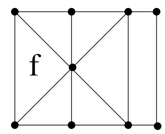
- TD 3 : Graphes planaires -

- Exercice 1 -

Trois pays peuvent-ils avoir deux-à-deux une frontière commune ?
Même question pour quatre pays. Même question pour cinq pays.

- Exercice 2 -

Redessiner le graphe ci-dessous de telle sorte que la face f devienne la face extérieure.



- Exercice 3 -

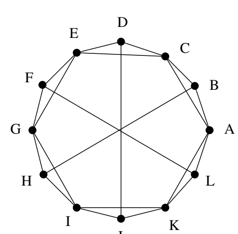
1. Montrer que K_4 est planaire.
2. Montrer, sans utiliser la formule d'Euler, que K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires.
3. K_5 et $K_{3,3}$ sont-ils plongeables sans croisement sur le ruban de Mœbius, sur le tore ?
4. A votre avis, pour quelle valeur maximale de n, K_n est-il plongeable sans croisement dans le tore ?

- Exercice 4 -

Trouver un graphe simple de séquence de degré $(4, 4, 3, 3, 3, 3)$ qui soit :
1. planaire.
2. non-planaire.

- Exercice 5 - Formule d'Euler -

On définit la *maille* d'un graphe G, notée $g(G)$ comme la taille d'un plus petit cycle de G. Par convention, si G est sans cycle, on pose $g(G) = +\infty$.
1. Montrer que pour un graphe planaire de maille finie, on a $g \leq \frac{2m}{m-n+2}$.
2. Montrer que le graphe de Petersen n'est pas planaire.
3. Le graphe suivant est-il planaire ?



- Exercice 6 -

Expliquer comment stocker un graphe planaire à n sommets de façon à utiliser un espace mémoire en $O(n)$ et que le test d'adjacence se fasse en $O(1)$.

- Exercice 7 -

Peut-on réaliser un ballon de foot avec uniquement des hexagones ?
Donner la compositon du ballon de foot en hexagones et pentagones. Voir le beau ballon ci-dessous...

- Exercice 8 -

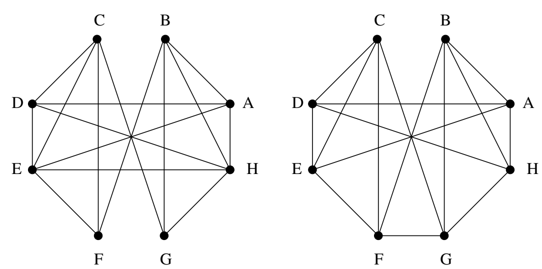
1. Montrer que tout graphe biparti cubique planaire contient un cycle de longueur 4.
2. Calculer le nombre de sommets d'un graphe cubique planaire ayant 8 faces. Donner deux tels graphes non isomorphes.

- Exercice 9 -

1. Vérifier que la formule d'Euler est fausse pour les graphes planaires non connexes.
2. Proposer une formule valable pour les planaires non connexes.

- Exercice 10 - Algorithme de plongement plan -

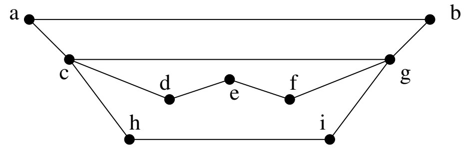
Faire tourner l'algorithme de plongement plan du cours sur les graphes suivants. Si un tel plongement n'est pas possible, on donnera une obstruction.



- Exercice 11 - Localisation dans un graphe planaire -

À propos de l'algorithme de localisation :

1. Donner le graphe orienté de localisation correspondant au graphe suivant (vous choisirez un ordre d'étude des arêtes quelconque).



2. Pour toute valeur n, donner un graphe planaire et un ordre de choix des arêtes qui fournisssent un graphe orienté de localisation d'ordre $O(n^2)$ et d'un temps de réponse pire en $O(n)$.