Johannes Gutenberg-Universität Mainz SoSe 2025
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke

7. Übungsblatt Praktikum

Abgabe bis 06.06.2025, 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1 *(Gauß-Quadratur, 10 Punkte)*
Wir betrachten den Raum der Polynome vom Grad n mit dem gewichteten Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t)\exp(-t^2)\; dt. \tag{1}$$

Wir wollen entsprechend eine Gauß-Quadratur für

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-x^2)\; dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

bestimmen, unter der Annahme, dass das Integral auf der linken Seite existiert. Das zugehörige Orthogonalsystem ist von der Form

$$\varphi_{k+1}(t) = (t-\alpha_k)\varphi_k(t) - \beta_k\varphi_{k-1}(t).$$

Zusätzlich definieren wir $\varphi_{-1} = 0$ sowie $\varphi_0 = 1$ Mit etwas Geschick kann man zeigen, dass die Koeffizienten sich zu

$$\alpha_k = 0$$
$$\beta_k = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}, & k > 0 \end{cases}$$

(i) Implementieren Sie die Tridiagonalmatrix aus den Vorlesungnotizen (S.41) zur Bestimmung der Gauß-Knoten und Gewichte.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe eine Softwarepaketes Ihrer Wahl die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren der Matrix und rechnen Sie anschließend die Knoten bzw. Gewichte für die Gauß-Quadratur aus.

(iii) Implementieren Sie die resultierende Gauß-Quadraturregel für 4 Knotenpunkte und verifizieren Sie den Exaktheitsgrad von 7, indem Sie alle Monome bis zum Grad 8 testen. Die analytischen Werte des Integrals sind in Gleichung (2) dargestellt.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} x^k \exp(-x^2)\; dx = 0,\; \forall k \in 2\mathbb{N}-1 \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\; dx = \sqrt{\pi} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\; dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-x^2)\; dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} x^6 \exp(-x^2)\; dx = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} x^8 \exp(-x^2)\; dx = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}
\end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 2 *(Nullstellen der Legendrepolynome neu gedacht, 10 Punkte)*
Wir betrachten die Legendrepolynome, welche über folgende Eigenschaften definiert sind

- $P_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist ein Polynom vom Grad n.
- Die Polynome sind paarweise orthogonal, d.h.

  $$\langle P_n, P_m \rangle = 0$$

  für $n \neq m$
- $P_n(1) = 1$.

Für die Legendrepolynome gilt die Dreitermrekursion

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \left((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \right).$$

sowie

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x.$$

Des Weiteren kann man zeigen, dass

$$P_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{2n+1} - \frac{P'_{n-1}(x)}{2n+1}.$$

für $x \in [-1, 1]$ gilt.

(i) Implementieren Sie das Newton-Verfahren für die Legendre-Polynome. Werten Sie dabei die Legendrepolynome sowie deren Ableitungen, punktweise mit Hilfe der Dreitermrekursionen aus.

(ii) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Legendrepolynome bis zur Ordnung 6. Verwenden Sie als Startwert jeweils die Chebyshevknoten gegeben durch

$$x_j = -\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi \right).$$

für $j = 0, 1, \ldots, n$. Verwenden Sie für die Abbruchtoleranz $tol = 2\epsilon$, wobei ϵ die Maschinengenauigkeit bezeichnet. Bauen Sie zusätzlich eine maxiteration von $N_{it} = 20$ ein. Nutzen Sie zur Nullstellenbestimmung die Relation

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

(iii) Visualisieren Sie die Legendrepolynome bis zur Ordnung 6 inklusive der Nullstellen in einer Graphik.

Aufgabe 3 *(laufende Wellen, 20 Punkte)*

Wir betrachte die sogenannte Benjamin-Bona-Mahoney (BBM) Gleichung, gegeben über

$$u_t + u_x + uu_x - u_{txx} = 0,$$

auf dem Definitionsbereich $(0, T] \times (x_{min}, x_{max})$. Wir setzen des Weiteren eine Anfangsbedingung $u(0, x) = u_0(x)$ sowie periodische Randbedingung, sprich $u(t, x_{min}) = u(t, x_{max})$ voraus.

Die BBM-Gleichung ist ein einfaches Modell für nichtlineare-dispersive Wellen und kann zum Beispiel für die Modellierung von Tsunamiwellen verwendet werden. Somit ist man insbesondere an solitären laufenden Wellen interessiert. Diese haben die Form

$$u(t,x) = \Phi(x - ct), \tag{3}$$

wobei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Profil der Welle beschreibt. Wir definieren $\xi = x - ct$ und fordern $\lim_{|\xi|\to\infty} \Phi(\xi) = 0$ sowie $\Phi \in C^\infty$.

(i) Fügen Sie den Ansatz aus Gleichung (3) in die BBM-Gleichung und betrachten Sie die Variable ξ als Unbekannte. Dies transformiert die partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Zeigen Sie, dass dieser Ansatz auf

$$L\Phi = N(\Phi) \tag{4}$$

führt mit

$$\begin{aligned} L &= ((c-1)I - c\partial_\xi^2) \\ N(\Phi) &= \frac{\Phi^2}{2}. \end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der Kettenregel $\partial_t \Phi = -c\partial_\xi \Phi$ sowie $\partial_x \Phi = \partial_\xi \Phi$. Wenden Sie anschließend den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung an und integrieren Sie von $-\infty$ bis ξ.

Die BBM-Gleichung besitzt für obiges Problem die analytische Lösung

$$u(t,x) = \frac{A}{\cosh(K(x-ct))^2} \tag{5}$$

mit $A = 3(c-1)$, $K = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 1/c}$ sowie $c = 1.2$.

(ii) Implementieren Sie eine Fixpunktiteration der Form

$$\Phi_{n+1} = L^{-1} N(\Phi_n).$$

Wählen Sie dabei als Startwert $\Phi_0 = u(0,x)(1+\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 10^{-3}$. Diskretisieren Sie den Operator ∂_ξ^2 mit Hilfe zentraler Differenzen. Diese sind lokal auf einem äquidistanten Gitter durch

$$D_0^2 v(x) = \frac{v(x-\Delta x) - 2v(x) + v(x+\Delta x)}{\Delta x^2}$$

definiert. Des Weiteren können Sie die Auswertung durch den nichtlinearen Teil $N(\Phi)$ punktweise auf Ihrem Gitter auffassen. Testen Sie die Fixpunktiteration für verschiedene Gittergrößen und führen Sie immer 1000 Iterationen durch. Berechnen Sie $\|\Phi_{1000}\|_\infty$ und stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle dar.

(iii) Wir betrachten Φ^* als Lösung von Gleichung (4) und definieren die Iterationsmatrix $S(\Phi) = L^{-1}N'(\Phi)$. Zeigen Sie, dass Φ^* ein Eigenvektor der Iterationsmatrix $S(\Phi^*)$ zum Eigenwert $p = 2$ ist und begründen Sie darauf aufbauend Ihre Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabenstellung.

Eine Modifikation der Fixpunktiteration kann wie folgt vorgenommen werden. Man definiert zunächst

$$m(\Phi) = \frac{\langle L\Phi, \Phi \rangle}{\langle N(\Phi), \Phi \rangle}$$

Da wir hier explizit den diskretisierten Fall betrachtet, ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit dem euklidischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren. Die entsprechende Fixpunktiteration wird durch

$$\Phi_{n+1} = m(\Phi_n)^\gamma L^{-1} N(\Phi_n) \tag{6}$$

modifiziert. Hierbei bezeichnet $\gamma > 0$ einen zusätzlichen Sicherheitsfaktor.

(iv) Zeigen Sie, dass falls $\Phi_n \to \Phi_*$ eine konvergente Folge bzgl. (4) ist, dann gilt $m(\Phi_n) \to 1$. Begründen Sie darauf aufbauend, warum es sinnvoll ist die Modifizierung aus Gleichung (6) zu betrachten.

(v) Implementieren Sie die Modifizierung aus Gleichung (6) mit $\gamma = 2$.

(vi) Führen Sie die modifzierte Fixpunktiteration durch für $\Phi_0 = u(0, x)(1 + \varepsilon)$ mit einer Gitterdiskretisierung von $N = 100$. Führen Sie erneut 1000 Iterationen durch. Plotten Sie Ihre erhaltene Profilfunktion, sowie die analytische Lösung über dem Gitter zum Zeitpunkt $t = 0$. Kommentieren Sie qualitativ Ihre Ergebnisse.