第一周作业反馈

罗晏宸

February 25 2020

1 作业答案

练习 1

1. 列出以下复合命题的真命题.（其中支命题 p, q, r, s 视为命题变元.）

7° $(\neg p \wedge q) \to (\neg q \wedge r)$

8° $(p \to q) \to (p \to r)$

解 复合命题的真命题由如下真值表可得：

(	$\neg$	p	$\wedge$	q	)	$\to$	(	$\neg$	q	$\wedge$	r	)
	1	0	0	0		1		1	0	0	0	
	1	0	0	0		1		1	0	1	1	
	1	0	1	1		0		0	1	0	0	
	1	0	1	1		0		0	1	0	1	
	0	1	0	0		1		1	0	0	0	
	0	1	0	0		1		1	0	1	1	
	0	1	0	1		1		0	1	0	0	
	0	1	0	1		1		0	1	0	1	

命题 7° 的真值表

(	p	$\to$	q	)	$\to$	(	p	$\to$	r	)
	0	1	0		1		0	1	0	
	0	1	0		1		0	1	1	
	0	1	1		1		0	1	0	
	0	1	1		1		0	1	1	
	1	0	0		1		1	0	0	
	1	0	0		1		1	1	1	
	1	1	1		0		1	0	0	
	1	1	1		1		1	1	1	

命题 8° 的真值表

练习 2

2. 写出由 $X_2=\{x_1,\ x_2\}$ 生成的公式集 $L(X_2)$ 的三个层次：L_0, L_1 和 L_2.

解

$$
\begin{aligned}
&L_0=\{x_1,\ x_2\}\\
&L_1=\{\neg x_1,\ \neg x_2,\ x_1\to x_1,\ x_1\to x_2,\ x_2\to x_1,\ x_2\to x_2\}\\
&L_2=\big\{\neg\neg x_1,\ \neg\neg x_2,\ \neg x_1\to x_1,\ \neg x_1\to x_2,\ \neg x_2\to x_1,\ \neg x_2\to x_2,\\
&\qquad x_1\to\neg x_1,\ x_1\to\neg x_2,\ x_2\to\neg x_1,\ x_2\to\neg x_2,\\
&\qquad \neg(x_1\to x_1),\ \neg(x_1\to x_2),\ \neg(x_2\to x_1),\ \neg(x_2\to x_2),\\
&\qquad (x_1\to x_1)\to x_1,\ (x_1\to x_2)\to x_1,\ (x_2\to x_1)\to x_1,\ (x_2\to x_2)\to x_1,\\
&\qquad (x_1\to x_1)\to x_2,\ (x_1\to x_2)\to x_2,\ (x_2\to x_1)\to x_2,\ (x_2\to x_2)\to x_2,\\
&\qquad x_1\to(x_1\to x_1),\ x_1\to(x_1\to x_2),\ x_1\to(x_2\to x_1),\ x_1\to(x_2\to x_2),\\
&\qquad x_2\to(x_1\to x_1),\ x_2\to(x_1\to x_2),\ x_2\to(x_2\to x_1),\ x_2\to(x_2\to x_2),\big\}
\end{aligned}
$$

练习 3

2. 写出以下公式在 L 中的“证明”（即证明它们是 L 的定理）

1° $(x_1\to x_2)\to((\neg x_1\to\neg x_2)\to(x_2\to x_1))$

2° $((x_1\to(x_2\to x_3))\to(x_1\to x_2))\to\big((x_1\to(x_2\to x_3))\to$
$(x_1\to x_3)\big)$

解

1°

证明.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (\neg x_1\to\neg x_2)\to(x_2\to x_1) & \text{(L3)}\\
(2) & (\neg x_1\to\neg x_2)\to(x_2\to x_1)\to & \\
 & \quad ((x_1\to x_2)\to((\neg x_1\to\neg x_2)\to(x_2\to x_1))) & \text{(L1)}\\
(3) & (x_1\to x_2)\to((\neg x_1\to\neg x_2)\to(x_2\to x_1)) & \text{(1), (2), MP}
\end{array}
$$

□

2°

证明.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3)) & \text{(L2)} \\
(2) & (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3)) \to & \\
 & \quad \big(((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to & \\
 & \quad (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))\big) & \text{(L2)} \\
(3) & ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to & \\
 & \quad ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)) & \text{(1), (2), MP}
\end{array}
$$

□

3. 证明下面的结论

2° $\{\neg\neg p\} \vdash p$

3° $\{p \to q, \neg(q \to r) \to \neg p\} \vdash p \to r$

4° $\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$

解

2°

证明.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \neg\neg p & \text{假定} \\
(2) & \neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) & \text{(L1)} \\
(3) & \neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p & \text{(1), (2), MP} \\
(4) & (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p) & \text{(L3)} \\
(5) & \neg p \to \neg\neg\neg p & \text{(3), (4), MP} \\
(6) & (\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p) & \text{(L3)} \\
(7) & \neg\neg p \to p & \text{(5), (6), MP} \\
(8) & p & \text{(1), (7), MP}
\end{array}
$$

□

3°

证明.

(1)	$\neg(q \to r) \to \neg p$	假定
(2)	$(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (p \to (q \to r))$	(L3)
(3)	$p \to (q \to r)$	(1), (2), MP
(4)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	(L2)
(5)	$(p \to q) \to (p \to r)$	(3), (4), MP
(6)	$p \to q$	假定
(7)	$p \to r$	(5), (6), MP

□

4°

证明.

(1)	$p \to (q \to r)$	假定
(2)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	(L2)
(3)	$(p \to q) \to (p \to r)$	(1), (2), MP
(4)	$((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$	(L1)
(5)	$q \to ((p \to q) \to (p \to r))$	(3), (4), MP
(6)	$(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to$ $((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$	(L2)
(7)	$(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$	(5), (6), MP
(8)	$q \to (p \to q)$	(L1)
(9)	$q \to (p \to r)$	(7), (8), MP

□

2 问题总结

2.1 真值表格式有误

许多同学沿袭了数字电路等课程中的真值表绘制习惯，表格中没有还原复合命题的书写顺序，分割线也有画的太多的情况。在本门课程中，列出真值表的过程是：

先写一遍复合命题，

(	$\neg$	p	$\wedge$	q	)	$\to$	(	$\neg$	q	$\wedge$	r	)

将构成它的支命题所有可能的真值组合抄写在对应支命题的下方，

(	$\neg$	p	$\wedge$	q	)	$\to$	(	$\neg$	q	$\wedge$	r	)
		0		0					0		0	
		0		0					0		1	
		0		1					1		0	
		0		1					1		1	
		1		0					0		0	
		1		0					0		1	
		1		1					1		0	
		1		1					1		1	

再按命题中联结词作用次序将每次作用所得的真值写在该联结词的下方，

(	$\neg$	p	$\wedge$	q	)	$\to$	(	$\neg$	q	$\wedge$	r	)
	1	0	0	0				1	0	0	0	
	1	0	0	0				1	0	1	1	
	1	0	1	1				0	1	0	0	
	1	0	1	1				0	1	0	1	
	0	1	0	0				1	0	0	0	
	0	1	0	0				1	0	1	1	
	0	1	0	1				0	1	0	0	
	0	1	0	1				0	1	0	1	

最后得到的一列结果写在最后一个联结词下，用竖线标出

(	$\neg$	p	$\wedge$	q	)	$\to$	(	$\neg$	q	$\wedge$	r	)
	1	0	0	0		1		1	0	0	0	
	1	0	0	0		1		1	0	1	1	
	1	0	1	1		0		0	1	0	0	
	1	0	1	1		0		0	1	0	1	
	0	1	0	0		1		1	0	0	0	
	0	1	0	0		1		1	0	1	1	
	0	1	0	1		1		0	1	0	0	
	0	1	0	1		1		0	1	0	1	

2.2 公式集各层次元素有遗漏

部分同学在练习 2 第 2 题中遗漏了 L_2 层次中的部分公式，从批改情况来看容易被遗漏的有 $\neg(x_1 \to x_1)$，$\neg(x_1 \to x_2)$，$\neg(x_2 \to x_1)$，$\neg(x_2 \to x_2)$ 这些公式，L_2 层次中的公式数量为 30.

2.3 证明格式不规范

我们这里所说的证明指形式证明，它被严格定义为一列有限的公式，在完成证明时，需要列出每个公式的编号、写出该公式的依据（包括假定集中的公式也需要写出“假定”）。格式可以参照上述作业答案和课本中的证明。

2.4 证明过程不完整

如上所述，书写证明时需要列出这一公式列中的所有公式，包括假定集中的公式也需要列出编号，部分同学出现了跳步的现象，尤其体现在证明中出现较长的 L_2 型公理

(n) $\quad (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \quad$ (L2)

时，往往遗漏了列出前件公式

(n + 1) $\quad p \to (q \to r)$

和相应的 MP 规则

(n + 2) $((p \to q) \to (p \to r))$ (n), (n + 1), MP

，直接写成

(n) $(p \to q) \to (p \to r)$ (L2)

。比如练习 3 第 2 题第 2° 小问中连续 2 次使用 L_2 型公理后，许多同学忽略了假言推理 MP 的过程，直接结束了证明。

3 关于公式语法与排版

许多同学已经开始使用 Markdown、LaTeX 等语法编写作业中的公式，有一部分同学在具体的符号上使用有些不准确，比如否定词符号 $\neg$ 应当使用数学环境中的 `\lnot` 而不是 $\sim$，还有一些同学在证明的公式排版上出现了一些混乱，这些内容受限于时间与精力，我可能没有办法在作业反馈中系统地整理出来，但是通过查阅资料和积累一些经验，相信大家会很快实现比较好的效果。本次作业反馈的`.tex` 源文件我也会一并上传供使用 Markdown 和 LaTeX 的同学参考语法，也欢迎使用 Word 中 UnicodeMath 公式编辑或者 Mathematica 完成作业的同学和我讨论这方面的内容。

第二周作业反馈

罗晏宸

March 3 2020

1 作业答案

随着大家学习的深入，作业题目的复杂度也逐渐增加，可用的命题或结论也慢慢积累，作业题的答案很多都是不唯一的，在作业反馈中所有问题的答案仅供大家参考，也欢迎和助教们讨论.

练习 4

1. 先根据定义直接证明 $\vdash (x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2)$ ，然后再利用演绎定理来证明它

解

直接证明

证明.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad (x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2)) && \text{(L2)}\\
&(2) \quad ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2))) \to\\
&\qquad\quad \big(((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)) \to\\
&\qquad\quad ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2))\big) && \text{(L2)}\\
&(3) \quad ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)) \to\\
&\qquad\quad ((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2)) && \text{(1), (2), MP}\\
&(4) \quad x_1 \to ((x_1 \to x_2) \to x_1) && \text{(L1)}\\
&(5) \quad (x_1 \to ((x_1 \to x_2) \to x_1)) \to
\end{aligned}
$$

	$((x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1))$	(L2)
(6)	$(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_1)$	(4), (5), MP
(7)	$(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \to x_2)$	(3), (6), MP

□

利用演绎定理证明

证明. 由演绎定理，只用证 $\{x_1 \to (x_1 \to x_2)\} \vdash x_1 \to x_2$.
下面是 $x_1 \to x_2$ 从 $\{x_1 \to (x_1 \to x_2)\}$ 的一个证明：

(1)	$x_1 \to (x_1 \to x_2)$	假定
(2)	$(x_1 \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2))$	(L2)
(3)	$(x_1 \to x_1) \to (x_1 \to x_2)$	(1), (2), MP
(4)	$x_1 \to x_1$	同一律
(5)	$x_1 \to x_2$	(3), (4), MP

□

2. 利用演绎定理证明以下公式是 *L* 的定理

2° $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$.（换位律）

3° $((p \to q) \to p) \to p$.（Peirce 律）

解

2°

证明. 由演绎定理，只用证 $\{q \to p\} \vdash \neg p \to \neg q$.
下面是 $\neg p \to \neg q$ 从 $\{q \to p\}$ 的一个证明：

(1)	$\neg\neg q$	新假定
(2)	$\neg\neg q \to (\neg\neg\neg\neg q \to \neg\neg q)$	(L1)
(3)	$\neg\neg\neg\neg q \to \neg\neg q$	(1), (2), MP
(4)	$(\neg\neg\neg\neg q \to \neg\neg q) \to (\neg q \to \neg\neg\neg q)$	(L3)

(5)	$\neg q \to \neg\neg\neg q$	(3), (4), MP
(6)	$(\neg q \to \neg\neg\neg q) \to (\neg\neg q \to q)$	(L3)
(7)	$\neg\neg q \to q$	(5), (6), MP
(8)	q	(1), (7), MP
	以上(1)至(8)是 q 从 $\{\neg\neg q\}$ 的一个证明	
(9)	$\neg\neg q \to q$	由演绎定理
(10)	$q \to p$	假定
(11)	$\neg\neg q \to p$	(9), (10), HS
(12)	$\neg\neg\neg p$	新假定
(13)	$\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$	(L1)
(14)	$\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p$	(12), (12), MP
(15)	$(\neg\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p)$	(L3)
(16)	$\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p$	(14), (15), MP
(17)	$(\neg\neg p \to \neg\neg\neg\neg p) \to (\neg\neg\neg p \to \neg p)$	(L3)
(18)	$\neg\neg\neg p \to \neg p$	(16), (17), MP
(19)	$\neg p$	(12), (18), MP
	以上(12)至(19)是 $\neg p$ 从 $\{\neg\neg\neg p\}$ 的一个证明	
(20)	$\neg\neg\neg p \to \neg p$	由演绎定理
(21)	$(\neg\neg\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\neg p)$	(L3)
(22)	$p \to \neg\neg p$	(20), (21), MP
(23)	$\neg\neg q \to \neg\neg p$	(9), (22), HS
(24)	$(\neg\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg q)$	(L3)
(25)	$\neg p \to \neg q$	(23), (24), HS

可以在证明过程中使用演绎定理，但不宜过度改变证明顺序

此处可以用与上同理来表达，但是不宜从 $\neg\neg q \to q$ 直接得到 $\neg\neg\neg p \to \neg p$ ——书上没有类似的表达

（利用第一双重否定律）我们证明了第二双重否定律

□

3°

证明．由演绎定理，只用证 $\{(p \to q) \to p\} \vdash p$.

下面是 p 从 $\{(p \to q) \to p\}$ 的一个证明：

(1)	$(p \to q) \to p$	假定
(2)	$\neg p \to (p \to q)$	否定前件律
(3)	$\neg p \to p$	(1), (2), HS
(4)	$(\neg p \to p) \to p$	否定肯定律
(5)	p	(3), (4), MP

□

练习 5

1．证明

3° $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$.

5° $\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$.

解

3°

证明. 由演绎定理，只用证 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$. 把 q 作为新假定，可得

(1)	q	新假定
(2)	$q \to (p \to q)$	(L1)
(3)	$p \to q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \to q)$	假定

由(3)，(4)用归谬律即得 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$. □

5°

证明. 由演绎定理， 只用证 $\{p \to q, \neg p \to q\} \vdash q$. 把 $\neg q$ 作为新假定，可得

(1)	$p \to q$	假定
(2)	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	换位律

(3)	$\neg q \to \neg p$	(1), (2), MP
(4)	$\neg q$	新假定
(5)	$\neg p$	(3), (4), MP
(6)	$\neg p \to q$	假定
(7)	q	(5), (6), MP

由(4)，(7)用反证律即得 $\{p \to q, \neg p \to q\} \vdash q$. □

练习 6

2. 证明命题 2-$2°$, $3°$, $4°$

.

命题 2-$2°$ $\vdash (p \wedge q) \to q$.

命题 2-$3°$ $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$.

命题 2-$4°$ $\vdash p \to (p \wedge p)$.

解

命题 2-$2°$

证明. 要证 $\vdash (p \wedge q) \to q$，即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to q$. 由演绎定理，只用证 $\{\neg(p \to \neg q)\} \vdash q$. 把 $\neg q$ 作为新假定，可得

(1)	$\neg q$	新假定
(2)	$\neg q \to (p \to \neg q)$	(L1)
(3)	$p \to \neg q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \to \neg q)$	假定

使用了两次演绎定理

由(3)，(4)用反证律即得 $\{\neg(p \to \neg q)\} \vdash q$. □

命题 2-$3°$

证明. 要证 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$，即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$. 下面是所要的一个证明：

假定 $q \to \neg p$、p 和 q， 立即可得

注意此处(1)，(2)不是公式集中的公式

(1) $\{q \to \neg p, p, q\} \vdash p$

(2) $\{q \to \neg p, p, q\} \vdash \neg p$

由(1)，(2)用归谬律即得 $\{q \to \neg p, p\} \vdash \neg q$.

(3) $(q \to \neg p) \to (p \to \neg q)$ 由演绎定理

(4) $((q \to \neg p) \to (p \to \neg q)) \to (\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p))$ 换位律

(5) $\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$ (3), (4), MP

□

命题 2-$4°$

证明. 要证 $\vdash p \to (p \wedge p)$，即要证 $\vdash p \to \neg(p \to \neg p)$. 由演绎定理，只用证 $\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$. 把 $p \to \neg p$ 作为新假定，立即可得

(1) $\{p, p \to \neg p\} \vdash p$

(2) $\{p, p \to \neg p\} \vdash \neg p$

由(1)，(2)用归谬律即得 $\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$. □

2 问题总结

2.1 对于“（根据定义）直接证明”理解不够准确

在上一周的作业批改反馈中我们已经提到了，对形式证明定义的理解是十分重要的. 这次作业部分同学在第一题中使用了同一律来辅助证明，这并不满足根据定义直接证明的要求. 而在命题演算系统 L 的学习中，随着各种结论、命题的加入，大家对于一般证明的书写也有不足之处，现将教材中关于形式证明的定义、相关概念以及在几个小节结尾处的总结摘录如下，希望有助于大家理解.

设 $\mathit{\Gamma} \subseteq L(X), p \in L(X)$. 当我们说“公式 p 是从公式集 $\mathit{\Gamma}$ 可证的”，是指存在着 $L(X)$ 的公式的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$，其中尾项 $p_n = p$，且每个 $p_k (k = 1, \cdots, n)$ 满足：

(i) $p_k \in \mathit{\Gamma}$，或

(ii) p_k 是“公理”，或

所以严格的直接证明就是列出一列这样的公式

(iii) $\exists i, j < k,\ p_j = p_i \to p_k$.

具有上述性质的有限序列 $p_1, \cdots, p_n$ 叫做 p 从 $\mathit{\Gamma}$ 的“证明”，通常也叫作形式证明.

如果公式 p 从公式集 $\mathit{\Gamma}$ 可证，那么我们写 $\mathit{\Gamma} \vdash p$，必要时也可以写成 $\mathit{\Gamma} \vdash_L p$. 这时 $\mathit{\Gamma}$ 中的公式叫做“假定”，p 叫做假定集 $\mathit{\Gamma}$ 的语法推论.

若 $\varnothing \vdash p$ ，则称 p 是 L 的“定理”，记为 $\vdash p$. p 在 L 中从 $\varnothing$ 的证明 $p_1, \cdots, p_n$ 简称为 p 在 L 中的证明.

……下面介绍的三个语法定理——演绎定理、反证律和归谬律将会帮助我们更容易建立 $\mathit{\Gamma} \vdash p$ 这种形式的结果. 但在开头，还是有必要做一些按照定义写出证明的联系.

……命题 1 的证明中列出的“证明”已经不是原来定义所要求的的严格意义下的“证明”，因为这里已经引用了前面建立的结论. 尽管如此，仍足以证明所要建立的结论是正确的.

2.2 同一证明中语法定理的多次使用导致呈现出的结构混乱

如前所述，三个语法定理——演绎定理、反证律和归谬律在帮助我们证明出题设公式时是十分有力的，但当一次证明较为复杂，需要多次使用演绎定理或者需要使用多个语法定理时，如果不能很好的组织公式顺序，不仅会导致呈现出比较混乱的证明流程，而且很有可能影响考虑证明时的思路，产生一些不必要的错误.

参考前面给出的参考答案，在常见的此类问题中，可以首先使用多重的演绎定理简化目标式，比如证明形如 $\vdash p \to (q \to r)$ 的公式，直接连续使用两次演绎定理，则只用证 $\{p, q\} \vdash r$. 然后再视情况使用反证律或归谬律进一步证明. 而当需要 在证明过程中使用相应语法定理 时，可以穿插文字说明以表述公式是在何种假定集下证明的.

如练习 4 的 2-2° 题

2.3 证明的格式问题依然存在

尽管使用语法定理能够很直观地简化证明，小部分同学在证明的格式上依然存在问题，主要表现为列出公式时的依据不明、使用 MP 规则或 HS 规则时没有明确列出引用的公式编号、使用语法定理时表述过于口语化等. 大家需要注意，这门课程讨论的证明一般情况下和数学中的证明是有一定区别的，形式化是很重要的内核，请参考教材中的例题以及前面列出的参考答案纠正自己作业中可能出现的错误.

2.4 证明中跳步问题依然存在

除了上次作业中频繁出现的“由 (L2) 得出的长公式与 MP 连写、多个 MP 叠写”等问题，在本次作业中还出现了对于双重否定律 $\neg\neg p \to p$ 与第二双重否定律 $p \to \neg\neg p$ 的随意使用，不仅仅是在练习 4 题目的证明中直接使用了尚未证明的第二双重否定律（在 1.2.4 节才得到证明)，而且在后面的证明中，默认 p 与 $\neg\neg p$ 可以随意交换，这是不合适的，作为 $L(X)$ 中的公式，这两者在层数上就有本质区别，更不要说在一些非古典命题演算系统中，双重否定律是不被承认的（教材 P_{33}）.

第三周作业反馈

罗晏宸

March 6 2020

1 作业答案

练习 7

2. 下面的公式哪些恒为永真式？

4° $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$.

5° $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$.

解

(	p	$\wedge$	$\neg$	q	)	$\vee$	((	q	$\wedge$	$\neg$	r	)	$\wedge$	(	r	$\wedge$	$\neg$	p	))
	0	0	1	0		0		0	0	1	0		0		0	0	1	0	
	0	0	1	0		0		0	0	0	1		0		1	1	1	0	
	0	0	0	1		0		1	1	1	0		0		0	0	1	0	
	0	0	0	1		0		1	0	0	1		0		1	1	1	0	
	1	1	1	0		1		0	0	1	0		0		0	0	0	1	
	1	1	1	0		1		0	0	0	1		0		1	0	0	1	
	1	0	0	1		0		1	1	1	0		0		0	0	0	1	
	1	0	0	1		0		1	0	0	1		0		1	0	0	1	

表 1: 公式 4° 的真值表

4° 由真值表可知，公式 4° 可能存在成假指派，因此不恒为永真式。

(	p	$\to$	(	q	$\to$	r	))	$\to$	((	p	$\wedge$	$\neg$	q	)	$\vee$	r	)
	0	1		0	1	0		0		0	0	1	0		0	0	
	0	1		0	1	1		1		0	0	1	0		1	1	
	0	1		1	0	0		0		0	0	0	1		0	0	
	0	1		1	1	1		1		0	0	0	1		1	1	
	1	1		0	1	0		1		1	1	1	0		1	0	
	1	1		0	1	1		1		1	1	1	0		1	1	
	1	0		1	0	0		1		1	0	0	1		0	0	
	1	1		1	1	1		1		1	0	0	1		1	1	

表 2: 公式 5° 的真值表

5° 由真值表可知，公式 5° 可能存在成假指派，因此不恒为永真式。

3. 以下结论是否正确？为什么？

1° $\models p(x_1, \cdots, x_n) \;\Leftrightarrow\; \models (\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$.

2° $\models (p \to q) \leftrightarrow (p' \to q') \;\Rightarrow\; \models p \leftrightarrow p'$ 且 $\models q \leftrightarrow q'$.

解

1° 结论正确，以下对等价关系 $\Leftrightarrow$ 做两个方向上的 分别证明： 形式上参考代换定理的证明

证明. "$\Rightarrow$": 由代换定理，取 $p_1, \cdots, p_n$ 分别为 $\neg x_1, \cdots, \neg x_n$，立刻可得：

$$\models p(x_1, \cdots, x_n) \;\Rightarrow\; \models (\neg x_1, \cdots, \neg x_n).$$

"$\Leftarrow$": 设 v 是 $L(X)$ 的任一赋值，记

$$u_1 = v(\neg x_1),\ \cdots,\ u_n = v(\neg x_n)$$

将 $u_1, \cdots, u_n$ 分别指派给 $x_1, \cdots, x_n$，且将此真值指派扩张成 $L(X_n)$ 的赋值 u。于是 u 满足：

(1) $$u(x_i) = u_i = v(\neg x_i) = \neg v(x_i) \qquad i = 1, \cdots, n$$

现需证明下面的(2)式：

(2) $$v(p(x_1, \cdots, x_n)) = u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))$$

我们有：

$$\begin{aligned}
u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)) &= p(\neg u(x_1), \cdots, \neg u(x_n)) && \text{（u 的保运算性）} \\
&= p(\neg u_1, \cdots, \neg u_n) \\
&= p(\neg v(\neg x_i), \cdots, \neg v(\neg x_n)) && \text{（由(1)式）} \\
&= p(\neg\neg v(x_i), \cdots, \neg\neg v(x_n)) && \text{（v 的保运算性）} \\
&= p(v(x_i), \cdots, v(x_n)) && \text{（$\mathbb{Z}_2$ 中公式）} \\
&= v(p(x_i, \cdots, x_n)) && \text{（v 的保运算性）}
\end{aligned}$$

有了(2)便可得：

$$\begin{aligned}
\vDash (\neg x_1, \cdots, \neg x_n) &\Rightarrow u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)) = 1 \\
&\Rightarrow v(p(x_i, \cdots, x_n)) = 1 \\
&\vDash p(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

□

2° 结论不正确，取以下公式为例

$$p = x_1,\, q = x_1$$
$$p' = x_2,\, q' = x_2$$

我们有

$$\vDash (x_1 \to x_1) \leftrightarrow (x_2 \to x_2)$$

但

$$\nvDash x_1 \to x_2$$

练习 9

1. 证明以下各对公式是等值的.

3° $(\neg p \vee q) \to r$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee r$.

4° $\neg(\neg p \vee q) \vee r$ 和 $(p \to q) \to r$.

解

等值的定义：
p 与 q 等值，
是指 $p \leftrightarrow q$ 是永真式

3° 下面列出公式 $((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 的 真值表：

((	$\neg$	p	$\vee$	q	)	$\to$	r	)	$\leftrightarrow$	((	p	$\wedge$	$\neg$	q	)	$\vee$	r	)
	1	0	1	0		0	0		1		0	0	1	0		0	0	
	1	0	1	0		1	1		1		0	0	1	0		1	1	
	1	0	1	1		0	0		1		0	0	0	1		0	0	
	1	0	1	1		1	1		1		0	0	0	1		1	1	
	0	1	0	0		1	0		1		1	1	1	0		1	0	
	0	1	0	0		1	1		1		1	1	1	0		1	1	
	0	1	1	1		0	0		1		1	0	0	1		0	0	
	0	1	1	1		1	1		1		1	0	0	1		1	1	

表 3: 公式 $((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 的真值表

因此 $((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 是永真式，由定义可知 $(\neg p \vee q) \to r$ 与 $(p \wedge \neg q) \vee r$ 等值。

4° 下面列出公式 $(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \leftrightarrow ((p \to q) \to r)$ 的真值表：

(	$\neg$	(	$\neg$	p	$\vee$	q	)	$\vee$	r	)	$\leftrightarrow$	((	p	$\to$	q	)	$\to$	r	)
	0		1	0	1	0		0	0		1		0	1	0		0	0	
	0		1	0	1	0		1	1		1		0	1	0		1	1	
	0		1	0	1	1		0	0		1		0	1	1		0	0	
	0		1	0	1	1		1	1		1		0	1	1		1	1	
	1		0	1	0	0		1	0		1		1	0	0		1	0	
	1		0	1	0	0		1	1		1		1	0	0		1	1	
	0		0	1	1	1		0	0		1		1	1	1		0	0	
	0		0	1	1	1		1	1		1		1	1	1		1	1	

表 4: 公式 $(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \leftrightarrow ((p \to q) \to r)$ 的真值表

因此 $(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \leftrightarrow ((p \to q) \to r)$ 是永真式，由定义可知 $\neg(\neg p \vee q) \vee r$ 与 $(p \to q) \to r$ 等值。

3. 设公式 p 与 q 都已写成只含有命题变元和 $\neg,\vee,\wedge$ 三种运算. 把 p 和 q 中所有 $\vee$ 改为 $\wedge$，$\wedge$ 改为 $\vee$，分别得到 p^d 和 q^d. 证明

$$\vDash p \leftrightarrow q \ \Rightarrow\ \vDash p^d \leftrightarrow q^d$$

解

证明. 设 $p = p(x_1, \cdots, x_n)$，$q = q(x_1, \cdots, x_n)$。由代换定理，

$$
\begin{aligned}
&\vDash p(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \cdots, x_n) \\
\Rightarrow &\vDash p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n) \leftrightarrow q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n) \\
\Rightarrow &\vDash \neg p(\neg x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \neg q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n) \\
\Rightarrow &\vDash (p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))^* \leftrightarrow (q(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))^* && \text{（由对偶律）} \\
\Rightarrow &\vDash (p(\neg\neg x_1, \cdots, \neg\neg x_n))^d \leftrightarrow (q(\neg\neg x_1, \cdots, \neg\neg x_n))^d && \text{（由 } p^* \text{ 和 } p^d \text{ 的定义）} \\
\Rightarrow &\vDash (p(x_1, \cdots, x_n))^d \leftrightarrow (q(x_1, \cdots, x_n))^d
\end{aligned}
$$

□

2 问题总结

2.1 真值表格式问题

仍有小部分同学在绘制公式真值表时有格式方面的错误，例如没有按公式顺序绘制、没有用竖线标示出最终真值、竖线过多没有突出最终真值等。一个规范的真值表不仅能帮助快速解决问题，也能够减少在答题和批改两方面可能出现的错漏，希望大家注意。

2.2 证明表述不准确

在本次作业中出现了关于永真式、等值等概念的证明，这些数学证明和此前的形式证明不同，没有严格的格式或内容要求，但准确地完成这些证明依然需要大家理解相关概念的定义。在证明技术的使用上可以参考书上相关小节的例证或例题，例如**按层次归纳**、**扩张赋值**等都是有力的证明手段。

第四周作业反馈

罗晏宸

March 21 2020

1 作业答案

练习 10

1. 求以下公式的等值主析取范式.

3° $(x_1 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$.

4° $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$.

解

3° 根据如下的真值表

(	x_1	$\wedge$	x_3	)	$\vee$	(	$\neg$	x_2	$\leftrightarrow$	x_3	)
	0	0	0		0		1	0	0	0	
	0	0	1		1		1	0	1	1	
	0	0	0		1		0	1	1	0	
	0	0	1		0		0	1	0	1	
	1	0	0		0		1	0	0	0	
	1	1	1		1		1	0	1	1	
	1	0	0		1		0	1	1	0	
	1	1	1		1		0	1	0	1	

表 1: 公式 3° 的真值表

得到公式 3° 的成真指派是 $(0,0,1)$,$(0,1,0)$,$(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(1,1,1)$。写出与这 5 个成真指派相对应的基本合取式：$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$，$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$，$x_1 \wedge \neg x_2 \vee x_3$，$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$，$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$，然后以它们为析取支构成析取范式，便得所求：

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \vee x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$$

4° 根据如下的真值表

$\neg$	((	x_1	$\to$	$\neg$	x_2	)	$\to$	x_3	)
1		0	1	1	0		0	0	
0		0	1	1	0		1	1	
1		0	1	0	1		0	0	
0		0	1	0	1		1	1	
1		1	1	1	0		0	0	
0		1	1	1	0		1	1	
0		1	0	0	1		1	0	
0		1	0	0	1		1	1	

表 2: 公式 4° 的真值表

得到公式 4° 的成真指派是 $(0,0,0)$,$(0,1,0)$,$(1,0,0)$。写出与这 3 个成真指派相对应的基本合取式：$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$，$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$，$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$，然后以它们为析取支构成析取范式，便得所求：

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$$

2. 求以下公式的等值主合取范式.

4° $((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$.

解

4° 根据如下的真值表

((	x_1	$\to$	x_2	)	$\to$	x_3	)	$\to$	x_4
	0	1	0		0	0		1	0
	0	1	0		0	0		1	1
	0	1	0		1	1		0	0
	0	1	0		1	1		1	1
	0	1	1		0	0		1	0
	0	1	1		0	0		1	1
	0	1	1		1	1		0	0
	0	1	1		1	1		1	1
	1	0	0		1	0		0	0
	1	0	0		1	0		1	1
	1	0	0		1	1		0	0
	1	0	0		1	1		1	1
	1	1	1		0	0		1	0
	1	1	1		0	0		1	1
	1	1	1		1	1		0	0
	1	1	1		1	1		1	1

表 3: 公式 4° 的真值表

得到公式 $\neg(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4)$ 的成真指派是

$$(0, 0, 1, 0),\ (0, 1, 1, 0),\ (1, 0, 0, 0),\ (1, 0, 1, 0),\ (1, 1, 1, 0)$$

则 $\neg(((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4)$ 的等值主析取范式是

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$$
$$\vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)$$

由此得 $((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4$ 的等值主合取范式是

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$
$$\wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

练习 11

2. 分别找出只含有运算 $\neg$ 和 $\wedge$ 的公式，使之与以下个公式等值：

$3^\circ \quad (x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3.$

解

3°

$$(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3$$

与

$u \leftrightarrow v = (u \to v) \wedge (v \to u)$ $$((x_1 \to \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \to x_1)) \leftrightarrow x_3$$

等值，又与

$u \to v = \neg(u \wedge \neg v)$ $$(\neg(x_1 \wedge \neg\neg x_2) \wedge \neg(\neg x_2 \wedge \neg x_1)) \leftrightarrow x_3$$

即

$$\neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \wedge \neg x_3) \wedge \neg(x_3 \wedge \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)))$$

等值。

练习 12

把以下论证形式化，并判断是否合理。

2. A,B,C,D 为四个事件. 已知：A 和 B 不同时发生；若 A 发生，则 C 不发生而 D 发生；若 D 发生，则 B 不发生. 结论：B 和 C 不同时发生.

解 用 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示事件 A,B,C,D 发生，于是题中的论证可形式化为

$$\{\neg(x_1 \wedge x_2),\ x_1 \to (\neg x_3 \wedge x_4),\ x_4 \to \neg x_2\} \vdash \neg(x_2 \wedge x_3)$$

从语义上检查它的正确性：检查 $\neg(x_1 \wedge x_2)$，$x_1 \to (\neg x_3 \wedge x_4)$ 和 $x_4 \to \neg x_2$ 这三个公式的所有公共成真指派是否都是 $\neg(x_2 \wedge x_3)$ 的成真指派。为此，只用检查是否存在使这三个公式为真而使 $\neg(x_2 \wedge x_3)$ 为假的指派——如果存

在这种指派，那么原结论不成立。问题归结为下面的真值方程组(1)~(4)是否有解：

$$\begin{cases} \neg(v_1 \land v_2) = 1 & (1) \\ v_1 \to (\neg v_3 \land v_4) = 1 & (2) \\ v_4 \to \neg v_2 = 1 & (3) \\ \neg(v_2 \land v_3) = 0 & (4) \end{cases}$$

由(4)式可得

$$v_2 = 1 \tag{5}$$

且

$$v_3 = 1 \tag{6}$$

由(1)式与(5)式得

$$v_1 = 0 \tag{7}$$

由(3)式与(5)式得

$$v_4 = 0 \tag{8}$$

将(6)、(7)、(8)代入(2)式的左边，得由(3)式与(5)式得

$$v_1 \to (\neg v_3 \land v_4) = 0 \to (\neg 1 \land 0) = 1 \tag{9}$$

所得结果说明：(0, 1, 1, 0) 是(1)~(4)的解。它是前三个公式（“前提”）的公共成真指派，但却是 $\neg(x_2 \land x_3)$（“结论”）的成假指派，所以题中的论证不能成立。

3. 例 3 中如果办案人员作出的判断是：“a,b,c 三人中至少有一人未作案”，判断是否正确？

例 3 一案案情涉及 a,b,c,d 四人. 根据已有线索，知

1° 若 a,b 均未作案，则 c,d 也均未作案；

2° 若 c,d 均未作案，则 a,b 也均未作案；

3° 若 a 与 b 同时作案，则 c 与 d 有一人且只有一人作案；

4° 若 b 与 c 同时作案，则 a 与 d 同时作案或同未作案.

办案人员由此得出结论：a 是作案者，这个结论是否正确？

解 用 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示 a,b,c,d 各自作案，于是题中的论证可形式化为

$$\begin{aligned}&\big\{(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \to (\neg x_3 \wedge \neg x_4),\ (\neg x_3 \wedge \neg x_4) \to (\neg x_1 \wedge \neg x_2),\\&(x_1 \wedge x_2) \to ((x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_3 \wedge x_4)),\\&(x_3 \wedge x_4) \to ((x_1 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_4))\big\} \vdash \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)\end{aligned}$$

解真值方程组：

$$\begin{cases}(\neg v_1 \wedge \neg v_2) \to (\neg v_3 \wedge \neg v_4) = 1 & (1)\\(\neg v_3 \wedge \neg v_4) \to (\neg v_1 \wedge \neg v_2) = 1 & (2)\\(v_1 \wedge v_2) \to ((v_3 \wedge \neg v_4) \vee (\neg v_3 \wedge v_4)) = 1 & (3)\\(v_2 \wedge v_3) \to ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4)) = 1 & (4)\\\neg(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = 0 & (5)\end{cases}$$

由(5)式可得

$$v_1 = 1 \tag{6}$$

$$v_2 = 1 \tag{7}$$

$$v_3 = 1 \tag{8}$$

以上三式代入(1)式与(2)式可得不论 v_4 取何值，两式均成立。代入(3)式可得

$$v_4 = 0 \tag{9}$$

代入(4)式可得

$$\begin{aligned}&(v_2 \wedge v_3) \to ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4))\\=&(1 \wedge 1) \to ((1 \wedge 0) \vee (\neg 1 \wedge \neg 0))\\=&0\end{aligned} \tag{10}$$

(4)式与(10)式矛盾，所以方程组(1)~(5)无解。这说明题中原结论成立。

2 问题总结

2.1 主析取/合取范式的概念理解错误

一个公式的可能有很多个与之等值的析取范式，而**主**析取范式是一种特殊的析取范式，在它的每个析取支中，公式中的**每个命题变元都会出现且仅**

出现一次，主合取范式也是相似的。一部分同学在作业中给出的并不是标准的主析取/合取范式，其中的一些析取/合取支中部分变元并未出现。

2.2 公式的成真指派计算错误

尽管真值表是本课程开始时的知识内容，但在此前的作业反馈中我们已反复强调这一工具在后续内容中的必要性和有效性。在本次作业中通过公式成真指派确定主析取范式的内容中，部分同学得出了错误的成真指派进而导致答案错误。虽然在很多题目的解答中，公式的真值表并不是必要的书面过程，但是在求完整的成真/成假指派时，一个格式标准的真值表依然可以快速准确地得出结果。

2.3 对实际问题的形式化错误

本课程中命题逻辑的内容暂时告一段落，在第一章的末尾，我们谈到了命题逻辑在实际问题中的应用，这一部分内容是很直观的，求解方式也比较多样：对于简单问题可以列真值表，复杂一些的可以求解真值方程组。但是在此之前，一个很重要的步骤是对实际问题的形式化。

和概率论中的部分内容很相似，我们需要明确地用命题变元来代指（二元）事件的发生，这里部分同学的表述并不清晰，例如没有表达 x_i 到底是描述嫌疑人 i 作案还是未作案，另外直接使用题目中的字母作为命题变元也是不可取的，同样会产生歧义。

一个小的细节是很多同学对于事件 A 与 C 不同时发生这一描述的形式化是 $x_1 \leftrightarrow \neg x_3$（其中 x_1,x_3 分别表示事件 A 发生和事件 C 发生）。这是不正确的，这样的形式化实际上描述的是“A 与 C 有且仅有一个发生”。正确的形式化应当是 $\neg(x_1 \wedge x_3)$，实际上这正是逻辑**与非**的表达。另外以此为例，我们希望大家对于实际问题的形式化是直觉的，比如同样的描述，另一种形式化 $\neg x_1 \vee \neg x_3$ 就在直观性上欠缺一些。

第五周作业反馈

张俸铭

March 31 2020

1 作业答案

练习 14

2. 在以下公式中，哪些 x_1 的出现是自由的？哪些 x_1 的出现是约束的？项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这些公式中的 x_2 是不是自由的？

注：绿色标识自由出现的 x_1，红色表示约束出现的 x_1

1° $\forall x_2\ (R_1^2(x_1, x_2) \to R_2^2(x_2, c_1))$.
项 $f_1^2(x_1, x_2)$ 对这些公式中的 x_2 是自由的

2° $R_1^1(x_3) \to \neg\forall x_1\ \forall x_2\ R_1^3(x_1, x_2, c_1)$.
项 $f_1^2(x_1, x_2)$ 对这些公式中的 x_2 是自由的

3° $\forall x_1\ R_1^1(x_1) \to \forall x_2\ R_1^2(x_1, x_2)$.
项 $f_1^2(x_1, x_2)$ 对这些公式中的 x_2 是自由的

4° $\forall x_2\ R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to \forall x_1\ R_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))$.
项 $f_1^2(x_1, x_2)$ 对这些公式中的 x_2 不是自由的

3. 设 t 是项 $f_1^2(x_1, x_3)$，$p(x_1)$ 是下面的公式. 确定 t 对 $p(x_1)$ 中的 x_1 是否自由？如果是自由的，写出 $p(t)$.

1° $\forall x_1\ R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \to R_1^1(x_1)$.
自由. $p(t) = \forall x_1\ R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \to R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$

2° $\forall x_1 \, \forall x_3 \, (R_1^1(x_3) \to R_1^1(x_1))$.

自由. $p(t) = p(x_1) = \forall x_1 \, \forall x_3 \, (R_1^1(x_3) \to R_1^1(x_1))$

3° $\forall x_2 \, R_1^1(f_1^1(x_2)) \to \forall x_3 \, R_1^3(x_1, x_2, x_3)$.

不自由

4° $\forall x_2 \, R_1^3(x_1, f_1^1(x1), x_2) \to \forall x_3 \, R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$.

不自由

5. 设个体变元 x 在公式 $p(x)$ 中自由出现，个体变元 y 不在公式 $p(x)$ 中自由出现，试证：如果 y 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的，那么 x 对 $p(y)$ 中的 y 也是自由的

证明:

$\because$ y 在 $p(x)$ 中全部约束出现

$\therefore$ $p(x)$ 中的 y 只可能出现在 $\forall y$ 中或 $\forall y$ 的范围内

$\because$ y 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的

$\therefore$ $p(x)$ 中所有自由出现的 x 都不在 $\forall y$ 的范围内

又 $\because$ x 在 $p(x)$ 中全部自由出现

$\therefore$ $p(x)$ 中所有的 x 都不在 $\forall y$ 的范围内

故用 x 替换 $p(y)$ 中自由出现的 y 时，这些 x 均不在 $\forall y$ 的范围内

因此，x 对 $p(y)$ 中的 y 也是自由的

练习 15

2. 试证对任意公式 p,q, 有 $\vdash \forall x\ (p \to q) \to (\forall x\ p \to \forall x\ q)$

证明：先证明 $\{\forall x\ (p \to q), \forall x\ p\} \vdash \forall x\ q)$:

(1)$\forall x\ (p \to q)$	假定
(2)$\forall x\ (p \to q) \to (p \to q)$	K4
(3)$p \to q$	(1),(2),MP
(4)$\forall x\ p$	假定
(5)$\forall x\ p \to p$	K4
(6)p	(4),(5),MP
(7)q	(3),(6),MP
(8)$\forall x\ q$	(7),Gen

$\because$Gen 变元 x 不在 $\forall x\ (p \to q), \forall x\ p$ 中自由出现
$\therefore$ 使用两次演绎定理可得：

$$\vdash \forall x\ (p \to q) \to (\forall x\ p \to \forall x\ q)$$

4. 设 x 不在 p 中自由出现，求证：

1° $\vdash (p \to \forall x\ q) \to \forall x\ (p \to q)$
证明：先证：$\{p \to \forall x\ q\} \vdash \forall x\ (p \to q)$

(1)$p \to \forall x\ q$	假定
(2)$\forall x\ q \to q$	K4
(3)$p \to q$	(1),(2),HS
(4)$\forall x\ (p \to q)$	(3),Gen

$\because$Gen 变元 x 不在 $p \to \forall x\ q$ 中自由出现
$\therefore$ 使用演绎定理可得：

$$\vdash (p \to \forall x\ q) \to \forall x\ (p \to q)$$

2° $\vdash (p \to \exists x\ q) \to \exists x\ (p \to q)$
证明：根据 $\exists x = \neg\forall x\neg$, 即证 $\vdash (p \to \neg\forall x\neg q) \to \neg\forall x\neg(p \to q)$。

考虑用归谬律和演绎定理。下面的公式从 $\{p \to \neg\forall x\neg q, \forall x\neg(p \to q)\}$ 可证：

(1)$\forall x\ \neg(p \to q)$	假定
(2)$\forall x\ \neg(p \to q) \to \neg(p \to q)$	K4
(3)$\neg(p \to q)$	(1),(2),MP
(4)$\neg(p \to q) \to p$	永真式
(5)p	(3),(4),MP
(6)$p \to \neg\forall x\ \neg q$	假定
(7)$\neg\forall x\ \neg q$	(5),(6),MP
(8)$\neg(p \to q) \to \neg q$	永真式
(9)$\neg q$	(3),(8)，MP
(10)$\forall x\ \neg q$	(9),Gen

由 (7),(10) 及归谬律，又 Gen 变元 x 不在 $\forall x\neg(p \to q)$ 中自由出现
故证得：

$$\{p \to \neg\forall x\ \neg q\} \vdash \neg\forall x\ \neg(p \to q)$$

又 $\because$Gen 变元 x 不在 $p \to \neg\forall x\ \neg q$ 中自由出现
$\therefore$ 使用演绎定理可得：

$$\vdash (p \to \neg\forall x\ \neg q) \to \neg\forall x\ \neg(p \to q)$$

故原命题得证.

2 问题总结

2.1 对于变元、项是否自由的理解

课本上对变元 x 自由出现的定义是"x 未出现在 $\forall x$ 或 $\forall x$ 的范围中"，因此在判断一个公式中的 x 是否自由或约束，需要**对每个位置出现的 x 分别分析** (注意这里不要漏了)。而在项对公式中的变元是否自由进行判断时，作业中出现了" 用项 t 替换自由出现的个体变元 x 后，这个变元 x 就不再在公式 p 中出现"、" 项 t 中不存在自由出现的个体变元 x 故无法替换" 的情况，根据定义，只要新公式中 t 的变元都是自由的，即说明 t 对 p 中 x

自由。考试时碰到这种奇奇怪怪的情况，只要动手翻翻书，严格套定义分析就不会出错了。

2.2 关于 K 中的证明

思路

K 中的证明与 L 中最主要的区别就在于引入了全称量词，而当待证公式的**前项或后项出现全称量词**是没办法处理的，这时候就该考虑通过演绎定理拆分前项或后项，然后再在证明时通过 K4、K5、Gen 规则进行处理。

注意事项

通过上面的分析和做作业的感受，相信大家也能发现其实 K 中的证明会大量用到 K4、K5、演绎定理、反证律、归谬律、$\exists_1$ 、$\exists_2$ 规则等等，而它们在 K 中使用时都是十分需要注意使用条件的 (**项、变元是否自由出现**)，所以证明过程中一定要注意该条件下能否使用相应的规则，同时**必须在证明过程中说明** (因为在 L 和 K 中它们是不同的定理和规则)。

比如这次的作业中，很多同学在用演绎定理和归谬律时没有说明 Gen 变元 x 没有在对应式中自由出现就直接使用了，这样在考试评卷时会被扣分。

第六周作业反馈

张俸铭

April 2020

1 作业答案

练习 16

1. 设 x 不在 q 中自由出现，求证:

1° $\vdash (\exists x\ p \to q) \to \forall x(p \to q)$.

证明：即证 $\vdash (\neg\forall x\ \neg p \to q) \to \forall x(p \to q)$

先证 $\{\neg\forall x\ \neg p \to q\} \vdash \forall x\ (p \to q)$

(1)$\neg\forall x \neg p \to q$	假定
(2)$(\neg\forall x\ \neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg\forall x\ \neg p)$	永真式
(3)$\neg q \to \neg\neg\forall x\ \neg p$	(1),(2),MP
(4)$\neg\neg\forall x\ \neg p \to \forall x\ \neg p$	双否律
(5)$\neg q \to \forall x\ \neg p$	(3),(4),HS
(6)$\forall x\ \neg p \to \neg p$	K4
(7)$\neg q \to \neg p$	(5),(6)，HS
(8)$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	K3
(9)$p \to q$	(7),(8),MP
(10)$\forall x\ (p \to q)$	(9),Gen

由于 x 不在 $(\neg\forall x\ \neg p \to q)$ 中自由出现 (题设 x 不在 q 中自由出现)，故由演绎定理得:

$$\vdash (\exists x\ p \to q) \to \forall x\ (p \to q)$$

$2°\quad \vdash \exists x\ (p \to q) \to (\forall x\ p \to q)$.

证明：即证 $\vdash \neg\forall x\neg\ (p \to q) \to (\forall x\ p \to q)$

以下从 $\{\neg\forall x\neg(p \to q), \forall x\ p, \neg q\}$ 可证

$(1)\forall x\ p$	假定
$(2)p$	K4
$(3)p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$	永真式
$(4)\neg q \to \neg(p \to q)$	(2),(3),MP
$(5)\neg q$	假定
$(6)\neg(p \to q)$	(4),(5),MP
$(7)\forall x\neg(p \to q)$	(6),Gen
$(8)\neg\forall x\neg(p \to q)$	假定

由于 x 不在 q 中自由出现，使用反证律得：$\{\neg\forall x\ \neg(p \to q), \forall x\ p\} \vdash q$

由于 x 不在 $\neg\forall x\ \neg(p \to q)$,$\forall x\ p$ 中自由出现，使用两次演绎定理得：

$$\vdash \neg\forall x\ \neg(p \to q) \to (\forall x\ p \to q)$$

2. 设 p是定理 2 中定义的 p 的对偶公式，求证：$\vdash (p^*)^* \leftrightarrow p$.

证明：

$(1)p^* \leftrightarrow \neg p$	对偶律
$(2)(p^*)^* \leftrightarrow (\neg p)^*$	子公式等价可替换性
$(3)(\neg p)^* \leftrightarrow \neg\neg p$	对偶律
$(4)(p^*)^* \leftrightarrow \neg\neg p$	(2),(3),HS
$(5)\neg\neg p \leftrightarrow p$	双否律, 第二双否律
$(6)(p^*)^* \leftrightarrow p$	(4),(5),HS

3. 找出与所给公式等价的前束范式

$3°\quad \forall x_1\ (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2\ R_1^1(x_2) \to \exists x_3\ R_1^2(x_2, x_3))$

对约束变元更名：

$q_1 = \forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3))$

从 q_1 出发可得等价公式:

$q_2 = \forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \exists x_3(\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))$

$q_3 = \forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \exists x_3 \forall x_4(R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))$
$q_4 = \forall x_4 \exists x_3(\forall x_1(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3)))$
$q_5 = \forall x_4 \exists x_1 \exists x_3((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3)))$

练习 17

1. 试把命题甲、乙分别按照以下要求用 K 中的公式表示出来

命题甲："若数集 E_1 中某数比零大，则数集 E_2 中所有数都比零大."
命题乙："并非 E_1 中的数都小于或等于 E_2 中的每个数."

(1) 出现全称量词
甲：$\exists x_1(R_1^1(x_1) \wedge R_1^2(x_1, c_1)) \to \forall x_2(R_2^1(x_2) \to R_1^2(x_2, c_1))$
乙：$\neg \forall x_1(R_1^1(x_1) \to \forall x_2(R_2^1(x_2) \to \neg R_1^2(x_1, x_2)))$

(2) 不出现全称量词
甲：$\exists x_1(R_1^1(x_1) \wedge R_1^2(x_1, c_1)) \to \neg \exists x_2 \neg (R_2^1(x_2) \to R_1^2(x_2, c_1))$
乙：$\exists x_1(R_1^1(x_1) \wedge \exists x_2(R_2^1(x_2) \wedge R_1^2(x_1, x_2)))$

(3) 写成前束范式
甲：$\forall x_1 \forall x_2((R_1^1(x_1) \wedge R_1^2(x_1, c_1)) \to (R_2^1(x_2) \to R_1^2(x_2, c_1)))$
乙：$\exists x_1 \exists x_2(R_1^1(x_1) \wedge R_2^1(x_2) \wedge R_1^2(x_1, x_2))$

3. 设 $t \in T, \varphi, \varphi' \in \Phi_w$，$\varphi'$ 是 φ 的 x 变通，且 $\varphi'(x) = \varphi(t)$，用项 t 代换项 $u(x)$ 中 x 所得的项记为 $u(t)$。求证：$\varphi'(u(x)) = \varphi(u(t))$.

证明：对 $u(x)$ 在 T 中的层数 k 归纳：

$k = 0$ 时，考虑三种情况：

(1) $u(x) = c_i, u(t) = c_i, \varphi'(u(x)) = \varphi'(c_i) = \varphi(c_i) = \varphi(u(t))$

(2) $u(x) = y$ 且 $u(x) \neq x$，则 $u(t) = y$. 由于 φ' 是 φ 的变通，则 $\varphi'(u(x)) = \varphi'(y) = \varphi(y) = \varphi(u(t))$

(3) $u(x) = x, u(t) = t$，即 $\varphi'(x) = \varphi(t)$,$\varphi'(u(x)) = \varphi'(x) = \varphi(t) = \varphi(u(t))$

下面考虑 $k > 0$ 的情况：

记 $u(x)=f_i^n(t_1(x),...,t_n(x))$, 其中 $t_1(x),t_2(x),...,t_n(x)$ 为低层次的项, 故:

$$\begin{aligned}\varphi'(u(x)) &= \varphi'(f_i^n(t_1(x),...,t_n(x))) \\ &= \overline{f_i^n}(\varphi'(t_1(x)),...,\varphi'(t_n(x))) \\ &= \overline{f_i^n}(\varphi(t_1(t)),...,\varphi(t_n(t))) \\ &= \varphi(f_i^n(t_1(t),...,t_n(t))) \\ &= \varphi(u(t))\end{aligned}$$

综上所述，对含任意层数项的 $u(x)$，有

$$\varphi'(u(x))=\varphi(u(t))$$

2 问题总结

2.1 关于前束范式

约束变量更名

在求等价前束范式时，由于公式中可能存在重名的约束变元，因此需要对重名的不同变元先更名再做变换.

前束范式中的量词顺序

在前束范式中量词有严格的前后顺序，即全称量词与存在量词不可随意交换顺序 (在一般的公式中当然更是如此)。因为 $\exists x \leftrightarrow \neg\forall x\neg$，改变量词顺序可能会导致否定词的范围改变.

2.2 关于 K 中证明的条件

详见第五周作业反馈，部分同学在这次证明过程中仍未注意演绎定理等的适用范围说明，请在今后多加注意.

第七周作业反馈

张俸铭

April 2020

1 作业答案

练习 18

1. 设 K 中的 $C=\{c_1\}, F=\{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}, R=\{R_1^2\}$，它的一个解释域是 $N=\{0,1,2,...\}, \overline{c_1}=0, \overline{f_1^1}$ 是后继函数,$\overline{f_1^2}$ 是 $+$,$\overline{f_2^2}$ 是 $\times$,$\overline{R_1^2}$ 是 $=$. 试对以下公式分别找出 $\varphi, \psi \in \Phi_N$，使得 $|p|(\varphi)=1, |p|(\psi)=0$，其中 p 是：

$3°$ $\neg R_1^2(f_2^2(x_1,x_2), f_2^2(x_2,x_3))$.
使上式为真的指派满足：$x_1 \times x_2 \neq x_2 \times x_3$
故取项解释 φ 满足：$\varphi(x_1)=1, \varphi(x_2)=1, \varphi(x_3)=2$
取项解释 ψ 满足：$\psi(x_1)=1, \psi(x_2)=2, \psi(x_3)=1$
(注：答案不唯一)

$5°$ $\forall x_1\ R_1^2(f_2^2(x_1,c_1),x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)$.
由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名：
$\forall x_3\ R_1^2(f_2^2(x_3,c_1),x_3) \to R_1^2(x_1,x_2)$.
使上式为假的指派满足：对 $\forall x_3, x_3=0$ 且 $x_1 \neq x_2$
因此，不存在对 x_1, x_2 的指派使上式成立
故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi)=1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi)=0$

2. 已知 K 中 $C=\{c_1\}, F=\{f_1^2\}, R=\{R_1^2\}$，还已知 K 的解释域 Z(整数集),$\overline{c_1}=0, \overline{f_1^2}$ 是减法,$\overline{R_1^2}$ 是 $'<'$. 试对以下公式分别找出 $\varphi, \psi \in \Phi_N$，使得 $|p|(\varphi)=1, |p|(\psi)=0$，其中 p 是：

$5°$ $\forall x_1\ R_1^2(f_1^2(x_1,c_1),x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)$

由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名：
$\forall x_3\ R_1^2(f_1^2(x_3,c_1),x_3) \to R_1^2(x_1,x_2)$
使上式为假的指派满足：对 $\forall x_3, x_3 - 0 < x_3$ 且 $x_1 \geq x_2$
而不存在对 x_1, x_2 的指派使上式成立
故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi) = 1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi) = 0$

$6°\quad \forall x_1 \forall x_2\ (R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),c_1) \to R_1^2(x_1,x_2))$
由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名：
$\forall x_1 \forall x_2\ (R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),c_1) \to R_1^2(x_3,x_4))$
使上式为假的指派满足：对 $\forall x_1, x_2\ x_1 - x_2 < 0$ 且 $x_3 \geq x_4$
而不存在对 x_3, x_4 的指派使上式成立
故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi) = 1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi) = 0$

练习 19

1. 对 2.2.1 例 1 中的 K, N 计算 $|p|_N$，其中 p 为:

$3°\quad \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3\ R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3)$
对一切 $\varphi \in \Phi_N$, 由 $\varphi(x_1)+\varphi(x_1) \in N$, 必有 $\exists x_3\ \varphi(x_3) = \varphi(x_1)+\varphi(x_1)$
故 $|p|_N = 1$

3. 设 K 中 $C = \{c_1\}, F = \{f_1^2\}, R = \{R_1^2\}$. 试给出 K 的两个解释域 M_1, M_2 使得 $|p|_{M_1} = 1, |p|_{M_2} = 0$，其中 p 为:

$1°\quad \forall x_1 \forall x_2\ (R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),c_1) \to R_1^2(x_1,x_2))$
取 M_1 : 解释域为 $N; \overline{c_1} = 0; \overline{f_1^2} : -; \overline{R_1^2} :=$
M_2 : 解释域为 $N; \overline{c_1} = 0; \overline{f_1^2} : +; \overline{R_1^2} :\geq$

$2°\quad \forall x_1\ (R_1^2(x_1,x_2) \to R_1^2(x_2,x_1))$
取 M_1 : 解释域为 N; $\overline{R_1^2} :=$
M_2 : 解释域为 N; $\overline{R_1^2} :>$

4. 证明 $|p|_M = 1 \Rightarrow |\exists x\ p|_M = 1$. 反向是否成立？说明理由.

证明:
$\because |p|_M = 1$

$\therefore \forall \varphi \in \Phi_M$, 有 $|p|(\phi) = 1$

故对 $\forall \varphi \in \Phi_M, |\neg p|(\varphi) = 0$, 即 $|\neg p|_M = 0$

$\therefore |\forall x\ \neg p|_M = 0$

$\therefore |\exists x\ p|_M = 1$, 证毕.

反向不成立。可以举出反例：如对于 2.2.1 节例 1 定义的 K 和 N，有 $|\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_N = 1$, 但 $|R_1^2(x_1, x_2)|_N = 0$

练习 20

1.4° **证明:** $\models \forall x \forall y\ p \to \forall y \forall x\ p$

证明：用反证法

假设 $\forall x \forall y\ p \to \forall y \forall x\ p$ 不是有效式，则 $\exists M$, $\exists \varphi \in \Phi_M$, 有 $|\forall x \forall y\ p \to \forall y \forall x\ p|(\varphi) = 0$

即 $|\forall x \forall y\ p|(\varphi) = 1$ 且 $|\forall y \forall x\ p|(\varphi) = 0$

由 $|\forall y \forall x\ p|(\varphi) = 0$, 存在 φ 的 y 变通 φ_1, 使得 $|\forall x\ p|(\varphi_1) = 0$, 进而存在 φ_1 的 x 变通 φ_2, 使得 $|p|(\varphi_2) = 0$.

由于 φ_1, φ_2 是 φ_1 的变通，故由赋值函数的性质知：$|\forall y\ p|(\varphi_1) = 0$, 进一步 $|\forall x \forall y\ p|(\varphi) = 0$, 这与假设推得的 $|\forall x \forall y\ p|(\varphi) = 1$ 矛盾!

故假设不成立. 故 $\forall x \forall y\ p \to \forall y \forall x\ p$ 是有效式，即:

$$\models \forall x \forall y\ p \to \forall y \forall x\ p$$

3. 证明 K 中以下公式都不是有效式

4° $\forall x_1\ R_1^2(x_1, x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)$

取 $M:$ 解释域为 $N; \overline{R_1^2} =' >'$, 则 $|\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)|_N = 1$ 而 $|\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)|_N = 0$

故原公式不是有效式.

5° $\exists x_1\ R_1^1(x_1) \to R_1^1(x_1)$

取 $M:$ 解释域为 $N, \overline{R_1^1}$ 为' 是质数'

则当 $\varphi(x_1) = 4$ 时,$|\exists x_1\ R_1^1(x_1)|(\varphi) = 1$ 而 $|R_1^1(x_1)|(\varphi) = 0$

故原公式不是有效式.

2 问题总结

2.1 关于项解释与公式真值

项解释是与公式中出现的变元有关，而公式的真值只与出现的自由变元有关. 因此当计算公式赋值时，注意将自由变元和约束变元分开讨论 (特别是当出现重名变元时，为避免出错可以先做更名处理再计算). 如练习 18 的 1.5° 有不少同学出错，此处同时还需要注意全称量词的作用范围是前件而不是整个蕴含式.