Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke SoSe 2025

9. Übungsblatt Praktikum

Abgabe bis 20.06.2025, 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1*(Kondition des Konditionierungsproblems, 10 Punkte)*
Wir betrachten die Hilbertmatrix $H^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (vgl. Blatt 1) mit den Einträgen

$$H^n_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Mit etwas Geschick kann man zeigen, dass die Hilbertmatrix invertierbar ist und sich die Elemente der Inverse sich zu

$$(H^n_{ij})^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}(i+n-1)!(j+n-1)!}{\left[(i-1)!\right]^2\left[(j-1)!\right]^2(n-i)!(n-j)!(i+j-1)}$$

(i) Berechnen Sie $R_n = H^n(H^n)^{-1} - I$ für $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80$ und stellen Sie $\|R_n\|_\infty$ in einer Tabelle bzgl. N dar. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Die Berechnung der Inversen erfordert relativ schnell größere Datentypen, um die Fakultäten darzustellen. Um keinen Overflow zu verursachen müssen Sie die Zahlen mit entsprechend erweiterten Datentypen darstellen. Recherchieren Sie entsprechend, wie Sie solche Datentypen einsetzen können.

(ii) Bestimmen Sie für die gleichen n die Konditionszahl $\kappa = \|H^n\|\|(H^n)^{-1}\|$. Berechnen Sie hierfür $\|(H^n)^{-1}\|$ auf verschiedene Art und Weisen
- Sie berechnen die Inverse mit Hilfe der analytischen Darstellung.
- Sie berechnen die Inverse, indem Sie H mit einem Softwarepaket Ihrer Wahl invertieren. Nutzen Sie hierfür den `Float64`-Datentyp.
- Wiederholen Sie den vorherigen Schritt mit einem erweiterten Datentyp, wie Sie ihn in im ersten Aufgabenteil verwendet haben.

(iii) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse in Bezug der Konditionierung des Konditionproblems.

Aufgabe 2*(A sin of numerical linear Algebra, 15 Punkte)*
Wir betrachten die sogenannte Kahan-Matrix K zu einem Parameter ϵ

$$K_{ij} = \begin{cases} \epsilon^{i-j}, & j > i \\ 1, & j = i \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Zusätzlich sei der Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ über

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Implementieren Sie die Berechnung von $Kx = b$ mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Hinweis: Nutzen Sie, dass K eine untere Dreiecksmatrix ist. Sie können also die Gleichung gerade durch Rücksubsitution lösen.

(ii) Bestimmen Sie die numerische Lösung von x als Lösung von $Kx = b$ für Dimensionen $n = 5, 10, 20, 50, 100, 150, 200, 300, 500, 1000, 3000$ und $\epsilon = 4\varepsilon$, wobei ε die Maschinengenauigkeit von `Float64` bezeichnet. Bestimmen Sie dabei die Lösung via

- ihren implementierten Gauß-Algorithmus
- über $x = K^{-1}b$, indem Sie K^{-1} mit Hilfe eines Softwarepaketes Ihrer Wahl bestimmen.

(iii) Bestimmen Sie die Zeit, die die beiden Verfahren benötigen um die Lösung x zu berechnen für die verschiedenen N. Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle dar.

(iv) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse. Begründen Sie, warum es numerisch günstiger ist das lineare Gleichungssystem $Kx = b$ direkt zu lösen, anstatt über $x = K^{-1}b$.

Hinweis: Überlegen Sie sich wie viele Operationen die Berechnung der Inverse braucht.

Aufgabe 3 *(Gradientenverfahren vs. Newton, 15 Punkte)*
In dieser Übung betrachten wir die Rosenbrock-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2 \tag{1}$$

und wollen mit Hilfe des Gradientenverfahrens

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

sowie des Newton-Verfahrens angewandt auf $\nabla f(x)$ die kritischen Punkte der Rosenbrock-Funktion bestimmen.

(i) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J = \nabla f(x)$ sowie die Hesse-Matrix $H = \nabla^2 f(x)$ in jedem Punkt x.

(ii) Verifizieren Sie, dass $(1, 1)$ ein lokales Minimum der Rosenbrockfunktion ist.

(iii) Implementieren Sie das Gradientenverfahren für feste Schrittweite α, sowie das Newton-Verfahren. Nutzen Sie für das Newton-Verfahren ihre bestimmte Jacobi-Matrix für die Implementierung.

(iv) Wir betrachten den Startwert $(x_0, y_0) = (1.2, 1.2)$. Testen Sie für welche $\alpha > 0$ das Gradientenverfahren konvergiert mit einer Toleranz von $tol = 4 \cdot \epsilon$ mit Maschinengenauigkeit ϵ. Testen Sie auch das Newton-Verfahren für das gleiche Testproblem durch mit gleicher Toleranz.

Hinweis: Es ist ausreichend $\alpha = 10^{-i}$ zu betrachten und i entsprechend zu variieren.

(v) Wir betrachten den Startwert $(x_0, y_0) = (1.2, 1.2)$. Führen Sie 100 Iterationsschritte für das Gradientenverfahren sowie für das Newton-Verfahren durch. Nutzen Sie als Schrittweite für das Gradientenverfahren $\alpha = 0.001$. Plotten Sie die Konvergenzrate $p = \frac{\log(\|x_{k+1} - x_*\|_2)}{\log(\|x_k - x_*\|_2)}$ über die Iterationszahl k darstellen.

(vi) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.