§2.4 非齐次情形

本节讨论边界或方程非齐次情形下的混合问题.

定解问题
- 边界齐次
  - 方程齐次 → 分离变量法
  - 方程非齐次 →
    - 方程齐次化 → 齐次化原理、特解法
    - 直接级数展开 → 固有函数法
- 边界非齐次 → 边界齐次化

情形1： 齐次边界

例1：考虑纯粹由外力引起的两端固定弦的受迫振动，弦的初始位移和初速度均为零. 定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x) \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u\big|_{x=0} = 0, \ u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0, \ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

通常有三种方法可以考虑：

① 固有函数法

② 齐次化原理

③ 特解法(当 $f(t,x)$ 比较特殊时)

① 固有函数法

1. 对应齐次问题的固有函数系为 $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$

设非齐次问题的解为：$u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$

2. 将 $f(t,x)$ 关于 x 展成Four ier级数：$f(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$

其中 $$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

3. 代入非齐次方程和初始条件得：

$$\begin{cases} T_n''(t)+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=0 \quad T_n'(0)=0 \end{cases}$$

4. 用Laplace变换求解$T_n(t)$得：

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau$$

代入得原问题解为：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

核心思想：

将解函数、非齐次项、初值条件按照对应的齐次问题的固有函数系进行级数展开，得到解函数展开系数的ODE定解问题.

例： 求解有界弦的受迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A\cos\dfrac{\pi x}{l}\sin\omega t \\ u_x\big|_{x=0} = 0 \quad u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \qquad (0 < x < l) \end{cases}$$

解： 对应齐次问题的固有函数系为 $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$（此处计算省略.）

设 $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\dfrac{n\pi}{l}x$，代入泛定方程，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(T''_n + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right)\cos\frac{n\pi}{l}x = A\sin\omega t\cos\frac{\pi}{l}x$$

于是有

$$\begin{cases} T''_1 + \dfrac{\pi^2a^2}{l^2}T_1 = A\sin\omega t \\ T''_n + \dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n = 0 \ (n \neq 1) \end{cases}$$

代入初始条件得：

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n \cos\frac{n\pi}{l}x \\ \sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0)\cos\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n \cos\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

于是：

$$T_n(0) = \phi_n = \begin{cases} \frac{1}{l}\int_0^l \phi(\zeta)d\zeta & n=0 \\ \frac{2}{l}\int_0^l \phi(\zeta)\cos\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta & n>0 \end{cases}$$

$$T_n'(0) = \psi_n = \begin{cases} \frac{1}{l}\int_0^l \psi(\zeta)d\zeta & n=0 \\ \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\zeta)\cos\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta & n>0 \end{cases}$$

代入解关于$T_n(t)$$(n\geq 0)$的常微分定解问题得：

$$T_n(t)=\begin{cases}\phi_0+\psi_0 t, & n=0\\ \dfrac{Al}{\pi a}\dfrac{1}{\omega^2-\pi^2 a^2/l^2}(\omega\sin\dfrac{\pi at}{l}-\dfrac{\pi a}{l}\sin\omega t)+\varphi_1\cos\dfrac{\pi t}{l}+\dfrac{l}{\pi a}\psi_1\sin\dfrac{\pi at}{l}, & n=1\\ \varphi_n\cos\dfrac{n\pi at}{l}+\dfrac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\dfrac{n\pi at}{l}, & n>1\end{cases}$$

故原问题的解为：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\varphi_0+\psi_0 t\\ &+\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2 a^2/l^2}(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t)\cos\frac{\pi x}{l}\\ &+\sum_{n=2}^{\infty}(\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l})\cos\frac{n\pi}{l}x\end{aligned}$$

② 齐次化(Duhamel)原理

Duhamel原理：若 $w(t,x;\tau)$ 则 $u(t,x)=\int_0^t w(t,x;\tau)d\tau$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m w}{\partial t^m}=Lw \\ \dfrac{\partial^i w}{\partial t^i}\Big|_{t=\tau}=0 \quad (0\le i\le m-2) \\ \dfrac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=\tau}=f(\tau,x) \\ B_j[w]=0 \quad (1\le j\le l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}=Lu+f(t,M) \\ \dfrac{\partial^i u}{\partial t^i}\Big|_{t=0}=0 \quad (0\le i\le m-2) \\ \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0}=0 \\ B_j[u]=0 \quad (1\le j\le l) \end{cases}$$

其中，L为偏微分算子，关于 t的最高阶偏导阶数$\le m-1$；$B_j[u]=0$为齐次边界条件，可以不出现.

齐次化方法

例：初始条件齐次情形

欲求解
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(t,x) \quad (0<x<l,t>0) \\ u\big|_{x=0}=0,\ \ u\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=0,\ \ u_t\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

可先求解
$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0 \quad (0<x<l,t>0) \\ w\big|_{x=0}=0,\ \ w\big|_{x=l}=0 \\ w\big|_{t=\tau}=0,\ \ w_t\big|_{t=\tau}=f(\tau,x) \end{cases}$$
$\Longrightarrow$ 分离变量法

则：$u(t,x)=\int_0^t w(t,x;\tau)d\tau$ 即为所求.

例：初始条件非齐次情形

求关于u的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(t,x) \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

$$\boxed{u=w+v}$$

u ← 叠加原理

w ←
$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=f(t,x) \\ w|_{x=0}=0,\ w|_{x=l}=0 \\ w|_{t=0}=0,\ w_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$
→ 情形1

v ←
$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0 \\ v|_{t=0}=\varphi(x),\ v_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$
→ 分离变量法

在此问题的求解中，固有函数法、特解法仍是可以考虑的方法.

③ 特解法

当非齐次项 $f(t,x)$ 形式特殊时，可考虑先求特解，再将方程化为齐次方程

例：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l \end{cases}$$

解：由于非齐次项为不含 t，设 $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$. 其中

$v(x)$ 是方程的特解 ⇒ $\begin{cases} v''(x) = -\dfrac{1}{a^2} f(x) \\ v(0) = 0, \ v(l) = 0 \end{cases}$ ⇒ $v(x) = \ldots\ldots$

而 $w(t,x)$ 满足定解问题：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=l} = 0 \\ w\big|_{t=0} = -v(x), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l \end{cases}$$

$w(t,x)$ 可由分离变量法求得.

例： 求解定解问题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A_0 \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l \end{cases}$$

其中 a, A_0, ω 均为已知常数.

解： 令 $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$，代入定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = A_0 \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ (v+w)|_{x=0} = 0, \quad (v+w)|_{x=l} = 0 \\ (v+w)|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial (v+w)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l \end{cases}$$

其中 $v(t,x)$ 为原方程的特解. 考虑到非齐次项，设 $v(t,x) = f(x) \sin \omega t$

注意：特解$v(t,x)$不可以为 $v(t)$-----必须保证边界条件的齐次性不改变！

将 $v(t,x)=f(x)\sin\omega t$ 代入原方程得：$-f(x)\omega^2\sin\omega t-a^2 f''(x)\sin\omega t=A_0\sin\omega t$

$$\begin{cases} f''(x)+\dfrac{\omega^2}{a^2}f(x)=-\dfrac{A_0}{a^2} \\ f(0)=0,\quad f(l)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=-\dfrac{A_0}{\omega^2}+A\sin\dfrac{\omega}{a}x+B\cos\dfrac{\omega}{a}x \\ B=\dfrac{A_0}{\omega^2},\quad A=\dfrac{A_0}{\omega^2}\tan\dfrac{\omega l}{2a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{A_0}{\omega^2}\left[\left(1-\cos\frac{\omega}{a}x\right)-\tan\frac{\omega l}{2a}\sin\frac{\omega}{a}x\right]=-\frac{A_0}{\omega^2}\left\{1-\frac{\cos\left[\dfrac{\omega}{a}\left(x-\dfrac{l}{2}\right)\right]}{\cos\dfrac{\omega l}{2a}}\right\}$$

故特解 $v(t,x)$为：

$$v(t,x)=-\frac{A_0}{\omega^2}\left\{1-\frac{\cos\left[\dfrac{\omega}{a}\left(x-\dfrac{l}{2}\right)\right]}{\cos\dfrac{\omega l}{2a}}\right\}\sin\omega t$$

而$w(t,x)$满足的定解问题为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0 \\ w\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\omega f(x), \quad 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

按照齐次方程的分离变量法求$w(t,x)$：

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n \cos\frac{n\pi}{l}at\right) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

由初始条件定出：

$$w\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = 0, \quad \Rightarrow \quad D_n = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi}{l}x = -\omega f(x)$$

由正交性知：

$$C_n=-\frac{\omega}{n\pi a}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=-\frac{2A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cdot\frac{1}{(n\pi a)^2-(\omega l)^2}$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{A_0}{\omega^2}\left\{1-\frac{\cos\left[\frac{\omega}{a}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]}{\cos\frac{\omega l}{2a}}\right\}}$$

即 n 为奇数时C_n不为零，所以：

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$w(t,x)=-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot\frac{1}{[(2k+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\cdot\sin\frac{2k+1}{l}\pi at$$

最后，原定解问题的解为：

$$u(t,x)=f(x)\sin\omega t+w(x,t)$$

$$=-\frac{A_0}{\omega^2}\left[\frac{1-\cos\dfrac{\omega(x-l/2)}{a}}{\cos\dfrac{\omega l}{2a}}\right]\sin\omega t$$

$$-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot\frac{1}{[(2k+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\cdot\sin\frac{2k+1}{l}\pi at$$

特解法将方程齐次化时：

1.非齐次项 ***f*(*x*, *t*)** 的形式应该较为简单.

2.初始条件可以是非齐次的

3. 必须保持原有的齐次边界条件不变.

情形2：非齐次边界

求解定解问题：$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(t,x) \\ u|_{x=0}=\alpha(t),\ u|_{x=l}=\beta(t) \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$

思路：找到 $v(t,x)$ 满足 $v|_{x=0}=\alpha(t),\ v|_{x=l}=\beta(t)$，则 $w=u-v$ 满足

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=f(t,x)-(v_{tt}-a^2v_{xx}) \\ w|_{x=0}=0,\ w|_{x=l}=0 \\ w|_{t=0}=\varphi(x)-v(0,x),\ w_t|_{t=0}=\psi(x)-v_t(0,x) \end{cases}$$

w的计算归结为边界齐次情形.进而由叠加原理有

u=v+w

注：1. 可以令 $v=A(t)+B(t)x$ (含第二类边界条件时令 $v=A(t)+B(t)x^2$

2. 不管方程是否齐次，应优先将边界条件齐次化.

3. 若能找到 V 使边界条件和方程同时齐次化，那是最好的.

非齐次边界条件问题（例）

例：长为 l、侧面绝热的均匀细杆，在 $x=0$ 的一端保持恒温u_0，另一端 $x=l$ 有热流密度为 q_0 的定常热流进入. 设杆的初始温度分布是u_0，求杆上的温度变化.

解：物理问题的定解问题为：

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t) \quad (0<x<l, \quad t>0) \\ u\big|_{x=0}=u_0 \quad u_x\big|_{x=l}=\dfrac{q_0}{K} \\ u\big|_{t=0}=u_0 \end{cases}$$

设 $u(t,x)=v(x)+w(t,x)$, $v(x)$ 满足$\begin{cases} v''(x)=0 \quad (0<x<l) \\ v\big|_{x=0}=u_0 \quad v_x\big|_{x=l}=\dfrac{q_0}{K} \end{cases}$

解之得 $v=\frac{q_0}{K}x+u_0$ **且** $w(t,x)$ **满足定解问题：**

$$\begin{cases} w_t(t,x)=a^2 w_{xx}(t,x) \quad (0<x<l) \\ w\big|_{x=0}=0,\ \ w_x\big|_{x=l}=0 \\ w\big|_{t=0}=-\frac{q_0}{K}x \end{cases}$$

由分离变量法知，其解为

$$w(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

由初值条件知

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l -\frac{q_0}{K}x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx=\frac{8q_0 l}{K\pi^2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^2}$$

代入得原问题的解为：

$$u(x,t)=\frac{q_0}{K}x+u_0+\frac{8q_0 l}{K\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^2}e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

例： 求定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(t,0) = 0, \ \ u(t,l) = \sin\omega t \quad (\omega \neq \dfrac{n\pi a}{l}) \\ u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

解： 若采用一般情形下边界齐次化的方法，令 $v(t,x) = C_1 x + C_2$ 满足

$$\begin{cases} v\big|_{x=0} = C_2 = 0 \\ v\big|_{x=l} = C_1 l + C_2 = \sin\omega t \ \Rightarrow \ C_1 = \dfrac{\sin\omega t}{l} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad v(t,x) = \frac{x}{l}\sin\omega t$$

令 $u(t,x) = \dfrac{x}{l}\sin\omega t + w(t,x)$ ，代入原定解问题得：

$w(t, x)$ 满足的定解问题为：

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + \dfrac{x\omega^2}{l}\sin\omega t \\ w(t,0) = 0, \quad w(t,l) = 0 \\ w(0,x) = 0, \quad w_t(0,x) = -\dfrac{\omega x}{l} \end{cases}$$

再由解齐次边界的方法计算 $w(t, x)$……

若能选取合适的V，使得它能将边界齐次化的同时也使得方程是齐次的，则能降低求解的复杂度.

令 $v = X(x)\sin\omega t$，希望 V 满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(t,0) = 0, \quad v(t,l) = \sin\omega t \end{cases}$

代入解之得：

$$v(t,x) = \frac{\sin\dfrac{\omega x}{a}}{\sin\dfrac{\omega l}{a}} \cdot \sin\omega t$$

令 $w=u-v$，则 w 满足定解问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(t,0)=0,\quad w(t,l)=0 \\ w(0,x)=0,\quad w_t(0,x)=-\omega\dfrac{\sin\dfrac{\omega x}{a}}{\sin\dfrac{\omega l}{a}} \end{cases}$

分离变量法解之得

$$w(t,x)=2\omega al\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

最后，原定解问题的解为：

$$u=v+w=\frac{\sin\dfrac{\omega x}{a}}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}\cdot\sin\omega t+2\omega al\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

例：求解定解问题 $$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + \dfrac{h}{c\rho} u = \dfrac{I^2 R}{c\rho} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

解：对应齐次问题的固有函数系为：$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$，设

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\dfrac{n\pi}{l}x \\ \dfrac{I^2 R}{c\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\dfrac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

其中：$A_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l \dfrac{I^2 R}{c\rho}\sin\dfrac{n\pi}{l}\zeta d\zeta = \dfrac{2}{n\pi}\dfrac{I^2 R}{c\rho}[1-(-1)^n]$

$$\begin{cases} T_n'(t) + \left(\dfrac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} + \dfrac{h}{c\rho}\right) T_n(t) = A_n \\ T_n(0) = 0 \end{cases}$$

解之得：

$$T_n(t) = \frac{A_n}{P}\left(1 - e^{-Pt}\right)$$

$$= \frac{2I^2 R\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi(n^2\pi^2 a^2 c\rho + hl^2)}\left(1 - e^{-\left(\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} + \frac{h}{c\rho}\right)t}\right)$$

其中： $$P = \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} + \frac{h}{c\rho}$$

原问题的解为： $$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi}{l} x = \ldots\ldots$$