2. 4 可证等价和前束范式

(i) $p = \neg r$ 时，q 是 r 的子公式，替换的结果是 $p' = \neg r'$. 由归纳假设，

$$\Gamma \vdash q \leftrightarrow q' \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash r \leftrightarrow r',$$

再利用下面的永真式及K-L关系和性质2，结论成立

$$(r \leftrightarrow r') \leftrightarrow (\neg r \leftrightarrow \neg r').$$

(ii) $p = r \to s$ 时，q 或是 r 的子公式 (此时 $p' = r' \to s$), 或是 s 的子公式 (此时 $p' = r \to s'$). 对于前者，用永真式

$$(r \leftrightarrow r') \to ((r \to s) \leftrightarrow (r' \to s));$$

对于后者，用永真式

$$(s \leftrightarrow s') \to ((r \to s) \leftrightarrow (r \to s')).$$

加上归纳假设，便得结果.

2. 4 可证等价和前束范式

(iii) $p = \forall x r$ 时，$p' = \forall x r'$. 由归纳假设，有 $\Gamma \vdash r \leftrightarrow r'$. 为证 $\Gamma \vdash \forall x r \leftrightarrow \forall x r'$, 考虑对称性，只用证一个方向: $\Gamma \vdash \forall x r \to \forall x r'$. 以下是 $\forall x r'$ 从 $\Gamma \cup \{\forall x r\}$ 的一个证明，注意，除了 x, 没有其他概括变元，故进而可用演绎定理.

(1) $\forall x r$	假定
(2) $\forall x r \to r$	(K4)
(3) r	(1)，(2)，MP
(4) $r \to ((r \leftrightarrow r') \to r')$	永真式
(5) $(r \leftrightarrow r') \to r'$	(3)，(4)，MP
(6) $r \leftrightarrow r'$	由归纳假设
(7) r'	(5)，(6)，MP
(8) $\forall x r'$	(7)，UG

2. 4 可证等价和前束范式

依归纳法原理，结论对一切$p\in$K(Y)成立。

- ❖ **对偶式**设$p\in$K(Y)只出现原子公式及$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\forall$和$\exists$。将p中所有原子公式与其否定式互换，$\wedge$与$\vee$互换，$\forall$与$\exists$互换，所得结果记为p^*，称为p的对偶式。
- ❖ **例** $\forall x(\neg P(x, y) \wedge \exists y Q(y, z))$的对偶式为$\exists x(P(x, y) \vee \forall y \neg Q(y, z))$。
- ❖ **定理(对偶律)** $\vdash_K \neg p \leftrightarrow p^*$。
- ◆ **证明** 自修。

2. 4 可证等价和前束范式

2.4.2 前束范式

- ❖ **定义(前束范式)** 前束范式是任何形为$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n p$的一阶公式，其中Q_n(n=1, …, n)代表$\forall$或$\exists$，p中不出现任何量词，称为前束范式的母式。
- ❖ **注释** 化为前束范式后，可将母式进一步化为合取/析取范式。
- ❖ **注释** 一阶语言中还有其他种类的范式。前束范式与命题语言关系密切。