Johannes Gutenberg-Universität Mainz SoSe 2025
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke

8. Übungsblatt Numerisches Praktikum

Abgabe bis 13.06.2025, 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1:*(Newtonprobleme, 15 Punkte)*
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

auf der kompletten reellen Achse $\mathbb{R}$.

(i) Vergewissern Sie sich, dass f mindestens eine reelle Nulstelle hat, indem Sie mit dem Bisektionsverfahren eine Nullstelle bestimmen. Wählen Sie als Startwerte $a = -2$ und $b = -1$ und verwenden Sie eine Fehlertoleranz von $tol = 4\varepsilon$ mit Maschinengenauigkeit ε. Geben Sie den approximierten Werte der Nullstelle an.

(ii) Stellen Sie die Newton-Iteration auf und implementieren Sie diese. Führen Sie immer 20 Newtoniterationen aus. Wählen Sie $x_0 = 2$ als Startwert und verifizieren Sie, dass das Newton-Verfahren gegen die gleiche Nullstelle konvergiert. Stellen Sie die zwanzig Newtoniterationen in einer Tabelle dar.

(iii) Wiederholen Sie den Vorgang für die Startwerte $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$ und stellen Sie Ihre Ergebnisse ebenfalls in einer Tabelle dar. Kommentieren Sie Ihre Beobachtungen.

(iv) Wählen Sie die Startwerte $x_0 = 0.0835$ sowie $x_0 = 1.51$ und wiederholen Sie den Prozess.

(v) Zur Begründung der Ergebnisse definieren wir

$$g(x) = x - f(x)/f'(x).$$

Das Newton-Verfahren kann dann über $x_{k+1} = g(x_k)$ ausgedrückt werden. Linearisieren Sie g, indem Sie g um den Entwicklungspunkt 0 durch das lineare Taylorpolynom $T(g(x; 0))$ ersetzen. Approximieren Sie anschließend

$$x_{k+1} \approx T(g(x_k; 0)).$$

Zeigen Sie, dass falls $|x_k| < \delta$, dass

$$|x_{k+1} - 1| < \delta$$

folgt. Begründen Sie auf Basis dieser Rechnung Ihre numerischen Ergebnisse aus den Aufgabenstellungen (iii) und (iv).

Bemerkung: Sie erhalten eine ähnliche Rechnung, falls Sie g um den Punkt $x = 1$ linearisieren. Sie erhalten in dem Fall $|x_{k+1}| < \delta$.

Aufgabe 2: *(Nullstellen von Polynomen, 10 Punkte)*

Wir betrachten zu einem Polynom $p(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ die Begleitmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie, dass $p(x)$ das charakteristische Polynom der Matrix A ist.

Wir betrachten die Polynome

$$q(x) = 3x^3 + 9x^2 - 12$$
$$u(x) = 5x^4 + 12.5x^3 - 12.5x^2 + 12.5x - 17.5$$

(ii) Plotten Sie die Polynom q und u auf dem Intervall $[-10, 10]$.

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Begleitmatrix die Nullstellen der Polynome q und u. Verwenden Sie für die Bestimmung der Eigenwerte ein Softwarepaket Ihrer Wahl.

(iv) Bestimmen Sie zusätzlich alle Nullstellen der Polynome q und u mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Verwenden Sie die Plots aus Aufgabenteil (ii) um gute Startwerte für das Newton-Verfahren zu ermitteln.

(v) Kommentieren Sie die praktische Anwendbarkeit des Newton-Verfahrens für diese Art von Problemen und vergleichen Sie mit der Methode der Begleitmatrix. Kommentieren Sie zusätzlich bzgl. der Stabilität der Verfahren.

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass die Verfahren zur Eigenwertbestimmung sehr stabil sind für die von uns betrachteten Probleme.

(vi) Überlegen Sie sich, warum die Methode der Begleitmatrix für orthogonale Polynome ggf. zu praktischen Schwierigkeiten führt.

Aufgabe 3: *(implizite Runge-Kutta Verfahren, 15 Punkte)*
Wir haben uns bereits damit befasst, dass man mit Hilfe von Quadraturregeln Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen approximieren kann. Eine Einschränkung die wir jedoch getätigt haben, war dass wir nicht zu berechnende Terme mit Hilfe einer Taylorapproximation eliminieren. Diese Einschränkung wollen wir in dieser Aufgabe aufheben. Wir erhalten somit eine Klasse von numerischen Methoden, welche man als implizite Runge-Kutta-Verfahren bezeichnet. Wir betrachten die nichtlineare Differentialgleichung

$$u' = -\lambda u^2 =: f(u)$$

mit dem Anfangswert $u(0) = 1$.

(i) Bestimmen Sie die analytische Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung.

Hinweis: Nutzen Sie die Trennung der Veränderlichen!

Wir betrachten die implizite Mittelpunktsregel zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diese ist gegeben Die explizite Mittelpunktregel ist

$$u^{(1)} = u^n + \frac{\Delta t}{2} f(u^n)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^{(1)}).$$

Hierbei beschreibt u^n eine Approximation der Lösung $u(t_0+n\Delta t)$ zum Zeitpunkt $t_0+n\Delta t$. Andererseits ist die implizite Mittelpunktsregel durch

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \frac{\Delta t}{2} f(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t f(u^{(1)}) \end{aligned}$$

gegeben. Insbesondere müssen wir also bei der impliziten Mittelpunktsregel im Allgemeinen ein nichtlineares System lösen um die Größe $u^{(1)}$ zu bestimmen.

(ii) Implementieren Sie die explizite Mittelpunktsregel und lösen Sie die Differentialgleichung numerisch für $\lambda = 1, 10, 50, 100, 150, 300, 400, 500$. Verwenden Sie als Endzeitpunkt $T = 1000\Delta t$ Rechnen Sie zusätzlich die benötigte Zeit aus, die die explizite Mittelpunktregel benötigt für das numerische Berechnen der Differentialgleichung. Für welche λ liefert die explizite Mittelpunktregel gute numerische Ergebnisse.

(iii) Implementieren Sie die implizite Mittelpunktsregel lösen Sie dabei die Stufengleichung für $u^{(1)}$ mit Hilfe einer Newton-Iteration. Führen Sie dabei mindestens immer 1000 Iterationsschritte durch. Wenden Sie die impliziten Mittelpunktsregel auf die gleichen Testprobleme an wie die explizite Mittelpunktsregel aus der vorherigen Aufgabenstellung und generieren Sie den gleichen Output.

(iv) Kommentieren Sie ihre Ergebnisse. Für welche λ liefert die implizite Mittelpunktsregel gute Ergebnisse.