数理逻辑

by 鸢一折纸

此文档按照陈教授的课件顺序来编排，与课本有一些出入（包括部分符号系统）

零、导论

- 演绎推理
  - 性质1(保真性）在演绎推理中，如果推理前提是真的，则结论一定是真的
  - 保真性是推理的前提与结论之间的一种真值关系——如果前提真，则结论保持前提的真
- 归纳推理
  - 性质2(保假性）在归纳推理中，如果结论是假的，则推理前提一定是假的
- 类比推理（既不保真，也不保假）
- 演绎推理的形式正确性：推理有效性（即保真性）
- 演绎推理的外延性：演绎推理的有效性与推理内容无关

> 观察: 演绎推理的有效性/保真性不要求推理前提一定是真的，也不考虑前提/结论的内容的合理性

有一个特朗普会不会飞的例子emm（第二章处理）

一、命题演算

1.1 命题与联结词

- 命题逻辑的构成：命题演算（语法）、命题语义学、命题逻辑元理论（语法语义关系）
- 观察：命题的界定以矛盾律、排中律为前提

1.2 命题演算L

注意符号和命题符号不一样！！！

- 符号表
  - 命题符号/命题变元：$x_1, x_2, ...$（可数无穷多个）
  - 基本联结词：$\neg, \rightarrow$
- 公式
  - 原子公式，否定式，蕴含式
  - 有限次应用以上步骤
  - $L(X)$ 的分层性
- 公理模式

    - $(L1)\quad p \to (q \to p)$
    - $(L2)\quad (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
    - $(L3)\quad (\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$
    - 推理规则(MP)：$\{p, p \to q\} \vdash q$（分离规则）
- 形式证明、内定理、形式推理

1.3 命题演算的简单性质

- 单调性
    - 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vdash p$，则 $\Gamma' \vdash p$；特别地，若 $\vdash p$，则对任何 Γ，$\Gamma \vdash p$
- 紧致性
    - 若 $\Gamma \vdash p$，则存在有穷集 $\Gamma' \subseteq \Gamma, s.t. \Gamma \vdash p$
    - 紧致性是自动推理的必要条件
- 平凡性
    - 若 Γ 是不相容的，则对于任何 p 有 $\Gamma \vdash p$
- 演绎定理
    - $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$ 当且仅当 $\Gamma \vdash p \to q$
        - （推论）假设三段论(HS)：$\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$
- 反证律
    - 若 $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$ 且 $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q$，则 $\Gamma \vdash p$
- 归谬律
    - 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash\ q$ 且 $\Gamma \cup \{p\} \vdash \neg q$，则 $\Gamma \vdash \neg p$
- 不知道叫什么律，证明可能用到思路
    - $\vdash (p \to q) \to (p \to p)$（书 P21）
    - $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$（书 P22）
    - $\neg(p \to q) \to (q \to p)$（书 P25）
- 同一律（书 P21）
    - $\vdash p \to p$
- 否定前件律（书 P21）
    - $\neg q \to (q \to p)$
- 否定肯定律（书 P24，19步直接证明）
    - $\vdash (\neg p \to p) \to p$
- 换位律（作业）（注意和 L3 不要搞混了）
    - $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$
- Peirce律（作业）
    - $((p \to q) \to p) \to p$
- 双重否定律（作业）
    - $\vdash \neg\neg p \to p$
- 第二双重否定律（作业）
    - $\vdash p \to \neg\neg p$
- 可证等价替换规则
    - 设q是p的子公式，q'是任意公式，公式p'是在p中用q'替换q的结果，若$\vdash q \to q'$ 且

$\vdash q' \to q$，则 $\vdash p \to p'$ 且 $\vdash p' \to p$

- L扩展：定义连接词
  - $p \vee q =_{df} \neg p \to q$
  - $p \wedge q =_{df} \neg(p \to \neg q)$
  - $p \leftrightarrow q =_{df} (p \to q) \wedge (q \to p)$
  - 性质
    - $\vdash p \to (p \vee q)$ 引入律
    - $\vdash q \to (p \vee q)$
    - $\vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$
    - $\vdash (p \vee p) \to p$ 幂等律，即否定肯定律
    - $\vdash \neg p \vee p$ 排中律
    - 合取词和等值词的性质见P29命题2，命题3

1.4 命题演算的语义

- 形式语义：在外延性原则之下，给L的所有语法对象赋予真值意义，包括:命题变元、联结词、公式、内定理、形式推理
- 真/假：代表抽象的真假，其中真假的含义没有具体规定 (形式语义)
- 指派——命题变元的语义解释：L(X)的一个指派是一个映射 $v_0 : X \mapsto \{t, f\}$
- 赋值——联结词的解释原则：L(X)的一个赋值是对联结词左右抽象真值关系的映射
- 标准赋值：$v(\neg) =_{df} f_{\neg}$，$v(\to) =_{df} f_{\to}$
- 命题语言的(标准)解释：$I(v_0, v)$ 中v_0可变，v固定公式的真值也随v_0而变
- 命题逻辑中，一个公式在语法（演算L）中视为一个符合形成规则的表达式；而在语义(L的语义解释)中视为一个真值函数
- 成真、成假指派，重言式、矛盾式、偶然式（相对于所有指派，任何公式只能是上述三种公式之一； 在任意给定的一个指派下，任何公式只有两种真值之一）

1.5 公式集的逻辑结构

- 无限集 $L(X_n)$ 只有有限多个语义不同的公式
  - 观察：L的语法描述比语义描述的粒度更细
- 范式

1.6 命题演算的可靠性和完全性

可靠性（语义一致性）：对所有 p 和 Γ，若 $\Gamma \vdash p$，则 $\Gamma \models p$

推论（无矛盾性、语法一致性）：不存在公式 p，使得 $\vdash p$ 且 $\vdash \neg p$

相容集、极大相容集（若 L 公式集 Γ 相容，且对任何 L 公式 q 有 $\Gamma \vdash q$ 或者 $\Gamma \vdash \neg q$)

语义完全性：对任何 p 和 Γ，若 $\Gamma \models p$，则 $\Gamma \vdash p$

1.7 命题逻辑的判定问题

判定问题：称一类问题是可判定的，如果：

1. 该类问题的每一个实例只有“是”与“否”两种回答；

2. 存在一个“能行”方法/过程A，使得对该类问题的每一个实例，A都在有限时间内给出正确的回答

二、谓词演算

2.1 命题内部结构的一阶表达

2.2 一阶谓词演算 K 的构成

- 逻辑符号（仅代表逻辑概念，其含义不随应用领域而改变）
  - 个体变元：$x_1, x_2, \cdots$（可数无穷多个）
  - 基本联结词：$\neg, \rightarrow$
  - 量词：$\forall$
- 非逻辑符号
  - 个体常元：$c_1, c_2, \cdots$（可数或有限个）
  - 函数符号：f_i^n，代表 n 元运算(Loading)（可数或有限个）
  - 谓词符号：P_i^n，代表个体对象集上的 n 元关系，（可数或有限个）至少要有一个
    - 注释：0元谓词符号即命题符号；也就是说，省略了里面的个体和关系不表达出来
    - I1c 辅助符号 (，)
      ◆注释 0元谓词符号即命题符号。例如
      1. 苏格拉底是人。当需要显式表达主语苏格拉底和谓语是人时，表达为H(s)，其中H(x)为一元谓词“x是人”；当不需要显式表达苏格拉底和谓语时，表示为H，H为0元谓词。
      2. 苏格拉底和他的父亲是朋友，需要显式表达其中个体和关系时，表达为F(s, g(s))；不需要显式表达时，则表达为F。

项

1. 个体变元和个体常元是项；
2. 若g是n元函数符号，t1, t2, …, tn是项，则g(t1, t2, …, tn)是项；
3. 只有经过有限次应用以上步骤生成的是项

> 注释：个体是数学中“数”的推广；函数将被解释为个体到个体的映射；项将被解释为个体。例如，$g(x)$ 是从人到人的映射，所以 $g(s)$ 也是一个人

- 闭项
  - 只含个体常元的项

公式

1. 若P是 $n(n \geq 0)$元谓词符号， $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项，则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是公式，称为原子公式；
2. 若p，q是公式，则$\neg p$和$p \rightarrow q$是公式，分别称为否定式和蕴涵式；
3. 若p是公式， x是个体变元，则$\forall x p$是公式，称为量化公式；

4. 只有经过有限次应用以上步骤生成的是公式。

> 注释：谓词将被解释为个体到真值的映射；不含个体变元的公式将为解释为命题；含个体变元的公式将被解释为命题函数

- 原子公式
  - 形如 $R_i^n(t_1, \cdots, t_n)$

公理模式

$K_1 \sim K_5$，前三条与 L 中的一样，第四个是去掉全称量词，第五个是把全称量词放到蕴含词的后项上

$K4: \forall x p(x) \to p(t)$

$K5: \forall x(p \to q) \to (p \to \forall x q)$

注意 $K4, K5$ 是有额外要求的：$K4$ 要求项 t 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的，$K5$ 要求 x 不在 p 中自由出现

推理规则

MP 和 UG（添加全称量词）

定义

- $p \vee q =_{df} \neg p \to q$
- $p \wedge q =_{df} \neg(p \to \neg q)$
- $p \leftrightarrow q =_{df} (p \to q) \wedge (q \to p)$
- $\exists x p =_{df} \neg \forall x \neg p$（全称量词与存在量词对偶）

变元的自由出现和约束出现

约束：在 $\forall x$ 或其范围中；

自由：不是约束

闭式：公式中不含自由出现的变元

自由代换

- 项 t 对p(x)中 x 自由：如果K公式p(x)中个体变元x有自由出现，用项t处处同时替换x在p(x)中的每一个自由出现，所得结果记为p(t)。若t中的个体变元在p(t)中的出现都是自由的，则称项t对p(x)中x自由。
- 这两种情形是自由的：
  - t 是闭项
  - x 没有在 p 中自由出现
- 另一种说法是：若对项 t 中所含任一变元 y，p 中自由出现的某变元 x 全都不出现在 p 中 $\forall y$ 的范围中，则说 t 对 p 中 x 是自由的

2.3 一阶谓词演算K的形式推理

- 推理规则：公理、前提集、MP、Gen（这一步用到的变元称为Gen变元）

- 形式证明：前提集为 ø
- 公式集：K的全体公式的集合记为 $K(Y), Y=\{y_1, y_2, \cdots\}$是K的全体个体变元的集合
- 定理(K和L的关系)：设 $p(x_1, \cdots, x_n) \in L(X_n)$，$q1_, \cdots, q_n \in K(Y)$。如果$\vdash_L p(x_1, \cdots, x_n)$，则$\vdash_K p(q_1, \cdots, q_n)$
- 命题演算型永真式，简称永真式：是 L 里面的永真式就是 K 里面的命题演算型永真式
- K 的简单性质以及一些定理：
    - 单调性：若$\Gamma \subseteq \Gamma'$且$\Gamma \vdash_K p$则$\Gamma' \vdash_K p$
    - 紧致性
    - 平凡性
    - 重要 $\exists_1$规则：设项 t 对 p(x) 中的x自由，则有：$\vdash p(t) \to \exists x p(x)$
    - 演绎定理：注意 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q \Rightarrow \Gamma \vdash p \to q$ 的方向（前提变前件），需要满足证明所用 Gen 变元不在 p 中自由出现，特别地，当 p 是闭式时没这个限制条件了
    - K反证律
    - K归谬律
    - 也常用 $\exists_2$规则：设 $\Gamma \cup \{p\} \vdash_K q$ 且该推理中的概括变元(Gen)不在p中自由出现。若x不在q中自由出现，则 $\Gamma \cup \{\exists x p\} \vdash_K q$

2.4 可证等价和前束范式

- 可证等价：若 $\Gamma \vdash_K p \leftrightarrow q$，则称 p 和 q 在 Γ 下可证等价；若 $\Gamma = \varnothing$，则称p与q可证等价，记为 $\vdash_K p \leftrightarrow q$
- 几个性质
    - 自反性 $\vdash p \leftrightarrow q$
    - 对称性 $\vdash p \leftrightarrow q \Rightarrow \vdash q \leftrightarrow p$
    - 可递性 $\vdash p \leftrightarrow q$ 且 $\vdash q \leftrightarrow r \Rightarrow \vdash p \leftrightarrow r$
- 观察：可证等价是集合 K(Y) 上的一个等价关系
- 约束变元起的作用类似于积分变元：
    - $\vdash \forall x p(x) \leftrightarrow \forall y p(y)$
    - $\vdash \exists x p(x) \leftrightarrow \exists y p(y)$
- 定理(子公式等价可替换性)：设q是p的子公式，用$q' \in K(Y)$替换p中q的一次出现所得结果记为p’。如果 $\vdash_K q \leftrightarrow q'$，则 $\vdash_K p \leftrightarrow p'$
- 对偶式：设 $p \in K(Y)$ 只出现原子公式以及 $\neg, \vee, \wedge, \forall, \exists$，互换
    - 对偶律：$\vdash_K \neg p \leftrightarrow p^*$
- 前束范式：母式：把量词都扔前面
    - 定理：令 Q* 为 Q 的对偶量词
        - 改名：若y不在p(x)中出现，则 $\vdash Qxp(x) \leftrightarrow Qyp(y)$
        - 量词外移：
            - 若x不在p中自由出现，则 $\vdash (p \to Qxq) \leftrightarrow Qx(p \to q)$
            - 若x不在q中自由出现，则 $\vdash (Qxp \to q) \leftrightarrow Q^*x(p \to q)$
            - $\vdash \neg Qxp \leftrightarrow Q^*x\neg p$
            - $\vdash (\forall xp \wedge \forall xq) \leftrightarrow \forall x(p \wedge q)$
            - $\vdash (\exists xp \vee \exists xq) \leftrightarrow \exists x(p \vee q)$

        - 若x不在p中自由出现，则$\vdash (p \vee Qxq) \leftrightarrow Qx(p \vee q)$
        - 若x不在p中自由出现，则$\vdash (p \wedge Qxq) \leftrightarrow Qx(p \wedge q)$
    - 合取和析取：
        - $p \vee q =_{df} \neg p \to q$
        - $p \wedge q =_{df} \neg(p \to \neg q)$
        - $p \leftrightarrow q =_{df} (p \to q) \wedge (q \to p)$
        - $\exists xp =_{df} \neg \forall x \neg p$
- （没讲，在书P80）Π_n 和 Σ_n 型前束范式：设 $n > 0$，若前束范式是由 $\forall$ 开始，从左向右改变 n-1 次词性（就是存在、任意互换）则叫做 Π_n 型前束范式，若是由 $\exists$ 开始，从左至右改变 n-1 次词性，则叫做 Σ_n 型前束范式

2.5 一阶逻辑的语义

最好翻一下前面K(Y)…语义解释：将形式逻辑现实化，赋予实际的意义

$K(Y) \overset{语义解释}{\Longrightarrow} M(D, F, P),$

$M(D, F, P) \overset{形式化}{\Rightarrow} K(Y)$

- 一阶结构（K的解释域）$K(Y) \mapsto M$ 的一个映射，三元组 $M = (D, F, P)$
    - D 是非空集合，称为 M 的论域，D 中的元素称为个体，对 K 的每个个体常元 c_i，都有一个个体 c_i^M 与之对应
    - F 是 D 上函数的集合，对于 K(Y) 中每一个n元函数 f_i^n，暂记为 g，F 中有一个n元函数 $g^M : D^n \mapsto D$（联想一下n维函数的取值）
    - P 是 D 上关系的非空集合，对于 K(Y) 中每一个n元谓词 R_i^n，暂记为 P，P 中有一个n元关系 $P^M \subseteq D^n$（比如$>$是一个二元关系）
- 观察：一个一阶语言K(Y)可以有多个不同的一阶结构（对于每一个映射，可以是多 $\mapsto$ 一，而对于一个K(Y)，可以有不同的映射方式）
- 个体变元指派：（变元是在这里出现的，就是对变元在常元集里面赋值）对任意一阶语言K(Y)及其任意一阶结构 $M = (D, F, P)$，K(Y)的一个相对于M的个体变元指派是一个映射 $V : Y \mapsto D$
- 一阶解释：任意一阶语言K(Y)的一个一阶解释是一个复合映射 $I = (M, V, \nu)$，其中 $M = (D, F, P)$ 是K(Y)的一个一阶结构，V是K(Y)的一个相对于M的个体变元指派，ν是标准赋值，使得：
    1. 对任何个体变元 $x \in Y, I(x) = V(x)$；
    2. 对任何个体常元 $a, I(a) = a^M$；
    3. 对任何函数符号 $g, I(g) = g^M$；
    4. （保运算性）对任何项 $g(t_1, \cdots, t_n), I(g(t_1, \cdots, t_n)) = g^M(I(t_1), \cdots, I(t_n))$，其中 $I(g(t_1, \cdots, t_n))$，g^M，$I(t_1), \cdots, I(t_n)$ 分别表示一个 K(Y)项，M中函数，D中的n个个体；
    5. 对任何谓词符号 P，$I(P) = P^M$；
    6. 对任何原子公式 $P(t_1, \ldots, t_n)$，$I(P(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} t, & if\ (I(t1), \ldots, I(tn)) \in P^M \\ f, & else \end{cases}$
    7. 对任何公式 p，$I(\neg p) = \begin{cases} t, & if\ I(p) = f; \\ f, & if\ I(p) = t. \end{cases}$

8. 对任何公式 p, q，$I(p \to q) = \begin{cases} f, & if\ I(p) = t \text{ 且 } I(q) = f; \\ t, & else. \end{cases}$

9. （这个是用来解释全称量词的）对任何公式p和个体变元x，
$I(\forall xp) = \begin{cases} t, & if\ for\ all\ d \in D,\ there\ is\ I_{x/d}(p) = t; \\ f, & else. \end{cases}$
    1. 其中I的变体 $I_{x/d}$ 由V的变体 $V_{x/d}$ 构成：$I_{x/d} =_{df} (M, V_{x/d}, \nu)$，
    $V_{x/d}(y) =_{df} \begin{cases} d, & if\ y = x; \\ V(y), & if\ y \neq x. \end{cases}$
    2. 这个在书上叫：项解释的变元变通
        1. 首先，对于固定的解释域M，把所有的项解释组成的集合记为 Φ_M
        2. x是给定的个体变元，y是任意的个体变元，对于 $\varphi, \varphi' \in \Phi_M$，满足条件 $y \neq x \Rightarrow \varphi'(y) = \varphi(y)$，此时 φ 和 φ' 互为对方的 x 变通
    3. $^{eg.}$依一阶解释的定义，$\forall xP(x, c)$ 为真，当且仅当对所有自然数$d \in D$，变体解释 $I_{x/d}(P(x, c)) = t$

10.

❖ **观察** 给定一阶解释I=(M, *V*, *ν*)，其中M=(**D, F, P**)是K(Y)的一个一阶结构，*V*是K(Y)的一个相对于M的个体变元指派，*ν*是标准赋值。K(Y)各类语法对象在I=(M, *V*, *ν*)下的语义解释：
1. 个体常元*a*解释为a^M，用M解释；
2. 函数符号*g*解释为g^M，用M解释；
3. 谓词符号P解释为P^M，用M解释；
4. 个体变元*x*解释为*V*(*x*)，用*V*解释；
5. 全称量词：$\forall xp$用I=(M, *V*, *ν*)的所有变体解释$I_{x/d}(p)$；
6. 联结词用标准赋值*ν*解释。

11. 一阶解释的良定义性：对任何一阶解释I和K(Y)公式p，存在唯一的$u \in \{t, f\}$，使得I(p)=u

- 可满足：p是K(Y)公式，M是K(Y)的一个一阶结构。若存在一个一阶解释I=(M, V, v)使得I(p)=t，则称p是M可满足的，简称可满足的
- M有效的：设p是K(Y)公式，M是K(Y)的一个一阶结构。若对一切V，p在I=(M, V, v)下有I(p)=t，则称p是M有效的，称M为p的一个模型，记为 $M \models p$
- 逻辑有效：设p是K(Y)公式。若对一切一阶结构M，$M \models p$ 成立，则称p是逻辑有效的，记为 $\models p$
    - 观察：和L重言式的关系
- 语义后承：$\Gamma \subseteq K(Y)$，$p \in K(Y)$，若对于任何一阶结构 M，只要 $M \models \Gamma$，就有 $M \models p$，则称 $\Gamma \models p$
    - Γ 是 K 公式集，在保证 Γ 里面所有公式都逻辑有效的时候，就可以得到 p 逻辑有效
- 全称闭式：$\forall x_1 \ldots \forall x_n p$ 记为 $\forall p$
- 语义性质：
    - UG有效性：$M \models p \Leftrightarrow M \models \forall xp \Leftrightarrow M \models \forall p$
        - 观察：假如以“M有效”作为一种“真”，则开公式如 $P(x, c)$ 与其全称闭式如 $\forall xP(x, c)$ 有相同的“真假”

- MP有效性：若 $M \models p$且 $M \models p \to q$，则$M \models q$
- 语义后承单调性：若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \models p$，则 $\Gamma' \models p$
- 闭式的真值与V无关，在一阶语言中，闭式代表命题

2.6 K的可靠性和完全性

一阶逻辑不允许量化谓词

- 可靠性：如果 $\Gamma \vdash p$，则 $\Gamma \models p$
  - K相容性：对于任何 $p \in K(Y)$，$\vdash p$ 和 $\vdash \neg p$ 不同时成立
  - 对任何 $\Gamma \subseteq K(Y)$，如果 Γ 有模型，那么 Γ 是相容的
- 完全性：如果 $\Gamma \models p$，则 $\Gamma \vdash p$

2.7 一阶逻辑的判定问题

- 可判定：一类问题是可判定的，如果该类问题的每一个实例只有肯定/否定二种回答，并且存在一个能行方法A，使得对该类问题的每一个实例：(1)如果回答是肯定的，则A在有限步骤内输出yes；(2)如果回答是否定的，则A在有限步骤内输出no
- 半可判定：称一类问题是半可判定的，如果该类问题的每一个实例只有肯定/否定两种回答，并且存在一个能行方法A，使得对该类问题的每一个实例：(1)如果回答是肯定的，则A在有限步骤内输出yes；(2)如果回答是否定的，则A可以不回答
- 注：任给公式p是不是K的内定理是**半可判定的**，和L中不一样

三、一阶理论

——形式算数与递归函数

3.0 一阶理论

- 一阶理论：用一阶逻辑实现数学分支的形式化，并研究数学分支形式化的系统性理论
  - 一阶理论开创了应用领域形式化研究之先河
  - 一阶形式化理论：任给一个应用领域M，将M的基础性知识表示为公式集Γ，使得:(1) $M \models \Gamma$，(2)通过推理 $\Gamma \vdash p$ 可得M的其他知识p ($p \notin \Gamma$ 并且 $\Gamma \models p$)，则称Γ是M的一阶形式化理论。一阶形式化理论简称一阶理论

3.1 自然数的形式定义问题

- Peano定义、Frege定义、von Neumann定义
- Peano定义的形式化理论：
  -

$$
\begin{array}{ll}
(P1) & N(0) \\
(P2) & \forall x(N(x) \to \exists y!(y \approx x' \land N(y))) \\
(P3) & \forall x(N(x) \to \neg(0 \approx x')) \\
(P4) & \forall x \forall y\,((x' \approx y') \to (x \approx y)) \\
(P5) & (p(0) \land \forall x(p(x) \to p'(x))) \to \forall x p(x), \quad p_{\text{为一阶公式}}
\end{array}
$$

- 取一个特定的一阶语言 $K_1(Y)$，包含个体常元**0**、一元后继函数符号 $'$，一元谓词符号N，分别代表预期语义解释中的自然数0、一元后继函数（+1）和一元关系“是自然数”

- $\exists y!$ 存在唯一的y

3.2 带等词的一阶演算 K^+

- K^+的语言K^+(Y)是固定带有二元谓词符号 **=** 的K(Y)，因此K^+(Y)是一种特殊形式的K(Y)
- 等词的逻辑地位：等词被视为常谓词
- 公设：描述了等词的基础性性质：自身相等、等量在函数和原子公式中的可替换性
  - $(E1) \quad u = u$
  - $(E2) \quad u_k = u \to g(u_1, \dots, u_k \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u, \dots, u_n)$
  - $(E3) \quad u_k = u \to (P(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) \to P(u_1, \dots, u, \dots, u_n))$
- **下面都用** $\approx$ 来表示等词 **=**，即公设 E 写为
  - $(E1) \quad u \approx u$
  - $(E2) \quad u_k \approx u \to g(u_1, \dots, u_k \dots, u_n) \approx g(u_1, \dots, u, \dots, u_n)$
  - $(E3) \quad u_k \approx u \to (P(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) \to P(u_1, \dots, u, \dots, u_n))$
- $\Gamma \vdash_{K^+} p \ \Leftrightarrow \ \Gamma \cup \{E1, E2, E3\} \vdash_K p$
- 公设和公理的区别：任何公理都是逻辑有效的，任何公设都不是逻辑有效的
- 几个命题：
  - 在 K 的解释域 M 中，若等词 $\approx$ 解释为相等，则 M 是等词公理集 E 的模型
  - $\approx$ 满足对偶性、交换律、传递性
  - 若 M 是 E 的模型，则等词 $\approx$ 必解释为 M 上的等价关系
  - 等项替换（**常用**）
    - (E2) 的推广：$E \vdash u \approx v \to t(u) \approx t(v)$ 其中项 u 是项 $t(u)$ 的子项，$t(v)$ 是将 $t(u)$ 中某一处出现的 u 替换成项 v 所得结果
    - (E3) 的推广：$E \vdash p \approx u \to (p(t) \approx p(u))$ 其中 $p(u)$ 是 $p(t)$ 中某一处出现的项 t 用 u 替换的结果，且 t 和 u 的变元都不在替换处受约束
- K^+模型：对于K^+(Y)的任何一阶结构M，若E1，E2，E3都是M有效的，那么称K^+是M有效的，称M是一个K^+模型，记做 $\mathrm{M} \models \mathrm{K}^+$
- 在任意 K^+ 模型里，等词不必解释为D上的相等关系
- 等价性：若 $\mathrm{M} = (\mathrm{D}, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ 是一个 K^+ 模型，则 $\approx$ 是D上的等价关系
- 正规模型：设 $E' \subseteq K^+(Y)$，$\mathrm{M} = (\mathrm{D}, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ 是 E' 的一个 K^+ 模型，若 $\approx$ 是 D 上的相等关系，则称M为E’的正规K⁺模型
- 正规模型存在性：设任意 $E' \subseteq K^+(Y)$ 有K⁺模型，则E’有正规K⁺模型
- 非正规模型存在性：设$E^* \subseteq K^+(Y)$ 是E的任何相容扩张：$E' \subseteq E^*$ 且 $E*$ 相容，则E*有非正规K⁺模型

3.3 形式算数 K_N

形式算数 K_N，初等数论一个片段的应用谓词演算/一阶形式化理论

$\mathrm{K_N}$ 构成：

1. 一阶语言 $K_N(Y)$
    1. 逻辑符号，同 K^+
    2. 非逻辑符号：个体常元 0，一元后继函数符号 $'$，二元函数符号 $+, \times$，二元常谓词符号 $\approx$
    3. 项和公式的形成规则：同K⁺
2. 公理模式：$K_1 \sim K_5$
3. 推理规则：MP, UG
4. 公设：
    1. 等词公设 E：$E_1 \sim E_3$
    2. 算数公设 $\mathcal{N}$：

$$
\begin{array}{lll}
(N_1) & \neg(u' \approx 0) & (\mathrm{P3}) \\
(N_2) & u' \approx v' \rightarrow u \approx v & (\mathrm{P4}) \\
(N_3) & u + 0 \approx u & (\text{加法递归定义}) \\
(N_4) & u + v' \approx (u+v)' & (\text{加法递归定义}) \\
(N_5) & u \times 0 \approx 0 & (\text{乘法递归定义}) \\
(N_6) & u \times v' \approx (u \times v) + u & (\text{乘法递归定义}) \\
(N_7) & (p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p'(x))) \rightarrow \forall x p(x) & (\mathrm{P5}\,\text{归纳公设})
\end{array}
$$

5. 形式推理/形式证明：公设和公理同样使用，其余同 K
6. 定义：同K
7. 简写记号：$\mathrm{K_N}$ 数字：$\mathbf{0}$ 简写为 $\overline{0}$，$\mathbf{0}^{'\cdots'}$ 简写为 $\overline{n}$ (CXP 的课件理应为上划线的)（这些都是常元）
8. 定理：书 P111～P119 还有好多
    1. $\vdash_{K_N} \overline{n} + \overline{m} \approx \overline{n+m}$ 或 $\mathcal{N} \vdash \overline{n} + \overline{m} \approx \overline{n+m}$ 后面同理
    2. $\vdash_{K_N} \overline{n} \times \overline{m} \approx \overline{n \times m}$
    3. $\vdash_{K_N} t_1 + t_2 \approx t_2 + t_1$，其中 t_1, t_2 为任意的项（加法交换律，乘法也满足）
    4. $\vdash_{K_N} (t_1 + t_2) + t_3 \approx t_1 + (t_2 + t_3)$，其中 t_1, t_2, t_3 为任意的项（加法结合律，乘法也满足）
    5. $\vdash_{K_N} (t_1 + t_2 \approx t_2) \rightarrow (t_1 \approx \overline{0})$，其中 t_1, t_2 为任意的项（加法消去律，乘法也满足）
    6. $\vdash_{K_N} (t_1 + t_2 \approx 0) \rightarrow (t_1 \approx \overline{0})$，其中 t_1, t_2 为任意的项
    7. 如果 $m = n$，则 $\mathcal{N} \vdash \overline{m} \approx \overline{n}$；如果 $m \neq n$，则 $\mathcal{N} \vdash \neg(\overline{m} \approx \overline{n})$ 或 $\mathcal{N} \vdash \overline{m} \not\approx \overline{n}$
    8. 以上定理表明，自然数运算可以通过 $\mathrm{K_N}$ 中的形式证明实现
9. 对比 K⁺ 用等词公设形式化相等关系的主要性质，$\mathrm{K_N}$ 用等词公设和算术公设形式化了初等数论一个片段的主要性质

3.4 $\mathrm{K_N}$可表示函数和关系

k 元数论函数、k 元数论关系

K_N 可表示函数：一个k元函数 g 是 K_N 可表示的，如果存在一个含k+1个自由变元的 K_N 公式 $p(x_1,...,x_{k+1})$，使得对任意对 $p(x_1,...,x_{k+1})$ 中 x_{k+1} 自由的项 u 及 $n_1,...,n_k,n_{k+1} \in \mathbb{N}$ 有

1. $g(n_1,...,n_k) = n_{k+1} \Rightarrow \mathcal{N} \vdash p(\overline{n}_1,...,\overline{n}_k,\overline{n}_{k+1})$
2. $g(n_1,...,n_k) \neq n_{k+1} \Rightarrow \mathcal{N} \vdash \neg p(\overline{n}_1,...,\overline{n}_k,\overline{n}_{k+1})$
3. $\vdash_{K_N} p(\overline{n}_1,...,\overline{n}_k,u) \to (u \approx \overline{g(n_1,...,n_k)})$

注：公式 p 称为数论函数 g 的K_N表示。如果k元函数 g 是K_N可表示的，则数论函数 g 的计算可以通过K_N对公式 p 的推理实现；也就是说，任何K_N可表示函数的计算可归结为K_N中的形式推理

注2：不是每一个 K_N 公式都表示一个数论函数，也不是每一个数论函数都是 K_N 可表示的，同一个 K_N 公式也不能表示两个不同的数论函数

K_N 可表示关系：一个k元关系R是K_N可表示的，如果存在含k个自由变元的K_N公式 $p(x_1,...,x_{k+1})$，使得对任意 $n_1,...,n_{k+1} \in \mathbb{N}$ 有

1. $(n_1,...,n_k) \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{N} \vdash p(\overline{n}_1,...,\overline{n}_k)$
2. $(n_1,...,n_k) \notin \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{N} \vdash \neg p(\overline{n}_1,...,\overline{n}_k)$

3.5 递归函数

基本函数

1. 一元零函数z，z(n) = 0;
2. 一元后继函数s，s(n) = n+1;
3. k元投影函数 p_i^k， $p_i^k(n_1,\cdots,n_k) = n_i, i = 1,\cdots,k$

三种基本函数体现了“能行方法”的直观理解，是“能行方法”直观描述的具体化。因此，三种基本函数都被认为是能行可计算的函数

复合规则

一个 i 元函数 g 和 i 个 k 元函数 $g_1,...,g_i$ 的复合是 一个k元函数

$$c(n_1,...,n_k) =_{df} g(g_1(n_1,...,n_k),...,g_i(n_1,...,n_k))$$

如果函数g, g1, ..., gi都是能行可计算的，则函数c也是能行 可计算的;因此，复合规则具有“保能行可计算性”。复合规则从函数组合的角度扩展了能行可计算性概念。

递归规则

❖ **定义3（递归规则）** 由k元函数g和k+2元函数f使用递归规则生成的k+1元函数r是一个递归函数：

$$\begin{cases} r(n_1, \ldots, n_k, 0) =_{df} g(n_1, \ldots, n_k); \\ r(n_1, \ldots, n_k, n+1) =_{df} f(n_1, \ldots, n_k, n, r(n_1, \ldots, n_k, n)); \end{cases}$$

$k = 0$时，

$$\begin{cases} r(0) =_{df} g; \\ r(n) =_{df} f(n, r(n)). \end{cases}$$

❖ **观察** 如果g和f都是能行可计算的，则r也是能行可计算的。

μ 算子

又称为最小数算子，如不做说明，都算已假设根的存在性条件得到满足

递归函数

1. 三个基本函数及由它们经有限次应用三个规则生成的函数称为(一般)递归函数
2. 不使用μ算子生成的递归函数称为原始递归函数
3. μ算子的使用不要求根存在条件的递归函数称为部分递归函数。

任何可计算函数由三个基本函数和三种规则组合而成

3.6 可计算性

“大部分”数论函数不是K_N可表示的。但是，可计算的数论函数都是K_N可表示的

车赤-图灵论题(Church-Turing Thesis) 一个函数是可计算的，当且仅当该函数是图灵机可计算的

所有图灵机可计算的函数的集合记为TM；所有递归函数的集合记为REC；所有K_N可表示函数的集合记为REP，则这三者相等

哥德尔数/编码：K_N符号（映射为互不相等的奇自然数）、符号串（默认不含空串）（幂指数都为奇数的偶数）、符号串序列（默认不含空序列）（幂指数**都为**偶数的偶数）。映射分别记为：$u \mapsto g(u)$，$(u_0, \ldots, u_k) \mapsto g(u_0, \ldots, u_k)$，$(S_0, \ldots, S_k) \mapsto g(S_0, \ldots, S_k)$

特征函数：k 元关系 $R(\subseteq \mathbb{N}^k)$ 的特征函数 $C_R : \mathbb{N}^k \mapsto \{0, 1\}$ 是用下式定义的：

$$C_R(n_1, \cdots, n_k) = \begin{cases} 1, & (n_1, \cdots, n_k) \in R \\ 0, & (n_1, \cdots, n_k) \notin R \end{cases}$$

下列集合均为递归的：

1. $\{g(u) | u$是K_N项$\}$

2. {g(u) | u是K_N公式}；/此集B的特征函数$C_B(x)$是递归函数/
3. {g(S) | S是K_N公式序列}；
4. {g(p) | p是Ki公理}， i=1,2,3,4,5；
5. {g(p) | p是Ei公设}， i=1,2,3；
6. {g(p) | p是Ni公设}， i=1,2,3,4,5,6,7；
7. {(n_1, n_2, n_3) | n_1=g(p), n_2=g($p\to q$), n_3=g(q)}；
8. {(n_1, n_2) | n_1=g(p), n_2=g($\forall x\ p$)}；
9. {(n_1, n_2) | n_1=g(p), n_2=g(S), S是p的一个K_N证明}。

3.7 Gödel 不完备性定理

1. 对任何公式集Γ，$Th(\mathit{\Gamma}) =_{df} \{p \mid p$ 是闭式且$\Gamma \vdash p\}$；直观上Γ代表一个数学分支的形式化理论，$Th(\Gamma)$是从Γ形式推出的所有闭式的集合
2. 对任何一阶结构M，$Th(M) =_{df} \{p \mid p$ 是闭式且 $M \models p\}$；直观上M代表一个数学分支，Th(M)是该分支中的所有真命题的集合

Thm：若Γ完备且$M \models \Gamma$，则$Th(\Gamma) = Th(M)$

哥德尔不完备性定理大意：若K_N是相容的，则它是不完备的