第 7 章　拉普拉斯变换

与傅里叶变换一样，拉普拉斯变换也是一种常用的积分变换，它能把分析运算化为代数运算. 拉普拉斯变换在物理、力学以及工程技术中都有着广泛的应用，尤其是在研究电路的瞬态过程及自动调节理论中，它更是一个常用的数学工具.

7.1　拉普拉斯变换的定义

由于在实际研究许多过程时总是从某一个时刻开始，比如从 $t=0$ 开始，而对这一时刻以前（比如 $t<0$）的状态并没有兴趣，因此在以下的讨论中，总是假定函数当 $t<0$ 时为零，即设

$$f(t)=\begin{cases}f(t) & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0),\end{cases}$$

这里，$f(t)$是实变量 t 的实函数或复函数.

记

$$h(t)=\begin{cases}1 & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0),\end{cases}$$

它叫做单位函数. 于是，按上述规定，在拉普拉斯变换里所讨论的函数 $f(t)$均为

$$f(t)=h(t)f(t).$$

定义　设 $f(t)$是定义在$[0,+\infty)$上的实值函数或复值函数，如果含复变量 $p=\sigma+\mathrm{i}s$（σ,s 为实数）的积分

$$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

在 p 的某个区域内存在，则由此积分定义的复函数

$$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

称为函数 $f(t)$的拉普拉斯变换(简称拉氏变换)或像函数,简记为 $F(p)=L[f(t)]$. 而 $f(t)$则称为 $F(p)$的拉氏逆变换或本函数,记为 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

下面讨论拉氏变换和傅里叶变换的关系. 在高等数学中已学过,当 $f(x)$在实轴上的任何有限区间内逐段光滑,并且在$(-\infty, +\infty)$上绝对可积时,它的傅里叶变换是

$$G(s) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x \text{ (} s \text{ 为实参量)}, \tag{2}$$

其逆变换是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}s.$$

于是,由(1)式及(2)式,得到两种变换的关系为

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t)f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t \\ &= F[h(t)f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]. \end{aligned} \tag{3}$$

傅里叶变换的存在条件——在$(-\infty, +\infty)$内绝对可积是一个相当强的条件,连一些常用的函数(如常数、幂函数、指数函数、三角函数等)都不满足. 但由(3)式可见,$L[f(t)]$存在,只要 $F[h(t)f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]$存在. 换句话说,除连续性条件外,只要 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$在$[0, +\infty)$内绝对可积,$L[f(t)]$就存在. 例如,对于右半 p 平面 $\mathrm{Re}p=\sigma>0$ 中的一切点 p,由于 $\mathrm{e}^{-\sigma t}\sin t$ 在$[0, +\infty)$内绝对可积,故对于这些点,$F(p)=L[\sin t]$存在. 由此可见,拉氏变换比傅里叶变换适用于更多的函数.

为了行文的方便,这里先把本函数 $f(t)$的拉氏变换的存在条件叙述出来,对它们以后简称为条件 1)和条件 2):

1) 设 $f(t)$在 t 轴上的任何有限区间内逐段光滑. 即在 t 轴上的任何有限区间内,$f(t)$及 $f'(t)$除有有限个第一类间断点外,处处连续.

2) $f(t)$是指数增长型的. 即存在两个常数 $K>0$,$c\geqslant 0$,使得对所有的 $t\geqslant 0$,有

$$|f(t)|\leqslant Ke^{ct}, \tag{4}$$

这里,c 称为 $f(t)$的增长指数.

定理 若 $f(t)$满足条件 1)和 2),则像函数 $F(p)$在半平面 $\mathrm{Re}p>c$ 上有意义,而且是一个解析函数.

证 设 $p=\sigma+\mathrm{i}s$,由 $\mathrm{Re}p=\sigma>c$ 及$|e^{-pt}|=e^{-\sigma t}$,并利用不等式(4),得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f(t)e^{-pt}|\,dt&\leqslant\int_0^{+\infty}Ke^{-(\sigma-c)t}dt\\&=\frac{K}{\sigma-c},\end{aligned}\tag{5}$$

故拉氏积分(1)绝对收敛. 即在半平面 $\mathrm{Re}p>c$ 内,像函数 $F(p)$有意义.

其次,对任意 $\sigma_1>c$,在闭区域 $\mathrm{Re}p\geqslant\sigma_1$ 内,有

$$|f(t)e^{-pt}|\leqslant Ke^{-(\sigma_1-c)t},$$

且积分$\int_0^{+\infty}Ke^{-(\sigma_1-c)t}dt$ 收敛,故由比较判别法,积分(1)在 $\mathrm{Re}p\geqslant\sigma_1$ 内一致收敛(关于含复参变量的广义积分的一致收敛性概念及其比较判别法,与实参变量的情形完全相同,这里从略),从而$F(p)$在 $\mathrm{Re}p>\sigma_1$ 内解析. 再由 σ_1 的任意性,即知 $F(p)$是半平面 $\mathrm{Re}p>c$ 内的解析函数.

由(5)式立即得到下述结论:设 p 趋于无穷大,且 $\mathrm{Re}p=\sigma$ 无限增大,则像函数 $F(p)$趋于零,即

$$\lim_{\sigma\to+\infty}F(p)=0.$$

例 求 $L[e^{at}]$(a 为复常数).

解 因$|e^{at}|=e^{t\mathrm{Re}a}$,故 e^{at} 的增长指数为 $\mathrm{Re}a$. 由上述定理,$L[e^{at}]$在 p 平面上 $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}a$ 内解析,依定义,有

$$\begin{aligned}L[e^{at}]&=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-pt}dt\\&=\int_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}dt\\&=-\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\Big|_0^{+\infty}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p-a} \ (\mathrm{Re}p > \mathrm{Re}a),$$

或

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right] = \mathrm{e}^{at}.$$

特别地,令 $a=0$,得

$$L[h(t)] = \frac{1}{p},$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = h(t).$$

7.2 拉普拉斯变换的基本运算法则

为了计算函数的拉氏变换及拉氏逆变换,必须熟悉拉氏变换的一些基本运算法则. 在以下各法则中,均设本函数 $f(t)$,$g(t)$满足条件 1)和 2).

1) 线性关系

设 $L[f(t)]=F(p)$,$L[g(t)]=G(p)$,则对任意复常数 α,β,有

$$\begin{aligned} L[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \alpha F(p) + \beta G(p) \\ &= \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)]. \end{aligned}$$

这可以由定义直接得出. 上式写成逆变换式就是

$$\begin{aligned} L^{-1}[\alpha F(p) + \beta G(p)] &= \alpha f(t) + \beta g(t) \\ &= \alpha L^{-1}[F(p)] + \beta L^{-1}[G(p)]. \end{aligned}$$

这条法则虽然很简单,但许多基本的变换公式都是利用它推导出来的. 例如,由 $L[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{p-a}$及线性关系,得

$$\begin{aligned} L[\cos\omega t] &= L\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] + \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

同理

$$L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$L[\mathrm{ch}\,\omega t] = \frac{p}{p^2-\omega^2};$$

$$L[\mathrm{sh}\,\omega t] = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

2）相似定理

设 $L[f(t)]=F(p)$，则对任意常数 $a>0$，有

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

事实上，由定义便有

$$\begin{aligned} L[f(at)] &= \int_0^{+\infty} f(at)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\xi)\exp\left\{-\frac{p}{a}\xi\right\}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right). \end{aligned}$$

3）位移定理

设 $L[f(t)]=F(p)$，则对任意复常数 λ，有

$$L[\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)] = F(p-\lambda).$$

证 依定义，得

$$\begin{aligned} L[\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda t}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(p-\lambda)t}\,\mathrm{d}t \\ &= F(p-\lambda). \end{aligned}$$

利用位移定理及已求得的一些变换公式，可立即得到另一些变换公式. 例如，有

$$L[\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2};$$

$$L[e^{\lambda t}\cos\omega t] = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}.$$

4）像函数微分法

若 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$F'(p) = L[-tf(t)].$$

更一般地，对任意自然数 n，有

$$F^{(n)}(p) = L[(-1)^n t^n f(t)],$$

或

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p). \tag{1}$$

证 由 $|f(t)|\leqslant Ke^{ct}$（K，c 为正常数）易知，对任意 $\sigma>c$，存在常数 $K_1>0$，使对一切 $t\geqslant 0$，有

$$|tf(t)|\leqslant K_1 e^{\sigma t}.$$

由 σ 的任意性，知 $L[tf(t)]$在半平面 $\mathrm{Re}p>c$ 内存在. 在 7.1 节定理的证明中，已讲过积分

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

在 $\mathrm{Re}p\geqslant\sigma_1$（任意 $\sigma_1>c$）内一致收敛，把它在积分号下对参数 p 求导，即得

$$\begin{aligned} F'(p) &= \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= L[tf(t)]. \end{aligned}$$

由这个法则可以得到下列公式：

$$L[t\sin\omega t] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},$$

$$L[t\cos\omega t] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

在(1)式中，令 $f(t)=h(t)=1$，由 $L[h(t)]=\dfrac{1}{p}$得

$$\begin{aligned} L[t^n] &= (-1)^n\left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} \\ &= \frac{n!}{p^{n+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

这里,$\Gamma(x)$是Γ函数. 更一般地,可以证明(证明从略):当常数$m > -1$时,有

$$L[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}}.$$

特别地,有

$$L[\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p^3}},$$

$$L\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

再由位移定理,还可得

$$L[e^{\lambda t} t^n] = \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}} \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

例 1 求$L[t^2\cos^2 t]$.

解 $L[t^2\cos^2 t] = \frac{1}{2}L[t^2(1+\cos 2t)]$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4}\right)$$

$$= \frac{2(p^6+24p^2+32)}{p^3(p^2+4)^3}.$$

5)本函数微分法

设$L[f(t)] = F(p)$,$f'(t)$满足条件1)和2),则

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(+0).$$

证 由分部积分法,得

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt.$$

由于$\mathrm{Re}\,p = \sigma > c$,$|f(t)e^{-pt}| \leqslant Ke^{-(\sigma-c)t}$,故

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} = 0.$$

又

$$\lim_{t\to+0} f(t)e^{-pt} = f(+0),$$

所以

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(+0).$$

推论 若 $f(t),f'(t),\cdots,f^{(n)}(t)$都满足条件 1)和 2),则

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n L[f(t)] - p^{n-1}f(+0) - p^{n-2}f'(+0) - \cdots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0).$$

这个推论请读者自己用数学归纳法证明.

这条法则把本函数的微分运算化为像函数的代数运算,利用它可以解常微分方程.

例 2 解初始问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = \mathrm{e}^{-t}, \\ y\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解 设 $L[y(t)]=Y(p)$,对原方程两边作拉氏变换,并利用法则 1)及 5),得

$$\begin{aligned} L[y' + 2y] &= L[y'(t)] + 2L[y(t)] \\ &= pY - y(0) + 2Y \\ &= (p+2)Y \\ &= L[\mathrm{e}^{-t}] \\ &= \frac{1}{p+1}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}. \end{aligned}$$

再由逆变换的线性性及 $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p-a}\right]=\mathrm{e}^{at}$,得

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}[Y(p)] \\ &= L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] \\ &= \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

例 3 解初始问题

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y\big|_{t=0} = y'\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解 设 $L[y(t)]=Y(p)$,则

$$\begin{aligned}L[y''(t)] &= p^2Y - py(0) - y'(0) \\ &= p^2Y.\end{aligned}$$

故对原方程两边作拉氏变换,得

$$p^2Y + Y = L[t] = \frac{1}{p^2},$$

所以

$$\begin{aligned}Y(p) &= \frac{1}{p^2(p^2+1)} \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.\end{aligned}$$

再由 $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=t, L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right]=\sin t$,得

$$\begin{aligned}y(t) &= L^{-1}[Y(p)] \\ &= L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] \\ &= t - \sin t.\end{aligned}$$

由上面两例可知用拉氏变换求解微分方程的操作程序如下:

$$\begin{aligned}\text{微分方程} &\xrightarrow{L\text{ 变换}} \text{代数方程} \\ &\xrightarrow{\text{解方程}} \text{代数方程的解} \\ &\xrightarrow{L^{-1}\text{变换}} \text{初始问题的解}\end{aligned}$$

把上述方法与通常的线性常微分方程初始问题的求解步骤相比较,这里的方法要简捷得多.因为在作拉氏变换的过程中,不仅把求导数的运算化成代数运算,因而把微分方程化成了代数方程,而且还把初始条件也包括了进去,这就省掉了由初始值定解的一步.同时,在作变换时非齐次项也一起处理掉了,因此也就毋需求齐次方程的通解和相应非齐次方程的特解.

6)本函数积分法

设 $L[f(t)]=F(p)$,则

$$L\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

证　记 $\varphi(t)=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$，则 $\varphi'(t)=f(t)$. 由本函数微分法，有

$$\begin{aligned} L[\varphi'(t)] &= pL[\varphi(t)]-\varphi(0) \\ &= pL[\varphi(t)]. \end{aligned}$$

又

$$L[\varphi'(t)]=L[f(t)]=F(p),$$

所以

$$L\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(p)}{p}.$$

例 4　设 R,C,E 为正常数，求解积分方程（这个方程来自电路理论）

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t=E\ (t\geqslant 0).$$

解　设 $L[i(t)]=I(p)$，对方程两端作拉氏变换，由法则 6)，得

$$RI+\frac{I}{Cp}=\frac{E}{p},$$

解得

$$I(p)=\frac{E}{R\left(p+\frac{1}{CR}\right)}.$$

再作逆变换，得

$$\begin{aligned} i(t) &= L^{-1}[I(p)] \\ &= \frac{E}{R}L^{-1}\left[\frac{1}{p+\frac{1}{CR}}\right] \\ &= \frac{E}{R}\exp\left\{-\frac{t}{CR}\right\}. \end{aligned}$$

7）延迟定理

在实际研究某些过程时，常要将函数 $f(t)$ 延迟一个时刻 τ（$\tau>0$），即研究函数

$$f(t-\tau)=\begin{cases} f(t-\tau) & (t\geqslant\tau) \\ 0 & (t<\tau), \end{cases}$$

或

$$f(t-\tau)=f(t-\tau)h(t-\tau).$$

这个函数从 $t=\tau$ 开始才有非零数值，它常用来描述从时刻 $t=\tau$ 开始的过程. 从图形上讲，$f(t-\tau)$的图像是由 $f(t)$的图像沿 t 轴向右平移 τ 个单位而得的(见图 7.1).

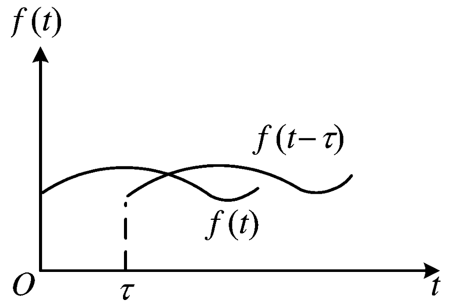


图 7.1

定理 1(延迟定理)　设 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p).$$

证　由定义，得

$$L[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty}f(t-\tau)e^{-pt}\,dt$$

$$=\int_\tau^{+\infty}f(t-\tau)e^{-pt}\,dt.$$

作变量替换 $t_1=t-\tau$，得

$$L[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty}f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}\,dt_1$$

$$=e^{-p\tau}F(p).$$

利用延迟定理求某些脉冲波形的像函数是很方便的.

例 5　求图 7.2 所示波形的像函数.

解　已给波形的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ t & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ 1 & (t>1),\end{cases}$$

如直接用定义来计算像函数，需把积分分两段来计算. 但我们可以把已给波形看成是由图 7.3 中用虚线表示的两个波形相减而得，即

$$f(t)=th(t)-(t-1)h(t-1),$$

其中，第二个虚线所示的波形是第一个波形延迟了一个单位. 已知

$$L[t]=L[th(t)]=\frac{1}{p^2},$$

故由延迟定理得

$$L[(t-1)h(t-1)]=e^{-p}\frac{1}{p^2}.$$

所以

$$L[f(t)] = \frac{1}{p^2}(1 - \mathrm{e}^{-p}).$$

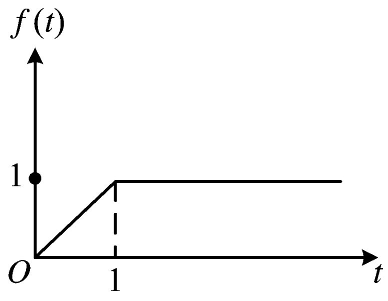


图 7.2

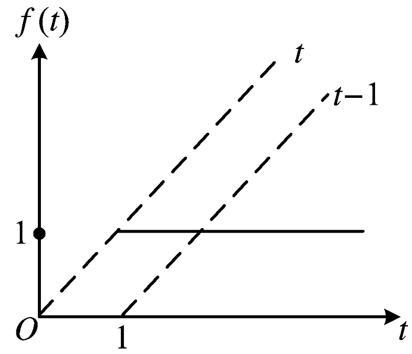


图 7.3

例 6 求阶梯函数(图 7.4)

$$K(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E & (0 \leqslant t < \tau) \\ 2E & (\tau \leqslant t < 2\tau) \\ \cdots & \cdots \\ nE & ((n-1)\tau \leqslant t < n\tau) \\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

的像函数.

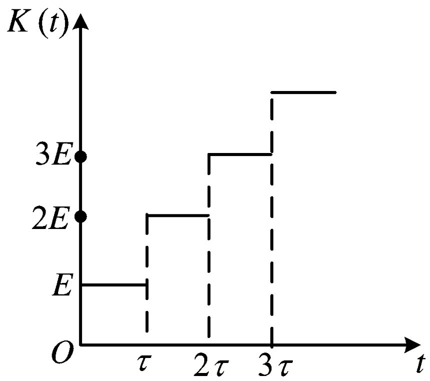


图 7.4

解 由图 7.4 可知阶梯函数的表达式为

$$K(t) = E[h(t) + h(t-\tau) + h(t-2\tau) + \cdots + h(t-n\tau) + \cdots].$$

因 $L[h(t)] = \dfrac{1}{p}$,故

$$L[h(t-n\tau)] = \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-n\tau p} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

所以

$$L[K(t)] = \frac{E}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-p\tau})^n.$$

因 $|\mathrm{e}^{-p\tau}| = \exp\{-\mathrm{Re}\,p\}$,取 $\mathrm{Re}\,p > 0$,即得 $|\mathrm{e}^{-p\tau}| < 1$. 从而

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-p\tau})^n=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-p\tau}},$$

所以

$$L[K(t)]=\frac{E}{p(1-\mathrm{e}^{-p\tau})}.$$

8）卷积

定义 如果已知函数 $f(x)$及 $g(x)$，则含参变量的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

称为函数 $f(x)$和 $g(x)$的卷积，记为 $f*g$.

容易证明，卷积满足下列运算法则：

（1）$f*g=g*f$（交换律）；

（2）$f*(g_1*g_2)=(f*g_1)*g_2$（结合律）；

（3）$f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$（分配律）.

对于拉氏变换中的本函数 $f(t)$及 $g(t)$，其卷积成为

$$f(t)*g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau & (t\geqslant 0).\end{cases}$$

事实上，由于当 $t<0$ 时 $f(t)=g(t)=0$，故当 $t\geqslant 0$ 时，有

$$\begin{aligned}f(t)*g(t)&=\int_{-\infty}^{0}f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\quad+\int_t^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

又显然，当 $t<0$ 时，有

$$f(t)*g(t)=0.$$

定理 2（卷积定理） 设 $L[f(t)]=F(p)$，$L[g(t)]=G(p)$，则

$$L[f*g]=F(p)G(p),$$

或

$$L^{-1}[F(p)G(p)]=f*g.$$

证 设 $f(t)$，$g(t)$的增长指数分别为 c_1，c_2，取 $c=\max(c_1,c_2)$，

则

$$\left|\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant M\int_0^t \mathrm{e}^{c(t-\tau)}\mathrm{e}^{c\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant Mt\,\mathrm{e}^{ct}$$
$$\leqslant M_1\mathrm{e}^{(c+\varepsilon)t},$$

式中,M 及 M_1 都是正常数,ε 为任意正数. 这说明 $f*g$ 也是指数增长型的,因而 $L[f*g]$在 $\mathrm{Re}p>c$ 内存在(因 ε 是任意的). 依定义,有

$$L[f*g]=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

这个积分可以看成是 $t\tau$ 平面内的区域 D:$t\geqslant\tau$,$0\leqslant t<+\infty$(图 7.5)上的二重积分,由于积分绝对可积,故可交换积分次序,得

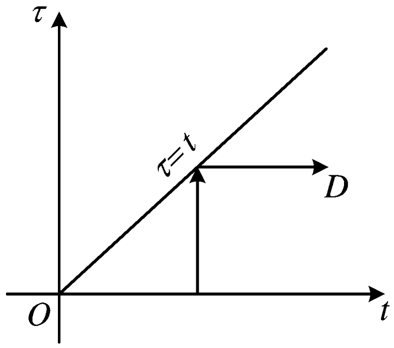


图 7.5

$$L[f*g]=\int_0^{+\infty}g(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau.$$

令 $t-\tau=u$,得

$$\int_\tau^{+\infty}f(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-p(\tau+u)}\mathrm{d}u,$$

所以

$$L[f*g]=\int_0^{+\infty}g(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{d}u$$
$$=F(p)G(p).$$

卷积定理的一个重要应用是求乘积的逆变换,这在后面的数学物理方程中将用到.

例 7 求 $L^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}\right]$ $(a>0)$.

解 已知 $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right]=1$,$L^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$,故由位移定理得

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p+a}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-at}.$$

再由卷积定理,有

$$L^{-1}\left[\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}\right]=\sqrt{a}\left(1*\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-at}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}\mathrm{e}^{-a\tau}\mathrm{d}\tau.$$

令 $a\tau=x^2$,便得

$$L^{-1}\left[\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{at}}\exp\{-x^2\}\mathrm{d}x.$$

由积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\exp\{-\xi^2\}\mathrm{d}\xi$ 所定义的函数是一个重要的特殊函数,叫做概率积分或误差函数,记作 $\mathrm{erf}(x)$,它有专门的表可查值.于是

$$L^{-1}\left[\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}\right]=\mathrm{erf}(\sqrt{at}),$$

这就是附表 7.2 中的公式 53.

拉氏变换还有许多重要性质,只把它们一一罗列在附表 7.1(基本法则表)中,这里就不讲了.在实际计算中要善于用表,这种表在各种数学手册中都有.例如,要求 $L[|\sin\omega t|]$,由于 $|\sin\omega t|$ 有周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$,可用附表 7.1 中的公式 15 计算,也可在附表 7.2 的公式 27 中查到.

7.3 拉普拉斯变换的反演公式

前一节着重讲了如何用拉氏变换的运算法则由本函数求像函数,本节讨论其反问题——由像函数求本函数,这个问题在 7.2 节的例 2 及例 3 中已遇到.

定理 1 设 $f(t)$满足条件 1)和 2),$L[f(t)]=F(p)$,则对任意取定的 $\sigma>c$,在 $f(t)$的连续点处,有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p,$$

上式右端的积分是沿自下而上的直线 $\mathrm{Re}p=\sigma$ 进行的.

证 令 $p=\sigma+\mathrm{i}s$,由拉氏变换与傅氏变换的关系,有

$$\begin{aligned}F(p)&=L[f(t)]\\&=F[f(t)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

于是,由傅氏变换的反演公式,在 $f(t)$ 的连续点处,有

$$f(t)h(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}s,$$

或

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}s.$$

当 s 沿实数轴从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时,$p=\sigma+\mathrm{i}s$ 就在直线 $\mathrm{Re}p=\sigma$ 上从 $\sigma-\mathrm{i}\infty$ 变到 $\sigma+\mathrm{i}\infty$. 再注意到 $\mathrm{d}p=\mathrm{i}\mathrm{d}s$,即得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

这个公式叫做傅里叶-梅林(Fourier-Millin)公式. 下面的定理进一步给出了用留数计算本函数的方法.

定理 2 设 $F(p)$ 除在左半平面 $\mathrm{Re}p<\sigma$ $(\sigma>c)$ 内有奇点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 外在 p 平面内处处解析,且 $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$,则

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k].\quad(1)$$

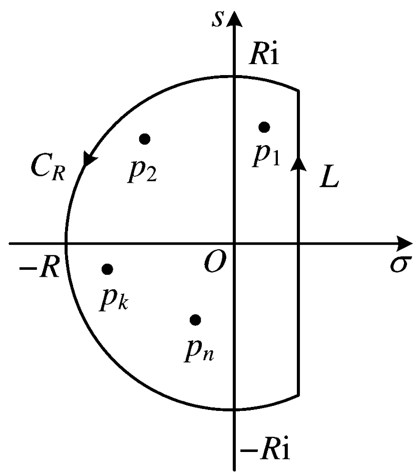


图 7.6

证 取闭路 $C=L+C_R$ (图 7.6),当 R 充分大时,可使所有点 p_k $(k=1,2,\cdots)$ 都在闭路 C 内. 因 p_k 即是 $F(p)$ 的全部有限奇点,故由留数定理,有

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k]=\int_{C}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$

$$= \int_{C_R} F(p)e^{pt}\,dp + \int_L F(p)e^{pt}\,dp. \tag{2}$$

令 $p=iz$,即可由若尔当引理得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(p)e^{pt}\,dp = 0.$$

于是,在(2)式两边令 $R\to+\infty$取极限,得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[F(p)e^{pt},p_k],$$

即

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[F(p)e^{pt},p_k].$$

如果 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$是不可约有理真分式,由于 $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$,故可用公式(1)来求本函数 $f(t)$,而且 $F(p)e^{pt}$在极点的留数很容易计算. 在实际计算中,$A(p)$,$B(p)$常是实系数多项式,若非实的复数 a 是$B(p)$的 1 级零点,则 $\bar{a}$ 也是$B(p)$的 1 级零点,即 a,$\bar{a}$ 都是$F(p)e^{pt}$的 1 级极点. 这时,公式(1)中,$F(p)e^{pt}$在极点 a 及 $\bar{a}$ 的留数和

$$\begin{aligned}&\operatorname{Res}[F(p)e^{pt},a]+\operatorname{Res}[F(p)e^{pt},\bar{a}]\\ &= 2\operatorname{Re}\{\operatorname{Res}[F(p)e^{pt},a]\}.\end{aligned} \tag{3}$$

事实上,易知 $e^{\bar{a}t}=\overline{e^{at}}$. 于是依 1 级极点的留数公式,有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[F(p)e^{pt},\bar{a}]&=\frac{A(\bar{a})}{B'(\bar{a})}e^{\bar{a}t}\\ &=\overline{\frac{A(a)}{B'(a)}e^{at}}\\ &=\overline{\operatorname{Res}[F(p)e^{pt},a]},\end{aligned}$$

故(3)式成立.

例 1 求 $F(p)=\dfrac{p+7}{p^3+p^2+3p-5}$的本函数 $f(t)$.

解法 1 分母

$$\begin{aligned} B(p) &= p^3+p^2+3p-5 \\ &= (p-1)(p^2+2p+5) \end{aligned}$$

有 3 个单零点：1 及 $-1\pm 2\mathrm{i}$，它们都是 $F(p)\mathrm{e}^{pt}$ 的 1 级极点. 因 $B'(p)=3p^2+2p+3$，所以，由公式(1)及(3)，得

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}[F(p)\mathrm{e}^{pt},1]+2\operatorname{Re}\{\operatorname{Res}[F(p)\mathrm{e}^{pt},-1+2\mathrm{i}]\} \\ &= \left.\frac{(p+7)\mathrm{e}^{pt}}{3p^2+2p+3}\right|_{p=1}+2\operatorname{Re}\left[\left.\frac{(p+7)\mathrm{e}^{pt}}{3p^2+2p+3}\right|_{p=-1+2\mathrm{i}}\right] \\ &= \mathrm{e}^t+2\operatorname{Re}\left[\frac{-2+\mathrm{i}}{4}\mathrm{e}^{-t}(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)\right] \\ &= \mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right). \end{aligned}$$

解法 2 用部分分式法，即把有理真分式分解成一些最简分式的和. 设

$$F(p)=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+5},$$

消去分母，得

$$p+7=A(p^2+2p+5)+(Bp+C)(p-1).$$

令 $p=1$，得 $8=8A$，即 $A=1$. 将 A 的值代入上式并移项，得

$$-p^2-p+2=(Bp+C)(p-1).$$

比较两边 p^2 的系数，得 $B=-1$. 再比较两边的常数项，得 $C=-2$. 从而

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p-1}-\frac{p+2}{p^2+2p+5} \\ &= \frac{1}{p-1}-\frac{(p+1)+1}{(p+1)^2+2^2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(p)] \\ &= L^{-1}\left[\frac{1}{p-1}\right]-L^{-1}\left[\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\right] \\ &= \mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right). \end{aligned}$$

例 2 求 $f(t)=L^{-1}\left[\dfrac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}\right]$.

解 由于 $p=-1$ 及 $p=-3$ 分别是 $F(p)=\dfrac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}e^{pt}$ 的 1 级极点和 3 级极点，于是

$$\begin{aligned}f(t) &= \operatorname{Res}[F(p),-1]+\operatorname{Res}[F(p),-3]\\ &=\lim_{p\to-1}\frac{2p^2+3p+3}{(p+3)^3}e^{pt}\\ &\quad+\lim_{p\to-3}\frac{1}{3}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{2p^2+3p+3}{p+1}e^{pt}\right)\\ &=\frac{1}{4}e^{-t}+\left(-3t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}\right)e^{-3t}.\end{aligned}$$

上面已见到求有理真分式的本函数有两种方法，具体计算时，哪种方法方便就用哪种. 在实际计算时，还要善于使用变换表.

例 3 求 $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ $(a^2\neq b^2)$的本函数 $f(t)$.

解 由观察易得

$$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{p^2+a^2}-\frac{1}{p^2+b^2}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{b^2-a^2}\left(L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+a^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+b^2}\right]\right)\\ &=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt\right).\end{aligned}$$

例 4 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-x-2y=t,\\ -2x+\dfrac{dy}{dt}-y=t,\\ x(0)=2,\ y(0)=4.\end{cases}$$

解 作拉氏变换 $X(p)=L[x(t)]$,$Y(p)=L[y(t)]$,则

$$L\left[\frac{dx}{dt}\right]=pX(p)-2,$$

$$L\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]=pY(p)-4.$$

又

$$L[t]=\frac{1}{p^2},$$

于是原方程组变换为

$$\begin{cases}(p-1)X-2Y=\dfrac{1}{p^2}+2, & (4)\\ -2X+(p-1)Y=\dfrac{1}{p^2}+4. & (5)\end{cases}$$

将方程式(4)与(5)相加,得

$$(p-3)(X+Y)=\frac{2}{p^2}+6,$$

即

$$X+Y=\frac{6p^2+2}{p^2(p-3)}.$$

将方程式(4)与(5)相减,得

$$(p+1)(X-Y)=-2,$$

即

$$X-Y=-\frac{2}{p+1}.$$

于是,求得

$$X=\frac{3p^2+1}{p^2(p-3)}-\frac{1}{p+1},$$

$$Y=\frac{3p^2+1}{p^2(p-3)}+\frac{1}{p+1}.$$

最后得

$$\begin{aligned}x(t)&=L^{-1}[X(p)]\\&=L^{-1}\left[\frac{3p^2+1}{p^2(p-3)}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]\\&=\frac{3p^2+1}{p^2}\mathrm{e}^{pt}\Big|_{p=3}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{3p^2+1}{p-3}\mathrm{e}^{pt}\right)\Big|_{p=0}-\mathrm{e}^{-t}\\&=\frac{28}{9}\mathrm{e}^{3t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}-\mathrm{e}^{-t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(t)&=L^{-1}[Y(p)]\\&=L^{-1}\left[\frac{3p^2+1}{p^2(p-3)}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]\\&=\frac{28}{9}e^{3t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}+e^{-t}.\end{aligned}$$

有时还会遇到求形如 $F(p)e^{-p\tau}$ $(\tau>0)$的像函数的本函数，这只要用延迟定理即可求得. 即若 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$L^{-1}[F(p)e^{-p\tau}]=h(t-\tau)f(t-\tau).$$

例 5 求 $L^{-1}\left[\frac{1-e^{-4p}}{p^2-2}\right]$.

解 因为

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2-2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\sqrt{2}t,$$

故

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\frac{1-e^{-4p}}{p^2-2}\right]&=\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{sh}\sqrt{2}t-h(t-4)\mathrm{sh}\sqrt{2}(t-4)]\\&=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\sqrt{2}t & (0\leqslant t<4)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{sh}\sqrt{2}t-\mathrm{sh}\sqrt{2}(t-4)] & (4\leqslant t).\end{cases}\end{aligned}$$

附表 7.1 拉普拉斯变换基本法则表

序号	$f(t)$	$F(p)$
1	$f(t)$	$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$
2	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha F(p)+\beta G(p)$
3	$f'(t)$	$pF(p)-f(+0)$
4	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\cdots-f^{(n-1)}(+0)$
5	$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(p)}{p}$

续表

序号	$f(t)$	$F(p)$
6	$\int_0^t \mathrm{d}r \int_0^r f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$	$\dfrac{F(p)}{p^2}$
7	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \equiv f * g$	$F(p)G(p)$
8	$tf(t)$	$-F'(p)$
9	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
10	$\dfrac{1}{t}f(t)$	$\int_p^{+\infty} F(p)\mathrm{d}p$
11	$\mathrm{e}^{at} f(t)$	$F(p-a)$
12	$f(t-\tau)$ ($t<\tau$ 时 $f(t)=0$，$\tau>0$)	$\mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$
13	$\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$ $(a>0)$	$F(ap)$
14	$\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{\frac{b}{a}t}f\left(\dfrac{t}{a}\right)$ $(a>0)$	$F(ap-b)$
15	$f(t)$ (周期为 T，$f(t+T)=f(t)$)	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\int_0^T \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$
16	$f(t)$ ($f(t+T)=-f(t)$)	$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-pT}}\int_0^T \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$

附表 7.2　拉普拉斯变换表

序号	$F(p)$	$f(t)$
1	$\dfrac{1}{p}$	1
2	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!}$ $(n=0,1,2,\cdots)$
3	$\dfrac{1}{p^{\alpha+1}}$	$\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ $(\alpha>-1)$
4	$\dfrac{1}{p-\lambda}$	$\mathrm{e}^{\lambda t}$

续表

序号	$F(p)$	$f(t)$
5	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
6	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
7	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\mathrm{sh}\,\omega t$
8	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	$\mathrm{ch}\,\omega t$
9	$\dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\sin\omega t$
10	$\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\cos\omega t$
11	$\dfrac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega}\sin\omega t$
12	$\dfrac{\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$
13	$\dfrac{1}{p^3+\omega^3}$	$\dfrac{1}{3\omega^2}\left[e^{-\omega t}+e^{\frac{1}{2}\omega t}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega t-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right)\right]$
14	$\dfrac{p}{p^3+\omega^3}$	$\dfrac{1}{3\omega}\left[-e^{\omega t}+e^{\frac{1}{2}\omega t}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right)\right]$
15	$\dfrac{p^2}{p^3+\omega^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-\omega t}+2e^{\frac{1}{2}\omega t}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right)$
16	$\dfrac{1}{p^4+4\omega^4}$	$\dfrac{1}{3\omega^3}(\sin\omega t\,\mathrm{ch}\,\omega t-\cos\omega t\,\mathrm{sh}\,\omega t)$
17	$\dfrac{p}{p^4+4\omega^4}$	$\dfrac{1}{2\omega^2}\sin\omega t\,\mathrm{sh}\,\omega t$
18	$\dfrac{p^2}{p^4+4\omega^4}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin\omega t\,\mathrm{ch}\,\omega t+\cos\omega t\,\mathrm{sh}\,\omega t)$

序号	$F(p)$	$f(t)$
19	$\dfrac{p^3}{p^4+4\omega^4}$	$\cos\omega t\,\mathrm{ch}\,\omega t$
20	$\dfrac{1}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\mathrm{sh}\,\omega t-\sin\omega t)$
21	$\dfrac{p}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2\omega^2}(\mathrm{ch}\,\omega t-\cos\omega t)$
22	$\dfrac{p^2}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\mathrm{sh}\,\omega t+\sin\omega t)$
23	$\dfrac{p^3}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\omega t+\cos\omega t)$
24	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}\ (a\neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}(\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt})$
25	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)}\ (a\neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}(a\mathrm{e}^{at}-b\mathrm{e}^{bt})$
26	$\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{p-1}{p}\right)^n$	$L_n(t)\equiv\dfrac{\mathrm{e}^t}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n\mathrm{e}^{-t})$
27	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\mathrm{cth}\dfrac{p\pi}{2\omega}$	$\lvert\sin\omega t\rvert$
28	$\dfrac{p}{(p-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{at}(1+2at)$
29	$\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(\mathrm{e}^{bt}-\mathrm{e}^{at})$
30	$\dfrac{1}{(p+\lambda)^{\nu+1}}$	$\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{\nu}\ (\nu>-1)$
31	1	$\delta(t)^{*}$
32	e^{-ap}	$\delta(t-a)$
33	p	$\delta'(t)\equiv\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\delta(t)-\delta(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$ （偶极子）
34	$p\mathrm{e}^{-ap}$	$\delta'(t-a)$
35	$\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}$

续表

序号	$F(p)$	$f(t)$
36	$\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$
37	$\dfrac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\dfrac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
38	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{p}}\right)^{*}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$
39	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4a^2}}\operatorname{erf}\left(\dfrac{p}{2a}\right)$	$e^{-a^2t^2}$
40	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}$
41	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$
42	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\dfrac{1}{2t}$
43	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\dfrac{1}{2t}$
44	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\omega^2}-p}{p^2+\omega^2}}$	$\sqrt{\dfrac{1}{\pi t}}\cos\omega t$
45	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\omega^2}+p}{p^2+\omega^2}}$	$\sqrt{\dfrac{1}{\omega t}}\cos\omega t$
46	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}(\sqrt{p^2+\alpha^2}+p)^{\nu}}$	$\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}J_{\nu}(\alpha t)^{*}\quad(\nu>0)$
47	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}(\sqrt{p^2+\alpha^2}+p)^{\nu}}$	$\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}I_{\nu}(\alpha t)^{*}\quad(\nu>0)$
48	$\dfrac{1}{\nu\alpha^{\nu}}(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^{\nu}$	$\dfrac{I_{\nu}(\alpha t)}{t}\quad(\nu>0)$
49	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{(p^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}}$	$t^{\nu}J_{\nu}(t)\ \left(\nu>-\dfrac{1}{2}\right)$
50	$\dfrac{1}{p^{\nu+1}}e^{-\frac{1}{p}}$	$t^{\frac{\nu}{2}}J_{\nu}(2\sqrt{t})\ (\nu>-1)$

序号	$F(p)$	$f(t)$
51	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2p}}\mathrm{I}_n\left(\frac{1}{2p}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{J}_{2n}(2\sqrt{t})$
52	$\frac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}\mathrm{e}^{-\tau\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$\mathrm{J}_0(\alpha\sqrt{t^2-\tau^2})h(t-\tau)$
53	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$	$\mathrm{erf}(\sqrt{at})$
54	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}$	$\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^*$
55	$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$	$\mathrm{e}^t\,\mathrm{erf}(\sqrt{t})$
56	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-\mathrm{e}^t\,\mathrm{erf}(\sqrt{t})$
57	$\frac{\sqrt{p+a}}{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-at}+\sqrt{a}\,\mathrm{erf}(\sqrt{at})$
58	$\frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\mathrm{arctg}p}{p}\right)$	$\mathrm{Si}(t)^*$
59	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$\mathrm{Ci}(t)^*$
60	$\frac{1}{p}\ln(1+p)$	$-\mathrm{Ei}(-t)^*$
61	$\frac{1}{p}\ln(p+\sqrt{1+p^2})$	$\int_t^{+\infty}\frac{\mathrm{J}_0(t)}{t}\mathrm{d}t$
62	$\ln\frac{p-a}{p-b}$	$\frac{\mathrm{e}^{bt}-\mathrm{e}^{at}}{t}$

表中标有星号（*）的各特殊函数定义如下：

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0)\\ +\infty & (x=0),\end{cases}\ \text{且}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1,$$

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$$\mathrm{I}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$$\mathrm{Si}(t)=\int_0^t\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Ci}(t)=\int_{-\infty}^t\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Ei}(t)=\int_{-\infty}^t\frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x.$$

习　　题

1. 求下列函数的像函数(各题中,a,b,ω,φ 均为常数):

(1) $\frac{1}{2}\sin 2t+\cos 3t$;

(2) $\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-2t}$;

(3) $1-\mathrm{e}^{at}$;

(4) $\frac{1}{a-b}(a\mathrm{e}^{at}-b\mathrm{e}^{bt})$ $(a\neq b)$;

(5) $\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\sin bt)$ $(a\neq b)$;

(6) $\frac{1}{a^2}(at-\sin at)$;

(7) $\mathrm{e}^{-2t}\sin 5t$;

(8) $\mathrm{e}^{-(3+4\mathrm{i})t}$;

(9) $t\mathrm{e}^{5t}$;

(10) $\mathrm{ch}\,\omega t$;

(11) $\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t+\varphi)$;

(12) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t)$;

(13) $t^2\mathrm{e}^t$;

(14) $\int_0^t t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$;

(15) $\int_0^t \sin 2x \operatorname{sh}(t-\tau)\mathrm{d}x$；

(16) $\int_0^t (t-\tau)^n \mathrm{e}^{-\alpha\tau}\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$；

(17) $\cos\omega(t-\varphi)h(t-\varphi)$；

(18) $\cos\omega(t-\varphi)h(t-2\varphi)$.

2. 画出下列函数的图形，并求其像函数：

(1) $h(t)\sin\omega(t-\varphi)$；

(2) $h(t)\sin(\omega t-\varphi)$；

(3) $h(t-\varphi)\sin\omega t$；

(4) $h(t-\varphi)\sin\omega(t-\varphi)$.

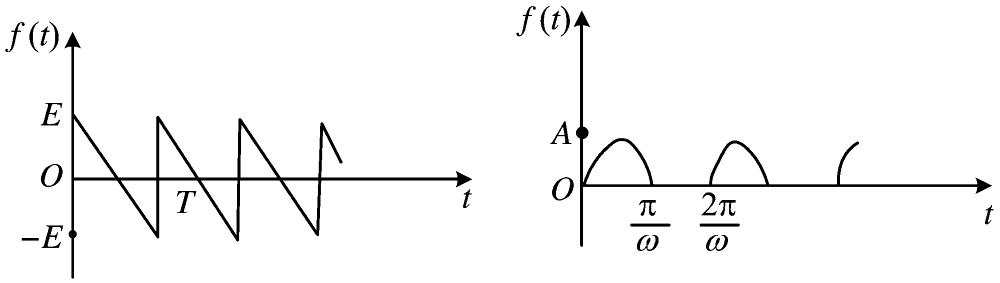
3. 设 $K(t)=h(t)+h(t-1)+h(t-2)+\cdots$（阶梯函数）.

(1) 绘出前向锯齿波 $t-K(t-1)$ 的图形，并求其像函数；

(2) 绘出后向锯齿波 $K(t)-t$ 的图形，并求其像函数.

4. 求图 7.7 所示的两个周期信号的像函数.

［**提示**：用附表 7.1 中的公式 15 计算.］



(a) 锯齿波　　(b) 半波整流函数

图 7.7

5. 设 $L[f(t)]=F(p)$，证明：

$$L[f(t)\sin\omega t]=\frac{1}{2\mathrm{i}}[F(p-\mathrm{i}\omega)-F(p+\mathrm{i}\omega)].$$

6. 求下列像函数的本函数：

(1) $\dfrac{1}{(p+3)(p+1)}$；

(2) $\dfrac{1-p}{p^3+p^2+p+1}$;

(3) $\dfrac{p+2}{p^2+4p+5}$;

(4) $\dfrac{1}{p(p+a)}$;

(5) $\dfrac{1}{p(p-1)(p-2)}$;

(6) $\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+3)}$;

(7) $\dfrac{1}{p(p-2)(p^2+1)}$;

(8) $\dfrac{1}{p(p-2)^2}$;

(9) $\dfrac{p+3}{p^3+3p^2+6p+4}$;

(10) $\dfrac{p}{p^4+3p^2-4}$;

(11) $\dfrac{1}{p^4-3p^3+3p^2-p}$;

(12) $\dfrac{a^2 p}{p^4+a^4}$;

(13) $\dfrac{p^3}{p^4+a^4}$;

(14) $\dfrac{1}{(p+1)^4}$;

(15) $\dfrac{p-1}{(p^2-2p+2)^2}$;

(16) $\dfrac{3p+7}{p^2+2p+1+a^2}$;

(17) $\dfrac{p+2}{p^2+1}\mathrm{e}^{-p}$;

(18) $\dfrac{1-p}{(p+1)(p^2+1)}\mathrm{e}^{-10p}$;

(19) $\dfrac{1}{p}(1-\mathrm{e}^{-3p})$；

(20) $\dfrac{p}{(p^2+1)(1-\mathrm{e}^{-\pi p})}$.

7. 利用拉氏变换求解下列微分方程：

(1) $\begin{cases} y''(t)+y'(t)=1, \\ y(0)=y'(0)=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y''(t)-y'(t)=\mathrm{e}^t, \\ y(0)=y'(0)=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y''-(a+b)y'+aby=0\ (a\neq b), \\ y(0)=0,\ y'(0)=1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y''-2y'+y=t\mathrm{e}^t, \\ y(0)=y'(0)=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y''-y=4\sin t+5\cos 2t, \\ y(0)=-1,\ y'(0)=-2; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} y''-y=\begin{cases} t & (0\leqslant t\leqslant 1) \\ 1 & (t>1), \end{cases} \\ y(0)=0,\ y'(0)=0; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y'''+3y''+3y'+y=6\mathrm{e}^{-t}, \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0; \end{cases}$

(8) $\begin{cases} y'+x'=4y+1, \\ y'+x=3y+t^2, \\ y(0)=a,\ x(0)=b; \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x'-2y'=\sin t, \\ x'+y'=\cos t, \\ x(0)=0,\ y(0)=1; \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x'-y'=0, \\ y'+z'=1, \\ x'-z'=t, \\ x(0)=y(0)=z(0)=0. \end{cases}$

8. 证明方程$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 y=f(t)$在初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 下的解为

$$y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(u)\sin\omega(t-u)\mathrm{d}u.$$

9. 解积分方程

$$f(t)=a\sin bt+c\int_0^t \sin b(t-u)f(u)\mathrm{d}u\ (b>c>0).$$