2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶解释)** 任意一阶语言K(Y)的一个一阶解释是一个复合映射I=(M, V, v)，其中M=(**D, F, P**)是K(Y)的一个一阶结构，V是K(Y)的一个相对于M的个体变元指派，v是标准赋值，使得：

1. 对任何个体变元x∈Y，I(x)=V(x)；
2. 对任何个体常元a，I(a)=a^M；
3. 对任何函数符号g，I(g)=g^M；
4. 对任何项$g(t_1, \ldots, t_n)$，$\mathrm{I}(\underbrace{g(t_1, \ldots, t_n)}_{\text{一个K(Y)项}})=\overbrace{g^M}^{\text{F中函数}}(\underbrace{\mathrm{I}(t_1), \ldots, \mathrm{I}(t_n)}_{\text{D中n个个体}})$；

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶解释-续)**

5. 对任何谓词符号P，I(P)=P^M；
6. 对任何原子公式$P(t_1, \ldots, t_n)$，
$$\mathrm{I}(P(t_1, \ldots, t_n))=\begin{cases} t, & 如果(\mathrm{I}(t_1), \ldots, \mathrm{I}(t_n))\in P^M \\ f, & 否则； \end{cases}$$
7. 对任何公式p，
$$\mathrm{I}(\neg p)=\begin{cases} t, & 如果\mathrm{I}(p)=f; \\ f, & 如果\mathrm{I}(p)=t; \end{cases}$$
8. 对任何公式p, q，
$$\mathrm{I}(p\to q)=\begin{cases} f, & 如果\mathrm{I}(p)=t并且\mathrm{I}(q)=f; \\ t, & 否则； \end{cases}$$

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **定义(一阶解释-续)**

9. 对任何公式p和个体变元x，
$$\mathrm{I}(\forall xp)=\begin{cases} t, & 如果对所有d\in\mathbf{D}有\mathrm{I}_{x/d}(p)=t; \\ f, & 否则； \end{cases}$$

其中I的变体$\mathrm{I}_{x/d}$由V的变体$V_{x/d}$构成：

$$\mathrm{I}_{x/d} =_{df} (M, V_{x/d}, v),\quad V_{x/d}(y) =_{df} \begin{cases} d, & 如果y=x; \\ V(y), & 如果y\neq x。 \end{cases}$$

❖ **观察** 一个全称量化公式$\forall xp$在一个一阶解释I下为真，如果公式p在I的所有变体解释$\mathrm{I}_{x/d}$下为真。

2.5 一阶逻辑的语义

❖ **观察** 给定一阶解释I=(M, V, v)，其中M=(**D, F, P**)是K(Y)的一个一阶结构，V是K(Y)的一个相对于M的个体变元指派，v是标准赋值。K(Y)各类语法对象在I=(M, V, v)下的语义解释：

1. 个体常元a解释为a^M，用M解释；
2. 函数符号g解释为g^M，用M解释；
3. 谓词符号P解释为P^M，用M解释；
4. 个体变元x解释为$V(x)$，用V解释；
5. 全称量词：$\forall xp$用I=(M, V, v)的所有变体解释$\mathrm{I}_{x/d}(p)$；
6. 联结词用标准赋值v解释。