分离变量法初探

——疑难点阶段性总结

- 分离变量法的心路历程：
  - 第一章我们学习了关于偏微分方程的基本概念，并且了解了一维无界区域波动方程的求解方法——行波法。通过对于行波法的引入过程分析，我们总结归纳得到一种求解偏微分方程的思路，即通解法：首先求出偏微分方程的通解，进一步结合定解条件得到方程的解。
  - 其实，第一章的通解法，从某种意义上讲，是借鉴了常微分方程的求解。我们的想法是：
    对于常微分方程的解法，可以先不考虑任何附加条件，直接求出方程的通解，通解中包含一些待定常数，然后利用附加条件确定这些常数，就得到具体问题的定解。偏微分方程能否采用这种思路求解呢？除了极少数特例，这种方法一般不可行。首先偏微分方程的通解很难得到，即使得到了通解，由于通解中含有待定函数，仅仅根据定解条件也很难完全确定这些待定函数。
  - 分离变量法是求解数学物理方程定解问题的一种基本解法，虽然其想法源自物理的驻波概念，由此推断方程的解可以写成空间坐标变量函数和时间变量函数的乘积，即存在分离变量形式的特解。这种解法的合理性和有效性其实和驻波没有直接关系，并且可以推广至各种类型的数学物理方程定解问题，其中就包括物理学中最重要的方程之一：量子力学的薛定谔方程。
  - 总结：其实我觉得，可以这样理解分离变量法。我们仍然是要基于求解数学问题最重要的转化和化归的思想。我们已经掌握了常微分方程的求解，那么，我们希望，可以从求解常微分方程的过程中，借鉴一些想法，或者把求解偏微分方程的问题转化为求解常微分方程的问题。在第一章，我们是借鉴了求解常微分方程的想法，求出偏微分方程的通解，进一步结合定解条件得到偏微分方程的特解。但是，我们发现，这种方法求解的问题比较有限。
    至少基于这些原因：
    - 偏微分方程的通解的求解难度比较大，我们只掌握求解一些特殊形式的方程的解
    - 这种方法对于定义域也有一些限制，比如，行波法只能求解无界区域的问题，有界区域的问题则不能用行波法

    所以呢，我们的直观想法是：能不能把求解偏微分方程的问题直接变成求解常微分方程的问题呢？因为对于常微分方程来说，求解通解的方法就会更多一些。
    基于此，我们尝试分离变量法。
    但这还是一种想法，比如第一章我们遇到想利用齐次化原理求解非齐次发展方程的问题，但是初始条件不是齐次的，不满足齐次化原理使用要求，那么，我们的做法是，对方程进行拆分，拆成齐次方程非齐次条件

和非齐次方程齐次条件，其中第一部分直接通解法求解，第二部分就可以利用齐次化原理。在这里，我们虽然这样做了，但是我们要问自己，这样做合理吗，分别求出来两部分解，怎么合成得到原问题的解？因为如果不能合成得到原问题的解，这样做是没有意义的。
恰好呢，叠加原理告诉我们，别怕，有我在。
叠加原理正是保证了以上操作的合理性，我们把求出来两部分解叠加，就是原问题的解。
在这里呢，我们同样要问自己，分离变量确实可以让求解简单了，但是，这样得到的解真的是原问题的解吗，原问题的解真的可以表达成分离变量形式吗？
这个呢，同样，也有理论保证。在这一章的第三节，我们会学习施刘定理，这个定理告诉我们，固有值问题的一些良好性质，比如固有值可数性，固有函数系的完备性。
所以，有他在，我们可以安心地使用分离变量法。

但是呢！

为啥还有但是…

emmm

确实要说一句但是

因为呢，我们要注意，虽然说有理论保证我们可以使用分离变量法，但是一定要注意，理论的成立条件。也就是说，分离变量法也是有使用条件的。（如果我们肆无忌惮地用，定理也保护不了我们了）

- 分离变量法的使用条件：
  - 有界区域：
    一定要注意，分离变量法只能处理有界区域上的问题。
    并且呢，其实只能处理一些常见的区域，这些区域呢要求具有良好的性质。（啥良好性质？这个呢，大家要在学习中自己总结了，我觉得呢至少是要在不同坐标维度上有独立性，即一组边界条件可以只由一个变量表示，如果存在边界相关性，可能无法直接分离变量求解）
  - 方程是齐次的
    理由：分离变量形式的特解只是一种假设，对普遍形式的数学物理方程都可以做出如此尝试，这种解是否真实存在，这种方法是否行之有效，都要经过具体定解问题的检验。实际上，只有对齐次偏微分方程才能在偏微分方程中实施分离变量的步骤，而对非齐次偏微分方程，原则上无法分离变量。当把分离变量特解代入齐次偏微分方程，通过变形把原方程改写成这样的等式：等式的一边只包含某个特定变量，等式另一边则包含剩余的变量，由于等式对空间的任意一点和任意时刻都要成立，等式两边就只能等于一个共同的常数，这样至少得到一个微分方程，如果还有偏微分方程，就继续进行上述步骤，直至得到关于每个单变量的微分方程为止。对非齐次偏微分方程，非齐次项是非零常数或已知函数，它无法写成分离变量的形式，也就不能进行前述分离变量过程以得到微分方程。所以要想运用分离变量法，原则上要求方程一定是齐次的。
  - 边界条件是齐次的：
    理由：根据分离变量法的基本理论，需要为这种微分方程配置适当的边界条件，构成所谓本征值问题。分离变量法的一个关键就是找到一组满足本征值问题的特解，称之为本征函数。本征值问题的构造方法是多样的，它通常由一个微分方程和边界条件组成，这里需要强调，分离变量得到的任何一个微分方程都是无法单独定解的，因为方程中含有未知的待定常数，只有同时考虑相应的限制边界条件，才能确定这些待定常数只可取一些特定的数值，即所谓的本征值，与此同时微分方程也将定解，即所谓的本征函数。现在讨论构成本征值问题的边界条件是如何确定的，由于微分方程是单变量的，与其配套使用的边界条件必然也是单变量的，它们通常由原始定解问题中的边界条件进行分离变量得到，这就要求边界条件必须是齐次的，才能分离变量得到某个单变量所满足的限制条件。
  - 方程和边界条件都是线性的
    理由：通过对齐次偏微分方程和齐次边界条件进行分离变量，得到微分方程和适当的边界条件构成本征值问题，求解本征值问题，将会得到一系列的本征值和本征函数。本征函数的实质就是符合方程和边界条件的特解，这些本征函数（特解）通常具有良好的性质，例如正交、归一、完备性。分离变量法能够成功的一个关键点出现了，这些特解的线性叠加仍是偏微分方程的解，并且还能满足齐次边界条件。要做到这一点，就必须要求方程和边界条件都是线性的。在此条件下，把特解叠加

起来形成所谓的一般解，注意一般解不是偏微分方程的通解，而是同时满足偏微分方程和齐次边界条件的一般解，其中必定包含一些待定的叠加系数，下一个步骤就是利用初始条件或其余（未用于构造本征值问题）的边界条件来确定叠加系数，实际上就是把表示初始条件或剩余边界条件的函数用本征函数来展开，这在数学上完全是可行的，本征函数的完备性保证了这一点，由此很容易确定一般解中的那些叠加系数。