Johannes Gutenberg Universität Mainz SoSe 2025
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke

5. Übungsblatt (nicht B.Ed.)

Abgabe bis 23.05.2025, 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1: *(lineare Splines, 15 Punkte)*

(i) Lesen Sie die Daten aus der Datei `data_linear.txt` ein. Die Datei enthält in den Spalten Zeiten t_i sowie Positionen x_i und y_i.

Hinweis: In MATLAB können Sie die Funktionen `dlmread` oder `readmatrix` verwenden. In Julia können Sie nach `using DelimitedFiles` die Funktion `readdlm` verwenden. Bitte beachten Sie, dass die Datei in der ersten Zeile einen Kommentar enthält, der die Bedeutung der Spalten angibt.

(ii) Erstellen Sie jeweils einen linearen Spline, um die Datenpunkte (t_i, x_i) und (t_i, y_i) zu interpolieren. Werten Sie die linearen Splines an 100 gleichverteilten Stützstellen zwischen $\min_i t_i$ und $\max_i t_i$ aus. Schreiben Sie die Ergebnisse in eine Datei mit dem gleichen Format wie `data_linear.txt` (also mit Kommentar in der ersten Zeile und einer Trennung der Zeilen durch Tabs oder Leerzeichen).

Hinweis: In MATLAB können Sie die Funktionen `dlmwrite` oder `writematrix` verwenden. In Julia können Sie nach `using DelimitedFiles` die Funktion `writedlm` verwenden.

(iii) Prüfen Sie, ob Ihre Ergebnisse richtig sind, indem Sie die Datei mit den interpolierten Werten auf der Website `https://splines.ianw.de` hochladen. Melden Sie sich dazu mit dem Benutzernamen "Lagrange" und dem Kennwort "chebyshev" an und wählen Sie die enstprechende Aufgabe zu linearen Splines aus. Starten Sie die graphische Ausgabe und schreiben Sie die angezeigte Zahl auf, wenn Ihre Ergebnisse korrekt sind. Geben Sie diese Zahl in Ihrer Abgabe an.

Aufgabe 2: *(kubische Splines, 15 Punkte)*
Sie haben die gleichen Aufgaben wie bei linearen Splines, aber mit vollständigen kubischen Splines bei denen die ersten Ableitungen an den Rändern Null sind. Die Datei `data_cubic_clamped.txt` enthält die entsprechenden Daten t_i, x_i und y_i.
Wählen Sie auf der Website `https://splines.ianw.de` die Aufgabe zu kubischen Splines aus und geben Sie die angezeigte Zahl an, wenn Ihre Ergebnisse korrekt sind.

Aufgabe 3: *(DFT, 10 Punkte)*
Gegeben sei ein periodisches Signal f auf dem Intervall $(-\pi, +\pi)$. Des Weiteren seien x_k Messpunkte ($k \in \{0, \dots, N\}$), an denen f ausgewertet wird. Insbesondere sei f an allen Datenpunkten x_k sinnvoll erklärt.

$$\widehat{f}(k) = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \exp(-ik/nj).$$

(i) Implementieren Sie die DFT und Verifizieren Sie die Implementierung mit Hilfe von harmonischen Funktionen. Stellen Sie die Visualisierung graphisch dar.

Hinweis: Die DFT bildet grundsätzlich erstmal komplexe Zahlen auf komplexe Zahlen ab. Überlegen Sie sich mit Ihrem Wissen über komplexe Zahlen und Fourierreihen wie Sie das Ergebnis sinnvoll visualisieren koennen.

(ii) Gegeben sei das Signal einer Rechtecksfunktion

$$x(t) = \operatorname{sgn}(\sin(5t)).$$

Werten Sie diese Funktion an sinnvoll gewählten äquidistanten Stützstellen aus. Plotten Sie die Fourierkoeffizienten sinnvoll.

(iii) Erklären Sie warum es aus numerischer Sicht nicht sinnvoll ist Signale mit Hilfe der DFT zu rekonstruieren.

Hinweis: Überlegen Sie sich welche Komplexität die DFT hat.

(iv) Recherchieren Sie welche Möglichkeit es gibt numerisch die DFT zu ersetzen und erklären Sie, warum Ihre angegebene Möglichkeit numerisch günstiger ist.