Johannes Gutenberg Universität Mainz
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke

SoSe 2025

3. Übungsblatt Praktikum

Abgabe bis 09.05.25, 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1*(Splines für Arme, 2 + 3 + 3 + 2 = 10 Punkte)*
Wir betrachten die skalierte Rungefunktion

$$R(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \tag{1}$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$. Wir wollen diese Funktion stückweise durch Interpolationspolynome approximieren

(i) Diskretisieren Sie Ihr Intervall stückweise mit Hilfe von N Punkten, wobei N ein vielfaches einer natürlichen Zahl M ist.

(ii) Implementieren Sie auf dem Subintervall $x_p, \ldots, x_{p+m}$ die Lagrangeinterpolation.

(iii) Erstellen Sie zwei Plots. Einen Plot stellt die Rungefunktion mit der stückweisen Interpolation dar. Im zweiten Plot lassen Sie die Rungefunktion weg. Für das Plotten der stückweisen Lösung definieren Sie sich ein lokales Gitter, auf dem Sie die das lokale Interpolationspolynom auswerten.

(iv) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2*(Splines, 2 + 3 + 3 + 2 = 10 Punkte)*
Wir betrachten erneut die skalierte Rungefunktion (1)

(i) Diskretisieren Sie das Intervall mit Hilfe von N Gitterpunkten

(ii) Approximieren Sie die Rungefunktion mit Hilfe von linearen Splines aus dem erstellen Gitter der vorherigen Teilaufgabe.

(iii) Erstellen Sie ein zweites Gitter an dem Sie Ihren berechneten Spline auswerten. Wählen Sie Gitter die Intervallmittelpunkte $[x_i, x_{i+1}]$ Ihres ersten Gitters mit deren Hilfe Sie die Splines berechnet haben.

(iv) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3*(Approximation von Integralen, 2 + 4 + 6 + 6 + 2 = 20 Punkte)*
Wir betrachten den Ausdruck

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

und stellen uns die Frage wie wir mit unseren bekannten numerischen Werkzeuge eine approximierbare Form implementieren können. Wir greifen dabei auf die Polynominterpolation zurück. Gehen Sie dabei wie folgt vor

(i) Diskretisieren Sie das Intervall $[a, b]$ mit Hilfe von N Gitterpunkten so, dass

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b.$$

(ii) Gegeben sei das Polynom $p(x)$ über

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

was die stetige Funktion $f(x)$ approximiert mit Interpolationsdaten $(x_i, f(x_i))$. Leiten Sie einen Ausdruck für

$$\int_a^b p(x)$$

her.

(iii) Wir approximieren jetzt

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \int_a^b p(x)\ dx.$$

Schreiben Sie eine Funktion, welche mit Hilfe der Daten a_i den Wert von

$$\int_a^b p(x)$$

wiedergibt.

(iv) Gegeben sei das Intervall $[-1, 1]$. Testen Sie die Approximation für die Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^3(1+x) \\ g(x) &= \sin(\pi x) \\ h(x) &= |x| \end{aligned}$$

Bestimmen Sie zunächst den Wert des Integrals analytisch für die verschiedenen Funktionen. Bestimmen Sie die Koeffizienten des Interpolationspolynoms mit Hilfe der Vandermonde Matrix. Bestimmen Sie den Fehler für verschiedene Anzahl Gitterpunkte und kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Sie dürfen bei der Bestimmung der Interpolationspolynomkoeffizienten auf Softwarepakete zurückgreifen.

(v) Kommentieren Sie ob Sie dieses Vorgehen für effizient halten