# 拉普拉斯反变换的那些事

纵观我们学习的这些方法，各有所长。这倒是也在告诉我们，很多时候，没有最好的，只有最合适的，或者说，合适的就是好的。在很多时候，我们要记得，有一利就有一弊，求解方程如此，分析电子电路如此，人生亦是如此。

我们研究的问题一般情况下都是定义在$t>0$上的，而且 0 处的值往往是已知的，那其实已经符合拉普拉斯变换的要求。我们看拉普拉斯变换法求解定解问题，一次正变换，求解一个简单的常微分方程，再反变换回去，就大功告成。是不是很美好？那，为啥还学其他方法，一个拉普拉斯变换纵横江湖不行吗？毕竟往往条件还是满足的？

那么这时候其实要注意到，拉普拉斯变换法使用的代价是，我们需要把求解一个方程的问题变成三个问题，虽然求解常微分方程还好说（这也是我们选择转化的根本原因），但是变换经常是很复杂的。所以，要注意总结，如何做计算，以及，在和其他方法权衡之后，什么时候选择使用积分变换。

总的来讲，常见的反变换的思路有：按照定义求解积分（换元、分部积分、留数定理）、反演公式、特殊积分、查表。

这里只列出反演公式（复变函数部分学习的）

**定理 1** 设 $f(t)$满足条件 1)和 2)，$L[f(t)]=F(p)$，则对任意取定的 $\sigma>c$，在 $f(t)$的连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p,$$

上式右端的积分是沿自下而上的直线 $\mathrm{Re}p=\sigma$ 进行的.

**定理 2** 设 $F(p)$除在左半平面 $\mathrm{Re}p<\sigma\ (\sigma>c)$内有奇点 $p_1$，$p_2,\cdots,p_n$ 外在 $p$ 平面内处处解析，且$\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$，则

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k]. \qquad (1)$$