第二次习题课（week 6）

定解条件 $\begin{cases} \text{初始条件：关于}t\text{ 个数由}t\text{的偏导阶数} \\ \text{边界条件：关于坐标变量} \end{cases}$

eg. for 齐次化原理.

§1 Exercise 10.

利求解 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) & (t>0,\ -\infty<x<+\infty) \\ u(0,x) = \varphi(x) & (a\neq 0,\ a\text{为 const}) \end{cases}$

由叠加原理，原定解问题的解 $u = u_1 + u_2$，其中 u_1, u_2 分别为定解问题①,②的解

① $\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + a\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$ ② $\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} + a\frac{\partial u_2}{\partial x} = f(t,x) \\ u_2|_{t=0} = 0 \end{cases}$

① 代换：~~其~~ $\xi = x - at,\ \eta = t$

$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi(\xi) \end{cases}$ $\therefore u_1 = \varphi(x-at)$

② 令 $t_1 = t - \tau$ 波的平移，起点归零：好算.（齐次化原理平移出去再代换平移回来）

$\cancel{\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t_1} + a\frac{\partial u_2}{\partial x} = f(t_1 \end{cases}}$ 先用齐次化原理.

先求解 $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ w|_{t=\tau} = f(\tau,x) \end{cases}$

代换：$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t_1} + a\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ w|_{t_1=0} = \cancel{f(t_1,x)}\ f(\tau,x) \end{cases}$ ← τ和t_1, x无关，所有代换只是形式上的

利用①的解形式，$w = f(\tau, x-at_1) = f(\tau, x-a(t-\tau))$

代入齐次化原理的形式解. $u_2 = \int_0^t f(\tau, x-a(t-\tau))\,d\tau$

$\therefore u = \varphi(x-at) + \int_0^t f(\tau, x-a(t-\tau))\,d\tau$

Scanned with CamScanner

数理方程讲义(一) ODE的解法.

I. 将方程化变为常系数微分方程. —— 寻找合适的变换.

(1) 令 $u(r) = f(r) \cdot v(r)$.

目标: 寻找合适的 $f(r)$, s.t. $v(r)$ 是常系数微分方程

见 Chap 1

$u' = f'v + v'f$ 代入整理, 最后解一个系数为零的方程组.

II. 二阶非常系数线性微分方程 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 常系数.

2种思路 $\begin{cases} \text{变量代换} \\ \text{函数变换} \end{cases}$ 例: 欧拉方程

eg. $u'' + \frac{2}{r}u' + k^2 u = 0$

~~(2) 函数变换. —— 对于~~

(1) 变量代换. 对于 Euler 方程 $x^2y'' + pxy' + \varepsilon y = g(x)$

令 $x = \cancel{f(x)}\ f(t)$ 则 $dx = f'(t)dt$

则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{f'(t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{f'(t)} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{f''(t)}{f'^2(t)}\right)\frac{1}{f'(t)}$$

$$= \frac{1}{(f'(t))^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{f''(t)}{(f'(t))^3}\frac{dy}{dt}$$

代入原方程: 整理可得

$$\frac{1}{(f'(t))^2}\frac{d^2y}{dt^2} \cdot f^2(t) - \left(f^2(t)\frac{f''(t)}{(f'(t))^3} - p \cdot f(t) \cdot \frac{1}{f'(t)}\right)\frac{dy}{dt} + \varepsilon y = g(f(t))$$

由于 y 前系数 ε 已为常数

故只需 $\frac{d^2y}{dt^2}$、$\frac{dy}{dt}$ 系数均为常数即可.

$$\begin{cases} \frac{f'(t)}{f(t)} = C_1 \\ f^2(t)\frac{f''(t)}{(f'(t))^3} - pf(t) \cdot \frac{1}{f'(t)} = C_2 \end{cases}$$

← 这个为常数, 那倒数的平方也是

① $\Rightarrow$ $f(t) = e^{C_1 t}$

Scanned with CamScanner

代入② $\Rightarrow \frac{C_1^2}{C_1^3} - p \cdot \frac{1}{C_1} = C_2$ 显然可满足

取 $C_1 = 1$ $f(t) = e^t$ 即可

微分方程：含有未知函数的导数或微分的方式

线性微分方程. 齐次线性微分方程.

叠加原理. I. 设 $y = \varphi_i(x)$ 是线性方程. $\sum_{k=1}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = f_i(x)$

则其线性组合 $y = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x)$ 是线性方程 $\sum_{k=1}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x)$ 的解

→ 一阶线性定解问题解的存在唯一性.

II. 若级数 $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 收敛，且满足偏微分记号与求和记号交换次序

则原理 I 的 m 可以推广到无穷.

III. 推广到高维的情形.

一阶微分方程：

* 变量分离方程： $y'(x) = g(x) h(y)$

* 齐次方程. $y_x = \varphi(\frac{y}{x})$

* 形如 $y_x = f(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2})$

- $c_1 = c_2 = 0$ RHS 化成 $\varphi(y/x)$

- i) $c_1\ c_2$ 不全为 0 且 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ $(\det(A) \neq 0)$

$$\begin{cases} a_1 h + b_1 k = c_1 \\ a_2 h + b_2 k = c_2 \end{cases}$$

⇒ 方程组唯一解 (h, k)

代换：$u = x + h$ $v = y + k$

则 $\frac{dv}{du} = f(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v})$

ii) 且 $a_1 b_2 = a_2 b_1$

$\Rightarrow y_x = g(ax + by + c)$

令 $z = ax + by + c \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b g(z)$ ⇒ 分离变量.

Scanned with CamScanner

一阶线性方程 $y'(x)+p(x)y(x)=f(x)$

齐次的分离变量即可.

非齐次的：

利用补充变量的思想，：方程两边同乘因子再积分.

$$\left(y\cdot e^{\int p(x)dx}\right)'=\left(y'+p(x)y(x)\right)e^{\int p(x)dx}=f(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow\quad y(x)e^{\int p(x)dx}=\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$$

$$\Rightarrow\quad \text{通解：}\ y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

积分因子法：　积分因子 $e^{\int p(x)dx}$

进一步分解：　非齐次线性方程通解 = 齐次方程通解 + 非齐次特解

常数变易法　略.

伯努利方程：　$y_x+p(x)y=Q(x)y^n$

可降阶的二阶微分方程

二阶线性微分方程

可解：　① 已知一个特解

② 常系数二阶线性方程（线性）.

二阶常系数非齐次线性微分方程.

求特解：$\begin{cases}\text{常数变易法}\\\text{待定系数法.}\end{cases}$

待定系数：

* $f(x)=P_n(x)$ 为n次多项式.

  * $\lambda=0$ 不是特征根.

    $y_p=Q_n(x)$　代进去. 解（比较系数）得到 $a_0,\dots,a_n$

  * $\lambda=0$ 为单重特征根　$y_p=xQ_n(x)$

  * $\lambda=0$ 为双重特征根.　$y_p=x^2Q_n(x)$

Scanned with CamScanner

* $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$

  * $\alpha = 0$ 同上

  * $\alpha \neq 0$ 猜测：方程有形如 $Q(x) e^{\alpha x}$ 的特解.

    代换 $y = z e^{\alpha x}$

    $$\Rightarrow z'' + (2\alpha + p(x)) z' + (\alpha^2 + \alpha p(x) + q(x)) z = 0$$

    $\lambda = 0$ 是否为此特征方程的根 等价于 α 是否为原方程对应特征方程的根.

    * α 不是特征根. $y_p = Q_n(x) e^{\alpha x}$

    * α 是单重. $y_p = x Q_n(x) e^{\alpha x}$

    * α 是双重. $y_p = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}$

* $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \cos\beta x$ 或 $P_n(x) e^{\alpha x} \sin\beta x$.

  Euler 公式化为 $P_n(x) e^{(\alpha + i\beta) x}$

  依然按 $\alpha + i\beta$ 不是/是单重. 特征根来划分.

Euler 方程： $x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$

二阶变系数线性微分方程. 目标：转化成常系数的.

① 标准化： $y'' + \frac{p}{x} y' + \frac{q}{x^2} y = \frac{f(x)}{x^2}$ 在 $x = 0$ 处无意义

② 变量代换： $x = e^t$ $(x > 0)$ 或 $x = -e^t$ $(x < 0)$

$$\Rightarrow dx = x\,dt \Rightarrow y_x = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$y_{xx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

③ 原方程化为：…

对于求解微分方程的逆问题 即已知解求对应方程.

* 定义法. 直接代入 比较系数

* 根据特解形式确定特征根，从及对应特征方程、进而…

Scanned with CamScanner