数理方程笔记

上官凝

August 11, 2020

Contents

0.1 序幕

对整个知识体系以及题目有一个整体上的认识，有助于在题目出现变数的时候以不变应万变，无为而无所不为。建议复习时食用。

0.1.1 审题理清思路

当拿到一个题目当时候，首先判断这个题是做什么的，这有助于判断其对应的思路、知识、定理、性质、特殊情况以及易错点的集群。在这一门课里面，可能会出现以下几种类型：

1. 列出定解问题
2. 求解一维无限长弦振动问题
3. 解固有值问题
4. 普通的分离变量问题
5. 非齐次的分离变量问题
6. 特殊函数的分离变量问题，即 Bessel 与 Legendre
7. 利用特殊函数的性质解决证明或计算问题
8. 积分变换法解定解问题
9. 解基本解问题
10. 求格林函数并代入积分式求出特解（两问）
11. 写出原定解问题的 Green 函数满足的定解问题

其次要看这个题目的要求，如明确指出**使用 Laplace 变换的方法**，那么就毋需考虑分离变量或者基本解方法了。还有若题目由多问，则前后问之间的提示作用也不容小觑。

注：可以圈出来……

0.1.2 分析定解问题

这里只是分析，解决方案详见后面

由于每一种方法有其相对应的限制条件，那么在接手一个问题的时候，就需要从整体上先对面对的问题有一个整体上的把握。

按照自上而下的顺序，首先观察一个定解问题的泛定方程，首先是两个方面：坐标变量以及时间变量的定义域（决定了解题方法的适用范围），和是否满足某些特殊形式（如 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 可以考虑行波法）。又如若坐标变量定义域为有界区间，优先考虑分离变量法（一般地，适用范围较窄的方法要较适用范围较宽的方法在计算上有所简便）。如使用行波法或分离变量法，则还有一步，即判断泛定方程是否为齐次。

其次要观察定解条件，即初始条件以及边界条件。如使用分离变量法时，若边界条件为非齐次，则须将其做齐次化处理。对于一个定解问题，它的初始条件是由 t 的阶数决定的，而边界条件是由

坐标变量定义域的边界的形状决定的。比如在一个半径为 r，高为 h 的圆柱体上的定解问题，若取坐标原点为圆柱底面中心，z 轴为圆柱中心轴，则边界条件分别为 $|_{z=0}$，$|_{z=h}$，$|_{r=a}$。

然后还有一点，是如果整个问题没有涉及到某一个变量（如对于三维球坐标下的定解问题，其定解条件与泛定方程均未提及 φ，则不妨设 $u=u(r,\theta)$，可以简化问题的求解

注意有坑：不是说（写出来的）定解条件有哪一个变量，解就包含哪一个变量。有的定解条件是默认的，比如周期性边界条件。举个例子（书 page 289 习题 16）

例 半径为 R 的无限长的圆柱体的侧表面保持一定的温度 u_0，柱内的初始温度为零，求柱内的温度分布

$sol.$

列出定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta_2 u = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{r=R} = u_0 \end{cases}$$

注意这里虽然是根据题目描述列出来了给出来的定解问题，但是并没有给出来对称性，于是不能略去 θ 参量而设 $u=u(r,t)$。事实上，圆内的问题，Θ 应为周期为 2π 的函数，即隐含了一个 $\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi)$ 的周期条件（参见 page 229 例题对圆内狄氏问题的分析）*后面就是正常分离变量，解 Θ 和 R 的固有值问题，此处略去*

0.1.3 明晰物理含义

归根结底这门课叫数学物理方程，所以对于数学物理的结合还是有必要的。

对于三类典型方程及其各自的三类边界条件、非齐次项对应的物理含义：

1. Poisson 方程 $\Delta u = f(M)$（稳定方程）
   泊松方程对应着稳态问题，如一个恒稳电磁场。泊松方程只有一类边界条件，其含义为这个区域边界上的对应的场势

2. 热传导方程 $u_t = a^2\Delta u + f(t,M)$（发展方程）
   u 的物理含义为热流密度

   (a) 泛定方程：$u_t = a^2\Delta u + f(t,M)$
   (b) 第一类边界条件：边界的温度情况（特殊情况：恒温，$u|_{\partial\Omega_i} \equiv u(M)$）
   (c) 第二类边界条件：边界的热流情况（齐次情形：绝热，$u_t|_{\partial\Omega_i} = 0$）
   (d) 第三类边界条件：边界的热交换情况，用相关定律去推导相应的条件[1]

3. 波动方程 $u_{tt} = a^2\Delta u + f(t,M)$（发展方程）
   u 的含义为波动强度

   (a) 泛定方程：$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(t,x)$，其中 $a=\sqrt{T/\rho}, f=g/\rho$，其中 T 为弦上的张力，ρ 为线密度，$g(t,x)$ 为力的密度分布，方向垂直于 x 轴
   (b) 第一类边界条件：边界的振动情况（齐次情形：固定端，$u|_{\partial\Omega_i} = 0$）

[1] 见附录

(c) 第二类边界条件：边界的受力情况（齐次情形：自由端 不受外力影响，$u_t|_{\partial\Omega_i} = 0$）

(d) 第三类边界条件：受弹性力

0.1.4 熟悉求解思想

总体上来看，求解一个定解问题有 4 种方法，即行波法、分离变量法、积分变换法、基本解方法。以一个从一般到特殊的思想来看待所有的方法，结合传说中的三步走思想[2]，可以在解决问题的过程中对自己到了哪一步，还需要做什么，甚至可以拿到多少分都有一个把握。

行波法 利用 d'Alembert 公式，在一个积分之后得到问题的最终答案。特殊情况是泛定方程有可能会是非齐次的，这个时候需要齐次化原理来解决。放一个例题：第一章的练习题 10。

[2]详情见笔者助教所著《数理方程复习指导》

第二次习题课（week 6）

定解条件 $\begin{cases} \text{初始条件：关于}t\text{ 个数由}t\text{的偏导阶数} \\ \text{边界条件：关于坐标变量} \end{cases}$

eg. for 齐次化原理.

§1 Exercise 10.

例求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) & (t>0,\ -\infty<x<+\infty) \\ u(0,x) = \varphi(x) & (a\neq 0,\ a\text{为const}) \end{cases}$

由叠加原理，原定解问题的解 $u = u_1+u_2$，其中 u_1，u_2 分别为定解问题①，②的解

① $\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ u_1\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$　　② $\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f(t,x) \\ u_2\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$

① 代换：~~令~~ $\xi = x-at$，$\eta = t$

$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0 \\ u_1\big|_{t=0} = \varphi(\xi) \end{cases}$　∴ $u_1 = \varphi(x-at)$

② 令 $t_1 = t-\tau$　　波的平移，起点归零，好算.（齐次化原理平移出去再代换平移回来）

$\cancel{\dfrac{\partial u_2}{\partial t_1} + a\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f(t_1)}$ 先用齐次化原理.

先求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ w\big|_{t=\tau} = f(\tau,x) \end{cases}$

代换：$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t_1} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ w\big|_{t_1=0} = \cancel{f(t_1,x)}\ f(\tau,x) \end{cases}$ ← τ和t_1，x无关，所有代换只是形式上的

利用①的解形式，$w = f(\tau, x-at_1) = f(\tau, x-a(t-\tau))$

代入齐次化原理的形式解 $u_2 = \int_0^t f(\tau, x-a(t-\tau))\,d\tau$

∴ $u = \varphi(x-at) + \int_0^t f(\tau, x-a(t-\tau))\,d\tau$

分离变量法　拆分变量之后，解固有值问题得到正交函数系，进一步得到通解（级数解），并利用定解条件得到特解。特殊情况包括在解固有值问题的时候，若 ODE 满足 Bessel 方程（柱坐标）或者 Legendre 方程（球坐标）的形式，则利用已有结论得到结果；以及非齐次情形，需要对定解条件以及泛定方程进行齐次化处理（注意顺序），具体方法见后面

积分变换法　积分变换法不需要考虑非齐次项，但是计算量 emm... 吾不言
积分变换法有一些 points，比如边界条件 (Fourier 变换没有) 是需要变换的，但是初始条件变换过去可以只先写一个 $F[\varphi(M)]$，因为很有可能是在最后做反演变换的时候，乘起来变换回来卷积的时候就又回来了。

基本解方法　基本解分为列出来基本解问题并求解，和代入积分式计算两部分。三种典型方程都有其对应的基本解模型，以及积分式计算公式。其中 Poisson 方程用 Green 函数求解，镜像法是在特殊的求解域下，用以对基本解求解的方法，故求出格林函数后只需代入积分公式即可。

poisson 方程（椭圆方程）、热传导方程（抛物方程）、弦振动方程（双曲方程）

0.1.5　掌握额外技能

数学物理方程不是孤立的一门课，而是和微积分课程一脉相承的，故在这门课程的计算中，会用到：

1. 解 ODE（数学分析 B1 第六章）
2. 欧拉方程（注意和 Legendre 方程区分，y 前面的系数不一样）
3. Fourier 变换以及 Fourier 展开（数学分析 B2 第十二章）
4. Laplace 变换，反演变换以及各种性质（复变函数第七章）
5. 留数定理及其计算（复变函数第五章）
6. 对于方向导数的计算（$\frac{\partial}{\partial n}$，在基本解方法的代入积分公式会用得到）
7. 计算上用不到但是证明会用到的格林公式以及场论（数学分析 B2 第九章）

还有这门课本身的一些例题上面的公式（如 Legendre 方程部分的 $(m+n+1)\int_0^1 x^m p_n(x)dx = m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)dx$ 就出自例题。

0.2　关于一些方法

对于 $\Delta_3 u = 0$ 之类的，求形如 $u = u(r)$ 的解的问题，可以通过函数变换 $u = v/r$ 来进行通解的求解。为使 $u|_{r=0}$ 有限，应有 $v(t,0) = 0$

0.2.1　齐次化原理

不仅

0.2.2 特解法

用于处理方程非齐次的情形。不仅方程要变化，定解条件也要变化

0.2.3 解固有值问题

降阶法、特征根法、特殊函数法、欧拉方程（变量代换）、函数变换（有精力看一下）

0.2.4 特殊函数的积分求解

比如处理一个积分，积分项里面含有 $P_\nu(x)$，积分域又恰好是 Legendre 函数的区间 $(-1,1)$ 或 $(1,1)$，其实可以想一下是不是可以通过转化方程，利用正交性来解题（有一个利用 SL 定理的概念）。不过很多题也会用到一些结论，比如 Legendre 部分的 $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0 \quad (n \neq 0)$。总的来说：

1. 积分区间，奇偶性
2. 特殊结论（主要 Legendre）、递推公式
3. 固有函数（SL 定理正交性）注意区间一定是方程的定义区间

0.2.5 正余弦变换

不建议用卷积公式，建议用定义