Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke

SoSe 2025

2. Übungsblatt numerisches Praktikum

Abgabe bis 02.05.2025 bis 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1*(Vandermondematrix, 2 + 4 + 4 + 4 + 6 = 20 Punkte)*
Wir betrachten Daten $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ welche paarweise verschieden sind. Wir betrachten die Vandermondematrix, gegeben über

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_1^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_2^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_3^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie $\det V = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_i - x_j)$

Hinweis: Vollständige Induktion!

(ii) Schreiben Sie eine Funktion welche zu n Datenpunkten die Vandermondematrix generiert. Schreiben Sie zusätzlich eine Funktion, welche Ihnen den Wert der Determinante der Vandermondematrix ausgibt.

(iii) Betrachten Sie das Intervall $[0, 10]$. Schreiben Sie eine Funktion, die dieses Intervall mit Hilfe von N äquidistanten Gitterpunkten diskretisiert.

(iv) Verifizieren Sie die Darstellung der Determinante numerisch, indem Sie mit Hilfe eines Softwarepaketes die Determinante der Vandermondematrix numerisch berechnen und mit der analytischen Darstellung vergleichen. Nutzen Sie Ihr generiertes Gitter aus der vorherigen Aufgabenstellung, um entsprechende Daten für die Vandermondematrix zu generieren. Testen Sie die Determinante für verschiedene Anzahl Gitterpunkte N und stellen Sie den Fehler $|\det V_{ana} - \det V_{num}|$ zusammen mit den Anzahl Gitterpunkten sinnvoll in einer Tabelle dar. Kommentieren Sie zusätzlich Ihre Ergebnisse.

(v) Gegeben sei nun die Funktion $f : [0, 10] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(\exp(x))$. Interpolieren Sie nun diese Funktion mit Hilfe der Vandermondematrix. Gehen Sie dabei wie folgt vor

  (a) Stellen Sie zunächst sicher, dass Sie die Funktion f an all Ihren generierten Gitterpunkten auswerten können.

  (b) Stellen Sie das lineare System $Va = f$ auf und lösen Sie für verschiedene Anzahl Gitterpunkte N nach a auf.

  (c) Testen Sie für verschiedene N die durchschnittliche Zeit, die Ihr Programm braucht, um die unbekannten Vorfaktoren a auszurechnen. Hierzu lösen Sie das Problem mehrmals (z.B. 10 mal) und speichern jedes mal die benötigte Zeit ab. Danach rechnen Sie die durchschnittliche Zeit aus. Begründen Sie, warum so ein Vorgehen sinnvoll sein kann. Stellen Sie Ihre erhobenen Daten in einer Tabelle zusammen. Rechnen Sie zusätzlich für jede gewählte Anzahl

Gitterpunkte N die Konditionszahl $\kappa = \|V\|_1 \|V^{-1}\|_1$ aus. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Sie dürfen die Hilfe von Softwarepakete verwenden, um die Konditionszahl zu bestimmen.

Aufgabe 2 *(Lagrange-Interpolation, 1 + 2 + 2 + 5 = 10 Punkte)*

Gegeben seien die Funktionen $f, g, h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) =& |x| \\ g(x) =& |\sin(5x)|^3 \\ h(x) =& \exp(-x^2) \end{aligned}$$

(i) Modellieren Sie das Intervall $[-1, 1]$ mit Hilfe von zwei Gittern. Ihr erstes Gitter x_s generiert äquidistante Stützstellen, welche zur Polynominterpolation herangezogen wird. Ihr zweites Gitter generiert Datenpunkte, an dem die interpolierten Polynome ausgewertert werden sollen.

(ii) Implementieren Sie die baryzentrische Lagrangeinterpolation mit Hilfe der 2. baryzentrischen Formel.

(iii) Wenden Sie die baryzentrische Lagrangeinterpolation auf die Funktionen f, g, h an.

(iv) Erstellen Sie einen Konvergenztest für die Funktionen f, g, h, indem Sie Sie für ein hinreichend großes Gitter x_t die Lagrangeinterpolation für steigende Ordnung durchführen. Berechnen Sie die Supremumsnorm

Aufgabe 3 *(Horner-Schema, 2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte)*
Wir definieren das Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \tag{1}$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$. Das Horner-Schema dient zur Auswertung von Polynomen an bestimmten Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ und wird rekursiv berechnet über

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_i &= a_i + b_{i+1} x_0, \ i = \{0, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass das Polynom geschrieben werden kann

$$p(x_0) = b_0.$$

(ii) Begründen Sie, warum die Anwendung des Horner-Schemas numerisch wünschenswerter ist anstatt die Auswertung der Darstellung (1)

(iii) Schreiben Sie eine Funktion, welche Ihnen für ein gegebenes Polynom $p(x_0)$ berechnet mit Hilfe des Horner-Schemas

(iv) Wenden Sie Ihre Funktion auf das Polynom $p(x) = x^{10} + 23/1775x^9 + 1234/1775x^3 + 76/1775$ und erstellen Sie eine Wertetabelle für das Polynom.