Fourier级数

周期为 $2l$ 且满足Dirchilet条件的函数有Fourier级数表示：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

其中：$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \\ b_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \end{cases}$

代入 $\cos\frac{k\pi x}{l}=\frac{e^{\frac{k\pi x}{l}i}+e^{-\frac{k\pi x}{l}i}}{2}$，$\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{e^{\frac{k\pi x}{l}i}-e^{-\frac{k\pi x}{l}i}}{2i}$ 得：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}$$

其中：$\begin{cases} c_k=\dfrac{a_k-ib_k}{2} \\ c_{-k}=\dfrac{a_k+ib_k}{2} \end{cases}$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi}{l}}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi}{l}}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}$$

其中：

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx-\frac{i}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{l}-i\sin\frac{k\pi x}{l}\right)dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}dx\quad(k=1,2,\cdots)$$

同理： $c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{i\frac{k\pi x}{l}}dx\quad(k=0,-1,-2,\cdots)$

由此可得周期函数Fourier级数的复数表示形式：

$$\begin{cases} f(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}} \\ c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}\mathrm{d}x\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots) \end{cases}$$

视非周期函数为周期为$2l \to +\infty$的周期函数，有：

$$\begin{cases} f(x) = \lim\limits_{l\to\infty} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}} \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \\ c_k = \dfrac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{k\pi x}{l}} dx \end{cases}$$

令：$\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$，$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \dfrac{\pi}{l}$，则上式变为：$\begin{cases} f(x) = \lim\limits_{l\to\infty} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{i\omega_k x} \\ c_k = \dfrac{\Delta\omega_k}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(x) \mathrm{e}^{-i\omega_k x} \mathrm{d}x \end{cases}$

注意到：$\lim\limits_{l\to\infty} \Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \dfrac{\pi}{l} \to 0$

设 $\lim\limits_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} f(x) dx$ 有限，则非周期函数 $f(x)$ 可表示为：

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Delta\omega_k}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(\xi) e^{-i\omega_k \xi} d\xi \right] e^{i\omega_k x} = \frac{1}{2\pi} \lim_{l\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_l(\omega_k) e^{i\omega_k x} \Delta\omega_k$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{l\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_l(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right] e^{i\omega x} d\omega$$

Fourier变换

定义： 如果函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上任何有限区间上逐段光滑，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 存在，则：

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}f(x)\,dx$$

称为 $f(x)$ 的**Fourier变换**， 记为 $g(\lambda)=\mathscr{F}[f]$；

若 $g(\lambda)$ 也具有同样的性质，则：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}g(\lambda)\,d\lambda$$

称为 $g(\lambda)$ 的反**Fourier变换**， 记为 $f(x)=\mathscr{F}^{-1}[g]$.

变化与反变换

Theorem：若 $f(x)$ 连续且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 存在，则有反演公式：

$$\begin{cases} g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx \\ f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} g(\lambda)d\lambda \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f(x)=\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}[f(x)]\right] \\ g(\lambda)=\mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}[g(\lambda)]\right] \end{cases}$$

Fourier变换和反变换的性质

（1）**线性：** α,β 为任意常数.

$$\begin{cases} \mathscr{F}[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]=\alpha\mathscr{F}[f_1(x)]+\beta\mathscr{F}[f_2(x)] \\ \mathscr{F}^{-1}[\alpha g_1(\lambda)+\beta g_2(\lambda)]=\alpha\mathscr{F}^{-1}[g_1(\lambda)]+\beta\mathscr{F}^{-1}[g_2(\lambda)] \end{cases}$$

（2）**位移特性：**

$$\begin{cases} \mathrm{F}[f(x\pm x_0)]=e^{\mp i\lambda x_0}\mathrm{F}[f(x)] \\ \mathrm{F}\left[e^{\pm i\lambda_0 x}f(x)\right]=\mathrm{F}[f(x)]\big|_{\lambda\pm\lambda_0} \end{cases}$$

注意：有些材料上将Fourier变换与反变换定义为：

$$\begin{cases} g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}f(x)\,dx \\ f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}g(\lambda)\,d\lambda \end{cases}$$

时，性质和计算表达式会略有不同.

（3）**伸缩性质：**

$$\mathscr{F}[f(ax)]=\frac{1}{|a|}\mathscr{F}[f]\Big|_{\frac{\lambda}{a}},\quad a\neq 0.$$

(4) **微分性质**：设 $f^{(n)}(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续或只存在有限个可去间断点. 如果当 $|t|\to+\infty$ 时，$f^{(k)}(t)\to 0\ \ (0\le k\le n-1)$, 则

$$\mathrm{F}\left[f^{(n)}(x)\right]=(-i\lambda)^n\mathrm{F}[f(x)].$$

(5) **积分性质**：当 $x\to+\infty$时，$\int_{-\infty}^{x}f(\tau)\mathrm{d}\tau\to 0$, 则

$$\mathrm{F}\left[\int_{-\infty}^{x}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{-i\lambda}\mathrm{F}[f(x)].$$

(6) **乘多项式**：

$$\mathrm{F}\left[x^n f(x)\right]=(-i)^n\left(\mathrm{F}[f(x)]\right)^{(n)}.$$

定义：设函数$f_1(x)$和$f_2(x)$都是$(-\infty,+\infty)$上的绝对可积函数，两者的卷积定义为：

$$f_1(x)*f_2(x)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(x-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

卷积具有下面的**性质**(假定所有的广义 积分均收敛，并且允许积分交换次序)：

$$\begin{cases}\text{交换律} & f_1(x)*f_2(x)=f_2(x)*f_1(x).\\ \text{分配律} & f_1(x)*[f_2(x)+f_3(x)]=f_1(x)*f_2(x)+f_1(x)*f_3(x).\\ \text{结合律} & \left[f_1(x)*f_2(x)\right]*f_3(x)=f_1(x)*\left[f_2(x)*f_3(x)\right].\end{cases}$$

(7) 卷积性质定理：

$$\begin{cases}\mathscr{F}\left[f_1(x)*f_2(x)\right]=\mathscr{F}\left[f_1(x)\right]\mathscr{F}\left[f_2(x)\right]\\ \mathscr{F}^{-1}\left[g_1(\lambda)g_2(\lambda)\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[g_1(\lambda)\right]*\mathscr{F}^{-1}\left[g_2(\lambda)\right]\end{cases}$$

性质小结

设 $F(\lambda)=\mathscr{F}[f(t)]$， $G(\lambda)=\mathscr{F}[g(t)]$

线性：$\alpha f(t)+\beta g(t) \quad \leftrightarrow \quad \alpha F(\lambda)+\beta G(\lambda)$

位移：$f(t-t_0) \quad \leftrightarrow \quad F(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda t_0}$

$f(t)e^{i\lambda_0 t} \quad \leftrightarrow \quad F(\lambda+\lambda_0)$

微分：$f'(t) \quad \leftrightarrow \quad -i\lambda F(\lambda)$

积分：$\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \quad \leftrightarrow \quad \dfrac{1}{-i\lambda}F(\lambda)$

相似：$f(at)\ (a\neq 0) \quad \leftrightarrow \quad \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)$

卷积：$f(t)*g(t) \quad \leftrightarrow \quad F(\lambda)g(\lambda)$

例： 设 $f(t)=\begin{cases} te^{-\beta t}, & t\geq 0 \\ 0, & \mathrm{t}<0 \end{cases}$ $(\beta>0)$，求 $F[f(t)]$.

解： 令 $g(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$， 则

$$\mathscr{F}[g(t)]=\int_0^{+\infty} e^{i\lambda t}e^{-\beta t}dt$$

$$=\frac{1}{-\beta+\lambda i}e^{(-\beta+\lambda i)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\beta-i\lambda}$$

所以 $\mathrm{F}[f(t)]=\mathrm{F}[tg(t)]$

$$=(-i)\left(\frac{1}{\beta-i\lambda}\right)'=\frac{1}{(\beta-i\lambda)^2}.$$

例：设 $g_a(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -a<x<a\\ 0, & else\end{cases}$ ， 求$F[g_a(x)]$.

解： $\mathscr{F}[g_a(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}g_a(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}e^{i\lambda x}dx$

$$=\frac{1}{2\lambda i}e^{i\lambda x}\Big|_{-a}^{a}=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{2\lambda i}=\frac{\sin a\lambda}{\lambda}$$

所以

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{\sin a\lambda}{\lambda}]=g_a(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -a<x<a\\ 0, & else\end{cases}.$$

高维空间的Fourier变换

二维Fourier变换及其反演公式

$$\begin{cases} F(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{i(\xi x+\eta y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \triangleq \mathscr{F}[f(x,y)] \\ f(x,y) = \dfrac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \triangleq \mathscr{F}^{-1}[F(\xi,\eta)] \end{cases}$$

三维Fourier变换及其反演公式

$$\begin{cases} F(\lambda,\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \triangleq \mathscr{F}[f(x,y,z)] \\ f(x,y,z) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda,\mu,\nu)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu \triangleq \mathscr{F}^{-1}[F(\lambda,\mu,\nu)] \end{cases}$$

高维Fourier变换常用性质

以三维Fourier变换为例：

$$\mathscr{F}[f(x,y,z)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

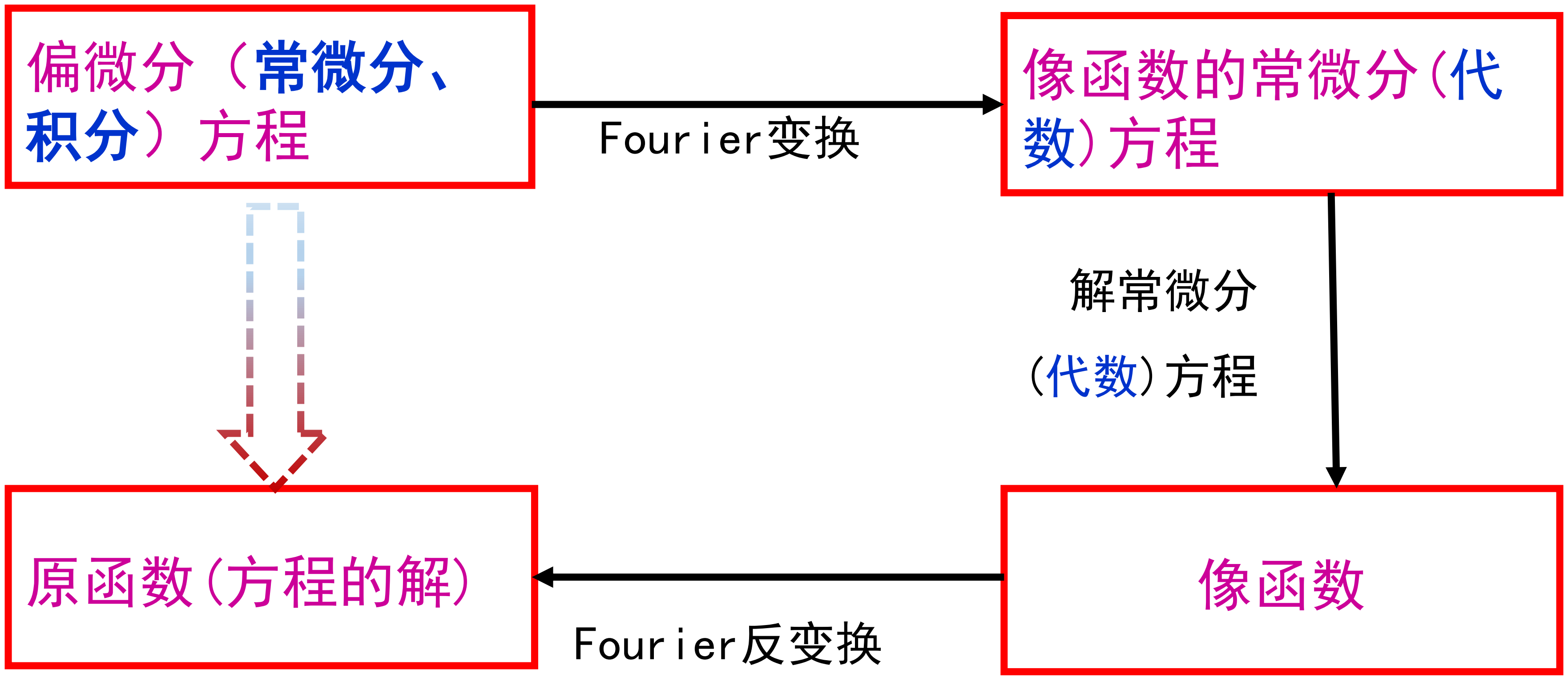
则：

$$\begin{cases} \mathscr{F}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right] = -i\lambda\mathscr{F}[f] \quad \left(f(\pm\infty,y,z)=0\right) \\ \mathscr{F}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] = -i\mu\mathscr{F}[f] \quad \left(f(x,\pm\infty,z)=0\right) \\ \mathscr{F}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right] = -i\nu\mathscr{F}[f] \quad \left(f(x,y,\pm\infty)=0\right) \end{cases}$$

对二阶偏导的Fourier变换公式类似. 特别地有：

$$\mathscr{F}[\Delta u] \triangleq -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\mathscr{F}[u]$$

Fourier变换的应用



例： 解定解问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$

解： 作关于 x 的Fourier变换，设

$$\begin{cases} u(t,x) \to U(t,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x) e^{i\lambda x} dx \\ \varphi(x) \to \Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\lambda x} dx \end{cases}$$

方程变为 $\begin{cases} \dfrac{dU(t,\lambda)}{dt} = -\lambda^2 U(t,\lambda) \\ U(t,\lambda)|_{t=0} = \Phi(\lambda) \end{cases}$

解之得： $U(t,\lambda)=\Phi(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$

故： $u(t,x)=\mathscr{F}^{-1}[U(t,\lambda)]$

$$=\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}(\varphi)\mathscr{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\right]$$

$$=\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}\left[\varphi*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\right]$$

$$=\varphi*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

严格来讲，还得验证是否真为解.

从而定解问题的解为：

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-s)e^{-\frac{s^2}{4t}}ds$$

例：求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (-\infty<x<\infty, y>0) \\ u(x,0)=f(x) \\ \lim\limits_{\mathrm{x}\to\pm\infty} u(x,y)=0,\ \lim\limits_{\mathrm{y}\to+\infty} u(x,y)=0 \end{cases}$$

解：对于变量 x 作Fourier变换，设：

$$\mathscr{F}^{-1}[u(x,y)]=U(\lambda,y), \qquad \mathscr{F}[f(x)]=F(\lambda)$$

定解问题可转换为ODE：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\lambda^2 U(\lambda,y)=0 \\ U(\lambda,0)=F(\lambda) \\ \lim\limits_{y\to+\infty} U(\lambda,y)=0 \end{cases}$$

常微分定解问题的通解为

$$U(\lambda, y) = C(\lambda)e^{|\lambda|y} + D(\lambda)e^{-|\lambda|y}$$

因为 $\lim\limits_{y\to+\infty} U(\lambda, y) = 0$ ，故得到

$$C(\lambda) = 0, \qquad D(\lambda) = F(\lambda)$$

于是常微分方程的解为：$U(\lambda, y) = F(\lambda)e^{-|\lambda|y}$

而 $\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-|\lambda|y}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda|y}e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}[\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y - i\lambda x}d\lambda + \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda y + i\lambda x}\mathrm{d}\lambda] = \frac{1}{2\pi}[\frac{1}{y+ix} + \frac{1}{y-ix}] = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$

得原定解问题的解为：

$$u(x, y) = f(x) * \left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi$$

Fourier变换是一种把分析运算化为代数运算的有效方法,但:

1. Fourier变换要求原象函数在 $\mathbf{R}$上绝对可积,大部分函数不能作Fourier变换.

2. Fourier变换要求函数在整个数轴上有定义,研究有界区域上的问题时失效.

正弦变换和余弦变换

Fourier变换和反变换：
$$\begin{cases} F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx \\ F^{-1}[F(\lambda)] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda \end{cases}$$

当 $f(x)$只是定义在$[0,+\infty)$上时，可将 $f(x)$奇或偶延拓到 $[-\infty,+\infty)$ 上，再考虑其Fourier变换. 于是得到正弦变换或余弦变换的定义如下：

定义：$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$ 称为 $f(x)$ 的Fourier正弦变换，记为：

$$F(\lambda) = F_s[f(x)]$$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\lambda)\sin\lambda x \, \mathrm{d}\lambda$ 称为 $F(\lambda)$ 的Fourier正弦逆变换，记为：

$$f(t) = F_s^{-1}[F(\lambda)]$$

定义：$F(\lambda)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx$ 称为 $f(x)$ 的Fourier余弦变换，记为：

$$F(\lambda)=\mathrm{F}_c[f(x)]$$

$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda$ 称为 $F(\lambda)$ 的Fourier余弦逆变换，记为：

$$f(x)=\mathrm{F}_c^{-1}[F(\lambda)]$$

正弦与余弦变换可用来解半直线上定解问题.

例：求解热传导方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} (0 < x < +\infty, t > 0) \\ u\big|_{x=0} = \varphi(t) \\ u\big|_{t=0} = 0,\ u(t,+\infty) = u_x(t,+\infty) = 0. \end{cases}$$

解：对方程与初始条件关于 x 取正弦变换，记

$$U(t,\lambda) = F_s[u(t,x)] = \int_0^{+\infty} u(t,x) \sin \lambda x dx$$

则：

$$\begin{cases} F_s\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \lambda x dx = \lambda u\big|_{x=0} - \lambda^2 U(t,\lambda) \\ F_s\left[u\big|_{t=0}\right] = U(t,\lambda)\big|_{t=0},\quad F_s\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}\right] = \dfrac{d}{dt} U(t,\lambda) \end{cases}$$

代入得ODE初值问题：
$$\begin{cases} \dfrac{dU(t,\lambda)}{dt} = a^2\left[\lambda\varphi(t) - \lambda^2 U(t,\lambda)\right] \\ U(t,\lambda)\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其解为：
$$U(t,\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t}\int_0^t a^2\lambda\varphi(\xi)e^{\lambda^2 a^2 \xi}d\xi$$

取反正弦变换，并利用 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$

得原问题的解为：

$$u(t,x) = F_s^{-1}[U(t,\lambda)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U(t,\lambda)\sin\lambda x d\lambda = \frac{2a^2}{\pi}\int_0^t\left[\int_0^{+\infty}\lambda e^{-a^2\lambda^2(t-\xi)}\sin\lambda x d\lambda\right]\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \frac{2a^2}{\pi}\int_0^t\varphi(\xi)\left[\frac{1}{-2a^2(t-\xi)}e^{-a^2\omega^2(t-\xi)}\sin\lambda x\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2a^2(t-\xi)}\left[\int_0^\infty \lambda e^{-a^2\lambda^2(t-\xi)}x\cos\lambda x d\lambda\right]\right]d\xi$$

$$= \frac{x}{\pi}\int_0^t\frac{\varphi(\xi)}{t-\xi}\left[\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2(t-\xi)}\cos\lambda x d\lambda\right]d\xi = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{ea^2(t-\xi)}}d\xi$$

在求解线性偏微分方程的定解问题时：

1. 根据自变量的变化范围选取变换方法：

如果自变量的变化范围为 $(-\infty,+\infty)$ 可选取Fourier变换方法；

如果自变量的变化范围为 $[0,\infty)$，可考虑选取正弦或余弦变换方法.

2. 要考虑所给定解条件的形式：

如果对某自变量正弦变换，必须在定解条件中给出该自变量为零时的值；

如果对某自变量余弦变换，必须在定解条件中给出该自变量为零时的导数值；

正弦变换和余弦变换通常都需要给定在 $+\infty$处待求函数和它的偏导均为0的条件(在推导变换作用在导数上的关系式时，需要用到）.
否则变换后的像函数的ODE定解问题中初值不确定，导致无法求解.

Laplace变换

定义：$f(t)$在$[0,\infty)$上有定义，若其满足：

1. $f(t)$ 分段光滑；
2. 存在常数 K 和 $c\geq 0$ 使得 $|f(t)|\leq Ke^{ct}$

则称 $f(t)$ 为指数增长函数，C 称为 $f(t)$ 的增长指数.

定理：设 $f(t)$是一指数增长函数，则

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}dt\ (p>0)$$

是右半复平面上的解析函数.

此变换写为：$F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$，称为 $f(t)$ 的Laplace变换.

Laplace变换的(Fourier-Millin)反演公式

定义：若$F(p)=L[f(t)]$在$\mathrm{Re}(p)>c$内解析，$p=\beta+j\omega$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(p)e^{pt}dp,\ \ t>0\ \ (\beta>c)$$

称为$F(p)$的Laplace逆变换或拉普拉斯反演积分.

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt \qquad f(t)=\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(p)e^{pt}dp}$$

互逆的积分变换式

Laplace反演积分

基本性质

① **线性性：** $\mathrm{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathrm{L}[f(t)]+\beta\mathrm{L}[g(t)]$

② **微分性质：** 设 $\mathrm{L}\left[f(t)\right]=F(p)$，则

$$\mathrm{L}\left[f'(t)\right]=pF(p)-f(0)$$

$$\mathrm{L}\left[f''(t)\right]=p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$$

$$\mathrm{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

③ **积分性质**

$$\mathrm{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right]=\frac{1}{p}F(p)$$

④ **延迟性质：**

$$\mathrm{L}\left[f(t-s)\right]=e^{-ps}F(p)$$

⑤ **伸缩性质：**

$$\mathrm{L}\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\quad a>0.$$

⑥ **卷积性质：**

$$f*g(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

$$\mathrm{L}\left[f*g\right]=\mathrm{L}\left[f\right]\mathrm{L}\left[g\right]$$

例：已知$F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$，求 $f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(p)]$

解：根据卷积定理有

$$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}\right]=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right]*\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right]$$

$$=\sin t*\cos t=\int_0^t\sin\tau\bullet\cos(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\sin t+\sin(2\tau-t)\right]d\tau$$

$$=\frac{t\sin t}{2}-\frac{\cos(2\tau-t)}{4}\bigg|_{\tau=0}^{t}=\frac{t\sin t}{2}$$

例：求解常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y''+2y'-3y=e^{-t} \\ y|_{t=0}=0, \quad y'|_{t=0}=1 \end{cases}$$

解：对 t 进行Laplace变换，设 $\mathrm{L}\left[y(t)\right]=F(p)$，则

$$e^{-t} \to \frac{1}{p+1}$$

$$y' \to pF(p)-y(0)=pF(p)$$

$$y'' \to p^2F(p)-py(0)-y'(0)=p^2F(p)-1$$

于是由原方程有：

$$p^2F(p)-1+2pF(p)-3F(p)=\frac{1}{p+1}$$

解之得：

$$F(p)=\frac{3}{8}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{8}\frac{1}{p+3}$$

对 $F(p)$ 进行Laplace逆变换，得

$$y(t)=\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$

例：一条半无限长的杆，端点温度变化已知，杆的初始温度为0，求杆上温度分布规律.

解：问题归结为求解下列定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = f(t) \end{cases}$$

对 t 进行Laplace变换，设

$$\mathrm{L}\left[u(t,x)\right] = U(p,x),\ \mathrm{L}\left[f(t)\right] = F(p)$$

则原问题变为

$$pU(p,x) = a^2 \frac{d^2U(p,x)}{dx^2}$$

$$U(p,x)|_{x=0} = F(p)$$

方程通解为 $U(p,x)=Ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+De^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$

当 $x \longrightarrow +\infty$ 时，$u(t,x)$ 应有界，所以 $U(p,x)$ 亦有界，从而 $D=0$.

由边值条件可知 $C=F(p)$， 即

$$U(p,x)=F(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

进行Laplace逆变换，有

$$u(t,x)=\mathrm{L}^{-1}\left[F(p)\right]*\mathrm{L}^{-1}\left[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]=f(t)*\frac{2}{2a\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\tau)\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$$

例：求解无限长细杆的热传导（有热源）问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(t,x), \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

解：先对时间 t 作Laplace变换，设：

$$\mathrm{L}[u(t,x)] = U(p,x), \quad \mathrm{L}[f(t,x)] = F(p,x)$$

$$\mathrm{L}[u_t(t,x)] = pU(p,x) - u(0,x)$$

由此原定解问题中的泛定方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} - \frac{p}{a^2}U + \frac{1}{a^2}\varphi(x) + \frac{1}{a^2}F(p,x) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}-\frac{p}{a^2}U+\frac{1}{a^2}\varphi(x)+\frac{1}{a^2}F(x,p)=0$$

$\oplus$ 无穷远处边界条件…

对上述方程可继续考虑采用Fourier变换法来求解：

$$-\lambda^2\mathscr{F}[U]-\frac{p}{a^2}\mathscr{F}[U]+\mathscr{F}\left[\frac{1}{a^2}\varphi(x)+\frac{1}{a^2}F(x,p)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{F}[U]=\frac{1}{a^2\lambda^2+p}\mathscr{F}[\varphi(x)+F(x,p)]$$

再采用Fourier反变换，利用：

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{a^2\lambda^2+p}\right]=\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x|}$$

$$U(p,x)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{a^2\lambda^2+p}\right]*[\varphi(x)+F(p,x)]=\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x|}*[\varphi(x)+F(p,x)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x-\xi|}\mathrm{d}\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}F(p,\xi)\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x-\xi|}\mathrm{d}\xi$$

最后Laplace逆变换得原问题的解为：

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau,\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi$$

注 意

① Fourier变换中变量的取值范围是$\left(-\infty,\infty\right)$，Laplace变换中变量的取值范围是$\left(0,\infty\right)$.

② 注意定解条件的形式. 例如对x进行Laplace变换，原方程为k阶方程，则定解条件中应出现

$$u\big|_{x=0},\ \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0},\cdots,\ \frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\big|_{x=0}.$$

③ Fourier变换多用于求解半无界(正，余弦变换)和全无界初值问题，一般针对空间变量作变换；Laplace变换常用于带有边界条件的定解问题，常针对时间变量作变换；都不需要把边界条件齐次化.