Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Grundlagen der Numerik
Prof. Dr. Hendrik Ranocha
M.Sc. Sebastian Bleecke
SoSe 2025

6. Übungsblatt Praktikum

Abgabe bis 30.05.2025, 12:00 auf Moodle

Aufgabe 1:*(numerische Konvergenz von Quadraturregeln, 10 Punkte)*

Gegeben seien die Quadraturregeln

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right)$$
$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{90}\left(7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b)\right)$$

Die erste Quadraturformel ist die sogenannte Simpson'sche 3/8-Regel vom Exaktheitsgrad 3. Die zweite Quadraturformel die Bool'sche Regel vom Exaktheitsgrad 4.

(i) Implementieren Sie beide Quadraturregeln für allgemeine Funktionen $f : [a, b]\mathbb{R}$. als zusammengesetzte Quadraturregeln analog zur zusammengesetzten Trapezregel. Dazu unterteilen Sie das Intervall $[a, b]$ in $N \in \mathbb{N}$ äquidistante Teilintervalle, wenden die grundlegenden Quadraturformeln auf jedem Teilintervall an und addieren die Ergebnisse.

(ii) Testen Sie Ihre Implementierung, indem Sie diese auf die Funktionen

$$f(x) := \exp(x)$$
$$g(x) := |x|$$
$$h(x) := \cos(x)$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ anwenden. Berechnen Sie den Fehler der numerischen Approximationen mithilfe der zusammengesetzten Quadraturregeln.

$$\int_{-1}^{+1} u(x)\ dx = \sum_{i=0}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x)\ dx.$$

Stellen Sie die jeweiligen Fehler für verschiedene Gitterpunkte in einer Tabelle dar. Bestimmen Sie für die Fehlerberechnung den Wert des Integrals analytisch

(iii) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse

Aufgabe 2*(mathematisches Pendel, 15 Punkte)*
In dieser Aufgabe wollen wir uns mit der Modellierung eines Pendels beschäftigen. In Abbildung 1 ist der Sachverhalt hierfür skizziert. Mit Hilfe des zweiten Newton'schen Gesetzes erhalten wir folgende Bewegungsgleichung für den Winkel φ

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi), \tag{1}$$

wobei $\ddot{\varphi}$ die zweite Ableitung der Funktion φ bzgl. der Zeit t bezeichnet. Die Konstante $g = 9.81\ \frac{m}{s^2}$ bezeichnet die Erdbeschleunigung. Die Pendellänge l wollen wir mit $l = 1\ m$

konstant halten. In einem Experiment ist es meist gegeben zum Zeitpunk $t = 0$, das Pendel loszulassen, also $\dot{\varphi}(0) = 0$ anzusetzen, lediglich die Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ ist nicht fest vorgegeben, was $\varphi(0) = \varphi_0$ mit $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ nach sich zieht.

In Experimenten ist es meist von Vorteil die Periodendauer T, also die Zeit, die das Pendel benötigt um wieder in den Ausgangspunkt zurückzukehren, zu bestimmen. Das Problem an Bewegungsgleichung (1) ist, dass sich $\varphi(t)$ nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lässt, zur Bestimmung der Periodendauer müssen wir also eine Approximation vornehmen.

(i) Ein erster Ansatz wäre die rechte Seite der Differentialgleichung (1) zu linearisieren. Ersetzen Sie hierzu die rechte Seite der Differentialgleichung (1) durch das Taylorpolynom erster Ordnung mit Entwicklungspunkt 0 und lösen Sie das entstehende Anfangswertproblem. Bestimmen Sie anschließend die Periodendauer T_L der so erhaltenen approximativen Lösung φ_L.

(ii) Mit etwas mathematischen Geschick lässt sich die Periodendauer des Pendels durch

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)$$

ausdrücken, wobei $K(k)$ definiert ist über

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\xi)}}.$$

Zur Approximation von $K(k)$ wollen wir zwei Quadraturregeln anwenden, gehen Sie hierfür wie folgt vor

(a) Wählen Sie eine Partition des Intervalls $[0, 2\pi]$ mit N Punkten, welche

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

mit $x_k = a + kh$ und $h = \frac{b-a}{N}$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie die Funktionswerte $f(x_k)$, wobei x_k die jeweiligen Endpunkte des Intervalls bezeichnen und f die zu integrierende Funktion ist.

(c) Wenden Sie die Trapez-Regel und die Simpson-Regel zur Approximation des Ausdrucks $K(k)$ an, welche über

$$\text{zsmgesetzte Trapezregel: } \int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N\right)$$

$$\text{zsmgesetzte Simpsonregel: } \int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{3N}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{N-1} + f_N\right)$$

gegeben sind. Beachten Sie, dass im Falle der Simpson-Regel $n \in 2\mathbb{N}$ sein muss.

Implementieren Sie obige Schritte mit Hilfe eines Computerprogramms und plotten Sie für verschiedene Anfangswerte $\varphi \in [0, 2\pi]$ die jeweils bestimmten Periodendauern T_Q und T_L aus (a) und (b). Für welche Anfangswerte φ_0 halten Sie die Linearisierung in (a) für zulässig?

(iii) Die Funktion $K(k)$ wird auch als elliptisches Integral 1. Gattung in Normalform bezeichnet. Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß zeigte, dass sich $K(k)$ mit Hilfe des arithmetisch geometrischen Mittel über

$$K(k) = \frac{\pi}{2\ AGM(1, \sqrt{1-k^2})}$$

ausdrücken lässt, wobei das $AGM(a,b)$ als Grenzwert der Folgen

$$\begin{aligned}
a_0 &= a, \\
b_0 &= b \\
a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, \\
b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}
\end{aligned}$$

definiert ist.

Implementieren Sie das AGM auf einem Computer und berechnen Sie für die von Ihnen gewählten Startwerten aus Aufgabenteil 3(b) die Periodendauer T_{AGM} mit Hilfes des AGM. Probieren Sie dabei verschiedene Iterationsstufen des AGM aus. Vergleichen Sie die berechneten Werte T_{AGM} mit den aus Aufgabe 3(b) berechneten Werten der T_Q für beide Quadraturregeln, indem Sie φ_0 gegen $|T_{AGM} - T_Q|$ auftragen. Kommentieren Sie ihre Ergebnisse.

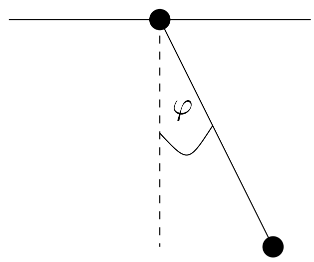

Abbildung 1: Skizze eines Pendels

Aufgabe 3*(Anwendung der Quadratur, 15 Punkte):*
Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem

$$u' = f(s, u(s)) \tag{2}$$

mit $u(t_0) = u_0$. In dieser Aufgabe arbeiten wir mit der zu einem AWP äquivalenten Integralgleichung

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds, \tag{3}$$

hierbei wollen wir f lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument annehmen.

(i) Wir formen jetzt Gleichung (3) in ein numerisches Verfahren um, gehen Sie hierfür wie folgt vor

  (a) Teilen Sie das Intervall $[t_0, t]$ in n äquidistante Punkte auf.

  (b) Betrachten Sie nun auf jedem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ die Integralgleichung (3). Wenden Sie auf das Integral die Trapezregel an (siehe Aufgabe 2) und linearisieren Sie problematische Terme über

$$u(t) \approx u(t_i) + \frac{du}{dt}(t_i)(t - t_i).$$

  Überlegen Sie sich insbesondere wie Sie $\frac{du}{dt}(t_i)$ mit Hilfe der Differentialgleichung darstellen können

  (c) Approximieren Sie die Lösung $u(t)$ nun induktiv über

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, u(s))\, ds$$

Implementieren Sie das beschriebene Verfahren mit Hilfe eines Computerprogramms

(ii) Testen Sie das numerische Verfahren aus Teilaufgabe 2(b), indem Sie es auf $u' = u(1-u)$ mit $u(0) = \frac{1}{2}$ anwenden auf dem Zeitintervall $[0, 10]$ Plotten Sie die numerische Lösung für verschiedene Gitterpunkteanzahlen N. Plotten Sie zusätzlich die analytische Lösung, die Sie vorher selber bestimmt haben.

(iii) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse und überlegen Sie sich, wie Sie ggf. das beschriebene Verfahren noch verbessern könnten.