Summary for 数理逻辑

by 鸢一折纸

为什么要有谓词演算？命题演算不是很好很完备嘛？

逻辑学的一个目的是将数学乃至于现实世界形式化，而命题演算 (L系统) 不足以表达所有的保真推理所依据的逻辑结构，因此需要更细致的语言，描述原子命题的内部结构，并引进量词运算

后面对于 K^+ 和 K_N 的引入 (待续)

关于函数符号 f (运算) 和谓词符号 P (关系)

函数符号构成项，谓词符号连接项而形成公式

函数符号更多的是描述这个个体变元/常元的attribute，而谓词符号是描述relationship

关于Trump会不会飞的问题……

- 原题如下：$\Gamma=\{$鸟会飞，死鸟不会飞，Trump是鸟，Trump是死鸟$\}$，得到 $\Gamma\vdash$ 特朗普会飞
- 为啥呢，因为前提集不相容……
- 大致证明如下：$f(x)$ 表示x是鸟，$g(x)$ 表示x是死鸟，$H(x)$ 表示x会飞
    - 已知：$\Gamma=\{\forall x\,(f(x)\rightarrow H(x)),\ \forall x\,(g(x)\rightarrow H(x)),\ f(y),\ g(y)\,\}$
    - 如果默认死鸟是鸟 (p)，那么由前提集 $\Gamma'=\{$鸟会飞，死鸟不会飞，特朗普是死鸟$\}$ 可以用归谬律证明 $\Gamma'\vdash\neg p$，理由如下：
        - $\forall x(g(x)\rightarrow f(x))$ 死鸟是鸟
        - $g(x)\rightarrow f(x)$ K4+MP,1,1.5
        - $f(x)\rightarrow H(x)$ 鸟会飞+K4
        - $g(x)\rightarrow H(x)$ HS,2,3
        - $g(x)\rightarrow\neg H(x)$ 死鸟不会飞+K4
        - $g(x)$ 特朗普是死鸟
        - 由MP规则，有 $\Gamma'\cup p\vdash H(x)$ 和 $\Gamma'\cup p\vdash\neg H(x)$
        - 再由归谬律可知 $\Gamma'\vdash\neg p$
    - 如果没有这个默认条件，那么加上特朗普的条件，就有：y 为表示Trump的个体变元
        - $f(y)$ Trump is a bird
        - $\forall x(f(x)\rightarrow H(x))$ Birds can fly
        - $\forall x(f(x)\rightarrow H(x))\rightarrow(f(y)\rightarrow H(y))$ K4
        - $f(y)\rightarrow H(y)$ 2, 3, MP
        - $H(y)$ 1, 4, MP
        - $\neg H(y)$ 同理可证
        - 故前提集不相容

关于否定肯定律的直接证明 (from yqy)

- 首先受到书上运用演绎定理的启发，并结合演绎定理的证明，再稍作改进
- 由否定前件律：$\neg p \to (p \to \neg q)$，其中q为任意公式，这个的证明需要7步 (*P21*)
- 再用L2和MP有：$(\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg q)$，这是第九步
- 再有L3，第10步
- 直接证明HS需要5步，之后有：$(\neg p \to p) \to (q \to p)$，这里是第十五步
- L2和MP之后有：$((\neg p \to p) \to q) \to ((\neg p \to p) \to p)$，这里是第十七步
- 因此只需要构造 $(\neg p \to p) \to q$ 为内定理，就可以在19步内得到证明，取 $q = p \to (\neg p \to p)$ 即可 (L1)

$$
\begin{aligned}
&\neg p \to (\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p) && \text{(L1)}\\
&(\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p) \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p))) && \text{(L3)}\\
&((\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p) \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p)))) \to ((\neg p \to (\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p) \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p))))) && \text{(L1)}\\
&\neg p \to ((\neg\neg(p \to (\neg p \to p)) \to \neg p) \to (p \to \neg(p \to (\neg p \to p)))) && \text{(2,3,MP)}\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

用 q 替代，简化书写，考试的时候不一定可以这么用……看老师心情 (bushi)

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \neg p \to (\neg\neg q \to \neg p) && \text{(L1)}\\
&(2)\quad (\neg\neg q \to \neg p) \to (p \to \neg q) && \text{(L3)}\\
&(3)\quad ((\neg\neg q \to \neg p) \to (p \to \neg q)) \to (\neg p \to ((\neg\neg q \to \neg p) \to (p \to \neg q))) && \text{(L1)}\\
&(4)\quad \neg p \to ((\neg\neg q \to \neg p) \to (p \to \neg q)) && \text{(2, 3, MP)}\\
&(5)\quad (\neg p \to ((\neg\neg q \to \neg p) \to (p \to \neg q))) \to ((\neg p \to (\neg\neg q \to \neg p)) \to (\neg p \to (p \to \neg q))) && \text{(L2)}\\
&(6)\quad (\neg p \to (\neg\neg q \to \neg p)) \to (\neg p \to (p \to \neg q)) && \text{(4, 5, MP)}\\
&(7)\quad \neg p \to (p \to \neg q) && \text{(1, 6, MP)}\\
&(8)\quad (\neg p \to (p \to \neg q)) \to ((\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg q)) && \text{(L2)}\\
&(9)\quad (\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg q) && \text{(7, 8, MP)}\\
&(10)\ (\neg p \to \neg q) \to (q \to p) && \text{(L3)}\\
&(11)\ ((\neg p \to \neg q) \to (q \to p)) \to ((\neg p \to p) \to ((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))) && \text{(L1)}\\
&(12)\ (\neg p \to p) \to ((\neg p \to \neg q) \to (q \to p)) && \text{(10, 11, MP)}\\
&(13)\ ((\neg p \to p) \to ((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))) \to (((\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg q)) \to ((\neg p \to p) \to (q \to p))) && \text{(L2)}\\
&(14)\ ((\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg q)) \to ((\neg p \to p) \to (q \to p)) && \text{(12, 13, MP)}\\
&(15)\ (\neg p \to p) \to (q \to p) && \text{(9, 14, MP)}\\
&(16)\ ((\neg p \to p) \to (q \to p)) \to (((\neg p \to p) \to q) \to ((\neg p \to p) \to p)) && \text{(L2)}\\
&(17)\ ((\neg p \to p) \to q) \to ((\neg p \to p) \to p) && \text{(15, 16, MP)}\\
&(18)\ (\neg p \to p) \to (p \to (\neg p \to p)) && \text{(L1)}\\
&(19)\ (\neg p \to p) \to p && \text{(17, 18, MP)}
\end{aligned}
$$

附：直接证明可以借鉴的思路 (不保证管用)

- 遇事不决先把三个公理都试一遍
- L1负责把已知公式变成蕴含词后件
- 对于子公式形式不变改变顺序的，L1接L2会有奇效
- 无从下手的时候想办法把公式里面的子公式换掉 (可以先空着写成 ○)，会看起来简洁一些
  - 比如把里面的某一个 p 换成 q 什么的...

附：HS、双否律、第二双否律、换位律直接证明略缩版

HS

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (q \to r) \to (p \to (q \to r)) & \text{(L1)} \\
(2) & p \to (q \to r) & \text{(MP)} \\
(3) & (p \to q) \to (p \to r) & \text{(L2, MP)} \\
(4) & p \to r & \text{(MP)}
\end{array}
$$

双否律

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \neg\neg p \to \neg\neg p & (\text{同一律}, \text{P21}) \\
(2) & \neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) & \text{(L1)} \\
(3) & \neg\neg p \to (\neg\neg p \to p) & \text{((L3+HS)*2)} \\
(4) & \neg\neg p \to p & \text{(L2,MP)}
\end{array}
$$

第二双否律

前面同双否律，只是所有的 p 换为 $\neg p$，然后最后

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \neg\neg\neg p \to \neg p & (\text{双否律}) \\
(2) & p \to \neg\neg p & \text{(1, L3, MP)}
\end{array}
$$

换位律

演绎定理最简单：$\{q \to p\} \vdash \neg p \to \neg q$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & q \to p & (\text{已知}) \\
(2) & \neg\neg q \to q & (\text{双否律}) \\
(3) & \neg\neg q \to p & \text{(1, 2, HS)} \\
(4) & p \to \neg\neg p & (\text{第二双否律}) \\
(5) & MP, L3, MP &
\end{array}
$$

不用演绎定理：

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \neg\neg p \to p & (\text{双否律}) \\
(2) & (p \to q) \to (\neg\neg p \to p) & \text{(L1, MP)} \\
(3) & (p \to q) \to (\neg\neg p \to (p \to q)) & \text{(L1)} \\
(4) & (p \to q) \to ((\neg\neg p \to p) \to (\neg\neg p \to q)) & \text{(L2, HS)} \\
(5) & (p \to q) \to (\neg\neg p \to q) & \text{(L2, 2, MP)} \\
(6) & q \to \neg\neg q & (\text{第二双否律}) \\
(7) & \neg\neg p \to (q \to \neg\neg q) & \text{(L1, MP)} \\
(8) & (p \to q) \to (\neg\neg p \to \neg\neg q) & \text{(5, L2, MP)} \\
(9) & (p \to q) \to (\neg q \to \neg p) & \text{(8, L3, HS)}
\end{array}
$$

从一阶演算的M有效说起

先来看一下逻辑的语义，这个我觉得有一点套娃，所以先从命题演算L说起

先看L里面有什么：命题变元和联结词 (以及由这两个构成的公式)。所以如果想要确定一个L公式的真值，需要给这两个都有赋值，而这两个都是定义在 F_2 域上的。

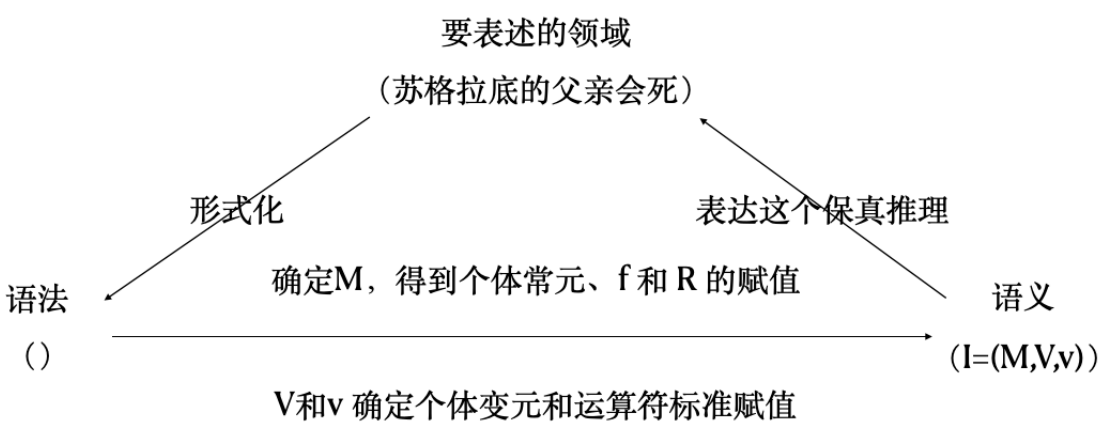
然后在来看一下K的缘起：K是把L里面的原子公式，也就是命题变元拆开来看其内部结构 (P62，Line11)，在谓词演算系统K里面，“项” 再加上项与项之间的关系，即原子公式，对应原来L中的命题变元。而项内部有个体变元、个体常元和运算符 (注意闭项的概念里面没有个体变元，但闭式是有可能有的)。

如PPT ch2.2 所言：个体是数学中“数”的推广，函数将被解释为个体到个体的映射。项将被解释为个体。例如，$g(x)$ 是从人到人的映射，所以 $g(s)$ 也是一个人。谓词将被解释为个体到真值的映射。不含个体变元的公式将为解释为命题，含个体变元的公式将被解释为命题函数

那么现在回来看对K的语义赋值：三元组 $\mathbf{I}(\mathbf{M},\mathbf{V},\nu)$。相应于L，在原子公式这个层次上，有对于整个**原子公式**真值的定义V和ν，其中V是对于变元真值的定义，ν是对于联结词真值的定义。那么为什么还会有M呢？因为在K中，变元、常元都不再限制于 F_2 域，而是根据具体的被抽象为逻辑的领域而赋值 (比如我要是研究初等数论的形式化(当然这个需要K$^+$的)，赋值范围就是整个自然数集$\mathbb{N}$了)。所以我们就需要对这个 “原子” 内部的夸克 (变元和常元) 和胶子 (函数和谓词) 来确定一个定义域，也就是三元组 $\mathbf{M}(\mathbf{D},\mathbf{F},\mathbf{P})$，即变/常元取值域、可用项结构集合、不同项之间可能的关系集合。给定了解释域M，K中只涉及闭项的原子公式便有了实际意义，立即可以解释为关于积集 $M = D \times F \times P$ 的元素的命题 (P82，Line11)。

注意M是集合！是集合！是集合！M本身不是映射关系，只是一个定义域，常元、函数和关系是这个定义域所表达的那个

借鉴面向对象的思路来讲，解释一个系统 (L、K、K$^+$、K$_N$) 就像定义一个类。这个类里面需要有预定义的固定的参数 (常元、标准解释的联结词)，有抽象的成员变量 (变元，在实例化的时候作出实际的映射赋值)，有成员方法 (公理、公设、推理规则)。然后我现在找这个结构的一个语义解释M，就相当于在实际定义这个类。论域就是确定了常元和变元的取值范围 (定义域)，函数集合定义了有关常元和变元(构成命题的项)的运算规则 (可以理解为是一个 *值*)，关系集合定义了项与项之间 *可以真也可以假* 的相对关系的 *判断* 。所以借助一个if判断句来说， `if(公式)` 就比如 `if(R( f(a1,c1,a2), c2 ))` ，就相当于 `y=f(a1,c1,a2)` 在加上 `if(R(y,c2))` 。项是一个整体，在语义的真值判断中，和单独的一个变元、常元（实际上也是项）的地位是相当的



关于L的可判定性

在ch1.7的PPT里面，这样写道：THM: (命题演算的可判定性) 存在一个能行方法A，对任何L公式p，当 $\vdash p$ 成立时，A可以在有效时间内回答YES；当 $\vdash \neg p$ 成立时，A可以在有效时间内回答NO

不过，对于 $\Gamma \vdash p$，就不是可判定的了，因为当 Γ 为无穷集时，¬p就不能在有限时间内判定出来

而且，K $\vdash p$ 是半可判定的

关于个体变元和命题变元

个体变元是在一阶逻辑中用的，命题变元，即命题符号，是在命题演算里面的

关于逻辑联结词和等词的优先级

即 $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \approx$ 这几个

按照优先级从高到低排序是 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \approx$

一个实际问题变成一阶谓词演算的

（题外话：我觉得其实有人加课程群讨论点问题可以接受的诶……虽然不同学校讲的确实不太一样 $>\_<$

任何军官都喜欢他表扬的每一个士兵；任何军官都不喜欢每一个怕死的士兵；所以，每一个被有些军官表扬的士兵是不怕死的

军官：x_1 ；士兵：x_2

a表扬b：$R_1(a,b)$ ；a喜欢b：$R_2(a,b)$ ；a怕死：$R_3(a)$

$p : \forall x_1 \forall x_2 \left(R_1(x_1, x_2) \rightarrow R_2(x_1, x_2)\right)$

$q : \forall x_1 \forall x_2 \left(R_3(x_2) \rightarrow \neg R_2(x_1, x_2)\right)$

$r : \forall x_2 \left(\exists x_1 R_1(x_1, x_2) \rightarrow \neg R_3(x_2)\right)$

求证：$\{p, q\} \vdash r$

$pf.$ (略去 MP 步)

易知 $r \leftrightarrow \forall x_2 \forall x_1 \left(R_1(x_1, x_2) \rightarrow \neg R_3(x_2)\right)$

对 p, q 各一次 $K4$，得到 $p_1 : R_1(x_1, x_2) \rightarrow R_2(x_1, x_2), \quad q_1 : R_3(x_2) \rightarrow \neg R_2(x_1, x_2)$

对 q_1 用一次换位律得到 $\neg\neg R_2(x_1, x_2) \rightarrow \neg R_3(x_2)$

由第二双否律和 HS 得到 $R_2(x_1, x_2) \rightarrow \neg R_3(x_2)$

再由 HS 得到 $r_1 : R_1(x_1, x_2) \rightarrow \neg R_3(x_2)$

对 r_1 用两次 Gen 得到 $\forall x_2 \forall x_1 \left(R_1(x_1, x_2) \rightarrow \neg R_3(x_2)\right)$，证毕

关于一些相似的证明定理

有几个相近的定理，需要注意一下不要搞混了：

$L3$ 和换位律：去 $\neg$ 和添 $\neg$

反证律和归谬律：前提集加 $\neg p$ 和加 p

双否律和第二双否律：去 $\neg\neg$ 和添 $\neg\neg$

$\exists$ 的定义：$\neg\forall x\neg p=\exists xp$，而 $\neg\exists x\neg p=\forall xp$ 需要 $K4$ 和两次双否律，以及 Gen

注意 $K4, K5$ 是有额外要求的：$K4$ 要求项 t 对 $p(x)$ 中的 x 是自由的，$K5$ 要求 x 不在 p 中自由出现

K 中的演绎定理，$\varGamma\cup\{p\}\vdash q\Rightarrow\varGamma\vdash p\rightarrow q$ 的方向要求证明所用 Gen 变元 (在证明序列中，$p_k=\forall xp_j$，x 就是 Gen 变元) 不在 p 中自由出现

关于自由出现

不出现也是不自由出现（P66 line4）。在判断自由出现时，如 x_i 有多少个是自由出现的，$\forall x_i$ 里面的 x_i 也要计算在内。写 $p(x)$ 时是指该公式中自由出现的 x，但写 $p(x)$ 时 x 可以不在 $p(x)$ 中自由出现或者根本不出现（P66 para4）。

关于 K 和 L

在 L 里面，永真式就是内定理，但在 K 中，永真式只是内定理的一部分。我觉得 K 里面和 L 永真式概念对应的应该是逻辑有效吧 $\models p$

演绎定理、反证律、归谬律的区别 (Gen 变元不在p自由出现)

任给公式p是不是K的内定理是**半可判定的**，和L中不一样

关于项解释的变元变通

对任何公式p和个体变元x，$I(\forall xp)=\begin{cases}t, & if\ for\ all\ d\in D,\ there\ is\ I_{x/d}(p)=t;\\ f, & else.\end{cases}$

1. 其中I的变体 $I_{x/d}$ 由V的变体 $V_{x/d}$ 构成：$I_{x/d}=_{df}(M,V_{x/d},\nu)$，
   $V_{x/d}(y)=_{df}\begin{cases}d, & if\ y=x;\\ V(y), & if\ y\neq x.\end{cases}$
2. 这个在书上叫：项解释的变元变通
   1. 首先，对于固定的解释域M，把所有的项解释组成的集合记为 Φ_M
   2. x是给定的个体变元，y是任意的个体变元，对于 $\varphi,\varphi'\in\Phi_M$，满足条件 $y\neq x\Rightarrow\varphi'(y)=\varphi(y)$，此时 φ 和 φ' 互为对方的 x 变通
3. $^{eg.}$依一阶解释的定义，$\forall xP(x,c)$ 为真，当且仅当对所有自然数$d\in D$，变体解释 $I_{x/d}(P(x,c))=t$

由定义知，互为 x 变通的 φ 和 φ' 的差别仅在于对变元 x 的指派可能不同（也可能相同）而他们对其他变元的指派全都相同（有没有想到 δ 函数的感觉）

这么定义，是要验证 $\forall x$ 的缘故，就需要将 x 取遍定义域，且只改变 x 的值