第 5 章　留数及其应用

留数是复变函数中的一个重要概念，它有着广泛的应用. 本章先讲述留数的一般理论，然后介绍它的一些应用，特别是在计算某些类型的定积分中的应用.

5.1　留 数 定 理

我们知道，如果 $f(z)$在 a 点解析，则 $f(z)$在 a 点的某邻域 U 内解析. 于是，对 U 内任意一条把 a 点包含在其内部的闭路 C，由柯西积分定理，有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

如果 a 是 $f(z)$的孤立奇点，则 $f(z)$在 a 点的某去心邻域 K 内解析. 由洛朗定理，$f(z)$在 a 点的洛朗展开式的系数

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

这里，C 是 K 内任意一条包围 a 点的闭路. 特别取 $n=-1$，得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}. \tag{1}$$

由此可见，a_{-1}在洛朗展开式的各系数中具有独特的地位，称它为 $f(z)$ 在 a 点的留数或残数，记作 $\mathrm{Res}[f(z),a]$. 于是，(1)式可写成

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),a].$$

定理 1（留数定理）　如果函数 $f(z)$在闭路 C 上解析，在 C 的内部除去 n 个孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外也解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k].$$

证 以每点 a_k 为圆心作小圆 C_k，使得这些小圆都在闭路 C 内，并且它们彼此相隔离（图 5.1）. 由多连通区域的柯西积分定理，得

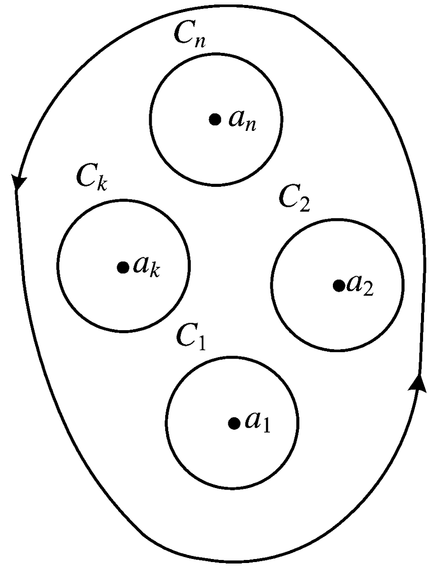

图 5.1

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

再由留数的定义及(1)式，有

$$\int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),a_k],$$

所以

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k].$$

定理 1 把沿闭路 C 的积分计算转化为留数的计算，因此就要学会一些直接计算留数的方法. 一般说来，函数 $f(z)$ 在其本性奇点 a 的留数只能用定义计算，即用间接方法把 $f(z)$ 在 a 点的洛朗级数的负一次幂系数 a_{-1} 求出. 下面的定理给出了在极点的留数的计算方法.

定理 2 设 a 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \tag{2}$$

特别地，当 $m=1$ 时，有

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{3}$$

证 由所设条件，有

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

式中，$\varphi(z)$ 在 a 点解析，且 $\varphi(a)\neq 0$. 设

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(z-a)^n,$$

由定义得

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),a]&=b_{m-1}\\&=\frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(a)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].$$

推论 设 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 都在 a 点解析，且 $P(a)\neq 0, Q(a)=0$，$Q'(a)\neq 0$，则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\frac{P(a)}{Q'(a)}. \tag{4}$$

证 由所设条件，知 a 是 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的 1 级极点，故

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]&=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)}\\&=\lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}\\&=\frac{P(a)}{Q'(a)}.\end{aligned}$$

例 1 求 $f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}+\frac{\mathrm{e}^z}{z-1}$ 在各极点的留数.

解 易见 $f(z)$ 的奇点是 $z=1$（1 级极点）及 $z=-1$（3 级极点）. 由公式(3)，得

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),1]&=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)\\&=\lim_{z\to 1}\mathrm{e}^z\\&=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

由于 $g(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{z-1}$ 在 $z=-1$ 解析，故

$$\operatorname{Res}[g(z),-1]=0.$$

从而，由公式(2)，得

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),-1]&=\operatorname{Res}\left[\frac{\sin 2z}{(z+1)^3},-1\right]\\&=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\sin 2z\\&=2\sin 2.\end{aligned}$$

例 2 求积分 $I=\int_C \operatorname{tg}\pi z\,\mathrm{d}z$，这里，$C$ 分别是圆周 $|z|=\frac{1}{3}$ 及

$|z|=n$（n 为正整数）.

解　$\operatorname{tg}\pi z$ 以 $z_k=k+\dfrac{1}{2}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）为 1 级极点，故由公式(4)，得

$$\operatorname{Res}[\operatorname{tg}\pi z,z_k]=\left.\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=z_k}$$
$$=-\frac{1}{\pi}.$$

在圆周 $|z|=\dfrac{1}{3}$ 的内部，$\operatorname{tg}\pi z$ 没有奇点，故由柯西积分定理，此时 $I=0$.

在圆周 $|z|=n$ 的内部，$\operatorname{tg}\pi z$ 有 $2n$ 个极点，即 $k+\dfrac{1}{2}$ $[k=0,\pm1,\cdots,\pm(n-1),-n]$，故由留数定理，得

$$\oint_{|z|=n}\operatorname{tg}\pi z\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n}\operatorname{Res}\left[\operatorname{tg}\pi z,k+\frac{1}{2}\right]$$
$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{2n}{\pi}\right)$$
$$=-4n\mathrm{i}.$$

例 3　求积分 $\oint_C z^3\sin^5\left(\dfrac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$，这里，$C$ 是圆周 $|z|=1$.

解　容易判定 $z=0$ 是 $f(z)=z^3\sin^5\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 的唯一奇点，而且是本性奇点. $f(z)$ 在 $z=0$ 的洛朗展开虽不易计算，但其负一次幂系数 a_{-1} 却是容易找到的. 事实上，由

$$f(z)=z^3\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}-\cdots\right)^5$$

可知 $a_{-1}=0$，所以

$$\oint_C z^3\sin^5\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z=0.$$

例 4　求积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\mathrm{d}z$.

解 被积函数 $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(1-e^z)^3}$ 的全体有限奇点是 $2n\pi i$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，只有 $z=0$ 在圆周 $|z|=1$ 内. 由于

$$\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}=\frac{z\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)}{-\left(z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots\right)^3}$$

$$=-\frac{1}{z}\frac{\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\cdots\right)}{\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\cdots\right)^3},$$

记上式右边后面的那个分式为 $\varphi(z)$，易知 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 解析，且 $\varphi(0)=1$. 所以

$$\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}=-\frac{1}{z}[1+\varphi'(0)z+\cdots],$$

从而

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=-1.$$

故原积分等于 $-2\pi i$.

5.2 定积分的计算

有许多定积分(包括广义积分)，可以通过种种手段，转化成某个解析函数沿闭路 C 的积分，这样，留数定理就为计算定积分提供了一个有效的工具. 特别是当定积分中被积函数的原函数不易求出或不能用初等函数表示时，留数定理就更为有用. 不过，利用留数计算定积分并没有普遍适用的方法，我们只着重介绍几种特殊类型的定积分的计算.

5.2.1 $I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$ 型的积分

这里，$R(\sin\theta,\cos\theta)$ 是关于 $\sin\theta,\cos\theta$ 的有理函数. 令 $z=e^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，则得

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

于是

$$R(\sin\theta, \cos\theta) = R\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] = f(z),$$

所以

$$I = \int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z.$$

这里，$f(z)$是一个关于 z 的有理函数.

例 1　求积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} \ (0 < p < 1).$$

解　令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，易算得

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(1 - pz)(z - p)}.$$

被积函数

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}(1 - pz)(z - p)}$$

有两个 1 阶极点 $z_1 = p$ 及 $z_2 = \frac{1}{p}$. 由于 $0 < p < 1$，因此 z_1 在单位圆周内，而 z_2 位于单位圆周之外. 故由留数定理，得

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(1 - pz)(z - p)} = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z), p].$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z), p] &= \lim_{z \to p}(z - p)\frac{1}{\mathrm{i}(1 - pz)(z - p)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}(1 - p^2)},\end{aligned}$$

故有

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} = \frac{2\pi}{1 - p^2}.$$

这个积分称为泊松积分.

例 2 计算积分

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos mx}{5-4\cos x}\mathrm{d}x\ (m\text{ 为正整数}).$$

解 因被积函数 $f(x)$ 是偶函数,故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

令

$$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos mx}{5-4\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin mx}{5-4\cos x}\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned}I_1&=\mathrm{Re}(I_1+\mathrm{i}I_2)\\&=\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$,则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{z^m}{5z-2(1+z^2)}\mathrm{d}z.$$

上式右边积分的被积函数 $g(z)$ 有两个有限奇点 $z_1=\dfrac{1}{2}$ 及 $z_2=2$,只有 z_1 在圆周 $|z|=1$ 内,且

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left[g(z),\frac{1}{2}\right]&=-\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\left.\frac{z^m}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\right|_{z=\frac{1}{2}},\\&=\frac{1}{3\cdot 2^m},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{z^m}{5z-2(1+z^2)}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3\cdot 2^{m-1}}.$$

从而

$$I_1=\frac{\pi}{3\cdot 2^{m-1}},$$

$$I_2 = 0.$$

于是

$$I = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{3 \cdot 2^m}.$$

5.2.2 三条引理

在定积分的计算中,下面三个关于积分估计的结论是很有用的.

引理 1 如果当 R 充分大时,$f(z)$在圆弧 C_R:$z=Re^{i\theta}$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$上连续,且

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0,$$

则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

特别地,当 $f(z)$是有理函数$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$,且 $Q(z)$至少比 $P(z)$高 2 次时,有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z = 0.$$

引理 1 就是第 3 章习题 7 中 $A=0$ 的情形,无须再证.

引理 2 如果当 ρ 充分小时,$f(z)$在圆弧 C_ρ:$z=a+\rho e^{i\theta}$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$上连续,且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = k,$$

则

$$\lim_{\rho\to0}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}(\beta-\alpha)k.$$

在积分计算中,常遇到 $k=0$ 这一特殊情形.

引理 2 已在第 3 章 3.1 节的例 3 中证明.

推论 设 a 是 $f(z)$的 1 级极点,则

$$\lim_{\rho\to0}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}(z) = \mathrm{i}(\beta-\alpha)\mathrm{Res}[f(z),a].$$

引理 3（若尔当引理）　如果当 R 充分大时，$g(z)$ 在圆弧 C_R：$|z|=R, \mathrm{Im}z>-a\ (a>0)$ 上连续（图 5.2），且

$$\lim_{z\to\infty} g(z)=0,$$

则对任何正数 λ，都有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz=0.$$

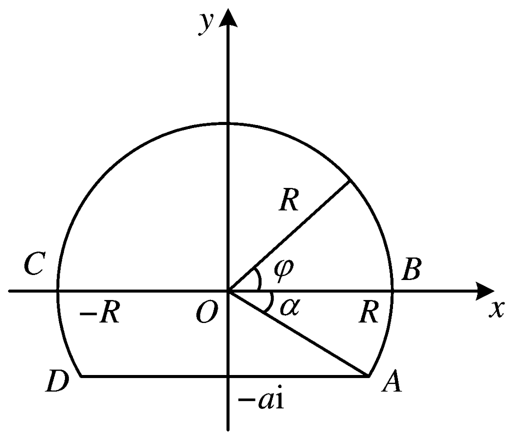

图 5.2

证　记

$$M(R)=\max_{z\in C_R}|g(z)|,$$

则由假设条件，有

$$\lim_{R\to+\infty} M(R)=0.$$

设 $z=x+iy$，则当 $z\in C_R$ 时，$y\geqslant -a$，故

$$\begin{aligned}|\exp\{i\lambda z\}| &= |\exp\{i\lambda(x+iy)\}| \\ &= |\exp\{i\lambda x\}\cdot\exp\{-\lambda y\}| \\ &= \exp\{-\lambda y\} \\ &\leqslant \exp\{\lambda a\}.\end{aligned}$$

于是，由长大不等式得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\widehat{AB}} g(z)e^{i\lambda z}dz\right| &\leqslant M(R)e^{\lambda a}\alpha R \\ &= M(R)e^{\lambda a}\frac{\alpha}{\sin\alpha}R\sin\alpha \\ &= M(R)ae^{\lambda a}\frac{\alpha}{\sin\alpha}.\end{aligned} \tag{1}$$

因为当 $R\to+\infty$ 时，$\alpha\to 0$，$\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}\to 1$，故在(1)式中令 $R\to+\infty$，得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\widehat{AB}} g(z)\exp\{i\lambda z\}dz=0.$$

同理

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\widehat{CD}} g(z)\exp\{i\lambda z\}dz=0.$$

当 $z\in\widehat{BC}$时，令 $z=R\exp\{\mathrm{i}\varphi\}$，则

$$|\exp\{\mathrm{i}\lambda z\}|=\exp\{-\lambda R\sin\varphi\}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\widehat{BC}} g(z)\exp\{\mathrm{i}\lambda z\}\mathrm{d}z\right|\\ &\quad\leqslant M(R)\int_0^{\pi}\exp\{-\lambda R\sin\varphi\}R\mathrm{d}\varphi\\ &\quad= 2M(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp\{-\lambda R\sin\varphi\}\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

因为当 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$时有

$$\sin\varphi\geqslant\frac{2}{\pi}\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}&2M(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp\{-\lambda R\sin\varphi\}\mathrm{d}\varphi\\ &\quad\leqslant 2M(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp\left\{-\frac{2\lambda R}{\pi}\varphi\right\}\mathrm{d}\varphi\\ &\quad= M(R)\frac{\pi}{\lambda}[1-\exp\{-\lambda R\}]\\ &\quad\to 0\ (R\to+\infty).\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\widehat{BC}} g(z)\exp\{\mathrm{i}\lambda z\}\mathrm{d}z=0.$$

综合以上讨论，即得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)\exp\{\mathrm{i}\lambda z\}\mathrm{d}z=0.$$

5.2.3 有理函数的积分

这里，设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$是有理函数，多项式 $Q(x)$至少比多项式 $P(x)$高 2 次，且 $Q(x)$在实数轴上无零点. 在这些条件下，广义积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$$

存在,因而

$$I=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}R(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

为了用留数计算这类积分,我们取一个辅助复函数 $f(z)=R(z)$,然后考虑 $f(z)$在一个适当的闭路 C 上的积分. 由(2)式可见,闭路 C 应当包含实数轴上的线段$[-R,R]$. 为了方便,C 的其余部分可取一个半圆. 例如取 $C=[-R,R]+C_R$,这里,C_R 是上半圆:$|z|=R,\mathrm{Im}z\geqslant0$ (图 5.3). 于是,由留数定理,有

$$\begin{aligned}2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}f(z)&=\int_C f(z)\mathrm{d}z\\&=\int_{-R}^{R}R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{3}$$

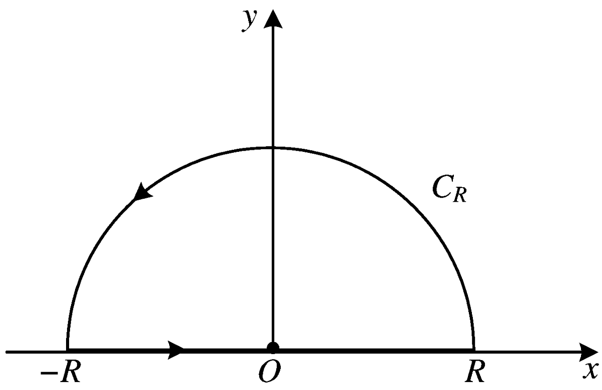

图 5.3

这里,左端的和对 $f(z)$在 C 内的全部奇点进行. 由所设知

$$\lim_{z\to\infty}zf(z)=0,$$

故由引理 1,得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

在(3)式两端令 $R\to+\infty$取极限,设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $f(z)$在上半平面内的全部奇点(都是极点),当 R 充分大时,这些奇点都在 C 内. 这样,就得到了计算这类积分的一般公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),a_k].$$

例 3 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}\ (a>0).$$

解 由于 $R(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$ 在上半平面内只有一个 3 级极点 $a\mathrm{i}$，而

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[R(z),a\mathrm{i}] &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{(z-a\mathrm{i})^3}{(z^2+a^2)^3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{(z+a\mathrm{i})^3}\bigg|_{z=a\mathrm{i}} \\ &= \frac{3}{16a^5\mathrm{i}},\end{aligned}$$

故由前面得到的公式，有

$$\begin{aligned}I &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{3}{16a^5\mathrm{i}} \\ &= \frac{3\pi}{8a^5}.\end{aligned}$$

5.2.4 $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$ 及 $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mx\,\mathrm{d}x$ $(m>0)$型的积分

这里，$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 仍是有理函数，$Q(x)$ 至少比 $P(x)$ 高 1 次，且 $Q(x)$ 在实数轴上无零点. 由高等数学知识，在这些条件下，广义积分 I_1, I_2 都存在. 下面我们证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = I_1 + \mathrm{i}I_2 = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k], \quad (4)$$

式中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是复有理函数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在上半平面内的全部极点.

取辅助函数 $f(z)=R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}$，辅助闭路 $C=[-R,R]+C_R$ 仍

是如图 5.3 所示半圆的边界. 由留数定理,有

$$
\begin{aligned}
2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z) &= \int_C f(z)\,dz \\
&= \int_{-R}^{R} R(x)e^{imx}\,dx + \int_{C_R} R(z)e^{imz}\,dz. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

这里,左端的留数和对 $f(z)$ 在 C 内的全部极点进行. 由所设,有 $\lim\limits_{z\to\infty}R(z)=0$,故由若尔当引理,有

$$
\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} R(z)e^{imz}\,dz = 0.
$$

于是,在(5)式两端令 $R\to+\infty$ 取极限,即得公式(4).

例 4 计算积分

$$
I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx \ (a>0).
$$

解 设

$$
R(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2},
$$

它在上半平面内有一个 2 级极点 ai,故

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, ai] &= \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz}}{(z+ai)^2}\right] \\
&= -\frac{e^{-a}(a+1)i}{4a^3}.
\end{aligned}
$$

于是,由公式(4)得

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx \\
&= \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[-2\pi i\cdot \frac{e^{-a}(a+1)i}{4a^3}\right] \\
&= \frac{e^{-a}(a+1)\pi}{2a^3}.
\end{aligned}
$$

5.2.5 杂 例

从前面讨论的几个模式可见,利用留数计算定积分,关键在于

选择一个合适的辅助函数及一条相应的辅助闭路,从而把定积分的计算化成沿闭路的复积分的计算.除了一些标准模式外,辅助函数尤其是辅助闭路的选择很不规则.一般说来,辅助函数 $F(z)$ 总要选得使当 $z=x$ 时 $F(x)=f(x)$ ($f(x)$是原定积分中的被积函数),或 $\mathrm{Re}F(x)=f(x)$,或 $\mathrm{Im}F(x)=f(x)$.辅助闭路的选取原则是:使添加的路径上的积分能够通过一定的办法估计出来,或者是能够转化为原来的定积分(如下面例 7).但具体选取时,形状则是多种多样,有半圆形围道、长方形围道、扇形围道、三角形围道,等等.此外,围道上有奇点时还要绕过去.

例 5 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$$

解 首先注意到

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$$

因 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$,故令 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1}{z^2}$.由于 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 1 级极点,故积分路径不能通过原点,必须绕过去.取如图 5.4 所示的闭路 $C=[-R,-r]+C_r+[r,R]+C_R$,这里,C_r 是上半圆周 $|z|=r,\mathrm{Im}z\geqslant 0$;$C_R$ 是上半圆周 $|z|=R,\mathrm{Im}z\geqslant 0$.由于 $f(z)$ 只有一个奇点 $z=0$,对任意 R 和 r,它都不在 C 内,故由柯西积分定理,有

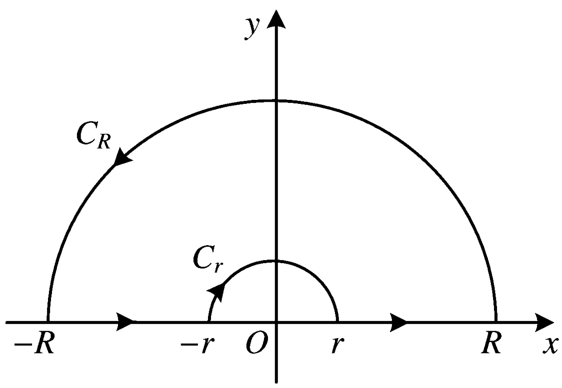

图 5.4

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-R}^{-r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_r^R f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

由引理 1，$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\dfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z = 0$，再由若尔当引理，$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z^2}\mathrm{d}z = 0$，故

$$
\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.
$$

由引理 2，并注意到小半圆周 C_r 的方向，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z &= -\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(z),0] \\
&= -\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to 0} z\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1}{z^2} \\
&= -\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{1} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

于是，在(6)式两端令 $R\to+\infty$，$r\to 0$ 取极限，得

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}{x^2}\mathrm{d}x + 2\pi = 0,
$$

即

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x - 1}{x^2}\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}\mathrm{d}x + 2\pi = 0.
$$

取实部，得

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \pi,
$$

故

$$
I = \frac{\pi}{2}.
$$

例 6 求弗雷涅积分

$$
I_1 = \int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x,
$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x.$$

解 考虑函数 $f(z)=\exp\{\mathrm{i}z^2\}$沿图 5.5 所示三角形闭路 $C=[0,R]+C_1+C_2$ 的积分. 因 $f(z)$在全平面内解析,故

$$\begin{aligned}0&=\int_C f(z)\mathrm{d}z\\&=\int_0^R\exp\{\mathrm{i}x^2\}\mathrm{d}x+\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{7}$$

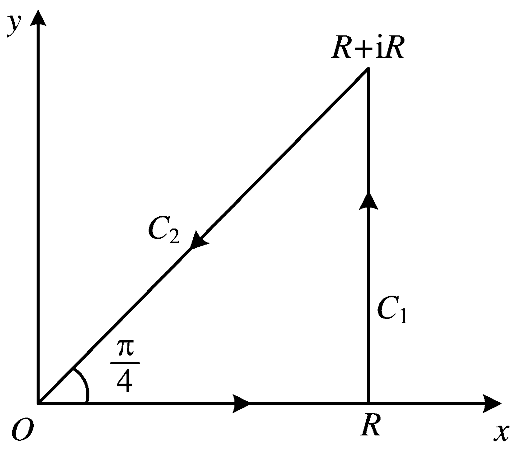

图 5.5

在 C_1 上,$z=R+\mathrm{i}y\ (0\leqslant y\leqslant R)$,故

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z\right|&\leqslant\int_0^R|\exp\{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}y)^2\}|\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^R\exp\{-2Ry\}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2R}(1-\exp\{-2R^2\})\\&\to 0\ (R\to+\infty).\end{aligned}$$

在 C_2 上,$z=r\exp\left\{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right\}$,$z^2=\mathrm{i}r^2\ (0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}R)$,$\mathrm{d}z=\exp\left\{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right\}\mathrm{d}r$,因而

$$\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z=\exp\left\{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right\}\int_{\sqrt{2}R}^0\exp\{-r^2\}\mathrm{d}r.$$

在(7)式两端令 $R\to+\infty$取极限,得

$$I_1+\mathrm{i}I_2-\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\exp\{-r^2\}\mathrm{d}r=0.$$

因

$$\int_0^{+\infty}\exp\{-r^2\}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故

$$I_1+\mathrm{i}I_2=\frac{1+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi},$$

所以

$$I_1=I_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

例 7 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\exp\{-ax^2\}\cos bx\,\mathrm{d}x\ (a>0).$$

解 作积分替换 $u=\sqrt{a}x$，并记 $t=\dfrac{b}{2\sqrt{a}}$，得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\cos\frac{b}{\sqrt{a}}u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2tx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $f(z)=\mathrm{e}^{-z^2}$，取如图 5.6 所示的闭路 $C=[-R,R]+C_1+l+C_2$. 由于 $f(z)$在全平面内解析，故

$$0=\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{l}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z.\qquad(8)$$

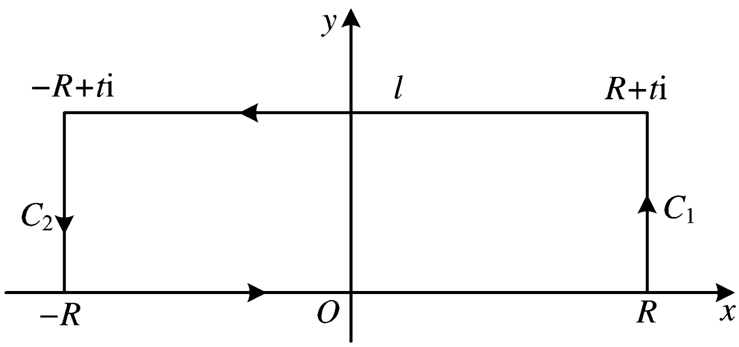

图 5.6

在 C_1 上，$z=R+\mathrm{i}y\ (0\leqslant y\leqslant t)$，故

$$\left|\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^t \left|\exp\{-(R+\mathrm{i}y)^2\}\right| \mathrm{d}y$$

$$\leqslant \exp\{-R^2\}\int_0^t \exp\{y^2\}\mathrm{d}y$$

$$\to 0\ (R\to+\infty).$$

同理

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

在 l 上，$z=x+t\mathrm{i}\ (-R\leqslant x\leqslant R)$，故

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \int_R^{-R}\exp\{-(x+t\mathrm{i})^2\}\mathrm{d}x$$

$$= -\exp\{t^2\}\int_{-R}^{R}\exp\{-x^2\}\cos 2tx\,\mathrm{d}x.$$

于是，在(8)式中令 $R\to+\infty$ 取极限，并利用概率积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi},$$

得

$$0 = \sqrt{\pi} - \exp\{t^2\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-x^2\}\cos 2tx\,\mathrm{d}x.$$

所以

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left\{-\frac{b^2}{4a}\right\}.$$

* 5.2.6 多值函数的积分

在计算某些定积分时，必须选取一个多值函数作辅助函数，这时，就要对此多值函数选定一个确定的单值解析分支，才能利用留数进行计算.

例 8 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$

解 作辅助函数

$$f(z)=\frac{\ln z}{(z^2+1)^2},$$

这里，$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$ $(0<\arg z<2\pi)$. 选取如图 5.7 所示的闭路 C，使 $f(z)$ 在上半平面中的唯一奇点 i 在 C 内. 由留数定理，有

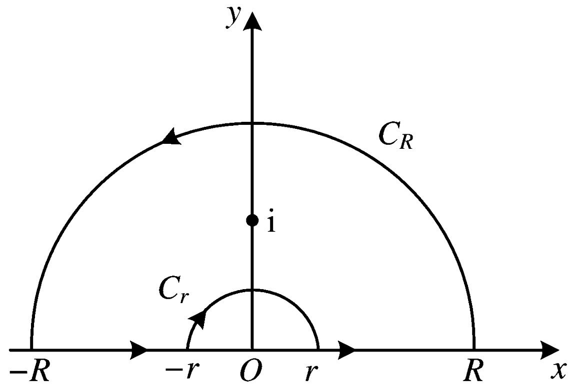

图 5.7

$$\int_r^R \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z+\int_{[-R,-r]} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]. \tag{9}$$

因 i 是 $f(z)$ 的 2 级极点，故

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[f(z)(z-\mathrm{i})^2]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\ln z}{(z+\mathrm{i})^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}}\\&=-\frac{1}{4\mathrm{i}}+\frac{1}{4\mathrm{i}}\ln\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因已约定 $\ln z$ 是主支，故 $\ln\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$，所以

$$\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\frac{\pi+2\mathrm{i}}{8}.$$

下面分别讨论(9)式左端的各项积分：

1) 在 C_R 上，$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，故

$$\begin{aligned}|\ln z|&=\sqrt{\ln^2 R+\varphi^2}\\&\leqslant\sqrt{\ln^2 R+\pi^2}\\&\leqslant \ln R+\pi,\end{aligned}$$

且

$$\frac{1}{|z^2+1|^2} \leqslant \frac{1}{(R^2-1)^2},$$

所以

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\ln R+\pi}{(R^2-1)^2}\cdot \pi R$$

$$\to 0 \ (R\to+\infty).$$

2）在 C_r 上，$z=re^{\mathrm{i}\varphi}$（$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$），故

$$|\ln z| \leqslant \sqrt{\ln^2 r+\pi^2}$$

$$\leqslant |\ln r|+\pi,$$

且

$$\left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(1-r^2)^2},$$

从而

$$\left|\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{|\ln r|+\pi}{(1-r^2)^2}\cdot \pi r$$

$$\to 0 \ (r\to 0).$$

3）在线段$[-R,-r]$上，$z=xe^{\mathrm{i}\pi}$（$x>0$），故

$$\ln z = \ln x+\mathrm{i}\pi,$$

$$\mathrm{d}z = -\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_{[-R,-r]} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^r \frac{\ln x+\mathrm{i}\pi}{(1+x^2)^2}(-\mathrm{d}x)$$

$$= \int_r^R \frac{\ln x+\mathrm{i}\pi}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

最后，在(9)式中，令 $r\to0$，$R\to+\infty$取极限，得

$$\frac{\pi^2\mathrm{i}}{4}-\frac{\pi}{2} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x+\pi\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

比较等式两端的实部，即得

$$I=-\frac{\pi}{4}.$$

分析例 8 的计算过程，可以得到下面的一般公式：

$$2\int_0^{+\infty} R(x)\ln x\mathrm{d}x + \pi\mathrm{i}\int_0^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)\ln z, a_k].$$

这里，$R(z)$是一个在正实轴上无奇点的偶有理函数，且分母至少比分子高 2 次，$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z\ (0<\arg z<2\pi)$，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $R(z)$ 在上半平面内的全部极点.

下面讨论另一类较常见的积分

$$\int_0^{+\infty} x^p R(x)\mathrm{d}x$$

的计算. 这里，假设实数 p 不是整数，$R(z)$是一个在正实轴上没有奇点的有理函数，且满足条件：

$$\lim_{z\to 0} z^{p+1}R(z) = 0,$$

$$\lim_{z\to\infty} z^{p+1}R(z) = 0.$$

并约定

$$z^p = \mathrm{e}^{p\ln z},$$

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z\ (0 < \arg z < 2\pi).$$

令 $f(z)=z^pR(z)$，在沿正实轴割开了的 z 平面上取辅助闭路 C 如图 5.8 所示：从正实轴上岸的点 $x=r\ (r>0)$出发，沿实轴正向到点 $x=R$，再沿圆周 C_R：$|z|=R$ 的正向转一圈到正实轴的下岸

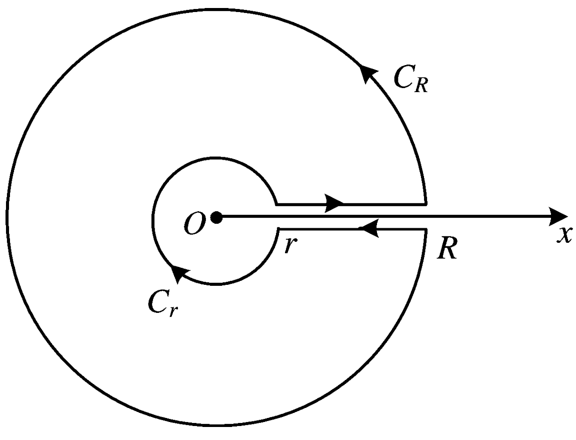

图 5.8

的点 $x=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$，然后沿正实轴的下岸的负向到点 $x=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$（这一段记为 l），最后沿着圆周 C_r：$|z|=r$ 的负向转一圈后回到出发点. 于是

$$\begin{aligned}2\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res}f(z) &= \int_C f(z)\mathrm{d}z \\ &= \int_r^R f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z \\ &\quad + \int_l f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z,\end{aligned} \tag{10}$$

这里，$\sum \mathrm{Res}f(z)$ 表示 $f(z)$ 在 C 内所有奇点的留数的和.

由所设条件，有

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = 0,$$

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0,$$

所以

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

而在正实轴下岸的线段 l 上，$z=x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$ $(r\leqslant x\leqslant R)$，故

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}\int_r^R x^p R(x)\mathrm{d}x.$$

于是，在(10)式两边令 $r\to 0, R\to+\infty$ 取极限，得

$$\int_0^{+\infty} x^p R(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}}\sum \mathrm{Res}z^p R(z). \tag{11}$$

这里，$\sum \mathrm{Res}z^p R(z)$ 代表函数 $z^p R(z)$ 依前面取定的单值解析分支在除原点以外的平面上所有奇点的留数的和.

例 9 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x}\mathrm{d}x \ (-1<p<0).$$

解 由 $-1<p<0$，有 $0<p+1<1$，从而

$$\lim_{z\to 0} z^{p+1}\frac{1}{1+z} = 0,$$

$$\lim_{z\to\infty} z^{p+1}\frac{1}{1+z}=0.$$

函数$\frac{1}{1+z}$只有$z=-1$是其1级极点,并且

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{z^p}{1+z},-1\right]&=\lim_{z\to-1}\left[(1+z)\frac{z^p}{1+z}\right]\\&=(-1)^p.\end{aligned}$$

由前面推导公式(11)时对沿正实轴割开的平面的辐角所作的规定,应有$-1=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$,于是

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^p}{1+z},-1\right]=\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}}.$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x}\mathrm{d}x&=\frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}}\\&=\frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-p\pi\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}}}\\&=-\frac{\pi}{\sin p\pi}.\end{aligned}$$

顺便指出,例8中的积分也可以用图5.8所示的闭路计算,但这时需取

$$f(z)=\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}$$

作辅助函数,计算也稍复杂一些,建议读者自己算一遍.

5.3 辐角原理

本节讨论在留数理论的基础上建立起来的辐角原理,利用它可以解决某些函数的零点分布问题.

定理1 设a,b分别是函数$f(z)$的m级零点和n级极点,则a,b都是$\frac{f'(z)}{f(z)}$的1级极点,且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=m,$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-n.$$

证 因 a 是 $f(z)$的 m 级零点,故在 a 点的某邻域内有

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),\ \varphi(a)\neq 0,$$

于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

由于 $\varphi(a)\neq 0$,故$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$在 a 点解析,从而 a 是$\frac{f'(z)}{f(z)}$的 1 级极点,且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=m.$$

因 b 是 $f(z)$的 n 级极点,故在 b 点的某去心邻域内有

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-b)^n},\ \psi(b)\neq 0,$$

于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-n}{z-b}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

由于 $\psi(b)\neq 0$,故$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$在 b 点解析,从而 b 是$\frac{f'(z)}{f(z)}$的 1 级极点,且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-n.$$

定理 2 设 $f(z)$在闭路 C 上解析且不为零,在 C 的内部除去有限多个极点外也处处解析,则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=N-P.$$

这里,N 及 P 分别表示 $f(z)$在 C 的内部的零点及极点的总数(约定一个 k 级零点算 k 个零点,一个 m 级极点算 m 个极点).

证 设 $f(z)$在 C 内有 n 个不同的零点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 m 个不同的极点 $b_1,b_2,\cdots,b_m$,它们的级数分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 由定理 1,这 $n+m$ 个点都是 $g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$的 1 级极点,且

$$\mathrm{Res}[g(z),a_k]=\alpha_k\quad(k=1,2,\cdots,n),$$
$$\mathrm{Res}[g(z),b_k]=\beta_k\quad(k=1,2,\cdots,m).$$

除了这些 1 级极点外，$g(z)$在 C 及其内部解析，故由留数定理，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C g(z)\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k - \sum_{k=1}^{m}\beta_k \\ &= N - P.\end{aligned}$$

为了说明定理 2 的几何意义，先引进辐角变化的概念. 设在 z 平面上有一条起点为 a、终点为 b 的曲线 l. 如果选定 a 点的辐角 $\arg a$，当 z 从 a 沿 l 向 b 运动时，辐角也将从 $\arg a$ 开始连续变化，从而得到 b 点辐角的一个特定值 $\arg b = \arg a + \theta$（图 5.9）. 称 $\theta = \arg b - \arg a$ 为 z 沿曲线 l 从 a 到 b 的辐角变化，记作 $\Delta_l \arg z$. 显然，$\Delta_l \arg z$ 与 $\arg a$ 的选定值无关. 例如，若 l 是上半圆周：$|z|=1$，$\mathrm{Im}z \geqslant 0$，当点 z 沿 l 从 1 变到 -1 时，辐角增加了 π，因而

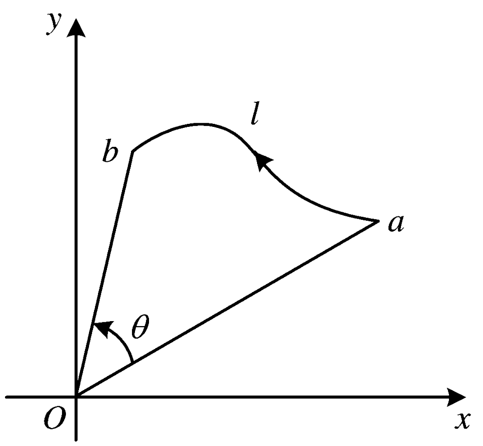

图 5.9

$$\Delta_l \arg z = \arg(-1) - \arg 1 = \pi.$$

下面讨论定理 2 的几何意义. 我们知道，当 z 沿 z 平面上的闭路（简单闭曲线）C 的正向绕行一周时，$w=f(z)$就相应地在 w 平面上画出一条不经过原点（因在 C 上 $f(z)\neq 0$）的有向闭曲线 l. 但 l 不一定是简单闭曲线（图 5.10），它可能是依正向绕原点若干圈，也可能是依负向绕原点若干圈. 由定义易知，当点 w 从 l 上一点 A 出发，依 l 的方向走遍 l 回到出发点 A 时，其辐角变化 $\Delta_l \arg w = 2k\pi$（k 为整数）. 例如，对于图 5.10 中所画的有向闭曲线 l，$\Delta_l \arg w = 4\pi$.

设上述曲线 l 的方程为 $w=\rho(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_l \frac{\mathrm{d}w}{w} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_l \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \mathrm{i}\int_l \mathrm{d}\theta\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_l \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\Delta_l \arg w \\
&= \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).
\end{aligned}
$$

这里，$\Delta_C \arg f(z)$表示 z 绕 C 的正向一周后 $\arg f(z)$的变化量，即 w 沿相应曲线 l 的辐角变化.

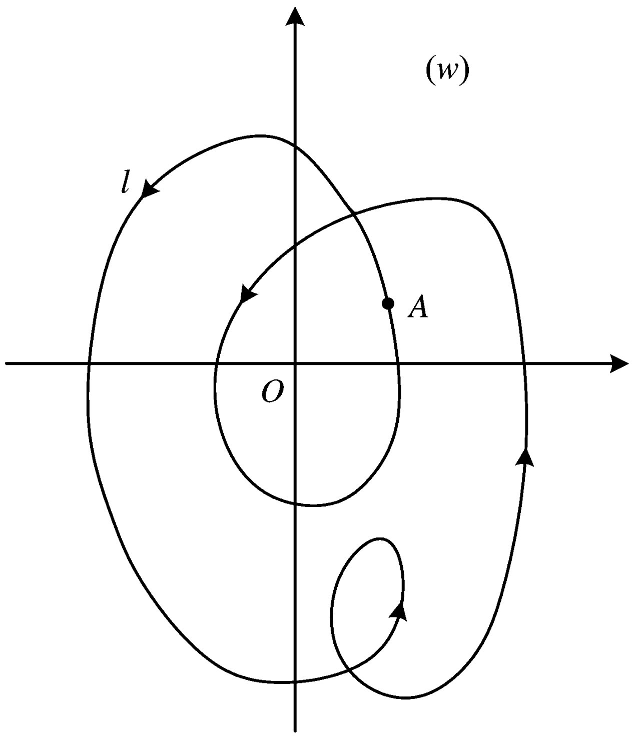

图 5.10

综合上述讨论及定理 2，得

定理 3（辐角原理）　在定理 2 的条件下，有

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

例如，函数

$$f(z)=\frac{(z^2+1)(z-4)}{\sin^4 z}$$

在圆周 C：$|z|=3$ 内有两个 1 级零点 $z=\pm \mathrm{i}$ 和一个 4 级极点 $z=0$，故 $N=2$，$P=4$，所以

$$\begin{aligned}\Delta_C \arg f(z) &= 2\pi(N-P) \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

也就是说，当 z 绕 $|z|=3$ 的正向一周后，$w=f(z)$ 的辐角变化为 -4π.

定理 4（罗歇（Rouché）定理） 设函数 $f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 在闭路 C 及其内部解析，且在 C 上有不等式

$$|f(z)|>|\varphi(z)|,$$

则在 C 的内部 $f(z)+\varphi(z)$ 和 $f(z)$ 的零点个数相等.

证 由于在 C 上

$$|f(z)|>|\varphi(z)|\geqslant 0,$$
$$|f(z)+\varphi(z)|\geqslant|f(z)|-|\varphi(z)|>0,$$

故 $f(z)$ 及 $f(z)+\varphi(z)$ 在 C 上都无零点. 因为 $f(z)+\varphi(z)$ 及 $f(z)$ 都在 C 的内部解析，如果用 N 及 N' 分别表示 $f(z)+\varphi(z)$ 及 $f(z)$ 在 C 的内部的零点数，根据辐角原理，有

$$\begin{aligned}N &= \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg[f(z)+\varphi(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)+\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]\end{aligned}$$

及

$$N' = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

由以上两式可见，要证明 $N=N'$，只需证明

$$\Delta_C \arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]=0.$$

事实上，由于当 $z\in C$ 时 $|f(z)|>|\varphi(z)|$，所以

$$\left|1-\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]\right|=\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1\ (z\in C).$$

这就是说，当 z 在 C 上变动时，$1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ 落在以 1 为圆心、1 为

半径的圆内，从而原点在闭曲线 $1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ $(z\in C)$ 的外部(图 5.11). 所以

$$\Delta_C\arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]=0.$$

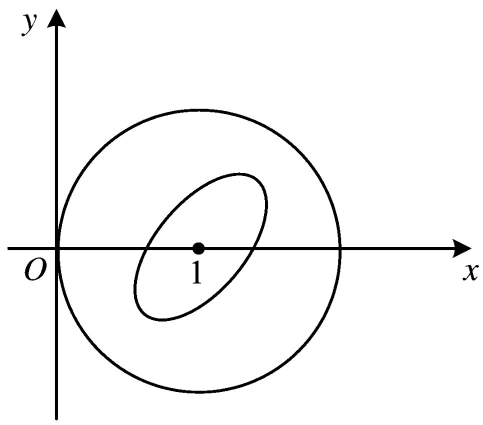

图 5.11

例 1 求多项式

$$P(z)=z^6-z^4-5z^3+2$$

在圆 $|z|<1$ 内有多少个零点?

解 取 $f(z)=-5z^3$, $\varphi(z)=z^6-z^4+2$. 在圆周 $|z|=1$ 上, $|f(z)|=5$, 且 $|\varphi(z)|\leqslant|z^6|+|z^4|+2=4$, 故 $|f(z)|>|\varphi(z)|$. 于是, 依罗歇定理, $P(z)=f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内的零点个数相同. 而 $f(z)=-5z^3$ 在 $|z|<1$ 内只有一个 3 级零点 $z=0$, 故 $P(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内有 3 个零点.

例 2 证明代数学的基本定理: n 次复系数多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\quad(n\geqslant 1,\ a_0\neq 0)$$

在复平面内必有 n 个零点.

证 令 $f(z)=a_0z^n$, $\varphi(z)=a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$. 由于 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}=0$, 故当 R 充分大时, 在圆周 C: $|z|=R$ 上, 有

$$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1,$$

即

$$|\varphi(z)|<|f(z)|.$$

从而，$P(z)=f(z)+\varphi(z)$与$f(z)$在C内的零点个数相同. 所以，$P(z)$在复平面内有n个零点.

习　　题

1. 求下列函数在各极点的留数：

(1) $\dfrac{\cos z}{z-\mathrm{i}}$；

(2) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^{2n}}$；

(3) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}$；

(4) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}$；

(5) $\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$；

(6) $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$；

(7) $\dfrac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n}$ ($z_1\neq z_2$，m,n为正整数)；

(8) $\dfrac{1}{z}\left[\dfrac{1}{z+1}+\cdots+\dfrac{1}{(z+1)^n}\right]$.

2. 设∞点是$f(z)$的一个孤立奇点(即$f(z)$在某区域D：$|z|>R$内解析)，则称

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$$

为$f(z)$在∞点的留数. 这里，C^-是区域D内的任一闭路，并取负方向——这个方向使∞点永远在它的左边，因而可以看作是绕∞点的正方向.

(1) 证明：函数在∞点的留数等于这个函数在∞点的邻域内的洛朗展开式的负一次幂项的系数反符号；

(2) 若$f(z)$在闭复平面上除去有限多个点$a_1,a_2,\cdots,a_n$及∞外均解析，试证明：$f(z)$在$a_1,a_2,\cdots,a_n$及∞点的留数和为零；

(3) 求习题 1 的(1)和(5)中的函数及 $\sin\dfrac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}}$ 在 ∞ 点的留数.

3. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, C: $x^2-2x+y^2-2y=0$;

(2) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{1+z^4}$, C: $x^2+y^2=2x$;

(3) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3+1)}$, C: $|z|=r\ (r\neq 1)$;

(4) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, C: $|z|=4$;

(5) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, C: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=z^{\frac{2}{3}}$.

4. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}\ (a>1)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}\ (a>0)$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{tg}(\theta+\mathrm{i}a)d\theta$ (a 为实数,且 $a\neq 0$).

[**提示**:分 $a>0$ 及 $a<0$ 两种情况讨论.]

5. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\ (a>0)$;

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\ (a>0,\ b>0)$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

6. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx\ (a>0,\ b>0)$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\ (a>0,\ b>0)$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\ (a>0)$；

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\mathrm{d}x\ (a>0,\ b>0)$；

(5) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x$.

$\left[\right.$**提示：**取 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+2}{z^3}$. $\left.\right]$

7. 求下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$；

$\left[\right.$**提示：**取 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-z}}{z}$，$f(z)$在全平面内解析；闭路 C 为四分之一圆：$|z|<R$，$\mathrm{Re}z>0$，$\mathrm{Im}z>0$ 的边界. $\left.\right]$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{\pi x}-\mathrm{e}^{-\pi x}}\mathrm{d}x$.

$\left[\right.$**提示：**取 $f(z)=\frac{z}{\mathrm{e}^{\pi z}-\mathrm{e}^{-\pi z}}$，闭路 C 为矩形域：$-R<\mathrm{Re}z<R$，$0<\mathrm{Im}z<\frac{1}{2}$ 的边界. $\left.\right]$

* 8. 求下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\ (-1<p<3)$；

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

9. 求下列方程在圆$|z|<1$ 内根的个数：

(1) $2z^5-z^3+z^2-2z+8=0$；

(2) $z^7-6z^5+z^2-3=0$；

(3) $\mathrm{e}^z=3z^n$（n 为自然数）.

10. 证明：

(1) $z^4+6z+1=0$ 有 3 个根落在圆环$\frac{1}{2}<|z|<2$ 内；

(2) $\lambda-z-\mathrm{e}^{-z}=0\ (\lambda>1)$在右半平面内有唯一的一个根，且是实的.

［**提示**：对充分大的 R，取 C 为右半圆：$|z|=R, \mathrm{Re}z>0$ 的边界，用罗歇定理；利用连续函数的中间值定理证明根是实的.］