

# Outils d'Analyse d'une Base de Règles

Hadrien Negros, Swan Rocher

9 mars 2012

# Table des matières

<b>1</b>		<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.1.1	Prédicat . . . . .	2
1.1.2	Atome . . . . .	2
1.1.3	Règle . . . . .	2
1.1.4	Représentation des Conjonctions d'Atomes . . . . .	3
1.1.5	Implémentation du Graphe . . . . .	3
1.1.6	Substitution . . . . .	4
1.1.7	Unificateur logique . . . . .	4
1.1.8	Unificateur de conclusion atomique . . . . .	4
1.1.9	Bonne unification atomique . . . . .	4
1.2	Unification de Règles . . . . .	5
1.2.1	Algorithme d'Unification . . . . .	5
1.2.2	Extension des Conjonctions d'Atomes . . . . .	6
1.2.3	Algorithme d'Unification Locale . . . . .	7
1.2.4	Correction . . . . .	8
1.2.5	Complexites . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>10</b>

# Chapitre 1

## 1.1 Définitions

### 1.1.1 Prédicat

- Un prédicat noté  $p \setminus n$  est un symbole relationnel d'arité  $n$ .
- On suppose que tout nom de prédicat est unique.
- On note  $p_i$  la  $i^{eme}$  position de  $p$ .
- On note  $P_K$  l'ensemble des prédicats de  $K$ .

### 1.1.2 Atome

Un atome  $a = p(a_1, a_2, \dots, a_n)$  associe un terme à chaque position d'un prédicat  $p \setminus n$ .

On note :

- $a_i$  le terme en position  $i$  dans  $a$ . Un terme peut être une *constante* ou une *variable*.  
Une variable peut être universelle (notée  $\forall - var$ ) ou existentielle (notée  $\exists - var$ ).
- $dom(a) = \{a_i : \forall i \in [1, n]\}$ , l'ensemble des termes de  $a$
- $var(a)$  l'ensemble des variables de  $a$
- $cst(a)$  l'ensemble des constantes de  $a$

Ces notations s'étendent aux *conjonctions d'atomes*.

### 1.1.3 Règle

Une règle  $R = (H, C)$  est définie par :

- $H$  : conjonction d'atomes représentant l'hypothèse de  $R$ ,
- $C$  : conjonction d'atomes représentant la conclusion de  $R$ .

On note :

- $dom(R) = dom(H) \cup dom(C)$
- $var(R) = var(H) \cup var(C)$
- $cst(R) = cst(H) \cup cst(C)$
- $fr(R)$  l'ensemble des variables frontières de  $R$ , avec  $a_i$  est une variable frontière ssi  $a_i$  est une variable telle que  $a_i \in var(H) \cap var(C)$ .
- $cutp(R) = fr(R) \cup cst(R)$  l'ensemble des points de coupure de  $R$

#### 1.1.4 Représentation des Conjonctions d'Atomes

Une conjonction d'atomes  $K = k_1 k_2 \dots k_n$  avec  $k_i = q(t_1, t_2, \dots, t_p)$  peut être représentée par le graphe non orienté  $G_K = (V_K, E_K, \omega)$  avec  $V_K$  son ensemble de sommets,  $E_K$ , son ensemble d'arêtes et  $\omega$  une fonction de poids sur les arêtes construits de la manière suivante :

$$V_K = A_K \cup T_K \text{ avec } A_K = \{i : k_i \in K\} \text{ et } T_K = \{t_j \in dom(K)\}$$

$$E_K = \{(i, t_j) : \forall k_i \in K, \forall t_j \in dom(k_i)\}$$

$$\omega(i, t_j) = j : \forall (i, t_j) \in E_K$$

On remarque que quelques propriétés sont directement induites par cette représentation :

- $G_K$  admet une bipartition de ses sommets, en effet toutes les arêtes ont une extrémité dans  $A_K$  et l'autre dans  $T_K$ , or par construction  $A_K \cap T_K = \emptyset$ .

#### 1.1.5 Implémentation du Graphe

Par la suite on supposera que le graphe  $G_K$  est implémenté par deux ensembles de sommets (les atomes et les termes), ainsi que par une liste de voisinage pour chaque sommet. De plus, chaque sommet peut avoir connaissance de son type de contenu parmi : *atome*, *terme*, *constante*,  $\forall - var$ ,  $\exists - var$  en temps constant.

On note  $n$  (resp.  $t$ ) le nombre d'atomes (resp. de termes) dans  $K$ .

Opérations (et temps d'exécution associé) :

- Parcourir les sommets *atomes* :  $n$ .
- Parcourir tous les sommets :  $n + t$ .
- Accéder au  $i^{eme}$  voisin d'un sommet : *constant*.

### 1.1.6 Substitution

Une substitution de taille  $n$  d'un ensemble de symboles  $X$  dans un ensemble de symboles  $Y$  est une fonction de  $X$  vers  $Y$  représentée par l'ensemble de couples suivants (avec  $n \leq |X|$ ) :

- $s = \{(x_i, y_i) : \forall i \in [1, n] \ x_i \in X, \ y_i \in Y, \forall j \neq i \ x_i \neq x_j\}$
- $s(x_i) = y_i \ \forall i \in [1, n]$
- $s(x_i) = x_i \ \forall i \in [n + 1, |X|] \ x_i \in X$

### 1.1.7 Unificateur logique

Un unificateur logique entre deux atomes  $a_1$  et  $a_2$  est une substitution  $\mu$  telle que :

- $\mu : var(a_1) \cup var(a_2) \rightarrow dom(a_1) \cup dom(a_2)$
- $\mu(a_1) = \mu(a_2)$

Cette définition s'étend aux conjonctions d'atomes.

### 1.1.8 Unificateur de conclusion atomique

Un unificateur de conclusion atomique est un unificateur logique  $\mu = \{(x_i, t_i) : \forall i \in [1, n]\}$  entre l'hypothèse d'une règle  $R_1 = (H_1, C_1)$  et la conclusion atomique d'une règle  $R_2 = (H_2, C_2)$  et est défini de la manière suivante :

- $\mu : fr(R_2) \cup var(H_1) \rightarrow dom(C_2) \cup cst(H_1)$
- $\forall (x_i, t_i) \in \mu \text{ si } x_i \in fr(R_2) \text{ alors } t_i \in cutp(R_2) \cup cst(H_1)$

### 1.1.9 Bonne unification atomique

Un bon unificateur de conclusion atomique est un unificateur de conclusion atomique  $\mu = \{(x_i, t_i) : \forall i \in [1, n]\}$  entre un sous ensemble  $Q$  de l'hypothèse d'une règle  $R_1 =$

$(H_1, C_1)$  et la conclusion d'une règle atomique  $R_2 = (H_2, C_2)$  tel que :

$\forall (x_i, t_i) \in \mu : \text{si } x_i \in H_1 \setminus Q \text{ alors } t_i \text{ n'est pas une } \exists - \text{var}$

Un tel ensemble  $Q$  est appelé un *bon ensemble d'unification atomique* de l'hypothèse de  $R_1$  par la conclusion de  $R_2$ . On note que  $Q$  est donc défini comme suit :

- $Q \subseteq H_1$
- $\forall \text{ position } i \text{ de } \exists - \text{var dans } C_2, \forall \text{ atome } a \in Q, \text{ si } a_i \in \text{var}(H_1) \text{ alors } \forall \text{ atome } b \in H_1 : \text{si } \exists b_j \in b : a_i = b_j, \text{ alors } b \in Q$

Un *bon ensemble d'unification atomique minimal*  $Q$  de  $H_1$  par  $C_2$  enraciné en  $a$  est défini tel que :

- $Q$  est un bon ensemble d'unification atomique de  $H_1$  par  $C_2$
- $a \in Q$
- $|Q| = \min(|Q_i| : Q_i \text{ est un bon ensemble d'unification atomique de } H_1 \text{ par } C_2 \text{ et } a \in Q_i)$

## 1.2 Unification de Règles

### 1.2.1 Algorithme d'Unification

---

#### Algorithm 1 Unification

---

**Require:**  $H_1$  : conjonction d'atomes,  $R = (H_2, C_2)$  : règle à conclusion atomique

**Ensure:** succès si  $C_2$  peut s'unifier avec  $H_1$ , i.e. si  $\exists H \subseteq H_1, \mu$  une substitution :  $\mu(H_1) = \mu(C_2)$ , échec sinon

```

1  ▷ Précoloration
2  for all sommet atome  $a \in H_1$  do
3      if  $\text{UnificationLocale}(a, R) \neq \text{échec}$  then
4           $\text{couleurLogique}[a] \leftarrow \text{noir}$ 
5      else
6           $\text{couleurLogique}[a] \leftarrow \text{blanc}$ 
7      end if
8  end for
9  ▷ Initialisation du tableau contenant les positions des variables existentielles de  $C_2$ 
10  $E \leftarrow \{i : c_i \text{ est une } \exists - \text{var de } C_2\}$ 
11 ▷ Extension des ensembles
12 for all sommet atome  $a \in H_1 : \text{couleurLogique}[a] = \text{noir}$  do
13     if  $Q \leftarrow \text{Extension}(H_1, a, \text{couleurLogique}, E) \neq \text{échec}$  then
14         if  $\text{UnificationLocale}(Q, R) \neq \text{échec}$  then
15             return succès
16         end if
17     end if
18      $\text{couleurLogique}[a] \leftarrow \text{blanc}$ 
19 end for
20 return échec

```

---

### 1.2.2 Extension des Conjonctions d'Atomes

---

**Algorithm 2** Extension
 

---

**Require:**  $H_1$  : conjonction d'atomes,  $a \in H_1$  : sommet atome racine, *couleurLogique* : tableau de taille égal au nombre d'atomes dans  $H_1$  tel que *couleurLogique*[ $a$ ] = *noir* ssi *UnificationLocale*( $a, R$ ) = succès,  $E$  : ensemble des positions des variables existentielles

**Ensure:**  $Q$  : bon ensemble d'unification minimal des atomes de  $H_1$  construit à partir de  $a$  s'il existe, échec sinon.

```

1  ▷ Initialisation du parcours
2  for all sommet atome  $a \in H_1$  do
3      if couleurLogique[ $a$ ] = noir then
4          for all sommet terme  $t \in voisins(a)$  do
5              couleur[ $t$ ] = blanc
6          end for
7          couleur[ $a$ ] = blanc
8      end if
9  end for
10 couleur[ $a$ ]  $\leftarrow$  noir
11  $Q \leftarrow \{a\}$  ▷ conjonction d'atomes à traiter
12 attente  $\leftarrow \{a\}$  ▷ file d'attente du parcours
13 while attente  $\neq \emptyset$  do
14      $u \leftarrow haut(attente)$ 
15     if  $u$  est un atome then
16         for all  $i \in E$  do
17              $v \leftarrow voisin(u, i)$ 
18             if  $v$  est une constante then
19                 return échec
20             else if couleur[ $v$ ] = blanc then
21                 ▷  $v$  est une  $\forall$  - var non marquée par le parcours
22                 couleur[ $v$ ]  $\leftarrow$  noir
23                 attente  $\leftarrow attente \cup \{v\}$ 
24             end if
25         end for
26     else
27         ▷  $u$  est un terme
28         for all  $v \in voisins(u)$  do
29             if couleurLogique[ $v$ ] = blanc then
30                 return échec
31             else
32                 if couleur[ $v$ ] = blanc then
33                     couleur[ $v$ ]  $\leftarrow$  noir
34                     attente  $\leftarrow attente \cup \{v\}$ 
35                      $Q \leftarrow Q \cup \{v\}$ 
36                 end if
37             end if
38         end for
39     end if
40 end while ▷ Fin du parcours
41 return  $Q$ 

```

---

Remarque :

La phase d'initialisation du parcours pourrait simplement parcourir tous les sommets de  $H_1$  et mettre leur couleur à blanc. En pratique, cette solution serait sans doute plus efficace, mais dépendrait donc du nombre de sommets total dans  $H_1$ . Ce qui en théorie

amènerait la complexité de cette boucle en  $\bigcirc(\text{nombre d'atomes} \times \text{arite max de } H_1)$ . Or ici, la complexité ne dépend pas de cette arité max, mais uniquement de l'arité du prédicat de la conclusion  $C_2$ .

### 1.2.3 Algorithme d'Unification Locale

---

**Algorithm 3** UnificationLocale
 

---

**Require:**  $H_1$  : conjonction d'atomes,  $R = (H_2, C_2)$  : règle à conclusion atomique  
**Ensure:** succès si  $C_2$  peut s'unifier avec  $H_1$

```

1  ▷ Vérification des prédicats
2  for all atome  $a \in H_1$  do
3      if  $\text{prédicat}(a) \neq \text{prédicat}(C_2)$  then
4          return échec
5      end if
6  end for
7   $u \leftarrow \emptyset$  ▷ substitution
8  for all terme  $t_i \in C_2$  do
9      ▷ def :  $a_i$  = terme de  $a$  en position  $i$ 
10      $E \leftarrow \{a_i : \forall \text{ atome } a \in H_1\}$ 
11     if  $t_i$  est une constante then
12         if  $\exists v \in E : v$  est une constante et  $v \neq t_i$ , ou  $v$  est une  $\exists$ -variable then
13             return échec
14         else
15              $u \leftarrow \{(v, t_i) : v \in E \text{ et } v \neq t_i\}$ 
16         end if
17     else if  $t_i$  est une  $\exists$ -variable then
18         if  $\exists v \in E : v$  est une  $\exists$ -variable et  $v \neq t_i$ , ou  $v$  est une constante then
19             return échec
20         else
21              $u \leftarrow \{(v, t_i) : v \in E \text{ et } v \neq t_i\}$ 
22         end if
23     else
24         if  $\exists v_1, v_2 \in E : v_1 \neq v_2$  et  $v_1, v_2$  ne sont pas des  $\forall$ -variables then
25             return échec
26         else if  $\exists c \in E : c$  est une constante then
27              $u \leftarrow \{(v, c) : v \in E \cup \{t_i\} \text{ et } v \neq c\}$ 
28         else
29              $u \leftarrow \{(v, t_i) : v \in E \text{ et } v \neq t_i\}$ 
30         end if
31     end if
32      $H_1 \leftarrow u(H_1)$ 
33      $C_2 \leftarrow u(C_2)$ 
34 end for
35 return succès
  
```

---



### 1.2.4 Correction

#### Propriétés

##### *Propriété 1*

Soit  $R = (H, C)$  une règle à conclusion atomique,

Soit  $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  une conjonction d'atomes,

si  $\exists a \in K : a$  ne peut pas s'unifier avec  $C$  alors  $K$  ne peut pas s'unifier avec  $C$

### 1.2.5 Complexites

On note :

- $n$  = nombre d'atomes dans  $H_1$
- $p$  = arité de  $C_2$
- $t$  = nombre de termes "colorables" dans  $H_1$
- $m$  = nombre d'arêtes "suivables" dans  $H_1$

On remarque que dans le pire des cas on a :

- $t = n \times p$
- $m = n \times p$

#### Temps

- UnificationLocale (pire des cas) =  $\mathcal{O}(np)$
- Extension (pire des cas) =  $\mathcal{O}(np)$
- Unification (pire des cas) =  $\mathcal{O}(n^2p)$

##### Extension

On effectue simplement un parcours en largeur à partir d'un sommet donné qui peut éventuellement s'arrêter plus tôt qu'un parcours classique. La complexité en temps dans le pire des cas est donc au plus la même, c'est à dire linéaire au nombre de sommets plus le nombre d'arcs. Le graphe représentant la conjonction d'atomes  $H_1$  possèdent  $n \times ariteMax(H_1)$  arêtes et  $n \times (ariteMax(H_1) + 1)$  sommets. On sait donc que  $C_{Extension}^{temps} = \mathcal{O}(n \times ariteMax(H_1))$ .

Deux cas :

i) Découverte d'un sommet atome :

parcours classique  $\Rightarrow$  on récupère tous les voisins blancs

parcours extension  $\Rightarrow$  on récupère tous les voisins blancs de couleur logique noire (en effet arrêt immédiat si un voisin de couleur logique noire est découvert.

ii) Découverte d'un sommet variable :

pas de différence

On a donc que l'algo ne suit que les sommets atomes pouvant être unifiés localement.

C'est à dire (entre autres) que leur prédicat est égal à  $\text{prédicat}(C_2)$ .

...

**Espace**

## Chapitre 2

## Bibliographie