Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke

SoSe 2025

10. Übungsblatt

Abgabe bis 27.06.2025, 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1: *(Beispiel LU-Zerlegung, 10 Punkte)*
Wir betrachten die elliptische partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) \text{ für } (x,y) \in \Omega = (0,1)^2, \\ u(x,y) &= 0 \text{ für } (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

(i) Verifizieren Sie, durch Nachrechnen, dass die Funktion $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ die PDE löst.

Wir wollen jetzt konzeptionell die PDE diskretisieren und numerisch eine Lösung bestimmen. Die Idee ist den Laplaceoperator $-\Delta$ geeignet zu diskretisieren (Stichwort: Finite Differenzen). Dies führt auf ein lineares System $Du = b$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Matrix $D \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, diese besitzt die (Block-)Form

$$D = \begin{bmatrix} T & -I & 0 & \cdots & 0 \\ -I & T & -I & \ddots & \vdots \\ 0 & -I & T & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & \cdots & 0 & -I & T \end{bmatrix}$$

wobei I die $n \times n$ Einheitsmatrix bezeichnet. Die Matrix T ist von der Form

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(ii) Implementieren Sie die LU-Zerlegung (ohne Pivotisierung) der Matrix D für verschiedene n.

(iii) Betrachten Sie die Funktion $f : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Wir diskretisieren $[0,1]^2$ mit Hilfe von $x_i = ih$ und $y_j = jh$ mit Schrittweite $h = \frac{1}{n+1}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Darauf aufbauend setzen wir $k = j \cdot n + i$ und definieren

$$b_k = f(x_i, y_j).$$

Lösen Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung das Problem $Du = b$ für verschiedene n. Bestimmen Sie für $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 50$ den Wert des Ausdrucks $\|R\|_\infty$ mit $R = u_{num} - u_{ana}$, wobei die Komponenten der analytischen Lösung gerade durch $u_{ana,k} = \sin(\pi x_i)\sin(\pi y_j)$ gegeben sind.

Bemerkung: Diese Aufgabe kann auch als weitere Sünde der linearen Algebra aufgefasst werden. Wir verwenden einen Algorithmus für dicht besetzte Matrizen für dünnbesetzte Matrizen. Sie sollten dieses Beispiel also eher im pädagogischen Sinne abspeichern.

Aufgabe 2:*(Cache-Misses, 15 Punkte)*
Diese Aufgabe soll demonstrieren wie Julia bzw. MATLAB Matrizen speichern und wie man sich diesen Fakt zu nutze machen kann. Gegeben sei eine untere Dreiecksmatrix L und ein Vektor b.

(i) Implementieren Sie die Rückwärtssubstitution über

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right) / l_{ii}, \quad \text{für} i = 2, \ldots, n$$

Wir bemerken, dass in diesem Algorithmus die Daten zeilenweise ausgelesen werden; Sprich van benötigt erst l_{i1}, dann l_{i2} usw. bis l_{ii-1}. In Julia bzw. MATLAB werden Matrizen aber bzgl. den Spalten abgespeichert. Wir wollen jetzt die Vorwärtssubstitution umformulieren, damit wir die Daten spaltenweise abrufen. Hierfür schreiben wir

$$0.\ x_1 := b_1, x_2 := b_2, \ldots, x_n = b_n$$

und updaten im jeweiligen Schritt

1. $x_1 := x_1/l_{11}$
2. $x_2 := x_2 - l_{21}x_1, x_3 := x_3 - l_{31}x_1, x_4 := x_4 - l_{41}, \ldots, x_n := x_n - l_{n1}x_1$
3. $x_2 := x_2/l_{22}$
4. $x_3 := x_3 - l_{32}x_2, x_4 := x_4 - l_{42}x_2, \ldots, x_n := x_n - l_{n2}x_2$

$\vdots$

$2n-2$. $x_{n-1} := x_{n-1}/l_{n-1,n-1}$

$2n-1$. $x_n := x_n - l_{n,n-1}x_{n-1}$

$2n$. $x_n := x_n/l_{nn}$.

(ii) Implementieren Sie die zeilenweise Vorwärtssubstitution.

(iii) Intitialisieren Sie für L

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ l_{ij}, & i > j \end{cases}.$$

wobei l_{ij} eine zufallsgenerierte Zahl aus der Menge $[-2, 1, 0, 1, 2]$ ist. Generieren Sie eine zufallsgenerierte Lösung x_* und definieren Sie $b := Lx_*$, wobei $x_{*,i} \in [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ gilt. Bestimmen Sie $\|x_* - x\|_\infty$ sowie die benötigte Laufzeit der Varianten der Vorwärtssubstitution für die
Matrixdimensionen $N = 10, 100, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 10000, 20000$.

(iv) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3:*(LU-Zerlegung mit Pivotisierung, 15 Punkte)*
Wir betrachten die Matrix mit den Matrixeinträgen

$$A_{ij} = \begin{cases} \max(\delta^i, 10^{-14}), & i = j \\ 1 + \frac{1}{i+j}, & \text{sonst}. \end{cases}.$$

mit $\delta = 0.001$. Zusätzlich definieren wir den Vektor $b = Ax_*$, wobei x_* der Vektor mit den Komponenten

$$x_{*,i} = i$$

ist. Implementieren Sie die LU-Zerlegung mit

(i) keiner Pivotisierung

(ii) vollständiger Pivotisierung.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit den beschriebenen Varianten für $n = 5, 10, 100, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000$ und bestimmen Sie $\|x_* - x\|_\infty$. Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle dar und kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.