Johannes Gutenberg Universität Mainz — SoSe 2025
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke

4. Übungsblatt Praktikum

Abgabe bis 16.05.2025, 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1:*(Implementierung kubischer Splines, 10 Punkte)*
Wir betrachten die Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(2\pi x)\\
g(x) &= \cos(\exp(x))
\end{aligned}
$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$. Wir möchten diese beiden Funktionen mit Hilfe von natürlichen Splines implementieren.

(i) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Steigungen σ_i auf.

(ii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit einem Softwarepaket Ihrer Wahl.

(iii) Berechnen Sie den Spline mit Hilfe der Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabenstellung

(iv) Visualisieren Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die berechneten Splines, sowie die analytischen Ableitungen der Testfunktionen darstellen. Kommentieren Sie zusätzlich Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2:*(Thomas-Algorithmus, 10 Punkte)*
Implementieren Sie den Thomas-Algorithmus. Verifizieren Sie Ihre Implementierung für ein von Ihnen konstruiertes Testproblem. Lösen Sie dabei das Testproblem mit Ihrer Implementierung sowie mit einem Softwarepaket Ihrer Wahl und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3:*(Bestimmung von Nullstellen von speziellen Polynomen, 20 Punkte)*
Wir betrachten die Legendrepolynome $p : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, welche sich aus dem Gram-Schmidt Verfahren bzgl. der Monomenbasis $\{1, x, x^2, \ldots\}$ bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)\ dx.$$

ergeben. Die ersten fünf Legendrepolynome sind

$$
\begin{aligned}
p_0(x) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\\
p_1(x) =& \sqrt{\frac{3}{2}}x\\
p_2(x) =& \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)\\
p_3(x) =& \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x)
\end{aligned}
$$

(i) Zeigen Sie, dass die Legendrepolynome für $n = \text{Grad}(p) \geq 1$ mindestens eine Nullstelle mit ungerader Vielfachheit besitzen, sprich eine Nullstelle, an dem p das Vorzeichen wechselt.

Hinweis: Machen Sie sich klar, was es bedeutet ein Orthogonalsystem bzgl. eines Skalarproduktes zu sein.

(ii) Zeigen Sie, dass p n paarweise verschiedene reelle Nullstellen ungerader Vielfachheit haben.

Hinweis: Orthogonalität.

Häufig ist es von Interesse, die Nullstellen von speziellen Polynomklassen (wie z.B. den Legendrepolynome) numerisch zu bestimmen. Ein einfaches Verfahren zum Bestimmen von Nullstellen von Funktionen ist das Verfahren der Bisektion. Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \supset D := [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$[1]. Wir definieren die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv. Wir setzen $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ sowie $y_n = f(c_n)$ und folgern

- $y_n = 0$. Wir brechen die Folge ab und setzen $x = c_n$.
- Falls $y_n > 0$. Setze $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = c_n$.
- Falls $y_n < 0$. Setze $a_{n+1} = c_n$ und $b_{n+1} = b_n$.

In der Praxis wird die rekursive Iteration irgendwann abgebrochen, sobald $|f(c_n)| \leq \varepsilon$

(iii) Entwickeln Sie ein Verfahren, mit dem man numerisch alle Nullstellen des n-ten Legendrepolynoms bestimmen kann. Nutzen Sie dabei das Verfahren der Bisektion zur Approximation der Nullstelle. Bauen Sie für die Approximation eine entsprechende Fehlertoleranz ein.

Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus (ii)

(iv) Bestimmen Sie die Nullstellen der Legendrepolynome p_1, p_2, p_3. Plotten Sie die Polynome und plotten Sie zusätzlich die bestimmten Nullstellen.

(v) Kommentieren Sie für wie effizient Sie das Verfahren halten, was Sie entwickelt haben.

[1] Die Definition der Folge ist genau umgekehrt, falls $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$.