阅卷指南

批改试卷，请按照步骤给分；先看方法对不对，再看结果对比对；在认为有问题或者不对的地方，作适当的标记，以便后期学生查分时，给予明确答复；评阅人签上适当的标记，例如姓名首写字母等，以便整个批改过程可追溯。

一、(本题10分) **解**：依条件，方程为:

$$\begin{cases} u_t = b^2\Delta_3 u,\ (t>0, x^2+y^2<a^2,\ 0<z<h) \\ u\ |_{z=0} = g(t,x,y),\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\ |_{z=h} = 0 \\ \left(k\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\ |_{r=a} = 0 \end{cases}$$

方程正确，给4分；上下底和侧边界的条件一个2分；共计10分。

二、(本题10分) **解**： 泛定方程有特解：$u_1 = -\frac{2}{3}t^3 - \frac{x^3}{3}$, 作变换:$u = v + u_1$, 则$v$满足：

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx},\ t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ v|_{t=0} = x^2 + \frac{x^3}{3},\ v_t|_{t=0} = \sin 3x,\ -\infty<x<+\infty. \end{cases} \quad \cdots\cdots 4$$

由达朗贝尔公式：

$$v = \frac{(x+t)^2+(x-t)^2}{2} + \frac{(x-t)^3+(x+t)^3}{6} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin 3\xi d\xi$$

$= x^2 + t^2 + \frac{x^3}{3} + xt^2 + \frac{1}{3}\sin 3x \sin 3t$ ……………………………… 8

所以, $u = v + u_1 = x^2 + t^2 - \frac{2}{3}t^3 + xt^2 + \frac{1}{3}\sin 3x\sin 3t$……………… 10

三、(本题10分) **解**：泛定方程的特征方程：$\mu^2 + 2\mu + \lambda = 0 \Rightarrow \mu = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$, $\lambda > 1$时：

$y = Ae^{-x}\cos\sqrt{\lambda-1}x + Be^{-x}\sin\sqrt{\lambda-1}x$ ……………………………… 5

再利用$y(0) = y(9) = 0$的边界条件，确定出固有值和固有函数：

$\lambda_n = 1 + (\frac{n\pi}{9})^2,\ \ y_n(x) = e^{-x}\sin\frac{n\pi}{9}x$ ……………………………… 10

四、(本题15分) **解：** 作变换$v=u-x-1$, 则v满足齐次边界条件的混合问题：

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx},\ t>0,\ 0<x<1, \\ v|_{x=0}=v_x|_{x=1}=0, \\ v|_{t=0}=-x-1,\ v_t|_{t=0}=0,\ 0<x<1. \end{cases}$$ ……………………………… 3

作分离变量，令$v=T(t)X(x)$,得到固有值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(1)=0. \end{cases}$$

和微分方程：$T''+\lambda T=0$……………………………………………………………… 6

求解得到一系列分离变量形式解：

$v_n(t,x)=\left(C_n\cos\frac{(2n\pi+\pi)t}{2}+D_n\sin\frac{(2n\pi+\pi)t}{2}\right)\sin\frac{(2n\pi+\pi)x}{2}$…………………… 9

由叠加原理，设

$$v(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}v_n(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{(2n\pi+\pi)t}{2}+D_n\sin\frac{(2n\pi+\pi)t}{2}\right)\sin\frac{(2n\pi+\pi)x}{2}.$$

……………………………………………………………………………… 12

利用条件$v_t|_{t=0}=0$, 定出$D_n=0\,(n=0,1,2,....)$, 再由$v|_{t=0}=-x-1$得到：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\sin\frac{(2n\pi+\pi)x}{2}=-x-1,\ 其中$$

$$c_n=-2\int_0^1(x+1)\sin\frac{(2n\pi+\pi)x}{2}\,dx=-\frac{4}{2n\pi+\pi}+(-1)^n\frac{8}{(2n\pi+\pi)^2}$$

从而

$$u(t,x)=x+1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{2n\pi+\pi}-(-1)^n\frac{8}{(2n\pi+\pi)^2}\right)\cos\frac{(2n\pi+\pi)t}{2}\sin\frac{(2n\pi+\pi)x}{2}.$$

……………………………………………………………………………… 15

五、(本题15分) **解：** 设$u=u(r,z)$,并使用柱坐标，原来定解问题变为：

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ r<1,0<z<1, \\ u|_{r=1}=0, \\ u|_{z=0}=0,\ u|_{z=1}=1-r^2. \end{cases}$$ ……………………………… 3

利用分离变量，设$u=R(r)Z(z)$代入上式得到固有值问题：

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, \\ |R(0)|<+\infty,\ R(1)=0 \end{cases}$$

和$Z''-\lambda Z=0$. 6

求得一系列分离变量形式的解并叠加得到

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z\right)J_0(\omega_n r),\quad (\omega_n\text{为方程}J_0(\omega)=0\text{的第n个正根})$$

.... 9

利用

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_0(\omega_n r)=0\Rightarrow A_n=0.$$

而$u(r,1)=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n sh\omega_n J_0(\omega_n r)=1-r^2$ 12

结合递推公式，可算出广义Fourier系数：

$$B_n=\frac{1}{sh\omega_n||J_0(\omega_n r||^2}\int_0^1 r(1-r^2)J_0(\omega_n r)dr=\frac{8}{\omega_n^3 sh\omega_n J_1(\omega_n)}$$

即$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{\omega_n^3 sh\omega_n J_1(\omega_n)}\right)sh\omega_n z J_0(\omega_n r)$ 15

六、(本题15分) **解：** 作Fourier 变换：

$$\begin{cases} \overline{u}_t=-\lambda^2\overline{u}+\overline{u},\ ,\ t>0, \\ \overline{u}(0,\lambda)=E(\lambda),\ (\text{其中}F^{-1}(E(\lambda))=e^{-x^2}). \end{cases}$$ 5

解得：

$\overline{u}=e^tE(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$ 10

作反变换

$$u(t,x)=e^t\left(e^{-x^2}*F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}]\right)=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{4t}\}*\exp\{-x^2\}$$

$$=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{\xi^2}{4t}\}\exp\{-(x-\xi)^2\}d\xi=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\exp\{t-\frac{1}{1+4t}x^2\}$$ 15

七、(本题15分) **解：** (1)利用镜像法，格林函数

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_1)}$$

其中$M=(x,y), M_0=(\xi,\eta)\in\Omega, M_1=(-\eta,-\xi)$为$M_0$关于边界$x+y=0$的对称点. . 3

所以

$G=\dfrac{1}{4\pi}\ln\dfrac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ 6

(2) 利用格林函数可求出定解问题的解：

$$u(M)=-\int_l\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n_0}}\,dl_0$$

其中l_0为直线$\xi+\eta=0, \vec{n_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,-1)$, $dl_0=\sqrt{2}d\xi$. 9

而$\dfrac{\partial G}{\partial\vec{n_0}}\mid_{l_0}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{\partial G}{\partial\xi}+\dfrac{\partial G}{\partial\eta}))\mid_{\eta=-\xi}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{x+y}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}$. 12

所以,$u(x,y)=\dfrac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}d\xi$. 15

八、(本题10分) **解：** 设$1+x+2x^2+3x^3=\sum\limits_{k=1}^{3}a_kP_k(x)$, 由正交性：

$\int_{-1}^{1}P_4(x)P_k(x)\,dx=0,\ (k=1,2,3).$ 所以$\int_{-1}^{1}P_4(x)(1+x+2x^2+3x^3)\,dx=0.$ 3

由$P_n(x)$的表达式：$x^4=\dfrac{8}{35}P_4(x)+\sum\limits_{k=1}^{3}b_kP_k(x)$. 6

利用以上结果：

$$\int_{-1}^{1}P_4(x)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)\,dx=4\int_{-1}^{1}x^4P_4(x)\,dx$$

$=\dfrac{32}{35}\int_{-1}^{1}P_4^2(x)\,dx=\dfrac{32}{35}\dfrac{2}{(2\times4+1)}=\mathbf{\dfrac{64}{315}}$ 10