(x)dx+\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)dx=0$$

(2) 利用分离变量法求解. 利用拉普拉斯算子的球坐标表达，泛定方程可表达为

$$\Delta_3 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

由定义域和定解条件知，问题具有对称性，即 $u=u(r,\theta)$. 则方程可以化为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$$

写出分离变量形式. 令

$$u=R(r)\Theta(\theta)$$

代入上述方程，得

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=-\lambda$$

令 $x=\cos\theta$ 并记 $y(x)=\Theta(\theta)$，则关于 θ 的方程可化为勒让德方程形式

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\lambda y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)y'\right]+\lambda y=0$$

由勒让德方程理论知，固有值为 $\lambda_n=n(n+1)$，对应的固有函数为

$$y_n(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$$

其中 $n=0,1,2,\ldots.$

将固有值代入关于 r 的方程并求解得

$$R_n(r)=A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}$$

对应项相乘并叠加得到形式解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\right]p_n(\cos\theta)$$

由于在球内求解定解问题，由解的有界性知 $B_n=0$. 则解可以写作

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(\cos\theta)$$

由定解条件知

$$u(2,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(\cos\theta)=3\cos2\theta$$

由第一问所述

$$P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

则上式可化为

$$u(2,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(\cos\theta)=4P_2(\cos\theta)-P_0(\cos\theta)$$

比较对应项系数得 $C_0=-1,C_2=4$，其余系数为 0.

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta) = r^2 \cdot P_2(\cos\theta) - 1$$

总结：特殊函数这一章的内容主要是介绍特殊固有值问题的求解方法. 我们知道固有值问题本质上是含参的常微分方程定值问题，其求解方法也是一般常微分方程的求解方法. 由于我们研究的主要是二阶线性的偏微分方程的定解问题，对应的固有值问题也是二阶线性的常微分方程定值问题. 对于二阶常微分方程求解，如果是常系数的，我们知道可以利用特征根法求解. 而对于一般的常微分方程，我们可以通过变量代换和函数变换将其转化为常系数的常微分方程进而求解. 而这一章则是提出了两类特殊常微分方程的求解方法.

我们知道其本质是求解固有值问题，进而可以明确，其应用是在于使用分离变量法求解定解问题. 所以求解方法仍然是按照分离变量法部分所学，而相应的理论基础仍然是施刘定理.

六、(共 14 分) 已知平面区域 $D = \{(x,y) \mid -\infty < x < +\infty, y < 1\}$

(1) 写出 D 内泊松方程第一边值问题的格林函数所满足的定解问题，并求出格林函数。

(2) 求解定解问题: 其中常数 $a > 0$

$$\begin{cases} u_{xx} + a^2 u_{yy} = 0, (-\infty < x < +\infty, y < 1) \\ u|_{y=1} = \varphi(x) \end{cases}$$

解：

(1) 由题意知，格林函数满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta\left(M - M_0\right) \\ G|_{\partial D} = G|_{y=1} = 0 \end{cases}$$

由于区域具有对称性，使用镜像法求解格林函数. 二维平面的泊松方程第一边值问题的格林函数

$$u = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

在关于直线 $y=1$ 对称的两点 $M_0(\xi,\eta)$ 和 $M_1(\xi,-\eta)$ 各放置电量分别为 ε_0 和 $-\varepsilon_0$ 的平面点电荷所形成的场的电势

$$\begin{aligned} G\left(M;M_0\right) &= \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r\left(M,M_0\right)} - \ln\frac{1}{r\left(M,M_1\right)}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r\left(M,M_1\right)}{r\left(M,M_0\right)} \\ &= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-2+\eta)^2} \end{aligned}$$

即为所求格林函数.

(2) 令 $s=x, t=\frac{y}{a}$，则定解问题可以化为

$$\left\{\begin{array}{l}u_{ss}+u_{tt}=0\left(-\infty<s<+\infty, t<\frac{1}{a}\right) \\ \left.u\right|_{t=\frac{1}{a}}=\varphi(s)\end{array}\right.$$

由 (1) 知，格林函数为

$$G\left(M ; M_0\right)=\frac{1}{4 \pi} \ln \frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-2+\eta)^2}$$

法向偏导数为

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\eta=\frac{1}{a}}=\left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=\frac{1}{a}}=\frac{1}{\pi} \frac{t-\frac{1}{a}}{(s-\xi)^2+\left(t-\frac{1}{a}\right)^2}$$

代入基本解的积分公式得

$$u(s, t)=-\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\eta=\frac{1}{a}} d \xi=-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)\left(t-\frac{1}{a}\right)}{(s-\xi)^2+\left(t-\frac{1}{a}\right)^2} d \xi$$

则定解问题的解为

$$u(x, y)=-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)\left(\frac{y}{a}-\frac{1}{a}\right)}{(x-\xi)^2+\left(\frac{y}{a}-\frac{1}{a}\right)^2} d \xi=-\frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)(y-1)}{a^2(x-\xi)^2+(y-1)^2} d \xi$$

总结：基本解方法是一种求解定解问题的重要方法. 其核心思想是将一般的定解问题转化为特殊的定解问题进行求解. 具体的操作是：根据给出的定解问题写出对应的格林函数满足的定解问题，求解格林函数满足的定解问题得到格林函数，利用基本解的积分公式计算得到定解问题的解.

其中第一步和第三步都是有着固定的对应关系，需要熟练掌握. 而第二步格林函数求解，本质上是定解问题的求解，也就是我们所说的转化后的特殊的固有值问题的求解. 所以，其求解方法仍然可以采用定解问题求解方法，比如分离变量法. 除此以外，由于其特殊性，在求解格林函数时对于定义域具有对称性的问题，常常采用镜像法进行求解.

参　考　公　式

(1) 直角坐标系: $\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

柱坐标系: $\Delta_3 u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

球坐标系: $\Delta_3 u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

(2) 若ω是$J_\nu(\omega a)=0$ 的一个正根，则有模平方$N_{\nu 1}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_1^2=\dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$

若ω是$J_\nu'(\omega a)=0$ 的一个正根， 则有模平方$N_{\nu 2}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_2^2=\dfrac{1}{2}\left[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega^2}\right]J_\nu^2(\omega a)$

(3) 勒让德多项式: $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, n=0,1,2,3,\ldots$

母函数: $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$, 递推公式: $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$

(4)$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2 t}\right)$

(5) 2 维泊松方程基本解为$u=\dfrac{1}{2\pi}\ln r$, 这里(r,θ) 为极坐标

(6) 由平面区域D内$Poisson$方程第一边值问题的格林函数$G\left(M;M_0\right)$, 求得$Poisson$方程第一边值问题解$u(M)$ 的公式是 (其中S为D的边界).

$$u(M)=-\int_S\varphi\left(M_0\right)\frac{\partial G}{\partial n}\left(M;M_0\right)dS+\iint_D f\left(M_0\right)G\left(M;M_0\right)dM_0$$