Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke SoSe 2025

1. Übungsblatt Numerisches Praktikum

Abgabe bis 25.04.2025 bis 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1:*(Implementieren von Operatornormen, 3 + 3 + 4 = 10 Punkte)*
Wir betrachten folgende Normen für einen linearen Operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\|A\|_1 := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
$$\|A\|_\infty := \max_{1\le i\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Hierbei beschreiben a_{ij} die Elemente der Matrix, die den Operator A darstellt.

(i) Implementieren Sie die gegebenen Operatornormen mit Hilfe eines Computerprogramms

(ii) Implementieren Sie die Matrix $H \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mit den Einträgen $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, sodass sie für variable n eine Darstellung erhalten

(iii) Berechnen Sie $\|H\|$ für alle drei Normen für mindestens 10 verschiedene N und stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle dar. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2:*(Konvergenzraten beim Wurzelziehen, 3 + 3 + 4 = 10 Punkte)*

Gegeben sei die Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{S}{x_n}\right)$$

Beide Folgen konvergieren gegen $\sqrt{S}$, falls der Startwert $x_0 > 0$ und $S > 0$ positiv sind.

(i) Implementieren Sie ein Programm, welches für gegebene, zulässige x_0 und S das n-te Folgeglied der Folgen x_n bzw. y_n ausrechnet.

(ii) Testen Sie für verschiedene Startwerte x_0 und verschiedene Iterationszahlen n die Konvergenz der Folge für $S = 1/2$

(iii) Stellen Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll in einer Tabelle dar und kommentirern Sie Ihre Ergebnisse

Aufgabe 3:*(Implementieren von zentralen Differenzen 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 20 Punkte)*

Wir betrachten folgende Approximationen der Differentiation einer hinreichend glatten Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &\approx D_{+,h}f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ (Vorwärts Differenzen)}\\
f'(x) &\approx D_{-,h}f = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \text{ (Rückwärts Differenzen)}\\
f'(x) &\approx D_{1,h}f = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \text{ (Zentrale Differenzen).}
\end{aligned}$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor

(i) Diskretisieren Sie das Intervall $(0,1)$ mit Hilfe eines äquidistanten Gitters mit N Gitterpunkten. Sorgen Sie dafür, dass ihr Gitter insgesamt $N + 2$ Gitterpunkte besitzt, wobei der erste Gitterpunkt immer $x_{min} = 0$ und der letzte Gitterpunkt immer $x_{max} = 1$ beträgt.

(ii) Vergewissern Sie sich, dass Sie ihre Funktion f geeignet an jedem Gitterpunkt auswerten können. Sie dürfen hierzu eine zusätzliche Testfunktion schreiben.

(iii) Leiten Sie für die jeweiligen Approximationen der Ableitung einen Ausdruck her, sodass sich diese schreiben lassen als Matrix-Vektor-Multiplikation. Wir sind dabei nur an der Approximation der Ableitung auf dem Intervall $(0,1)$ interessiert. Die Randpunkte $x_{min} = 0$ und $x_{max} = 1$ werten wir als sogenannte *"ghost cells"*. Insbesondere sollen die Funktionswerte von f an diesen Stellen unverändert bleiben, wenn die Differentiationsmatrix D auf die Funktion f angewendet wird. Sprich für Ihr Gitter $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1$ wenden Sie die finiten Differenzen auf die Punkte $x_1, \ldots, x_N$ an. Leiten Sie entsprechende Ausdrücke für die entstehenden Matrizen $D_{-,+,1}$ her, die die jeweilige finite Differenzen Approximation repräsentieren.

Hinweis: Wählen Sie h als Abstand zweier Gitterpunkte

(iv) Implementieren Sie die Matrix-Vektor-Multiplikation, indem Sie die Matrizen für $D_{-,+,1}$ implementieren

(v) Berechnen Sie $D_i f$ für die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \exp(x)$ und stellen Sie ihre Ergebnisse in einem geeignetem Plot dar. Glauben Sie, dass diese Art der Implementierung die effizienteste ist?

Hinweis: Plotten Sie nur Daten, die Sie explizit mit Ihrem Algorithmus berechnet haben.

(vi) Betrachten Sie die Testfunktion $f(x) = \sin(x)$ auf $(0,1)$. Führen Sie einen Konvergenztest durch, indem Sie den Fehler $\max_{x\in(0,1)} |f'(x) - D_i f(x)|$ in einem log-log Plot darstellen bzgl. verschriedener Gittergrößen h bzw. Gitterpunkten N.

(vii) Kommentieren Sie ihre Ergebnisse. Wie können Sie die Konvergenzordung an Ihrem erzeugten Plot ablesen?