Лабораторная работа 6. «Задачи квадратичного программирования»

17 апреля 2020 г.

Определение 1. Квадратная матрица $D = (d_{ij})$ порядка n называется *симметричной*, если $D = D'$ ($d_{ij} = d_{ji}$ для любых $1 \leq i, j \leq n$).

Определение 2. Квадратная матрица $D = (d_{ij})$ порядка n называется *положительно полуопределённый* (или *неотрицательно определённой*), если для всякого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $x' \cdot D \cdot x \geq 0$.

Определение 3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ — переменные. Выражение

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j,$$

для которого выполняется условие $d_{ij} = d_{ji}$ для любых $1 \leq i, j \leq n$, называется *квадратичной формой*. Квадратная матрица D, составленная из коэффициентов d_{ij}, является симметричной.

В матричном виде квадратичная форма записывается так

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot x' \cdot D \cdot x,$$

где $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор переменных.

Задача квадратичного программирования — это оптимизационная задача вида

$$\begin{aligned}
&f(x) = c' \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x' \cdot D \cdot x \to \min,\\
&A \cdot x = b,\\
&x \geq 0,
\end{aligned}$$

в которой матрица D является симметричной положительно полуопределённой.

Определение 4. Допустимый план x задачи квадратичного программирования называется *правильным опорным планом*, если существует подмножество J_b множества индексов переменных $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что

1. $|J_b| = rank(A)$;
2. матрица A_b, составленная из столбцов матрицы A, чьи индексы принадлежат множеству J_b, является обратимой;
3. Найдётся подможество $J_{b^\star}$ множества индексов переменных $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что
   (a) $J_b \subseteq J_{b^\star}$;
   (b) для каждого индекса $j \in J_{b^\star}$ выполняется $\Delta_j(x) = 0$, где
   $$c'(x) = c' + x' \cdot D \tag{1}$$
   $$u'(x) = -c'_b(x) \cdot A_b^{-1} \tag{2}$$
   $$\Delta'(x) = u'(x) \cdot A + c'(x) \tag{3}$$
   (c) следующая блочная матрица обратима
   $$H = \begin{pmatrix} D^\star & A'_{b^\star} \\ A_{b^\star} & 0 \end{pmatrix},$$
   где $D^\star$ — это подматрица матрицы D, составленная из элементов, стоящих на пересечении строк и столбцов с индексами из множества $J_{b^\star}$; $A_{b^\star}$ — матрица, состоящая из столбцов матрицы A с индексами из множества $J_{b^\star}$.

Множество J_b называется *опорой ограничений*, а множество $J_{b^\star}$ — *расширенной опорой ограничений*.

Пример. Рассмотрим следующую задачу квадратичного программирования:
$$\begin{cases} -8x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 6x_4 + \\ +\dfrac{1}{2} \cdot \left(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3\right) \to \min \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Покажем, что допустимый план $x' = (2,3,0,0)$ этой задачи является правильным опорным планом с опорой ограничений $J_b = \{1,2\}$ и расширенной опорой ограничений $J_{b^\star} = \{1,2\}$. Составим матрицы A, D и вектор c:

$$c = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим условия из определения правильного опорного плана:

1. Поскольку $|J_b| = 2$ и $rank(A) = 2$, то $|J_b| = rank(A)$.
2. Матрица
$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
невырожденная.
3. Проверим условия для $J_{b^\star}$
   (a) $\{1,2\} = J_b \subseteq J_{b^\star} = \{1,2\}$;
   (b) Вычислим векторы $c(x), u(x)$ и $\Delta(x)$:
$$\begin{aligned} c(x) &= c + D \cdot x = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}. \\ u'(x) &= -c_b'(x) \cdot A_b^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ \Delta'(x) &= u'(x) \cdot A + c'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   Компоненты вектора $\Delta'(x)$ с индексами из множества $J_{b^\star}$ не меньше, чем 0.
   (c) Матрица
$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   имеет определитель, отличный от 0, т.е. она обратима.

В рамках лабораторной работы необходимо реализовать метод решения задач квадратичного программирования, работу которого проиллюстрируем на примере.

Пример. Рассмотрим задачу квадратичного программирования (4), взяв в качестве начального правильного опорного плана план $x' = (2, 3, 0, 0)$ с опорой ограничений $J_b = \{1, 2\}$ и расширенной опорой ограничений $J_{b^\star} = \{1, 2\}$.

Итерация 1.

Шаг 1. Находим векторы $c(x), u(x)$ и $\Delta(x)$ по формулам (1) – (3). Эти векторы мы уже нашли, когда проверяли выполнимость условий из определения правильного опорного плана для плана x. Приведём результаты:

$$\begin{aligned} c'(x) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \\ u'(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Delta'(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Проверяем условие оптимальности текущего правильного опорного плана. Если все компоненты вектора $\Delta(x)$ неотрицательные, то метод завершает свою работу и текущий правильный опорный план является оптимальным. В противном случае переходим на следующий шаг.

Шаг 3. Выбираем отрицательную компоненту плана $\Delta(x)$ и индекс выбранной компоненты запоминаем в переменной j_0. Пусть

$$j_0 = 3.$$

Шаг 4. По множеству $J_{b^\star}$ и j_0 найдём вектор $\ell' = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$. Компоненты этого вектора делятся на два класса

$$\ell_{b^\star} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}, \ \overline{\ell_{b^\star}} = \begin{pmatrix} \ell_3 \\ \ell_4 \end{pmatrix}.$$

К первому классу относятся все компоненты с индексами из расширенной опоры ограничений $J_{b^\star}$, ко второму — все компоненты с индексами не из расширенной опоры ограничений. Сперва находим вектор $\overline{\ell_{b^\star}}$ по следующему правилу: $\ell_{j_0} = 1$, значения всех остальных компонент $\overline{\ell_{b^\star}}$ полагаем равными 0. В нашем случае $\ell_3 = 1$ и $\ell_4 = 0$. Для того, чтобы найти компоненты вектора $\ell_{b^\star}$ мы составляем матрицу H (см. определение правильного опорного плана) и обращаем её

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Строим вектор $b^\star$. Он состоит из двух частей. Сперва идут элементы столбца матрицы D с индексом j_0, стоящие в строках с индексами из множества $J_{b^\star}$. Далее идут элементы j_0-го столбца матрицы A. В нашем случае

$$b^\star = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Находим вектор x по следующей формуле

$$x = -H^{-1} \cdot b^*.$$

Получаем

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Сколько компонент в искомом векторе $\ell_{b^\star}$? Две компоненты. Первые две компоненты вектора x и есть компоненты вектора $\ell_{b^\star}$:

$$\ell_1 = -2,\ \ell_2 = 1.$$

В итоге получаем $\ell' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Шаг 5. Для каждого индекса $j \in J_{b^\star}$ найдём величину θ_j, а также вычислим величину θ_{j_0}. Сперва поищем θ_{j_0}. Для этого вычислим значение

$$\delta = \ell' \cdot D \cdot \ell = 2.$$

Затем найдём θ_{j_0} по следующему правилу

$$\theta_{j_0} = \theta_3 = \begin{cases} \infty, & \text{если } \delta = 0 \\ \dfrac{|\Delta_{j_0}(x)|}{\delta}, & \text{если } \delta > 0 \end{cases}.$$

Поскольку $\delta = 2 > 0$, то в нашем случае реализовался второй случай, в соответствии с которым

$$\theta_{j_0} = \theta_3 = \frac{|-1|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Для каждого индекса $j \in J_{b^\star}$ вычислим

$$\theta_j = \begin{cases} -\dfrac{x_j}{\ell_j}, & \text{если } \ell_j < 0 \\ \infty, \text{ если } \ell_j \geq 0. \end{cases}$$

В нашем случае получаем, что

$$\theta_1 = -\frac{2}{-2} = 1, \quad \theta_2 = \infty.$$

Находим минимум среди всех вычисленных θ_k:

$$\theta_0 = \min\left(\theta_1, \theta_2, \theta_3\right) = \min\left(1, \infty, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Запоминаем индекс, на котором достигается минимум

$$j_\star = 3.$$

Если $\theta_0 = \infty$, то метод завершает свою работу с ответом: «целевая функция задачи не ограничена снизу на множестве допустимых планом». В противном случае идём на следующий шаг.

Шаг 6. Обновим допустимый план

$$x = x + \theta_0 \cdot \ell = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обновим теперь опору ограничений J_b и расширенную опору ограничений $J_{b^\star}$ по следующему правилу:

1. Если $j_\star = j_0$, то J_b не меняем, а в $J_{b^\star}$ добавляем $j_\star$.
2. Если $j_\star \in J_{b^\star} \setminus J_b$, то J_b не меняем, а из $J_{b^\star}$ удаляем $j_\star$.

3. Если $j_\star \in J_b$ (индекс $j_\star$ идёт s-м по счёту в J_b) и существует индекс $j_+ \in J_{b^\star} \setminus J_b$ такой, что s-я компонента вектора $(A_b^{-1} \cdot A_{j_+})$ не равна 0, то в J_b заменяем индекс $j_\star$ на индекс j_+, а из $J_{b^\star}$ удаляем индекс $j_\star$.
4. Если $j_\star \in J_b$ (индекс $j_\star$ идёт s-м по счёту в J_b) и ($J_b = J_{b^\star}$ или для любого индекса $j_+ \in J_{b^\star} \setminus J_b$ выполняется условие: s-ая компонента вектора $(A_b^{-1} \cdot A_{j_+})$ равна 0), то и в J_b, и в $J_{b^\star}$ заменяем индекс $j_\star$ на индекс j_0.

В нашем случае $j_\star = j_0$, т.е. реализовался первый случай. В соответствии с правилом $J_b = \{1, 2\}$ не меняется, а в $J_{b^\star}$ добавляем $j_\star$ и получаем $J_{b^\star} = \{1, 2, 3\}$.

С новым правильным опорным планом x, новыми множествами индексов J_b, $J_{b^\star}$ идём на следующую итерацию, на котором проделываем все те же действия, что и на первой итерации.