数理方程学习指导

第一章综合复习

数理方程 08 班制作，仅供学习交流使用

本章概述

本章的主要内容

- 偏微分方程的基本概念
- 常见偏微分方程的通解的求解
- 偏微分方程特解的求解
- 数理方程的建立过程
- 三类常见方程的书写及其对应的物理意义
- 定解条件的个数、物理意义
- 行波法求解一维无界区域波动方程问题
- 延拓法求解一维半无界区域波动方程问题
- 通解法求解定解问题
- 叠加原理及其应用
- 齐次化原理及其应用

本章的学习目标

- 掌握基本概念，如方程的阶、线性方程、齐次方程等
- 理解对方程分类的标准和求解方程的方法的适用条件是对应的
- 掌握对于偏微分方程的分类，并且熟练掌握三类偏微分方程通解的求解方法
- 理解数理方程的建立过程，对于微元法要有基本的了解
- 熟练掌握三类方程的书写，以及方程中元素对应的物理意义
- 熟练掌握定解问题的构成原则，定解条件的个数确定方法，定解条件的物理意义
- 熟练掌握行波法的使用条件，以及应用于求解定解问题的具体操作

掌握延拓法在求解一维半无界区域波动方程问题中的应用，了解延拓法的思想以及奇、偶延拓的选择原因

了解通解法求解定解问题的步骤

理解叠加原理的意义及其应用

熟练掌握齐次化原理在求解非齐次发展方程中的应用

课程的学习方法

熟练掌握基本概念，并且能够对定解问题进行分类

熟练掌握求解定解问题的方法及其使用条件

对比不同方法在求解问题时的求解过程，明确方法选择

本章重点例题

可化为可直接积分类型的偏微分方程的通解求解:

$$u_{xy} + u_y = 0$$

解: 令 u $u = H$, 则原方程化为:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + H = 0 \Longrightarrow \frac{dH}{H} = -dx$$

上式两边积分得到:

$$\ln H = -x + g_1(y) \Longrightarrow H = h(y)e^{-x}, \left(\text{ 其中} h(y) = e^{g_1(y)}\right)$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h(y)e^{-x} \Longrightarrow u = f(y)e^{-x} + g(x). \quad \left(\text{ 其中} f(y) = \int h(y)dy\right)$$

应用变量代换求解偏微分方程通解：

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{xy} = 0$$

解：利用变量代换将方程转化为可以直接积分求解的偏微分方程。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) = 0$$

亦即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y)=0$$

引入变量代换 $x=x(\xi,\eta), y=y(\xi,\eta)$, 使

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial \xi}&=\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial x}{\partial \xi}+\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial y}{\partial \xi}=\left(\tfrac{\partial}{\partial x}-\tfrac{\partial}{\partial y}\right)A\\ \tfrac{\partial}{\partial \eta}&=\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial x}{\partial \eta}+\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial y}{\partial \eta}=\left(\tfrac{\partial}{\partial x}+3\tfrac{\partial}{\partial y}\right)B\end{aligned}$$

其中,A 、B 为任意常数。可令

$$\begin{cases}x=\xi+\eta\\ y=-\xi+3\eta\end{cases}$$

邦

$$\begin{cases}\xi=\frac{3x-y}{4}\\ \eta=\frac{x+y}{4}\end{cases}$$

则方程变为

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u(\xi,\eta)=0$$

此时已经完成转化目标，直接积分即可得到方程的解。

$$u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$$

其中，$f_1(\xi)$ 和 $f_2(\eta)$ 分别为 ξ 和 η 的任意函数。

定解条件的书写：

设有一根长为 l 的均匀细杆, 细杆的侧表面与周围介质没有热交换，内部有密度为 $g(t,x)$ 的热源. 已知杆的初始温度为 $\varphi(x)$, 杆的右端绝热, 左端与周围介质有热交换, 则杆内温度分布 $u(t,x)$ 的定解问题为

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x)\left(f(t,x)=\frac{g(t,x)}{\varphi},0<x<l,t>0\right)\\ u(0,x)=\varphi(x)\\ \left(hu-k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\big|_{x=0}=h(0)\theta(t,0)\\ \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l}=0\end{cases}$$

行波法求解一维无界区域弦振动问题：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\quad(-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u(0,x)=\varphi(x),u_t(0,x)=\phi(x)(-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

利用上述变量代换法可以求得一维齐次波动方程的通解为

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

由所给的初始条件，就有

$$\begin{cases} u(0,x) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = -af'(x) + ag'(x) = \phi(x) \end{cases}$$

积分可得

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + c$$

联立上式，解得

$$\begin{array}{c} f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \phi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{c}{2} \\ g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \phi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{c}{2} \end{array}$$

于是，我们得到了

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(x - at) + g(x + at) \\ &= \varphi(x - at) + \varphi(x + at) \\ &= \frac{\varphi(x - a)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \phi(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

一维半无界区域的弦振动方程的处理：
首先我们的想法很明确，即基于对行波法求解一维无界区域弦振动方程的理解，进行转化。有两类转化目标，即借鉴思想和直接转化为可处理的问题。这道例题的法一和法二分别是这两种思路的应用。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

解：法一
泛定方程的通解为

$$u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

故有

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

进而可得，

$$af_1(x) - af_2'(x) = \psi(x)$$

即

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+C$$

其中, $C=f_1(0)-f_2(0)$.

$$\begin{aligned} f_1(x)&=\tfrac{1}{2}\varphi(x)+\tfrac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\tfrac{C}{2}\\ f_2(x)&=\tfrac{1}{2}\varphi(x)-\tfrac{1}{2a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\tfrac{C}{2}\end{aligned}$$

以上二式均是在 $0\le x<\infty$ 的前题下推得的. 因为 $x+at$ 总是大于, 等于零的, 故有

$$f_1(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2}$$

至于 $x-at$ 就不一定大于零了。

（1）若 $x-at\ge 0$, 则有

$$f_2(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2}$$

(2) 若 $x-at<0$, 则上式不能用。但将边界条件代入通解得

$$f_1(at)+f_2(-at)=0$$

令 $x=at$, 并对上式从 0 到 x 积分得

$$f_1(x)-f_2(-x)=C$$

即

$$f_2(-x)=f_1(x)-C(x\ge 0)$$

故

$$\begin{aligned} f_2(x-at)=&f_2[-(at-x)](at-x\ge 0)\\ &=f_1(at-x)-C\\ &=\frac{1}{2}\varphi(at-x)+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-C\end{aligned}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\tfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ x-at\ge 0\\ \tfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\tfrac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right.\\ \left.+\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right],x-at<0\end{cases}$$

法二:

设想将半无限长的杆, 延拓 (拼接) 成无限长的杆，并将原定解问题的初始条件看成无限

长杆的纵振动的初始条件在 $0 \leq x < \infty$ 中的部分，即将原定解问题转化为

$$\begin{cases} u_n = a^2 u_{ns}(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), 0 \leq x < \infty \\ f(x), -\infty < x \leq 0 \end{cases} \\ u_t(x,0) = \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), 0 \leq x < \infty \\ g(x), -\infty \leq x < 0 \end{cases} \\ u_s(0,t) = 0 \end{cases}$$

则由 d'Alembert 公式立即可写出定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha} \Psi(\xi) \mathrm{d}\xi$$

其中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是未知的。
延拓的目标是要用延拓后的解来得到原问题的解，因此要让延拓后的解在原问题的定义域处的部分和原问题解相同。所以利用原问题的边界条件可以求得的 $u(x,t)$ 在 $0 \leq x < \infty$ 中的值即为原定解问题的解.

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi'(0+at) + \Phi'(0-at)\right]$$

$$+\frac{1}{2a}[\Psi(0+at) - \Psi(0-at)] = 0$$

即

$$\frac{1}{2}\left[\Phi'(\xi) + \Phi'(-\xi)\right] + \frac{1}{2a}[\Psi(\xi) - \Psi(-\xi)] = 0(\xi \geq 0)$$

由此有 $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi), \Psi(\xi) = \Psi(-\xi)$ 这说明满足边界条件的 Φ 和 Ψ, 均为偶函数。即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), 0 \leq x < \infty \\ \varphi(-x), -\infty < x < 0 \end{cases}$$
$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), 0 \leq x < \infty \\ \psi(-x), -\infty < x < 0 \end{cases}$$

亦即

$$f(x) = \varphi(-x), g(x) = \psi(-x)$$

注意到 $x + at$ 总于大于等于零的, 于是有

$$\Phi(x+at) = \varphi(x+at)$$
$$\int_0^{x+at} \Psi(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_0^{x+ct} \psi(\xi) \mathrm{d}\xi$$

而 $x - at$ 有可能大于, 等于或小于零。

(1) 若 $x-at\geq 0$, 则

$$\Phi(x-at)=\varphi(x-at)$$

$$\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{x-at}^{0}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

(2) 若 $x-at<0$, 则

$$\Phi(x-at)=\varphi[-(x-at)]=\varphi(at-x)$$

$$\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{x-at}^{0}\psi(-\xi)\mathrm{d}\xi\overset{n=-\xi}{=}-\int_{at-x}^{0}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta$$

即

$$\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

最后得到解：

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right.\\ \left.+\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right],x-at<0\end{cases}$$