Преобразование проектирования точек на прямой;

Даны несколько точек и их образы на прямой. Найти преобразование, переводящее исходные точки в образы. Преобразование должно быть возможно более простым, желательно, взаимно-однозначным, и при этом, линейным, кусочно-линейным или дробно-линейным. Известно, что две различные точки можно перевести в любые две точки, и существует (единственное) линейное их преобразование. Далее рассматривается вопрос отображения трех различных точек в три заданные.

Даны три различные точки x1,x2,x3 и их образы y1,y2,y3. Найти преобразование, определенное на всей прямой, переводящее, в частности, три точки в заданные.

Ищем сначала преобразование в виде

(a)*(x1, x2, x3) + d = (y1,y2,y3)

Можно еще записать это в однородной форме

(x1, 1) * (a, d) = y1

(x2, 1) * (a, d) = y2

(x3, 1) * (a, d) = y3

Здесь условий три, а параметров - два. Очевидно, две из точек y1,y2 можно выбрать произвольно, но третья точка y3 обязана удовлетворять условию типа равенства, чтобы преобразование, т.е. параметры a, d, существовало.

В однородной форме записи речь идет о решении матричного уравнения, где при заданной матрице (x,1) и правой части y надо найти найти вектор (a,d)

Будем искать пребразование в виде трех этапов

1. Погружение плоскости (x,1)->(x,1, f(x)) - каждой точке плоскости (x,1) сопоставляем в пространстве точку, приподнятую над исходной на расстояние f(x)

2. Однозначное преобразование в пространстве

(x1, 1, f1) * (a) = y1

(x2, 1, f2) * (d) = y2

(x3, 1, f3) * (c) = y3

Здесь c, f1=f(x1), f2=f(x2), f3=f(x3) - дополнительные (свободные) параметры, выбираемые так, чтобы матрица (x,1,f) была невырожденной.

Для невырожденности матрицы (x,1,f) необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условию:

det((x1,1,f(x1)),(x2,1,f(x2)),(x3,1,f(x3)) != 0

Если матрица (x,1,f(x)) невырождена, вектор (a,d,c) однозначно определяется по вектору y и матрице (x,1,f).

3. Обратное проектирование из пространства на прямую

Поскольку на втором этапе определен вектор (a,d,c), то для произвольной точки x находим образ по формуле

x->y, где y=(x,1,f(x))*(a,d,c)

Для того, чтобы эта схема работала при конкретном выборе точек x1,x2,x3, нужно выбрать функцию f(x) так, чтобы определитель в конце п.2 был ненулевым для этой

конкретной тройки точек.
Функция не может быть константой - иначе в определителе третий столбец будет пропорционален второму.
Функция не может быть линейной - иначе в определителе третий столбец будет линейной комбинацией первых двух.

Желательно найти условия на функцию f, для которой определитель не равен нулю при любом выборе троек различных точек.
Функции, для которых это выполняется, можно назвать универсальными.

Например, в качестве универсальной годится функция f(x)=x^2 - поскольку определитель в этом случае становится определителем Вандермонда, а он не равен нулю, если точки x различны.

Также годится любая функция, ряд Тейлора которой имеет ненулевой коэффициент при степени, большей 1 (если только коэффициенты c[i] ряда Тейлора c[i]*x^i не образуют нулевого скалярного произведения с определителями Вандермонда (x,1,x^i)).

Поскольку преобразование
x->y, где y=(x,1,f(x))*(a,d,c)
можно представить в виде коррекции линейного преобразования
x->a*x+d
по формуле
x->(a*x+d)+f(x)*c
то естественно искать такие преобразования, которые имеют малую коррекцию f(x)*c.
Константа c здесь определяется выбором исходных троек пар точек и не зависит от x.

Пример малой коррекции - сигмоида - функция f(x)=1/(1+exp(-x)). Здесь коррекция ограничена интервалом от 0 до c. Очевидно, домножив сигмоиду на досаточно малое число, можно добиться, чтобы преобразование отличалось от линейного как угодно мало по абсолютной величине.

Реализация алгоритма и контрольный пример

```
> with(LinearAlgebra) : with(plottools) : with(plots) :
  M0 := Matrix(3, 3, [x1, 1, f1, x2, 1, f2, x3, 1, f3]);
  det0 := simplify(Determinant(M0));
  adc0 := simplify(MatrixInverse(M0).⟨y1, y2, y3⟩);
  simplify(adc0.⟨u, 1, fu⟩);

  x := ⟨0.2, 0.6, 0.8⟩; y := ⟨0.1, 0.2, 0.4⟩;
  L := point([[x[1], y[1]], [x[2], y[2]], [x[3], y[3]]]);
  f := proc(x) 1/(1 + exp(-x)) end proc;
  plot(f(u), u=-1..2, title='Сигмоида');
```

```
M := Matrix(3, 3, [x[1], 1, f(x[1]), x[2], 1, f(x[2]), x[3], 1, f(x[3])]);
det := Determinant(M);
adc := MatrixInverse(M).y;
adc.<x[1], 1, f(x[1])> - y[1];
adc.<x[2], 1, f(x[2])> - y[2];
adc.<x[3], 1, f(x[3])> - y[3];
g1 := adc.<u, 1, f(u)>;
pg1 := plot([g1], u = -1..2, -1..5, color = 'blue') :
display([pg1, L], view = [-1..2, -1..5], color = ['blue', 'red'], legend = ['first', 'points'], title =
    'Трансформация с сигмоидой');
f := proc(x) x^2 end proc;
plot(f(u), u = -1..2, title = 'Квадратичная функция');
M := Matrix(3, 3, [x[1], 1, f(x[1]), x[2], 1, f(x[2]), x[3], 1, f(x[3])]);
det := Determinant(M);
adc := MatrixInverse(M).y;
adc.<x[1], 1, f(x[1])> - y[1];
adc.<x[2], 1, f(x[2])> - y[2];
adc.<x[3], 1, f(x[3])> - y[3];
g2 := adc.<u, 1, f(u)>;
pg2 := plot(g2, u = -1..2, -1..5, color = 'green') :
display([pg2, L], view = [-1..2, -1..5], color = ['green', 'red'], legend = ['second', 'points'], title =
    'Трансформация с квадратичной функцией');
display([pg1, pg2, L], view = [-1..2, -1..5], color = ['blue', 'green', 'red'], legend = ['first', 'second
    ', 'points'], title = 'Обе трансформации');
plot(g1 - g2, u = -1..2, title = 'Разность трансформаций')
```

$$M0 := \begin{bmatrix} x1 & 1 & f1 \\ x2 & 1 & f2 \\ x3 & 1 & f3 \end{bmatrix}$$

$$det0 := (x2 - x3)\, f1 + (-x1 + x3)\, f2 + f3\, (x1 - x2)$$

$$adc0 := \begin{bmatrix} \dfrac{(y2 - y3)\, f1 + (-y1 + y3)\, f2 + f3\, (y1 - y2)}{(x2 - x3)\, f1 + (-x1 + x3)\, f2 + f3\, (x1 - x2)} \\[2ex] \dfrac{(x2\, y3 - x3\, y2)\, f1 + (-x1\, y3 + x3\, y1)\, f2 + f3\, (x1\, y2 - x2\, y1)}{(x2 - x3)\, f1 + (-x1 + x3)\, f2 + f3\, (x1 - x2)} \\[2ex] \dfrac{(-y2 + y3)\, x1 + (y1 - y3)\, x2 - x3\, (y1 - y2)}{x1\, (-f2 + f3) + x2\, (f1 - f3) - x3\, (f1 - f2)} \end{bmatrix}$$

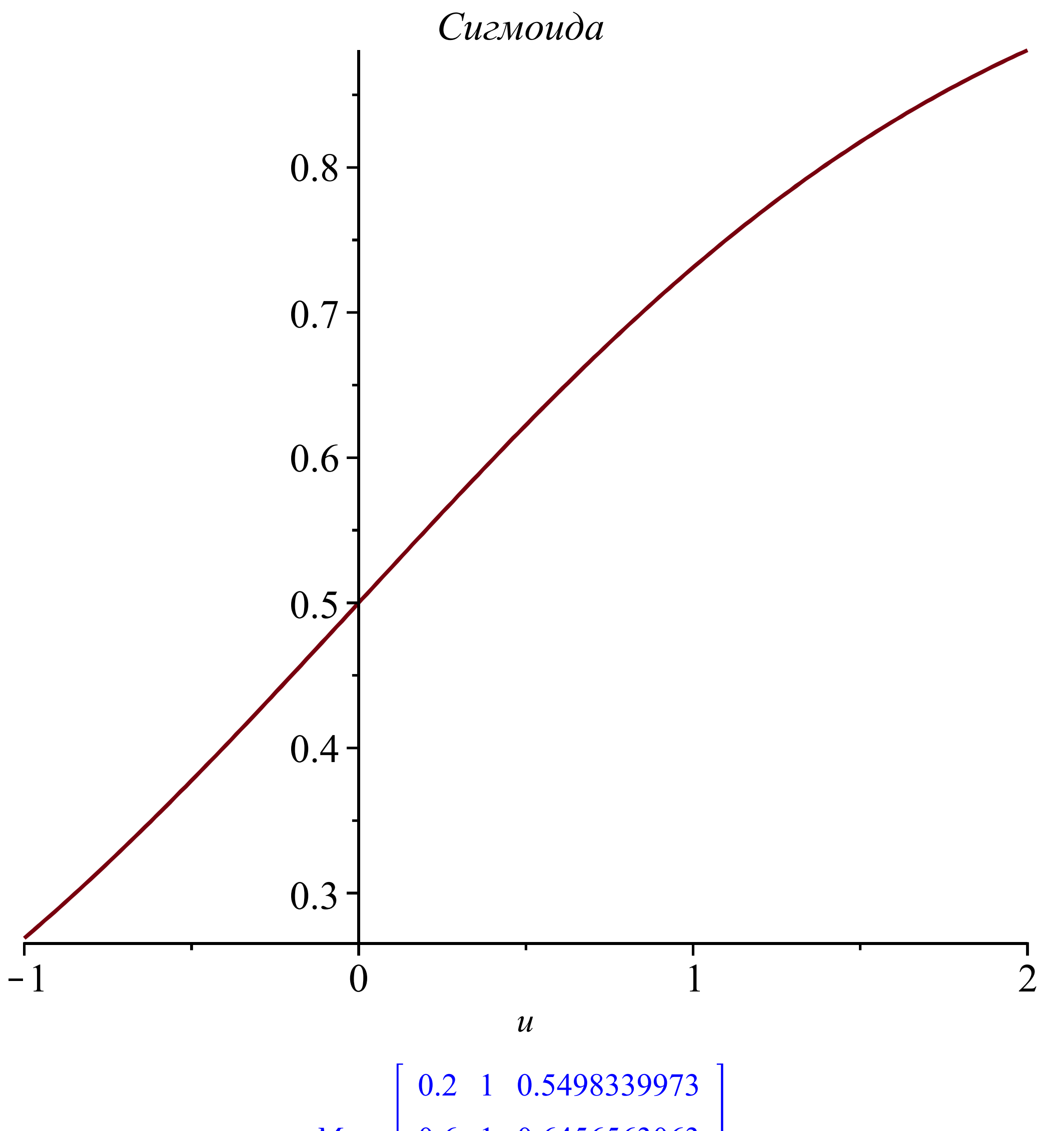
$$\left(\frac{(y2 - y3)\, f1 + (-y1 + y3)\, f2 + f3\, (y1 - y2)}{(x2 - x3)\, f1 + (-x1 + x3)\, f2 + f3\, (x1 - x2)} \right) u + \left(\frac{(x2\, y3 - x3\, y2)\, f1 + (-x1\, y3 + x3\, y1)\, f2 + f3\, (x1\, y2 - x2\, y1)}{(x2 - x3)\, f1 + (-x1 + x3)\, f2 + f3\, (x1 - x2)} \right) - \left(\frac{(y2 - y3)\, x1 + (-y1 + y3)\, x2 + x3\, (y1 - y2)}{x1\, (-f2 + f3) + x2\, (f1 - f3) - x3\, (f1 - f2)} \right) fu$$

$$x := \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

$$y := \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$L := POINTS([0.2, 0.1], [0.6, 0.2], [0.8, 0.4])$$

$$f := \textbf{proc}(x)\ 1/(1+\exp(-x))\ \textbf{end proc}$$



$$M := \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.5498339973 \\ 0.6 & 1 & 0.6456563063 \\ 0.8 & 1 & 0.6899744812 \end{bmatrix}$$

$$det := 0.00143719184$$

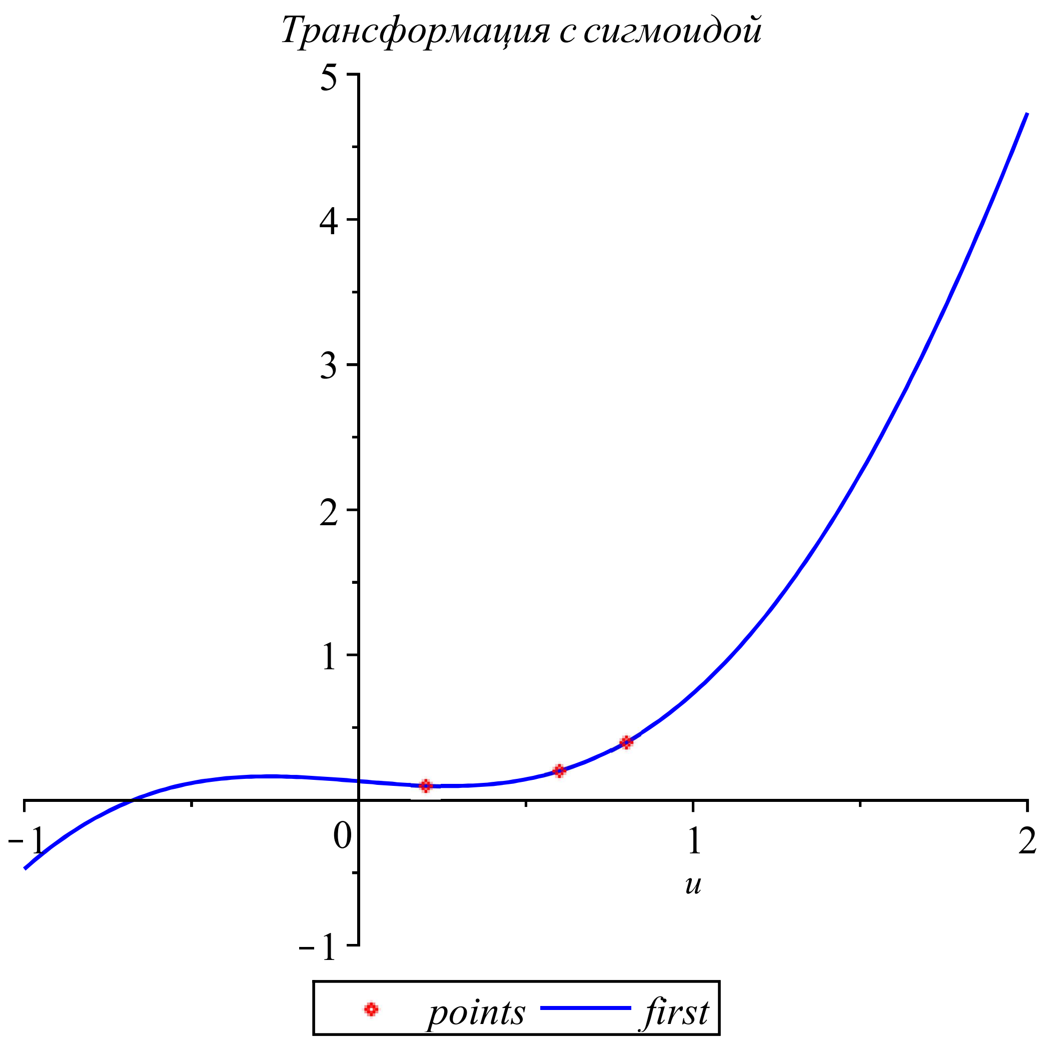
$$adc := \begin{bmatrix} 10.2509935695149 \\ 21.0043150258900 \\ -41.7480800614599 \end{bmatrix}$$

$$0.$$

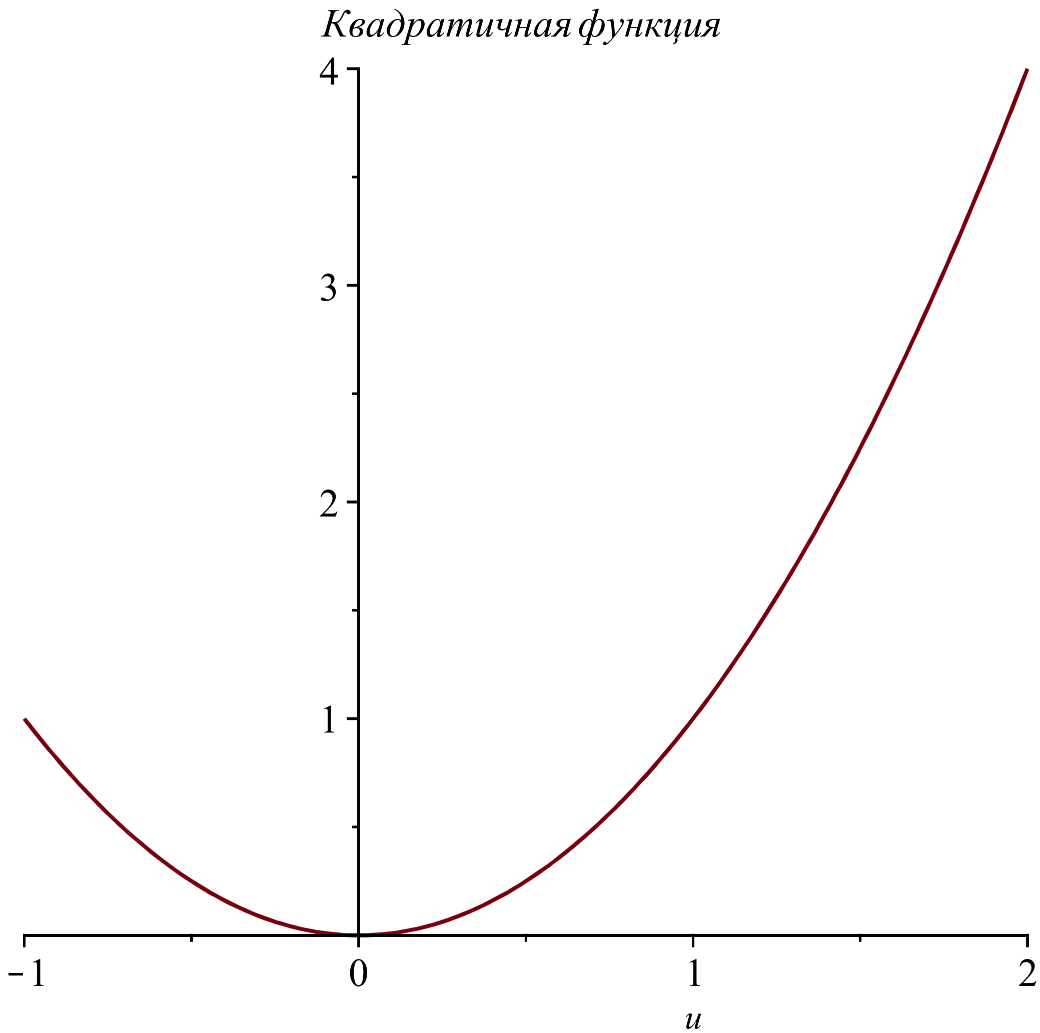
$$0.$$

$$0.$$

$$g1 := 21.0043150258900 + 10.2509935695149\, u - \frac{41.7480800614599}{1 + e^{-u}}$$



$$f := \mathbf{proc}(x)\ \ x\text{^}2\ \ \mathbf{end\ proc}$$



$$M := \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.04 \\ 0.6 & 1 & 0.36 \\ 0.8 & 1 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$det := -0.048$$

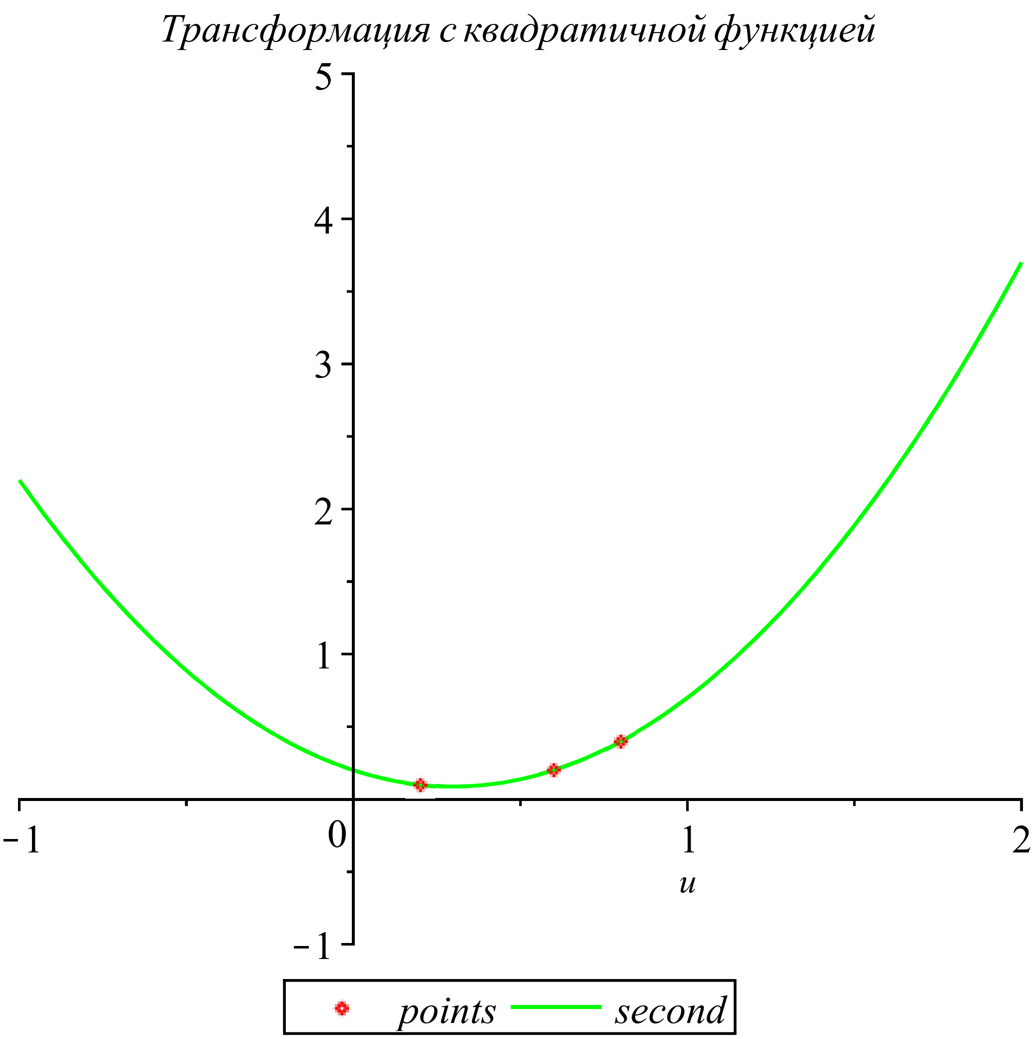
$$adc := \begin{bmatrix} -0.750000000000000 \\ 0.200000000000000 \\ 1.25000000000000 \end{bmatrix}$$

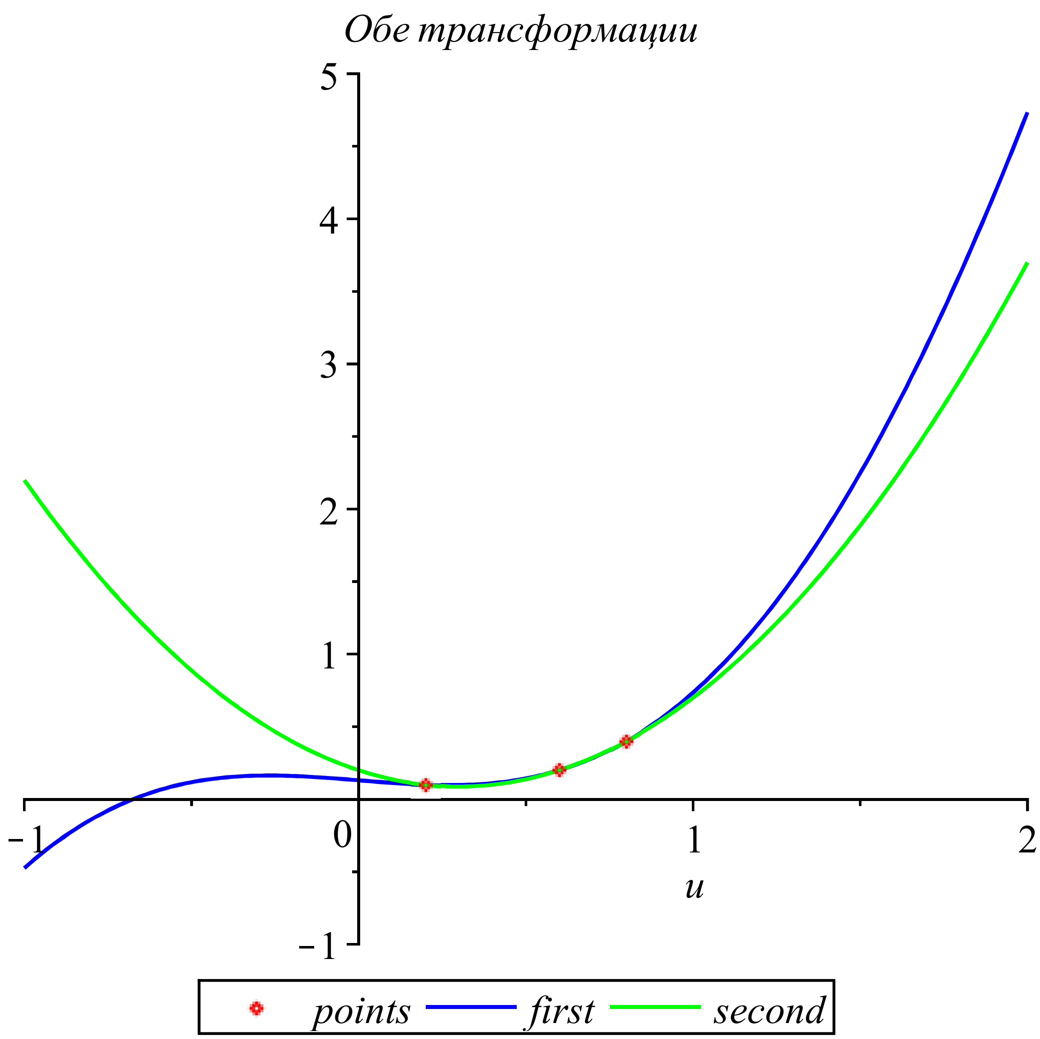
$$0.$$

$$0.$$

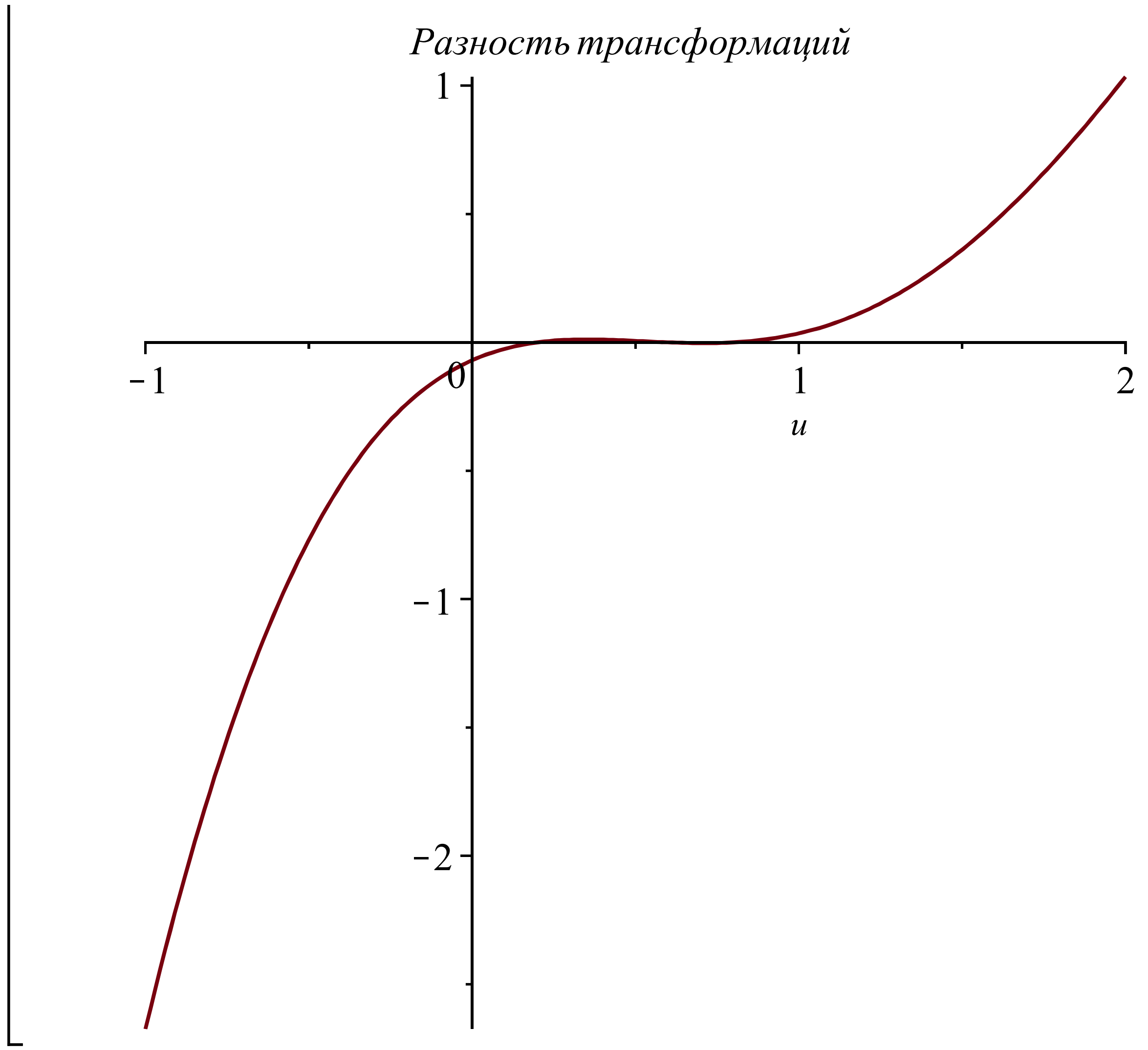
$$0.$$

$$g2 := 0.200000000000000 - 0.750000000000000\, u + 1.25000000000000\, u^2$$


Трансформация с квадратичной функцией
5
4
3
2
1
0
−1
−1
1
2
u
points
second



Обе трансформации
5
4
3
2
1
−1
0
1
2
u
−1
points
first
second


Разность трансформаций
1
−1
−2
−1
0
1
2
u