中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 B 期末复习试卷

数理方程 08 班制作，仅供学习交流使用

特别说明：这份复习试卷由作业题目中的易错问题组成，易错点分析详见每周的批改作业反馈。

一、求解一维半无界区域波动方程问题.(第一章作业补充题)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

解：法一

泛定方程的通解为

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

故有

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

进而可得

$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)$$

即

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + C$$

其中, $C = f_1(0) - f_2(0)$.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2a}\textstyle\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \tfrac{C}{2} \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \tfrac{1}{2a}\textstyle\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \tfrac{C}{2} \end{aligned}$$

以上二式均是在 $0 \le x < \infty$ 的前题下推得的. 因为 $x + at$ 总是大于, 等于零的, 故有

$$f_1(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{C}{2}$$

至于 $x-at$ 就不一定大于零了。
(1) 若 $x-at\geq 0$, 则有

$$f_2(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2}$$

(2) 若 $x-at<0$, 则上式不能用。但将边界条件代入通解得

$$f_1'(at)+f_2'(-at)=0$$

令 $x=at$, 并对上式从 0 到 x 积分得

$$f_1(x)-f_2(-x)=C$$

即

$$f_2(-x)=f_1(x)-C(x\geq 0)$$

故

$$\begin{aligned}f_2(x-at)=&f_2[-(at-x)](at-x\geq 0)\\&=f_1(at-x)-C\\&=\frac{1}{2}\varphi(at-x)+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-C\end{aligned}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right.\\ \left.+\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right],x-at<0\end{cases}$$

法二:
设想将半无限长的杆, 延拓 (拼接) 成无限长的杆，并将原定解问题的初始条件看成无限长杆的纵振动的初始条件在 $0\leq x<\infty$ 中的部分，即将原定解问题转化为

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}(-\infty<x<\infty,t>0)\\ u(x,0)=\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),0\leq x<\infty\\ f(x),-\infty<x\leq 0\end{cases}\\ u_t(x,0)=\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),0\leq x<\infty\\ g(x),-\infty<x<0\end{cases}\\ u_x(0,t)=0\end{cases}$$

则由 d'Alembert 公式立即可写出定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

其中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是未知的。
延拓的目标是要用延拓后的解来得到原问题的解，因此要让延拓后的解在原问题的定义域处的部分和原问题解相同。所以利用原问题的边界条件可以求得的 $u(x,t)$ 在 $0\le x<\infty$ 中的值即为原定解问题的解.

$$u_x(0,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi'(0+at)+\Phi'(0-at)\right]$$

$$+\frac{1}{2a}[\Psi(0+at)-\Psi(0-at)]=0$$

即

$$\frac{1}{2}\left[\Phi'(\xi)+\Phi'(-\xi)\right]+\frac{1}{2a}[\Psi(\xi)-\Psi(-\xi)]=0(\xi\ge 0)$$

由此有 $\Phi(\xi)=\Phi(-\xi),\Psi(\xi)=\Psi(-\xi)$ 这说明满足边界条件的 Φ 和 Ψ, 均为偶函数。即

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),0\le x<\infty\\ \varphi(-x),-\infty<x<0\end{cases}$$
$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),0\le x<\infty\\ \psi(-x),-\infty<x<0\end{cases}$$

亦即

$$f(x)=\varphi(-x),g(x)=\psi(-x)$$

注意到 $x+at$ 总于大于等于零的. 于是有

$$\Phi(x+at)=\varphi(x+at)$$
$$\int_0^{x+at}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

而 $x-at$ 有可能大于，等于或小于零.
(1) 若 $x-at\ge 0$, 则

$$\Phi(x-at)=\varphi(x-at)$$

$$\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{x-at}^{0}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

(2) 若 $x-at<0$, 则

$$\Phi(x-at)=\varphi[-(x-at)]=\varphi(at-x)$$

$$\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{x-at}^{0}\psi(-\xi)\mathrm{d}\xi\overset{\eta=-\xi}{=}-\int_{at-x}^{0}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta$$

即

$$\int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

最后得到

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right.\\ \left.+\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right],x-at<0\end{cases}$$

即为原问题的解.

二、求解下列固有值问题 (第二章第二题)

(1)

$$\begin{cases}y''-2ay'+\lambda y=0(0<x<1,a\text{ 为常数})\\ y(0)=y(1)=0;\end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases}(r^2R')'+\lambda r^2R=0(0<r<a)\\ |R(0)|<+\infty,R(a)=0\end{cases}$$

提示：令 $y=rR$. 解：

(1) 常微分方程为二阶常系数线性常微分方程，利用特征根法求解.

特征方程 $\mu^2-2a\mu+\lambda=0$, 其判别式 $\Delta=4a^2-4\lambda$

当 $\Delta=0$ 时，特征根为 $\mu_1=\mu_2=a$，方程的解为 $y(x)=(A+Bx)e^{\mu x}$ 由定解条件得 $A=B=0$，即只有零解，不成立.

当 $\Delta>0$ 时，有两个互异特征根 μ_1,μ_2 ，方程的解为 $y(x)=Ae^{\mu_1x}+Be^{\mu_2x}$, 由定解条件得

$$\begin{cases}A+B=0\\ Ae^{\mu_1}+Be^{\mu_2}=0\end{cases}$$

解得 $A=B=0$, 即只有零解，不成立.

当 $\Delta<0$ 时, 特征根 $\mu=a\pm\sqrt{\lambda-a^2}i$. 记 $\beta=\sqrt{\lambda-a^2}$，方程的解为

$$y(x)=e^{ax}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

代入定解条件得 $A=0$. 又 $B\neq 0$，则 $\sin\beta=0$，解得 $\beta=n\pi$

所以，固有值为

$$\lambda_n=a^2+(n\pi)^2$$

固有函数为

$$y_n(x) = e^{ax}\sin n\pi x$$

(2) 泛定方程写作

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda r^2 R = 0$$

按照提示作变量代换，令 $y = rR$. 代入方程得

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$$

此固有值问题参考第一小题，类似地可以解得
固有值

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

固有函数

$$R_n(r) = \frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{a}$$

三、利用分离变量法求解定解问题.(第二章第五题)
(1)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}(0 < x < l, t > 0) \\ u(t,0) = u_x(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = x \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_u = a^2u_{xx} - 2hu_t \\ \left(0 < x < l, t > 0, 0 < h < \frac{\pi a}{l}, h \text{ 为常数}\right) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \phi(x) \end{cases}$$

解：
(1) 写出分离变量形式，令 $u(t,x) = T(t)X(x)$.
代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{2n+1}{2l}\pi at + B_n \sin \frac{2n+1}{2l}\pi at$$

进而得到形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(A_n \cos \frac{2n+1}{2l}\pi at + B_n \sin \frac{2n+1}{2l}\pi at \right) \sin \frac{2n+1}{2l}\pi x$$

代入初始条件得

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin \frac{2n+1}{2l}\pi x = 0$$

和

$$u_t(0,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2l}\pi a B_n \sin \frac{2n+1}{2l}\pi x = x$$

进而得到

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l x \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = (-1)^n \frac{16l^2}{(2n+1)^3\pi^3 a}$$

所以得到定解问题的解

$$u(t,x) = \frac{16l^2}{a\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

(2) 写出分离变量形式，令 $u(t,x) = T(t)X(x)$.
代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} + \frac{2h}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t) = e^{-ht} \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t\right)$$

进而得到形式解

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-ht}\cdot(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\varphi(x)$$

和

$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\omega_n B_n-hA_n)\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)$$

进而得到

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad B_n=\frac{A_n}{w_n}h+\frac{2}{w_n l}\int_o^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

所以，定解问题的解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-ht}\cdot(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad B_n=\frac{A_n}{w_n}h+\frac{2}{w_n l}\int_o^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

四、求解定解问题.(第三章第十六题)

半径为 R 的无限长圆柱体的侧表面保持一定的温度 u_0 柱内的初始温度为零，求柱内的温度分布.

解：

由题意知，问题具有对称性，即 $u=u(t,r)$.

首先写出定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)(r<R,t>0)\\ u|_{r=R}=u_0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

非齐次边界问题，利用特解法求解.

令 $u(t,r)=v(t,r)+u_0$. 则定解问题转化为

$$\begin{cases}v_t=a^2\left(v_{rr}+\frac{1}{r}v_r\right)(r<R,t>0)\\ v|_{r=R}=0\\ v|_{t=0}=0\end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(t,r)=T(t)R(r)$.
代入方程得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} (rR'(r))'+\lambda rR(r)=0 \\ |R(0)|<+\infty, R(R)=0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=w_n^2(n=1,2,\ldots),\quad R(r)=J_0\left(w_n r\right)$$

其中 $w_n(n=1,2,3,\ldots)$ 为方程 $J_0(wR)=0$ 的所有正根.
将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T(t)=C_n e^{-w_n^2a^2t}$$

进而得到形式解

$$v(t,r)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n e^{-w_n^2a^2t}J_0\left(w_n r\right)$$

代入初始条件得

$$v(0,r)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0\left(\omega_n r\right)=-u_0$$

进而得到

$$\begin{aligned} C_n&=\frac{1}{N_{01n}^2}\int_0^R -u_0 rJ_0\left(\omega_n r\right)dr=\frac{-2u_0}{R^2J_1^2\left(\omega_n R\right)}\int_0^R rJ_0\left(\omega_n r\right)dr \\ &=\frac{-2u_0}{\omega_n^2R^2J_1^2\left(\omega_n R\right)}\int_0^{\omega_n R}xJ_0(x)dx \\ &=\frac{-2u_0}{\omega_n^2R^2J_1^2\left(\omega_n R\right)}\cdot\omega_n RJ_1\left(\omega_n R\right)=\frac{-2u_0}{\omega_n RJ_1\left(\omega_n R\right)} \end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$u(t,r)=u_0-2u_0\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{w_nRJ_1\left(w_nR\right)}e^{-w_n^2a^2t}J_0\left(w_n r\right)$$

其中 $w_n(n=1,2,3,\ldots)$ 为方程 $J_0(wR)=0$ 的所有正根. 五、求解定解问题.(第三章第二十八题)
半球的球面保持一定的温度 u_0 ，分别在下列条件下, 求这个半球内的稳定温度分布
(1) 半球底面保持常温零度

(2) 半球底面绝热

解：

(1) 写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \left(0 < r < a, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ u(a,\theta) = u_0 \\ u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

代入方程得

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\lambda$$

令 $x = \cos\theta$，记 $\Theta(\theta) = y(x)$. 得到固有值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)y'\right] + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, |y(1)| < +\infty \end{cases}$$

解得固有值和固有函数

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad y_n(x) = p_{2n+1}(x)$$

即

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad \Theta_n(\theta) = p_{2n+1}(\cos\theta)$$

将固有值问题代入关于变量 r 的常微分方程并求解得到

$$R_n(r) = A_n(r)r^{2n+1} + B_n(r)r^{-(2n+2)}$$

进而得到形式解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[A_n r^{2n+1} + B_n r^{-(2n+2)}\right]p_{2n+1}(\cos\theta)$$

由于在球内解题，由解的有界性可知，形式解可简化为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} p_{2n+1}(\cos\theta)$$

代入边界条件

$$u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n p_{2n+1}(\cos\theta) = u_0$$

进而可得

$$A_n = (4n+3)\int_0^1 u_0 \cdot p_{2n+1}(x)dx = u_0 \cdot \frac{(-1)^n(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{3u_0}{2a} r\cos\theta + u_0 \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} p_{2n+1}(\cos\theta)\right]$$

(2) 写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \left(0 < r < a, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ u(a,\theta) = u_0 \\ u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

代入方程得

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\lambda$$

令 $x = \cos\theta$，记 $\Theta(\theta) = y(x)$. 得到固有值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)y'\right] + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, |y(1)| < +\infty \end{cases}$$

解得固有值和固有函数

$$\lambda_n = (2n)(2n+1), \quad y_n(x) = p_{2n}(x)$$

即

$$\lambda_n = (2n)(2n+1), \quad \Theta_n(\theta) = p_{2n}(\cos\theta)$$

进而得到形式解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[A_n r^{2n} + B_n r^{-(2n+1)}\right] p_{2n}(\cos\theta)$$

由于在球内解题，由解的有界性可知，形式解可简化为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} p_{2n}(\cos\theta)$$

代入边界条件

$$u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n p_{2n}(\cos\theta) = u_0$$

进而可得

$$A_0=\int_0^1 u_0 p_0(x)\mathrm{d}x=u_0,\quad A_n=(4n+1)\int_0^1 u_0 p_{2n}(x)\mathrm{d}x=0$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=u_0$$

六、求解定解问题.(第四章第二题)

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}(t>0,0<x<l) \\ u_x(t,0)=0,u(t,l)=u_0(\text{ 常数}) \\ u(0,x)=u_1(\text{ 常数}) \end{cases}$$

解：对 t 作拉普拉斯变换，设

$$U(t,x)=\int_0^{+\infty} u(t,x)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

计算

$$L\left[u_t\right]=pU-u(0,x)=pU-u_1,U_x(p,0)=0,U(p,l)=\frac{u_0}{p}$$

定解问题转化为

$$\begin{cases} a^2U_{xx}=pU-u_1 \\ U_x(p,0)=0,U(p,l)=\frac{u_0}{p} \end{cases}$$

解得

$$U(p,x)=\frac{u_0-u_1}{p\cosh\frac{l\sqrt{p}}{a}}\cosh\frac{\sqrt{p}x}{a}+\frac{u_1}{p}$$

其极点为

$$p_0=0,p_k=-\frac{a^2\pi^2(2k+1)^2}{4l^2}$$

利用结合留数定理的拉普拉斯变换反演公式

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k\right]$$

得到定解问题的解

$$u=L^{-1}[U(p,x)]=u_0+\frac{4}{\pi}\left(u_1-u_0\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}\exp\left\{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2t\right\}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]$$

七、设平面区域 $\Omega=\{(x,y)|x+y>0\}$(补充)

1. 求出区域 Ω 的格林函数。

2. 求出区域 Ω 上的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \quad (x,y)\in\Omega \\ u(x,-x) = \varphi(x) \end{cases}$$

解：

(1) 使用镜像法求解.

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r\left(M, M_0\right)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r\left(M, M_1\right)}$$

其中 $M=(x,y), M_0=(\xi,\eta)\in\Omega, M_1=(-\eta,-\xi)$ 为 M_0 关于边界 $x+y=0$ 的对称点.
所以格林函数为

$$G = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

(2) 由题意知，有

$$u(M) = -\int_l \varphi\left(M_0\right)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0}\mathrm{d}l_0$$

其中 l_0 为直线 $\xi+\eta=0, \overrightarrow{n_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,-1), \mathrm{d}l_0=\sqrt{2}\mathrm{d}\xi$
其中法向偏导数为

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0}\right|_{l_0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left.\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)\right|_{\eta=-\xi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x+y}{\pi(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}$$

所以定解问题的解为

$$u(x,y) = \frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}\mathrm{d}\xi$$