Übungsblatt 8

Nils Döring Dominik Schwarzweier

6. Juni 2025

Aufgabe 1

(v) Das Taylorpolynom an der Stelle 0 der Funktion g ist wie folgt.

$$T(g(x_k, 0)) = g(0) + g'(0)x$$

Wir müssen also die Ableitung der Funktion g an der Stelle 0 berechnen. Wir wissen $g(x) = x - f(x)/f'(x)$, also ist $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Es folgt also für das Taylorpolynom:

$$T(g(x_k, 0)) = -\frac{f(0)}{f'(0)} + \frac{f(0)f''(0)}{f'(0)^2}x \approx x_{k+1}.$$

Wenn wir nun $f(x) = x^3 - 2x + 2$ betrachten folgt: $x_{k+1} \approx T(g(x_k), 0) = 1$, also ist offensichtlich $|x_{k+1} - 1| < \delta$.

Da der nächste Iterationsschritt unabhängig von x ist entsteht so ein Hin- und Herspringen.

Aufgabe 2

(i) Induktionsanfang: Offensichtlich ist $\det(xI_1 - A_1) = x + a_0$.
Induktionsvorraussetzung: Angenommen für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\det(xI_n - A_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$.
Induktinsschritt: Wir betrachten den Schritt von n zu $n+1$ und erhalten folgende Matrizen für A_{n+1} und $xI_{n+1} - A_{n+1}$

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_n \end{pmatrix} \text{ und } xI_{n+1} - A_{n+1} \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_n \end{pmatrix}$$

Beim entwickeln der Determinante nach der letzten Spalte ergibt sich auch mit Hilfe der Induktionsvorraussetzung und umbennen von $i = i + 1$ für $i \neq n$ und $n = 0$:

$$\det(xI_{n+1}-A_{n+1}) = x\det(xI_n-A_n)+a_n = x^{n+1}+a_{n-1}x^n+\ldots+a_0x+a_n = x^{n+1}+\sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Aufgabe 3

(i) Die Differentialgleichung ist separierbar, also folgt

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u^2 \Leftrightarrow \frac{1}{u^2}du = -\lambda dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{u^2}du = \int -\lambda dt \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = -\lambda t + C$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \lambda t + C \Leftrightarrow u(t) = \frac{1}{\lambda t + C}$$

Mit dem Anfangswert folgt dann $u(0) = \frac{1}{C} = 1$, also $C = 1$. Damit ist die Lösung

$$u(t) = \frac{1}{\lambda t + 1}.$$