① 三类PDE：（以t的偏微分阶数来看）.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u + f(t, M)$　　波动方程.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_3 u + f(t, M)$　　热传导方程.

$\Delta_3 u = f(M)$　　泊松方程.

② 三种边界条件：

$u|_{\partial\Omega} = \varphi_1(M)$　　Dirichlet条件　⇒　狄氏问题.

$u_t|_{\partial\Omega} = \varphi_2(M)$　　Neumann条件　⇒

$\alpha u_t + \beta u|_{\partial\Omega} = \varphi_3(M)$　　Robin条件.

③ 四种求解方法.

| | | |
|---|---|---|
| 行波法. | 一维无界区域的波动方程 | 延拓. |
| 分离变量. | 有界区间 | Bessel & Legendre & 非齐次 |
| 积分变换. | Fourier 无界区间 | 正、余弦变换. |
| | Laplace 半无界 要求k阶导条件. | 留数定理. |
| 基本解. | 求解基本解问题然后卷积. | 基本解问题的应用以上方法 |

④ 考点（不全）.

i) 行波法.

d'Alembert公式 以及振动方程的通解.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}.\ t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0,x) = \varphi(x) & u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

通解 $u = f(x+at) + g(x-at)$.

d'Alembert: $u = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi$.

齐次化原理（非齐次方程 + 齐次边界）.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(t,M) & M \in R^3,\ t>0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Lu & M \in R^3,\ t>\tau. \\ w|_{t=0} = 0 & w_t|_{t=0} = f(\tau, M) \end{cases}$$

$u = \int_0^t w(t, M; \tau)\, d\tau$.　　一阶非齐次同理.

ii) 分离变量

① 解 ODE.

② Fourier 展开求系数参数

③ S-L 定理

(1) S-L 方程：$\frac{d}{dx}(k(x)y'_x) - q(x)y + \lambda p(x)y = 0$

$$p(x) = \frac{1}{b_0(x)} e^{\int \frac{b_1}{b_0} dx}$$

(2) $f(x)$ 对固有函数系 $\{X_n\}$ 的展开 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n X_n(x)$

$$C_n = \frac{\int_{I(x)} f(x) X_n(x) p(x) dx}{\int_{I(x)} X_n^2(x) p(x) dx}$$

(3) $\lambda$ 的非负性.

④ Bessel 方程 & 函数

(1) Bessel 方程：$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$

(2) 固有函数 $X_n(x) = A_n J_\nu(x) \boxed{+ B_n N_\nu(x)}$

(3) $\lim_{x\to 0} J_\nu(x) = 0$ $\lim_{x\to 0} N_\nu(x) = \infty$

(4) $p(x) = x$.

(5) (S-L) 对 $f(x)$ 展开的系数（参考公式）.

⑤ Legendre 方程

(1) Legendre 方程：$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \mathrm{ctg}\theta \cdot \frac{d\Theta}{d\theta} + \lambda \Theta = 0$ $-1 < x < 1$

$\|p_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ $y(\pm1)$ 有界

(2) $p(x) = 1$ $(m+n+1)\int_0^1 x^m p_n(x) dx = m\int_0^1 x^{m-1} p_{n-1}(x) dx$

(3) 固有函数 $P_n(x)$，固有值 $\lambda_n = n(n+1)$

(4) 递推公式（参考公式）. (5) $0 < x < 1$

$y(0) = 0$: $\lambda_n = (2n+1)(2n+2)$, $y_n(x) = P_{2n+1}(x)$

$y'(0) = 0$: $\lambda_n = (2n+1)2n$, $y_n(x) = P_{2n}(x)$

⑥ 非齐次情形.（泛定方程和边界条件均非齐次）.

(1) 特解法 ⇒ 方程变为齐次. $u = v + w$, $v$ 为特解.

(2) 齐次化原理. $u = v + w = v + \int_0^t W(\tau, M; \tau) d\tau$, $v$ 的方程齐次

(3) 固有函数法. 将 $f(x)$ 在固有函数系下展开（S-L 定理求 $p(x)$）

(*) 只有发展方程才能用齐次化原理.

iii）积分变换.

(1)

① Fourier 变换. $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$

反演, $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$

② 微分性质. $F[f^{(k)}(x)]=(+i\lambda)^k F[f]$

$F'[\lambda]=F[-ixf(x)]$

③ 卷积性质 $F^{-1}[G\cdot F]=F^{-1}[F]*F^{-1}[G]$

④ 频移 $F[\lambda+\lambda_0]=F[f(x)\cdot e^{-i\lambda_0 x}]$

(2)

① Laplace 变换. $L(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$

~~f(t)=~~

② 微分关系 $L[f^{(n)}(t)]=p^n L(p)-p^{n-1}f(+0)-\cdots-p^0 f^{(n-1)}(+0)$

③ 相似定理. $L[f(at)]=\frac{1}{a}L(\frac{p}{a}).\quad, a>0$

④ 位移定理. $L[e^{\lambda t}f(t)]=L[p-\lambda]\quad, \forall\lambda\in\mathbb{C}$

⑤ 卷积. $L^{-1}[F(p)G(p)]=f(t)*g(t)$

⑥ 留数定理计算反变换.

$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(p)e^{pt}, p_k]$ $p_k$ 为 $F(p)$ 的奇点,

$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$

$a$ 为 $f(z)$ 的 $m$ 阶极点

⑦ Laplace 逆变换表（基本表）.

$L^{-1}[\frac{1}{p^{\alpha+1}}]=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\quad \alpha>-1.$

$\cancel{L^{-1}[\cos wt]}=L^{-1}[\frac{p}{p^2+w^2}]=\cos wt$

$L^{-1}[\frac{p}{p^2+w^2}]=\sin wt$

$L^{-1}[\frac{p}{p^2-w^2}]=\mathrm{sh}\,wt$

$L^{-1}[\frac{w}{p^2-w^2}]=\mathrm{ch}\,wt$

(3)

① 正弦变换. $F_s(\lambda)=\int_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$ $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$

② 余弦变换. $F_c(\lambda)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\cdot dx$ $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda$

(V) 基本解

① $\delta$ 函数

1) 性质的证明以积分形式进行.

2) $F[\delta(x)] = \mathcal{L}[\delta(x)] = 1.$ （Laplace 见附文档）

② 用基本解方法解定解问题

1) Poisson 方程.（用 Green 函数） $u(M_0) = -\iint_{\partial\Omega} \varphi(M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_0 - M) dS + G * f$ （参考公式）

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta G = -\delta(M-M_0) \\ G|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$u = U * f.$ $\cancel{U = G}$.（$Lu = f(M)$ 的基本解. ~~在此为G~~）

$LU = \delta(M)$

2) 热传导方程.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(t, M) \\ u|_{t=0} = \varphi(M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = L\bar{u} \\ \bar{u}|_{t=0} = \delta(M - M_0) \end{cases}$$

$\cancel{u = \bar{u} * f}$

$$u = \bar{u} * \varphi + \int_0^t \bar{u}(t-\tau, M) * f(\tau, M) d\tau$$

（齐次化原理）→（基本解）

3) 弦振动方程.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(t, M) \\ u(0, M) = \varphi(M), \ u_t|_{t=0} = \psi(M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = L\bar{u} \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = \delta(M) \end{cases}$$

$$u = \frac{\partial}{\partial t}[\bar{u} * \varphi] + \bar{u} * \psi + \int_0^t \bar{u} * f \, d\tau, \quad f = f(\tau, M).$$

③ 求解 Green 函数.

1) 解因有值问题来求.

2) 镜像法

3D 半空间 $G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{1}{r(M, M_1)}\right]$

3D 球 $G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r(M, M_1)}\right]$

2D 半平面. $G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r(M, M_1)}{r(M, M_0)}$

2D. 圆. $G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r(M, M_1)}{R r(M, M_0)}$

⑤ 一些想法.（不一定准确）.

i) Cauchy问题定义记下来：只有初始条件. ∴ Poisson方程没有.

ii) 定解问题向基本解问题的转化有点像齐次化原理.

iii) 分离变量法处理非齐次情形与积分变换法处理非齐次项都是依赖于在完备（加权）正交基（函数系）上的展开.

iv) 由于S-L定理的非负性保证. 解固有值问题（暂限于本课程中. 除去Bessel和Legendre以外）会落到三角函数系上. 故对 $u = \sum \cdots$ 的系数求解为对初始条件的Fourier展开.

（还是仅限于热传导和弦振动呢？）

v) 使用求解问题的方法. 尽量不要Laplace和基本解.