参考解答

一 解: 1)$\Delta=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$, $(a\neq b)$, 它为双曲型方程. ....3 分

2) 特征方程: $(dy)^2+(a+b)dxdy+ab(dx)^2=0$.

解得两条特征线: $y+ax=c_1$, $y+bx=c_2$.

作变量替换: $\begin{cases}\xi=y+ax,\\ \eta=y+bx.\end{cases}$ ....5 分

则有 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}a & 1\\ b & 1\end{vmatrix}=a-b\neq 0$. 代入方程得到标准型 $\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0$. ....8 分

3) 解标准型可得到通解: $u(x,y)=f(y+ax)+g(y+bx)$, $f,g\in C^2(R)$. ....10 分

4) 代入定解条件有:

$\varphi(x)=u(x,-ax)=f(0)+g((b-a)x)$, 即 $g(t)=\varphi(\frac{t}{b-a})-f(0)$.

$\psi(x)=u(x,-bx)=f((a-b)x)+g(0)$, 即 $f(t)=\psi(\frac{t}{a-b})+g(0)$. ....12 分

又因为 $g(0)=\varphi(0)-f(0)$, 即 $f(0)+g(0)=\varphi(0)=\psi(0)$, 所以

$u(x,y)=\psi(\frac{y+ax}{a-b})+\varphi(\frac{y+bx}{b-a})-\varphi(0)$. ....15 分

二 解: (1) 特征线方程: $\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{2x}$, 即 $dy-2xdx=0$. 解得特征线 $y=x^2+c$, $c\in R$. ......3 分

(2) 令 $\begin{cases}\xi=y-x^2,\\ \eta=x,\end{cases}$ 则有 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-2x & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

代入方程有: $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=\xi+\eta^2$. ....5 分

积分得到: $u(\xi,\eta)=\xi\eta+\dfrac{1}{3}\eta^3+f(\xi)$, $\forall f\in C^1(R)$. 所以

$u(x,y)=(y-x^2)x+\dfrac{1}{3}x^3+f(y-x^2)=xy-\dfrac{2}{3}x^3+f(y-x^2)$. ....8 分

代入定解条件: $u(0,y)=f(y)=1+y^2$, 所以

$u(x,y)=xy-\dfrac{2}{3}x^3+1+(y-x^2)^2=x^4-\dfrac{2}{3}x^3+xy-2x^2y+y^2+1$. ....10 分

三 解 (1) $\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}, (0<x<\pi, t>0),\\ u|_{x=0}=0, u|_{x=\pi}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x),\end{cases}$

作分离变量: $u=T(t)X(x)$, 代入方程得 $\dfrac{T''}{4T}=\dfrac{X''}{X}=-\lambda$, 即

$X''+\lambda X=0,\quad T''+4\lambda T=0$. ....3 分

代入边界条件得: $X(0)=X(\pi)=0$, 有固有值问题: $\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X(\pi)=0.\end{cases}$ ....5 分

解得 固有值: $\lambda_n=n^2$, 固有函数 $X_n(x)=\sin nx$ $(n=1,2,...)$.

将 $\lambda_n=n^2$ 代入 T 的方程得: $T''+4n^2T=0$, 解得:

$T_n(t)=A_n\cos 2nt+B_n\sin 2nt$. ....8 分

故设级数解 $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos 2nt+B_n\sin 2nt)\sin nx$.

代入初始条件:

$$\varphi(x)=u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin nx. \Rightarrow A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx,$$

$$\psi(x)=u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}2nB_n\sin nx.\Rightarrow B_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nxdx.$$

所以 $\quad u_1=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos 2nt+B_n\sin 2nt)\sin nx.$

其中 $\quad A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx,\ B_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nxdx.$ .... 10 分

(2) 因为 $f(t,x)=\sin 2x\sin\omega t,\ \varphi(x)=\psi(x)=0$ 求解可利用冲量原理，或特征函数展开法或特解法. 下面采用特征函数展开法，由 (1) 知齐次定解问题对应的固有值 $\lambda_n=n^2$，固有函数为 $X_n(x)=\sin nx, n=1,2,......$ 令 $u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin nx,\ f(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)\sin nx$

则：$\quad f_2(t)=\sin\omega t,\ f_n(t)\equiv 0,\ (n\neq 2).$ .... 13 分

当 $n=2$ 时，得常微分方程定解问题：$\begin{cases}T_2''+16T_2=\sin\omega t,\ t>0\\ T(0)=T'(0)=0.\end{cases}$

解之得，$\quad T_2(t)=\frac{1}{16-\omega^2}(\sin\omega t-\frac{\omega}{4}\sin 4t).$ .... 15 分

当 $n\neq 2$ 时，$T_n(t)\equiv 0$ 所以 $\quad u_2(t,x)=\frac{1}{16-\omega^2}(\sin\omega t-\frac{\omega}{4}\sin 4t)\sin 2x.$ .... 18 分

直接应用洛必达法则，有 $\quad \lim_{\omega\to 4}u_2(x,t,\omega)=\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin 4t-t\cos 4t)\sin 2x.$ .... 20 分

四.解 (1)$g_1(r,\theta)=0,\ g_2(r,\theta)=f(r)$ 时，与 θ 无关，这时可设 $u=u(r,z)$ 与 θ 无关，即

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0,\ (r<a,0<z<h),\\ u|_{r=a}=0,\\ u|_{z=0}=0, u|_{z=h}=f(r).\end{cases}$$ .... 3 分

作分离变量：$u(r,z)=R(r)Z(z)$，代入方程得：$\quad \frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\frac{Z''}{Z}=-\lambda.$

所以，$R''+\frac{1}{r}R'+\lambda R=0,\ Z''-\lambda Z=0.$ .... 5 分

代入半径方向定解条件，并结合有界性条件，有：$\begin{cases}R''+\frac{1}{r}R'+\lambda R=0,\\ |R(0)|<+\infty, R(a)=0.\end{cases}$

固有值 $\lambda_n=\omega_{1n}^2$，其中 ω_{1n} 为 $J_0(\omega a)=0$ 的第 n 个正根，固有函数 $R_n(r)=J_0(\omega_{1n}r)$ .... 7 分

把 $\lambda_n=\omega_{1n}^2$ 代入 Z 的方程得到：$\quad Z_n(z)=A_nch\omega_{1n}z+B_nsh\omega_{1n}z.$ .... 9 分

令 $\quad u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_nch\omega_{1n}z+B_nsh\omega_{1n}z)J_0(\omega_{1n}r)$. 最后由 Z 方向条件定出 Fourier 系数：

$$u|_{z=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_0(\omega_{1n})r=0\Rightarrow A_n=0,$$

$$u|_{z=h}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_nsh\omega_{1n}hJ_0(\omega_{1n})r=f(r)\Rightarrow B_nsh\omega_{1n}h=\frac{\int_0^a f(r)J_0(\omega_{1n}r)rdr}{||J_0(\omega_{1n})r||^2}.$$

而 $||J_0(\omega_{1n}r)||^2=\frac{a^2}{2}J_1^2(\omega_{1n}a)$，因此解得：$\quad B_n=\frac{2\int_0^a f(r)J_0(\omega_{1n}r)rdr}{a^2sh\omega_{1n}h\,J_1^2(\omega_{1n}a)}$ .... 12 分

(2) 对于 $g_1=\varphi(r,\theta), g_2=\psi(r,\theta)$，作分离变量 $u=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，代入方程有

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0,\quad Z'' - \lambda Z = 0,\quad \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\lambda + \frac{\mu^2}{r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 16 \text{分}$$

相应的固有值问题：

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu^2\Theta = 0,\ (0 \le \theta \le 2\pi), \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' + (\lambda - \frac{\mu^2}{r^2})R = 0, \\ |R(0)| < +\infty,\ R(a) = 0. \end{cases} \cdots\cdots 20 \text{分}$$

五.解 (1) 基本解 $U(t, M)$ 满足：
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta_3 U + 3U\ (t > 0), \\ U\ |_{t=0} = \delta(M), M \in R^3, \end{cases}$$

作 Fourier 变换，有：$\hat{U}(t, \lambda) = F[U(t, x)]$. 则
$$\begin{cases} \frac{d\hat{U}}{dt} = -\rho^2\hat{U} + 3\hat{U},\ \rho^2 = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2, \\ \hat{U}\ |_{t=0} = 1. \end{cases}$$

解得： $\hat{U} = e^{-\rho^2 t}e^{+3t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6$ 分

所以 $U(t, x, y, z) = F^{-1}[\hat{U}] = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}+3t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 9$ 分

(2) 当 $f(t, x, y, z) = 0, \varphi(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 时，
$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= U * \varphi = \int_{R^3}(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}})^3 e^{+3t-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}} e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{1}{(\sqrt{1+4t})^3}e^{+3t-(\frac{1}{1+4t})(x^2+y^2+z^2)}. \end{aligned} \cdots\cdots 15 \text{分}$$

六. 格林函数满足定解问题：
$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x - \xi, y - \eta),\ (x > 0, \xi > 0), \\ G\ |_{x=0} = 0. \end{cases}$$

用镜像法求 G. 为此，记 $M_0 = (\xi, \eta)$，它关于边界 $x = 0$ 的对称点为 $M_1 = (-\xi, \eta)$. 在 M_0 和 M_1 各放 ϵ_0 和 $-\epsilon_0$ 的线电荷，产生的电场电势叠加就是格林函数 G. 即：
$$G = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M, M_0)} - \ln\frac{1}{r(M, M_1)}\right) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots 5 \text{分}$$

(2) 令 $\overline{y} = \frac{y}{5}$，则相应的定解问题为：
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{\overline{y}\overline{y}} = 0,\ (x > 0, -\infty < \overline{y} < +\infty), \\ u\ |_{x=0} = \varphi(5\overline{y}). \end{cases}$$

在 $(x, \overline{y})$ 的坐标系，由 (1) 的结果，以上问题对应格林函数
$$G = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\xi)^2 + (\overline{y}-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (\overline{y}-\eta)^2}.$$

在 $(x, \overline{y})$ 坐标系区域仍是右半平面，它在边界 $x = 0$ 的外法向为：$\vec{n_0} = (-1, 0)$. 由格林函数和相应 Poisson 方程第一边值问题解的关联公式：
$$u = -\int_{\xi=0}\varphi(5\eta)\frac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}d\eta = -\int_{\xi=0}\varphi(5\eta)(-\frac{\partial G}{\partial \xi})d\eta = \int_{\xi=0}\varphi(5\eta)(\frac{\partial G}{\partial \xi})d\eta \cdots\cdots\cdots\cdots 10 \text{分}$$

又
$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = \frac{x}{\pi}\left(\frac{1}{(\overline{y}-\eta)^2 + x^2}\right).$$

上式代入 u 的表达式，并利用 $\overline{y}=\frac{y}{5}$，我们得到

$$u(x,y)=\frac{5x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\varphi(\eta)}{(y-\eta)^2+25x^2}\right)d\eta \text{.......................... 15 分}$$

注：此题第 (2) 问也可利用 Fourier 求解

七 原方程经过变换 $x=\cos\theta$，并记 $y(x)=Z(arccosx)$，变为勒让德方程：

$$[(1-x^2)y']'+20y=0$$

由于此方程对应勒让德方程参数 $\lambda=20=4\times5=4\times(4+1)$，且有 $Z(0)$=1，所以所求的解为：

$$Z(\theta)=P_4(x)=P_4(\cos\theta)\text{.......................... 3 分}$$

而

$$Z(\tfrac{\pi}{2})=P_4(\cos\tfrac{\pi}{2})=P_4(0)=\tfrac{1}{2^4 4!}[(x^2-1)^4]^{(4)}\mid_{x=0}=\tfrac{3}{8}\text{.......................... 5 分}$$