

实验五 线性方程组的迭代法实验

一. 实验目的

- (1) 深入理解线性方程组的迭代法的设计思想，学会利用系数矩阵的性质以保证迭代过程的收敛性，以及解决某些实际的线性方程组求解问题。
- (2) 熟悉 Matlab 编程环境，利用 Matlab 解决具体的方程求根问题。

二. 实验要求

建立 Jacobi 迭代公式、Gauss-Seidel 迭代公式和超松弛迭代公式，用 Matlab 软件实现线性方程组求解的 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和超松弛迭代法，并用实例在计算机上计算。

三. 实验内容

1. 实验题目

- 3-1: 分别利用 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代求解下列线性方程组，取 $x = (0,0,0,0,0,0)^T$ ，要求精度 $\varepsilon = 10^{-5}$ ：

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- 3-2: 分别取 $\omega = 1$ 、1.05、1.1、1.25 和 1.8，用超松弛法求解上面的方程组，要求精度为 $\varepsilon = 10^{-5}$ 。找出迭代次数最少时的 ω 值。

2. 设计思想

要求针对上述题目，详细分析每种算法的设计思想。

1. Jacobi 迭代: Jacobi 迭代的设计思想是将所给线性方程组逐步对角化，将一般形式的线性方程组的求解归结为对角方程组求解过程的重复。

2. Gauss-Seidel 迭代: Gauss-Seidel 迭代的设计思想是将一般形式的线性方程组的求解过程归结为下三角方程组求解过程的重复。

3. 超松弛迭代: 基于 Gauss-Seidel 迭代，对 $i=1, 2, \dots$ 反复执行计算迭代公式，即为超松弛迭代。

3. 对应程序

列出每种算法的程序。

```
% Jacobimethod.m
function [x,k]=Jacobimethod(A,b,x0,N,emg)
n=length(A);
x2=zeros(n,1);
x1=x0;
```

```

r=max(abs(b-A*x1));
k=0;

while r>emg
    for i=1:n
        sum=0;
        for j=1:n
            if i~= j
                sum = sum + A(i,j)*x1(j);
            end
        end
        x2(i)=(b(i)-sum)/A(i,i);
    end
    r = max(abs(x2-x1));
    x1=x2;
    k=k+1;
    if k>N
        disp('迭代失败, 返回');
        return;
    end
end
x=x1;

% Gaussmethod.m
function [x,k]=Gaussmethod(A,b,x0,N,emg)
n=length(A);
x2=zeros(n,1);
x1=x0;
r=max(abs(b-A*x1));
k=0;

while r>emg
    for i=1:n
        sum=0;
        for j=i:n
            if j>i
                sum=sum+A(i,j)*x1(j);
            elseif j<i
                sum = sum+A(i,j)*x2(j);
            end
        end
        x2(i)=(b(i)-sum)/A(i,i);
    end
    r=max(abs(x2-x1));
    x1=x2;

```

```

        k=k+1;

        if k>N
            disp("迭代失败, 返回");
            return;
        end
    end
end
x=x1;

% SORmethod.m
function [x,k] = SORmethod(A,b,x0,N,emg,w)
n=length(A);
x2=zeros(n,1);
x1=x0;
r=max(abs(b-A*x1));
k=0;
while r>emg
    for i=1:n
        sum = 0;
        for j=1:n
            if j>=i
                sum = sum +A(i,j)*x1(j);
            elseif j<i
                sum = sum +A(i,j)*x2(j);
            end
        end
        x2(i)=x1(i)+w*(b(i)-sum)/A(i,i);
    end
    r=max(abs(x2-x1));
    x1 =x2;
    k=k+1;
    if k>N
        disp('迭代失败, 返回');
        return;
    end
end
x=x1;

% experiment5.m
A=[-4,-1,0,-1,0,0;
    -1,4,-1,0,-1,0;
    0,-1,4,0,0,-1;
    -1,0,0,4,-1,0;
    0,-1,0,-1,4,-1;
    0,0,-1,0,-1,4];

```

```

b=[0,5,0,6,2,6]';
x0=[0,0,0,0,0,0]';
N=100;
emg=10^-5;
[x,k]=Jacobimethod(A,b,x0,N,emg);
disp("Jacobi:")
disp(x)
[x,k]=Gaussmethod(A,b,x0,100,emg);
disp("Gauss:")
disp(x)
w=[1,1.05,1.1,1.25,1.8];
disp("超松弛法:")
for index=1:5
    disp("w=")
    disp(w(index));
    [x,k]=SORmethod(A,b,x0,N,emg,w(index));
    disp('need k=')
    disp(k);
    disp(x);
    disp("-----")
end

```

4. 实验结果

列出相应的运行结果截图。

Jacobi:

```

-0.882351329244557
1.764702159765875
0.999997208054992
1.764704519795487
1.941173246726976
2.235289032483706

```

超松弛法:

w=

1

need k=

11

Gauss:

```

-0.820312500000000
1.562500000000000
0.375000000000000
1.718750000000000
0.875000000000000
1.500000000000000

```

```

-0.882352088451626
1.764705299933894
0.999999655495174
1.764705669173054
1.941176072788437
2.235293932070903

```

w=
1.0500000000000000

need k=
9

-0.882351915407469
1.764705768490600
0.999999895219948
1.764705913856286
1.941176394684010
2.235294091650618

w=
1.2500000000000000

need k=
18

-0.882355625282821
1.764704969556319
0.999999999979323
1.764704969599195
1.941175849802975
2.235293695482973 迭代失败，返回

w=
1.1000000000000000

need k=
11

-0.882352180898984
1.764706065804214
0.999999999975546
1.764706065793144
1.941176559041766
2.235294160299121

四. 实验分析

对实验过程进行分析总结，对比求解线性方程组的不同方法的优缺点，指出每种方法的设计要点及应注意的事项，以及自己通过实验所获得的对线性方程组求解问题的各种解法的理解。

在同等精度下，Gauss-Seidel 迭代法比 Jacobi 迭代法收敛速度快。一般来说，Gauss-Seidel 迭代法比 Jacobi 迭代法收敛要快，但有时反而比 Jacobi 迭代法要慢，而且 Jacobi 迭代法更易于优化。因此，两种方法各有优缺点，使用时要根据所需适当选取。

当松弛因子为 1 时，超松弛迭代方法等同于 Gauss-Seidel 迭代法，这和理论推导完全相同。另外，超松弛迭代法的收敛速度完全取决于松弛因子的选取，一个适当的因子能大大提高收敛速度。

可以看到，w=1，迭代 11 次，w=1.05,迭代 9 次，w=1.1,迭代 11 次，w=1.25,迭代 18 次，w=1.8,迭代失败。w=1.05 迭代次数最少。

(注：不要改变实验报告的结构，写清页码和题号，源程序以自己的姓名命名，如

3-1 题可命名为“zhangsan_3-1.m”，运行截图中应出现自己的姓名和题号)