Chapitre 8

Corrigés

Modèle du dentiste

1- Pour chaque client, on a $R = W + S$. Ce résultat est donc vrai en terme d'espérance.
2- Pour chaque client, on a $L = L_W + L_S$. Ce résultat reste donc vrai en terme d'espérance.
3- Le nombre de clients en train d'être servis est de 1 avec la probabilité U et de 0 avec la probabilité $1 - U$. On a donc :

$$E[L_S] = 0 * (1 - U) + 1 * U$$

d'où $E[L_S] = U$.
4- En multipliant l'équation (1) par Λ, on a : $E[R] * \Lambda = E[S] * \Lambda + E[W] * \Lambda$.
En appliquant la loi de Little aux systèmes global, file seule puis serveur seul, on a :

$$E[L] = E[R] * \Lambda, \quad E[L_W] = E[W] * \Lambda \quad et \quad E[L_S] = E[S] * \Lambda$$

L'équation (2) vient immédiatement.
La relation connue entre U, Λ et $E[S]$ s'obtient en utilisant le résultat obtenu en appliquant la loi de Little au serveur et celui de la question 3. On a alors :

$$U = E[S] * \Lambda$$

5- L'énoncé donne $E[L] = 2.8$ client, $E[L_W] = 2$ client et $\Lambda = 4$ clients par heure. On en déduit :
- En moyenne, le nombre $E[L_s]$ de clients soignés est 0.8, ce qui revient à dire que le denstiste est occupé à 80% du temps.
- De plus, aller chez le dentiste occupe pendant $E[R] = \frac{E[L]}{\Lambda} = \frac{2.8}{4} = 0.7$ heure, c'est à dire 42 minutes.
- Plus précisément, on passe $E[W] = \frac{E[L_W]}{\Lambda} = 2/4 = 0.5$ heure dans la salle d'attente, c'est à dire 30 minutes.
- On en déduit que le dentiste nous soigne en 12 minutes...

Temps d'attente d'un train

1- $E[X] = 0.9 * 6 + 0.1 * 54 = 10.8$ soit 10 minutes 48 secondes.
2- Sur 100 intervalles de temps, il y a en moyenne 90 intervalles courts de 6 minutes qui durent 540 minutes et 10 intervalles longs de 54 minutes qui durent 540 minutes. Donc sur 1080 minutes, il y en a 540 qui correspondent à des intervalles courts et 540 qui correspondent à des intervalles longs. Donc pour un voyageur qui arrive à un instant quelconque, il a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'arriver pendant un intervalle court (et pas du tout 90%) et $\frac{1}{2}$ d'arriver pendant un intervalle long.
a- Si on arrive pendant un intervalle court, il faudra attendre 3 minutes en moyenne. Si on arrive pendant un intervalle long, on attendra 27 minutes en moyenne. Donc $E[Y] = \frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{2} * 27 = 15$ minutes.

b- On peut écrire la formule de Pollaczek Khintchine qui donne le temps d'attente résiduel en fonction du temps d'attente : $E[Y] = E[X] * \dfrac{1 + C^2(X)}{2}$, qui donne le même résultat :

$$\begin{aligned} Var[X] &= 0.9[6 - 10.8]^2 + 0.1[54 - 10.8]^2 \\ &= 207,3 \end{aligned}$$

$$C^2[X] = \frac{Var[X]}{E^2[X]} = \frac{207.36}{10.8^2} = 1.7777$$

d'où : $E[Y] = 15$ minutes
3- On constate que $E[Y] > E[X]$, c'est le paradoxe de l'auto-stoppeur.

Etude d'une Chaîne de Markov à Temps Discret

1- Une chaîne est irréductible si tout état peut-être atteint (en un nombre fini) de pas. Il est clair que si $\alpha = 0$, alors l'état 3 est absorbant. D'autre part, si $p = 0$, le couple d'états $(1, 2)$ est absorbant.

Supposons que $\alpha \neq 1$. Il existe alors une boucle sur l'état 3 et la chaîne est donc apériodique.

Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Si $p \neq 1$, il existe alors un circuit de longueur 2 et un circuit de longueur 3. La chaîne est donc apériodique. Si $p = 1$, il n'y a plus qu'un seul circuit de longueur 3 et la chaîne est périodique.

Les condition d'irréductibilité et d'apériodicité sont données par :

$$0 < \alpha \leq 1 \quad 0 < p \leq 1 \quad \alpha p \neq 1$$

2- Les probabilités à l'équilibre sont déterminées en résolvant l'équation $\Pi = \Pi P$, ce qui donne :

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{\alpha}{2\alpha + p} \quad \pi_3 = \frac{p}{2\alpha + p}$$

3- L'équiprobabilité est obtenue lorsque $p = \alpha$, ce qui impose donc que $0 < p = \alpha < 1$.
4- Cette question peut être résolue en utilisant deux méthodes différentes :
Méthode 1
Notons $f_{i,i}^{(n)}$ la probabilité de retour en i en exactement n étapes.
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f_{2,2}^{(1)} &= 0 \\ f_{2,2}^{(2)} &= 1 - p \\ f_{2,2}^{(i)} &= p(1 - \alpha)^{i-3}\alpha \end{aligned}$$

Notons M_2 le temps moyen de retour en 2. On a alors :

$$\begin{aligned} M_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} i * f_{1,1}^{(i)} \\ &= 2(1 - p) + \sum_{i=3}^{\infty} ip\alpha(1 - \alpha)^{i-3} \\ &= 2(1 - p) + 3p\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i + p\alpha \sum_{i=0}^{\infty} i(1 - \alpha)^i \\ &= 2(1 - p) + p\alpha\frac{1}{\alpha} + p\alpha\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha + p}{\alpha} \end{aligned}$$

Méthode 2
On utilise directement la formule :

$$M_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{2\alpha + p}{\alpha}$$

Conclusion
Le temps moyen de premier retour en 2 est de : $\dfrac{2\alpha + p}{\alpha}$

Processus de naissance et de mort

Condition nécessaire pour que les états soient récurrents non nuls
Nous savons que si il y a convergence, le systeme $\Pi P = \Pi$ admet une solution non nulle. Dans le cas contraire, la seule solution est la solution nulle. Il est donc nécessaire et suffisant de trouver une solution non nulle pour prouver qu'il y a convergence.
Coupes
Pour tous les états $n \in \mathbb{N}$, on a : $p * P(n) = q * P(n+1)$, d'où, en posant $\rho = \dfrac{p}{q}$:

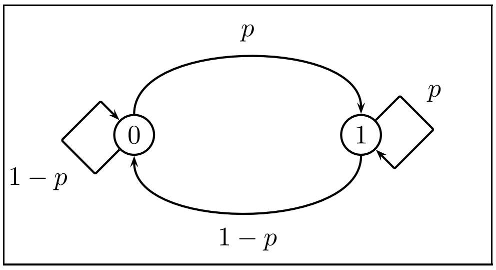
$$P(n) = P(0)\left(\frac{p}{q}\right)^n = P(0)\rho^n$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse trouver $P(0)$ non nul tel que la somme de tous les P(n) soit égale à 1 est $p < q$. La série $\sum_{i=1}^{N} P(i)$ converge alors quand N tend vers l'infini.
$\sum_{i=0}^{\infty} P(i) = P(0)\dfrac{1}{1-\rho} = 1$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison ρ) d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = (1-\rho)\rho^n}$$

Modèles de trafic sur un lien

1- Trafic de Bernoulli **a-** Ce processus est Markovien car la seule connaissance de l'état présent permet de décrire la loi du futur. Plus précisément, il n'y a même pas besoin ici de connaître l'état présent pour connaître la loi du futur.
On peut donc modéliser $Z(t)$ par une chaîne de Markov dans laquelle les deux flèches arrivant à l'état 1 sont p et les deux autres, arrivant à l'état 0 sont $1-p$.

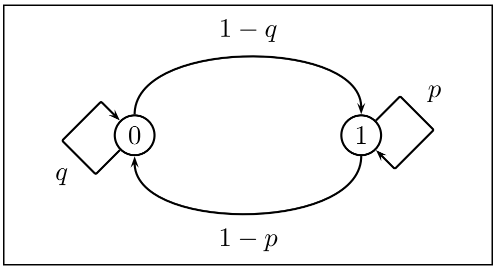


b- Si P est la matrice de transition et Π le vecteur de probabilités des états. En écrivant que $\Pi = \Pi P$ ainsi que la condition de normalisation, on a :

$$\pi_0 = 1 - p \quad et \quad \pi_1 = p$$

Le débit des cellules est égal à la probabilité π_1 : $\Lambda = \pi_1$.
Le temps T séparant deux cellules a pour espérance le temps moyen de premier retour en 1. C'est donc $E[T] = \dfrac{1}{p}$.
2- Trafic Bursty Geometric
a- Il suffit d'écrire les probabilités de transition :

$$P[X(t+1) = 0/X(t) = 0] = q \qquad \text{et} \qquad P[X(t+1) = 1/X(t) = 0] = 1 - q$$
$$P[X(t+1) = 0/X(t) = 1] = 1 - p \qquad \text{et} \qquad P[X(t+1) = 1/X(t) = 1] = p$$



b-

Probabilités stationnaires

Pour calculer les probabilités stationnaires, on écrit la matrice $P = (P_{i,j})_{(i,j)=(0,1)}$ de transition et on résoud $\Pi P = \Pi$. On trouve :

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1-p}{2-p-q} \text{ et } \pi_1 = \frac{1-q}{2-p-q}}$$

Débit des cellules

Le débit des cellules est π_1 :

$$\boxed{\Lambda = \frac{1-q}{2-p-q}}$$

Calcul de la durée d'un silence

Méthode 1

Supposons que nous sommes au début du silence. On y reste encore pendant i "période de temps" (la durée du silence $E[L_S]$ sera $i+1$) avec la probabilité $q^i(1-q)$: $P[L_S = i+1] = q^i(1-q)$.

D'où $E[L_S] = \sum_{i=0}^{\infty} q^i(1-q)(i+1) = \frac{1}{1-q}$.

Méthode 2

On a directement le temps de séjour en 0 : $E[L_S] = \frac{1}{1-P_{0,0}} = \frac{1}{1-q}$

*C*onclusion

La durée d'un silence est de $E[L_S] = \frac{1}{1-q}$, celle d'une rafale est de $E[L_R] = \frac{1}{1-p}$.

Calcul de la durée de temps séparant deux cellules

Pour déterminer les deux premiers moments du temps séparant deux cellules, deux méthodes s'offrent à nous. La plus rapide est de dire que cette durée est de :

$$M_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{2-p-q}{1-q}$$

c- Un processus Bursty Geometric est un processus de Bernoulli quand $q = 1-p$

3- Trafic Interrupted Bernoulli Process (IBP) Les rafales sont celles du processus Brusty Geometric mais il n'y a pas nécessairement une cellule à chaque slot d'une rafale. Pendant la rafale, il y a un cellule dans un slot avec la probabilité α. On a :

$$\begin{array}{rcl}
P[Y(t)=1/X(t)=1] & = & \alpha \\
P[Y(t)=0/X(t)=1] & = & 1-\alpha \\
P[Y(t)=0/X(t)=0] & = & 1 \\
P[Y(t)=1/X(t)=0] & = & 0
\end{array}$$

a- $Y(t)$ n'est pas Markovien car la seule connaissance de $Y(t)$ ne permet pas de prédire le futur :

Si $Y(t) = 1$

Nous savons alors que nous somme dans une rafale. Nous savons alors que $Y(t+1) = 1$ avec la probabilité $p\alpha$. Nous savons aussi que $(t+1) = 0$ avec la proba $1-p+p(1-\alpha)$. $Y(t) = 1$ permet donc de prédire le futur.

Si $Y(t) = 0$

Nous ne savons pas si nous sommes dans un silence ou non.

- Si nous nous trouvons dans un silence, alors $Y(t+1) = 0$ avec la proba $q + (1-q)(1-\alpha)$ et $Y(t+1) = 1$ avec la proba $(1-q)\alpha$.
- Si nous nous trouvons dans une rafale, alors $Y(t+1) = 0$ avec la proba $p(1-\alpha) + (1-p)$ et $Y(t+1) = 1$ avec la proba $p\alpha$.

Conclusion
Le processus $Y(t)$ n'est pas Markovien car la seule donnée de la valeur de $Y(t)$ à un instant donné ne permet pas de prédire la valeur de $Y(t)$ à l'instant suivant.
b- Les longueurs moyennes des silences et des rafales restent inchangées. En revanche, le débit des cellules n'est plus le même. En effet, pendant un slot, il y a une cellule avec la probabilité $\alpha\pi_1$ et il n'y en a pas sinon. Le débit devient donc :

$$\boxed{\Lambda = \alpha\pi_1 = \frac{\alpha(1-q)}{2-p-pq}}$$

Processus de Poisson

1-
Pour $k = 0$

$$\begin{aligned} P_0(t+dt) &= P[K(t+dt)=0] &= P[K(t)=0] * P[K(t+dt)=0/K(t)=0] \\ & &= P_0(t) * (1-\lambda dt) \end{aligned}$$

d'où : $P_0^{'}(t) = -\lambda P_0(t)$
Pour $k > 0$

$$\begin{aligned} P_k(t+dt) &= P[K(t+dt)=k] &= P[K(t)=k] * P[K(t+dt)=k/K(t)=k] \\ & & +P[K(t)=k-1] * P[K(t+dt)=k/K(t)=k-1] \\ & &= P_k(t) * (1-\lambda dt) + P_{k-1}(t) * \lambda dt \end{aligned}$$

d'où : $P_k^{'}(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t)$
Les équations différentielles permettant d'étudier la famille de fonctions sont :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} P_0'(t) + \lambda P_0(t) &=& 0 \\ P_k'(t) + \lambda P_k(t) &=& \lambda P_{k-1}(t) \end{array} \right.}$$

2- Il suffit de résoudre les équations différentielles précédentes pour répondre à la question.
Pour $k = 0$
En sachant que $P_0(0) = 1$, il vient :

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Pour $k > 0$
Il suffit de procéder par récurrence que $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ pour $k \in \mathbb{N}$:

- Pour k=0, c'est déjà démontré
- Supposons le résultat vrai pour un certain k et démontrons la formule en $k+1$
  Nous pouvons rechercher $P_{k+1}(t)$ sous la forme $K(t)e^{-\lambda t}$. On a donc

  $$P_{k+1}'(t) = (K'(t) - \lambda K(t))e^{-\lambda t}$$

  En utilisant alors la formule de récurrence, on en déduit que $K'(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ d'où $K(t) = \dfrac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} + C$. En utilisant la condition initiale $P_{k+1}(0) = 0$, il vient :

  $$P_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t}$$

  ce qui établie la propriété au rang $k+1$.

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \, \forall t \in \mathbb{R} \qquad P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}}$$

3-
Calcul de $E[K(t)]$

$$\begin{aligned}
E[K(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{(k-1)}}{(k-1)!} \\
&= \lambda t
\end{aligned}$$

$$\boxed{E[K(t)] = \lambda t}$$

Calcul de $E[K(t)(K(t)-1)]$
En utilisant le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E[K(t)(K(t)-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} \\
&= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= (\lambda t)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{E[K(t)(K(t)-1)] = (\lambda t)^2}$$

Calcul de $E[K^2(t)]$

$$E[K^2(t)] = E[K(t)(K(t)-1) + K(t)] = E[K(t)(K(t)-1)] + E[K(t)] = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Calcul de $Var[K(t)]$

$$\boxed{Var[K(t)] = E[K^2(t)] - E[K(t)]^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t}$$

4-
Fonction de répartition du temps séparant deux arrivées
Nous pouvons raisonner à partir du temps 0 et rechercher la probabilité qu'un évènement arrive avant t.
Soit $\hat{t}$ le temps séparant deux arrivées. Nous cherchons $P[\hat{t} < t] = 1 - P[\hat{t} >= t] = 1 - P[K(t) = 0]$ d'oû :

$$\boxed{P[\hat{t} < t] = 1 - e^{-\lambda t}}$$

Densité de probabilité
La densité de probabilité de $\hat{t}$ est la dérivée de la fonction de répartition de $\hat{t}$:

$$\boxed{f_{\hat{t}} = \lambda e^{-\lambda t}}$$

Espérance mathématique
L'espérance mathématique de $\hat{t}$ est, en intégrant par partie :

$$\boxed{E[\hat{t}] = \int_{t=0}^{\infty} t f_{\hat{t}}(t)dt = \frac{1}{\lambda}}$$

La moyenne du temps séparant deux arrivées est donc l'inverse du paramètre de Poisson de la loi d'arrivée... On a donc deux définitions pour les lois de Poisson : celle donnée à la première question du sujet et celle qui caractérise le temps entre deux arrivées $\hat{t}$.

Modele du réparateur

Nous considérons une chaîne de Markov à K états. L'état i est atteint lorsque i machines parmi les K sont en pannes.

1-

Lemme sur la loi de l'inf de n variables indépendantes de loi exponentielle Soit n variables aléatoires indépendantes X_i de loi exponentielle de paramètre λ_i.

$$\begin{aligned}
P[Inf(X_i) \leq x] &= 1 - P[Inf(X_i) > x] \quad \text{(Passage au complémentaire)} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P[X_i > x] \quad \text{(Indépendance des variables)} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} \\
&= 1 - e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x}
\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers 0, nous avons donc :

$$P[Inf(X_i) \leq x] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x + o(x)$$

Expression du taux de passage de l'état n à l'état $n+1$

Nous supposons donc qu'il y a $K - n$ machines en état de marche. Soit X_i le temps qui sépare l'instant courant de la panne de la machine i. La première machine tombera en panne au bout d'un temps $Inf(X_i)$.

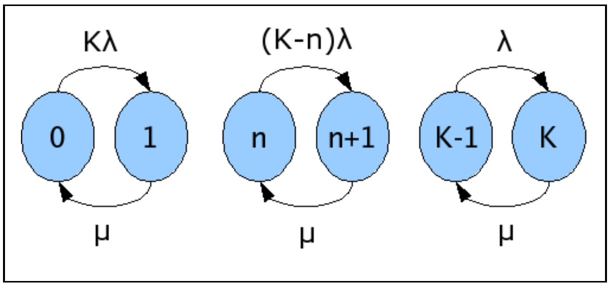
La probabilité de passer de l'état n à l'état $n+1$, c'est à dire P[X(t+dt)=n+1 / X(t+dt)=n] est donc :

$$\boxed{P[X(t+dt) = n+1/X(t) = n] = (K-n)\lambda dt + o(dt)}$$

Expression du taux de passage de l'état $n+1$ à l'état n

Le réparateur est exponentiel et l'on passe donc de l'état $n+1$ à l'état n avec le taux μ.

2- On a bien un procesus sans mémoire, qui de plus, évolue uniquement par saut de 1 ou -1. C'est donc un processus de naissance et de mort.



On a donc :

$$P(n) = \frac{\lambda(0)\lambda(1)...\lambda(n-1)}{\mu(1)\mu(2)...\mu(n)} P(0) = \frac{K!}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P(0)$$

La probabilité d'avoir K machines en pannes est donc :

$$P(K) = \frac{K! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K}{\sum_{n=0}^{K} \frac{K!}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

soit :

$$P(K) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \frac{1}{(K-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-K}}$$

d'où en réindexant (n=K-n) :

$$\boxed{P(K) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-n}}}$$

3- On trouve : $\boxed{P(7) = 4.7\ 10^{-11}}$.

Unité de transmission à capacité limitée

On suppose que les messages forment un trafic poissonnien, de débit moyen 2 messages par seconde. La durée de transmission est constante $E[S] = 400\,ms$ et on néglige les erreurs de transmission. Quelle doit être la capacité du nœud de transmission pour que la probabilité de rejet soit inférieure à 10^{-3} ?

Il y a rejet que si et seulement si la file à capacité limitée est pleine.
En faisant une coupe, on obtient $P(n) = (\lambda S)^n P(0)$ d'où en utilisant l'équation de normalisation :

$$\forall n \in [0..N] \quad P(n) = \frac{(\lambda E[S])^n}{\sum_{i=0}^{N} (\lambda E[S])^i}$$

soit, en posant $\rho = \lambda S$:

$$\forall n \in [0..N] \quad P(n) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^n$$

La probabilité de rejet est donc :

$$\boxed{P_{rejet} = P(N) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^N}$$

On en déduit alors N pour que $P_{rejet} < 10^{-3}$: $\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^N < 10^{-3}$ équivaut à $x - \rho x < 10^{-3}$ en posant $x = \rho^N$. Soit $x < \frac{10^{-3}}{1-\rho+10^{-3}\rho}$ d'où $\rho^N < \frac{10^{-3}}{1-\rho+10^{-3}\rho}$. Il faut passer ensuite au logarithme : $Nln(\rho) < ln\left(\frac{10^{-3}}{1-\rho+10^{-3}\rho}\right)$, d'où, puisque $\rho < 1$ et $ln(\rho) < 0$:

$$\boxed{N > \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{1-\rho+10^{-3}\rho}\right)}{\ln(\rho)}}$$

On trouve alors : $\boxed{\rho = \lambda E[S] = 0.8 \text{ et } N \geq 24}$

Unité de transmission avec des erreurs de transmission

1- Notons λ_e le flux **d'entrée** dans la file d'attente, λ_s le flux à la **sortie** du serveur, λ_d celui de **départ** du système et λ_r le flux de **rebouclage**.
On a toujours $\lambda_r = p\lambda_s$ et $\lambda_d = (1-p)\lambda_s$, soit aussi : $\lambda_r = \frac{p}{1-p}\lambda_d$.
L'additivité des flux, avant l'entrée dans la file d'attente donne toujours : $\lambda e = \lambda + \lambda_r$.
On a $\lambda_e = \lambda e$, de par la définition de e.
Il existe au moins quatre façons de trouver le nombre moyen de passages e dans le système {file d'attente ; serveur} :
Stationnarité du système {file d'attente ; serveur}
Sous cette hypothèse, le flux de sortie du serveur est égal à λe : $\lambda_s = \lambda_e$. On a donc $\lambda_r = p\lambda e$.
En utilisant l'additivité des flux, nous pouvons écrire $\lambda e = \lambda + p\lambda e$ et résoudre en e.
Stationnarité du système {file d'attente ; serveur ; rebouclage}
Sous cette hypothèse, le flux de départ du système est égal à λ : $\lambda_d = \lambda$, d'où $\lambda_r = \frac{p}{1-p}\lambda$
En utilisant l'additivité des flux, nous pouvons écrire $\lambda e = \lambda + \frac{p}{1-p}\lambda$ et résoudre en e.
Espérance de e
Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de passages d'un client dans le système {file

d'attente ; serveur}.
Un client passe exactement k fois dans la file avec la probabilité $p^{k-1}(1-p)$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P[X=k] = p^{k-1}(1-p)$$

L'espérance de E est donc :

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i p^{i-1}(1-p) = (1-p)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{d(x^i)}{dx}\right)_{x=p} = (1-p)\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i\right)_{x=p}$$

Sommer les p^k
On passe une fois avec la probabilité 1, une deuxième avec la probabilité p, une troisième p^2, etc. D'où le résultat en sommant p^k de $k=0$ à l'infini.
Conclusion Le nombre moyen de passages e dans la file est :

$$\boxed{e = \frac{1}{1-p}}$$

2- Nous pouvons considérer le système complet {file d'attente ; serveur ; rebouclage} et y appliquer la loi de Little : $L = E[R]\lambda$ où L est le nombre de client dans le système complet.
Soit $N(t)$ le processus indiquant le nombre de client dans le système complet. Le processus d'arrivée dans le système est poissonnien. Un client ne quitte le système qu'après un service exponentiel et avec la probabilité (1-p). $N(t)$ est donc Markovien.
Un seul client ne peut arriver pendant dt et ceci se produit avec la probabilité $\lambda dt + o(dt)$. Un seul client ne peut sortir du système pendant dt, et ceci avec la probabilité $\mu(1-p)+o(dt)$. C'est donc un processus de naissance et de mort. En posant $\rho = \frac{\lambda}{(1-p)\mu} = \frac{\lambda}{1-p}E[S]$, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

d'où $L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \frac{\rho}{1-\rho}$. On a donc :

$$\boxed{L = \frac{\lambda E[S]}{1-p-\lambda E[S]}}$$

Conclusion et applications numériques
En utilisant la loi de Little sur le système entier, on obtient :

$$\boxed{E[R] = \frac{E[S]}{1-p-\lambda E[S]}}$$

On trouve $L = 8$ et $E[R] = 4s$.
Remarque
On peut aussi considérer cela comme un réseau de Jackson à une seule file avec $e = \frac{1}{1-p}$.

Etude de la file M/M/C/C

1- Soit $N(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t.
$N(t)$ est markovien car la seule connaissance de $N(t)$ permet de prévoir les prochains départs de clients (temps résiduel de service exponentiel), la prochaine arrivée de client (temps résiduel de service exponentiel).

$N(t)$ est un processus de naissance et de mort si les seules transitions possibles se font entre les états voisins :

La probabilité qu'il y ait k arrivées pendant un intervalle de temps T est $P_k(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{rcl} P_0(dt) & = & e^{-\lambda dt} = 1-\lambda dt + o(dt) \\ P_1(dt) & = & \frac{\lambda dt}{1!}e^{-\lambda dt} = \lambda dt + o(dt) \\ \forall k>1 \quad P_k(dt) & = & o(dt) \end{array}\right.$

Le processus d'arrivée est poissonnien et il ne peut y avoir qu'une seule arrive entre t et $t+dt$.

La probabilité qu'il y ait j départs pour k serveurs occupés pendant un intervalle de temps dt est :

$$Q_j(dt) = C_k^j(\mu dt + o(dt))^j(1 - \mu dt + o(dt))^{k-j}$$

On a donc : $\left\{\begin{array}{rcl} Q_0(dt) & = & 1 - k\mu dt + o(dt) \\ Q_1(dt) & = & k\mu dt + o(dt) \\ \forall j > 1 \quad Q_j(dt) & = & o(dt) \end{array}\right.$

Le processus $N(t)$ est donc un processus de naissance et de mort. Les taux d'arrivées et de départ sont respectivement λ et $k\mu$ où k est le nombre de serveurs occupés.

2- En écrivant la chaîne de Markov associée à la file et en coupant entre l'état n et $n+1$, nous avons :

$$\forall n \quad \lambda\pi(0) = (n+1)\mu$$

d'où

$$\forall n \quad \pi(n) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi(0)$$

d'où en écrivant l'équation de normalisation, on obtient :

$$\forall n \quad \pi(n) = \frac{1}{n!}\frac{1}{\sum_{k=0}^{C}\frac{1}{k!}\rho^{k-n}}$$

3- La probabilité qu'un client qui arrive soit rejeté est la probabilité que la file soit pleine, c'est à dire :

$$P_{rejet} = \frac{1}{C!}\frac{1}{\sum_{k=0}^{C}\frac{1}{k!}\rho^{k-C}}$$

4- Le nombre moyen de clients dans la file est :

$$L = E[N] == \sum_{n=0}^{C} n\pi(n) = \sum_{n=0}^{C} n\frac{1}{n!}\frac{1}{\sum_{k=0}^{C}\frac{1}{k!}\rho^{k-n}} = \rho(1 - p_{rejet})$$

Le temps moyen de réponse $E[R]$ est égal à $E[W] + E[S]$ avec ici $E[W] = 0$ (pas d'attente).

On peut écrire que $E[S] = \frac{1}{\mu}$ (temps moyen de service) d'où $E[R] = \frac{1}{\mu}$.

Une autre solution est d'appliquer la loi de Little au système des serveurs. On a $E[L] = E[S]\Lambda$ où Λ est le débit entrant dans ce système. Ici, nous avons vu que $\Lambda = (1 - p_{rejet})\lambda$ d'où $E[R] = E[S] = \dfrac{L}{\Lambda} = \dfrac{\rho}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu}$.

File à Serveurs Hétérogènes

1- Serveurs homogènes

a- C'est une file à arrivées poissonniennes de taux λ (On écrit M car Markovien), à services exponentiels de paramètre μ (M), comportant 2 serveurs. La priorité est celle par défaut, FCFS. Le nombre de place est infini (par défaut) et la population aussi (par défaut).

$\boxed{\text{La notation de Kendall de la file est M/M/2.}}$

b- $N(t)$ est Markovien car la seule connaissance de N(t) permet de prévoir les prochains départs de clients (temps résiduel de service exponentiel) ainsi que la prochaine arrivée de client (temps résiduel d'interarrivée exponentiel).

C'est un processus de naissance et de mort et les taux de passage sont :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} P[N(t+dt) = k+1/N(t) = k] = \lambda dt + o(dt) \quad \forall k \geq 0 \\ P[N(t+dt) = k-1/N(t) = k] = \left\{\begin{array}{ll} \mu dt + o(dt) & k = 1 \\ 2\mu dt + o(dt) & \forall k \geq 1 \end{array}\right. \end{array}\right.}$$

c- En écrivant la chaîne de Markov associée à la file et en effectuant une coupe on trouve :

$$\forall i \geq 1 \quad \pi_i = 2\rho^i\pi_0 \quad avec \quad \rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

Il suffit d'écrire l'équation de normalisation pour déterminer π_0. Si la condition de stabilité de la file est vérifiée, $\boxed{\rho < 1}$, on trouve que :

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad \pi_k = \frac{1-\rho}{1+\rho} 2\rho^k}$$

d- Le calcul de L conduit à :

$$\boxed{E[L] = \frac{2\rho}{1-\rho^2}}$$

En écrivant la loi de Little, on a :

$$\boxed{E[R] = \frac{2}{\mu(1-\rho^2)}}$$

2- Serveurs hétérogènes
a- Le processus $N(t)$ n'est pas Markovien car lorsque $N(t) = 1$, on ne peut pas prédire le passage à l'état 0. En revanche, nous savons que le temps résiduel est exponentiel, mais nous ne connaissons pas son paramètre. En effet, si c'est le premier serveur qui est occupé, alors le paramètre vaut 2μ, si c'est le second, il vaut μ.

$$\boxed{\text{Le processus } N(t) \text{ n'est pas Markovien.}}$$

b- $E(t)$ est un processus Markovien car il permet de savoir dans quel serveur se trouve le client lorsqu'il n'y en a qu'un dans la file. Nous pouvons calculer les probabilités de transition :

$$\boxed{\begin{array}{rrcl} \forall k > 0 & P[N(t+dt) = k+1/N(t) = k] & = & \lambda dt + o(dt) \\ & P[N(t+dt) = 0/N(t) = 1'] & = & 2\mu dt + o(dt) \\ & P[N(t+dt) = 0/N(t) = 1''] & = & \mu dt + o(dt) \\ & P[N(t+dt) = 1'/N(t) = 2] & = & \mu dt + o(dt) \\ & P[N(t+dt) = 1''/N(t) = 2] & = & 2\mu dt + o(dt) \\ \forall k > 2 & P[N(t+dt) = k-1/N(t) = k] & = & 3\mu dt + o(dt) \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Ce n'est pas un processus de naissance et de mort, car l'état 2 est relié à trois états différents.}}$$

c- Nous déterminons :

$$\pi_3 = \frac{\lambda}{3\mu}\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_2$$

puis

$$\forall i \geq 0 \quad \pi_{i+2} = \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^i \pi_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

En effectuant une coupe autour de l'état 0, nous avons :

$$\lambda\pi_0 = 2\mu\pi_{1'} + \mu\pi_{1''}$$

En effectuant une coupe autour de $1''$, nous avons :

$$(\mu + \lambda)\pi_{1''} = 2\mu\pi_2$$

En effectuant une coupe à gauche de π_2, nous avons :

$$\lambda(\pi_{1'} + \pi_{1''}) = 3\mu\pi_2$$

On en déduit que :

$$\boxed{\pi_0 = 5\pi_2 \quad \pi_{1'} = 2\pi_2 \quad \pi_{1''} = \pi_2}$$

Condition de normalisation :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 = \pi_2 \left[5 + 2 + 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i\right]$$

or $\frac{\lambda}{3\mu} < 1$ donc $\boxed{\text{le système est stable}}$.
On en déduit :

$$\pi_2 = \frac{2}{19},\ \pi_0 = \frac{10}{19},\ \pi_{1'} = \frac{4}{19},\ \pi_{1''} = \frac{2}{19}$$

$$\pi_{k+2} = \frac{2}{19}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

d-
Calcul du nombre de clients

$$E[L] = 0 * \pi_0 + 1 * \pi_{1'} + 1 * \pi 1'' + \sum_{k=2}^{\infty} k\pi_k$$

$$\begin{aligned} E[L] &= \frac{6}{19} + \frac{2}{19}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{6}{19}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right] \end{aligned}$$

Après avoir calculé la dernière somme, on trouve :

$$\boxed{E[L] = \frac{27}{38}}$$

Calcul du temps de réponse
En appliquant la loi de Little, nous déterminons :

$$\boxed{E[R] = \frac{E[L]}{\lambda} = \frac{27}{38\lambda}}$$

Calcul du taux d'occupation de chacun des serveurs
On a directement :

$$\boxed{U_1 = 1 - \pi_0 - \pi_{1''} = \frac{7}{19}}$$

$$\boxed{U_2 = 1 - \pi_0 - \pi_{1'} = \frac{5}{19}}$$

Temps moyen d'attente $E[W]$

Soit $E[L_W]$ le nombre moyen de clients en attente. Nous avons : $E[L] = E[L_W] + E[L_S]$ où $E[L_S] = E[L_1] + E[L_2]$, avec $E[L_1] = U_1$, $E[L_2] = U_2$. On en conclue que $E[L_W] = E[L] - U_1 - U_2 = \frac{3}{38}$.

En appliquant la loi de Little au système sans les serveurs, nous déterminons :

$$\boxed{E[W] = \frac{E[L_W]}{\lambda} = \frac{3}{38\lambda}}$$

Nous pouvons calculer de la même facon le temps $E[S]$:
Soit $E[L_s]$ le nombre moyen de clients en service. Nous avons : $E[L_S] = E[L_1] + E[L_2] = U_1 + U_2$. On en conclue que $E[L_S] = \frac{12}{19}$.
En appliquant la loi de Little au système des deux serveurs, nous déterminons :

$$\boxed{E[S] = \frac{E[L_S]}{\lambda} = \frac{12}{19\lambda}}$$

Proportion de clients servis par chacun des deux serveurs

Soit λ_1 le débit de ceux qui sont traités par le serveur rapide. Soit λ_2 le débit de ceux qui sont traités par le serveur lent. On a $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. De plus, $\lambda_1 = \frac{U_1}{E[S_1]} = 2\mu U_1$ et $\lambda_2 = \frac{U_2}{E[S_2]} = \mu U_2$. Nous pouvons alors déterminer la proportion de clients servis par chaque serveur.

La proportion de clients services par le serveur rapide est :

$$\boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{2\mu U_1}{2\mu U_1 + \mu U_2} = \frac{2U_1}{2U_1 + U_2} = \frac{14}{19} = 73,7\%}$$

La proportion de clients services par le serveur lent est :

$$\boxed{\frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{\mu U_2}{2\mu U_1 + \mu U_2} = \frac{U_2}{2U_1 + U_2} = \frac{5}{19} = 26,3\%}$$

Performance d'un étage d'abonnés - File M/M/C/C/N

1- Montrons que la seule connaissance de $N(t)$ suffit à déterminer $N(t + dt)$:

Première méthode

Arrivées

Supposons que $N(t) = k$, avec $k \in [0..C]$. Le nombre de client en dans la première file est donc : $(N - k)$. Il y a exactement i arrivées (i tel que $k + i \leq C$ puisque le nombre de clients pouvant être servi est limité par C et $i \leq N - k$ puisque le nombre de clients dans la première file est $N - k$) dans la seconde file pendant dt si il y a i fins de service exponentiels de paramètre λ dans la première file et $N - k - i$ clients qui ne finissent pas leur service :

$$\forall i \in [1, C - k] \quad P[N(t + dt) = k + i/N(t) = k] = C^i_{N-k}(\lambda dt + o(dt))^i(1 - \lambda dt + o(dt))^{N-k-i}$$

Nous en concluons que :

$$P[N(t + dt) = k + 1/N(t) = k] = (N - k)\lambda dt + o(dt)$$

$$\forall i \in [2, C - k] \quad P[N(t + dt) = k + i/N(t) = k] = o(dt)$$

La connaissance de $N(t) = n$ permet donc de prévoir les arrivées entre t et $t + dt$.
Un seul client peut arriver pendant dt et il arrive avec le taux $(N - n)\lambda$.

Départs

Supposons que $N(t) = k$, avec $k \in [0..C]$. Il y a exactement i départs (i tel que $i \leq k$ puisque le nombre de clients dans la seconde file est k) si il y a i fins de service exponentiels de paramètre μ et $k - i$ clients qui ne finissent pas leur service :

$$\forall i \in [0, k] \quad P[N(t + dt) = k - i/N(t) = k] = C^i_k(\mu dt + o(dt))^i(1 - \mu dt + o(dt))^{k-i}$$

Nous en concluons que :

$$P[N(t + dt) = k - 1/N(t) = k] = k\mu dt + o(dt)$$

$$\forall i \in [1, k] \quad P[N(t + dt) = k - i/N(t) = k] = o(dt)$$

La connaissance de $N(t) = n$ permet donc de prévoir les départs entre t et $t + dt$.
Un seul client peut partir pendant dt et il part avec le taux $n\mu$.

Seconde méthode

Arrivées

Supposons que $N(t) = k$, avec $k \in [0..C]$. Nous savons qu'il ne peut y avoir qu'un seul départ entre t et $t + dt$ de la première file de service exponentiel de paramètre λ (il pourrait y avoir deux départs, mais avec une probabilité en dt^2 infiniment petite par rapport à la probabilité pour qu'il y en est un qui est en dt). Nous savons de plus que ce départ suit la loi de l'inf du temps résiduel des $N - k$ services exponentiels. Il a été démontré que la loi de l'inf de p lois exponentielles de paramètre λ_i est une loi exponentielle de paramètre la somme des λ_i. Ici, nous avons $N - k$ services exponentielles de paramètre λ d'où :

$$P[N(t + dt) = k + 1/N(t) = k] = (N - k)\lambda dt + o(dt)$$

Départs

Supposons que $N(t) = k$, avec $k \in [0..C]$. Nous savons qu'il ne peut y avoir qu'un seul départ de la seconde file entre t et $t + dt$. Ce départ se fait selon la loi de l'inf des k lois résiduelles des clients en service, d'où :

$$P[N(t+dt) = k-1/N(t) = k] = k\mu dt + o(dt)$$

Conclusion

Le processus $N(t)$ est Markovien. De plus, c'est un processus de naissance et de mort à $C+1$ états où :

$$\begin{array}{rrcl} \forall n \in [0, C-1] & \lambda(n) & = & (N-n)\lambda \\ \forall n \in [1, C] & \mu(n) & = & n\mu \end{array}$$

La chaîne de Markov comporte un nombre fini d'états et est fortement connexe. Le processus est donc ergodique.

2- $N(t)$ étant un processus de naissance et de mort, nous avons :

$$\forall n \in [0, C] \quad \pi(n) = \frac{\lambda(0)...\lambda(n-1)}{\mu(1)...\mu(n)} = \frac{N!}{(N-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi(0)$$

Ce qui peut s'écrire, en posant $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$:

$$\forall n \in [0, C] \quad \pi(n) = C_N^n \rho^n \pi(0)$$

Nous déterminons alors les probabilités stationnaires, après avoir utilisé la condition de normalisation :

$$\forall n \in [0, C] \quad \pi(n) = \frac{C_N^n \rho^n}{\sum_{i=0}^{C} C_N^i \rho^i}$$

3- Nous ne pouvons pas appliquer la propriété PASTA ici. Il serait faux d'écrire que la probabilité de rejet est celle d'avoir C clients dans la file, comme nous allons le montrer.
Notons $\Pi_N(C)$ la probabilité que C serveurs soient occupés lorsqu'il y a N clients dans le réseau :

$$\Pi_N(C) = \frac{C_N^C \rho^C}{\sum_{i=0}^{C} C_N^i \rho^i}$$

Calcul du débit au point A : Λ_A
Le débit au point A est :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_A & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{C} (N-k)\lambda\pi(k) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{C} (N-k)\lambda C_N^k \rho^k \pi(0) \end{array}$$

Première méthode

Cette première méthode consiste à suivre les indications du sujet en calculant le débit au point B :

Calcul du débit au point A : Λ_B
Le débit au point B est obtenu en considérant qu'il y a C clients dans la file 2 (avec la probabilité $\pi(C)$. Il y a alors $N - C$ clients dans la 1. Une fois servi dans la file d'attente, il sont tous rejeté, d'où :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_B & = & (N-C)\lambda\pi(C) \\ & = & (N-C)\lambda C_N^C \rho^C \pi(0) \end{array}$$

Calcul de la probabilité de rejet
La probabilité de rejet est le rapport entre le débit rejeté et le débit offert :

$$\begin{aligned} P(rejet) &= \frac{\Lambda_B}{\Lambda_A} \\ &= \frac{(N-C)C_N^C \lambda \rho^C \pi(0)}{\sum_{k=0}^{C} (N-k)\lambda C_N^k \rho^k \pi(0)} \\ &= \frac{(N-C)C_N^C \rho^C}{\sum_{k=0}^{C} (N-k) C_N^k \rho^k} \end{aligned}$$

d'où :

$$P(rejet) = \frac{(N-C)\frac{N!}{(N-C)!C!}\rho^C}{\sum_{k=0}^{C} (N-k)\frac{N!}{(N-k)!k!}\rho^k} = \frac{N\frac{(N-1)!}{(N-1-C)!C!}\rho^C}{\sum_{k=0}^{C} N\frac{(N-1)!}{(N-1-k)!k!}\rho^k} = \frac{C_{N-1}^C \rho^C}{\sum_{k=0}^{C} C_{N-1}^k \rho^k} = \Pi_{N-1}(C)$$

Seconde méthode

Cette seconde méthode consiste à calculer le débit au point E :

Calcul du débit au point E : Λ_E

Le débit au point E est :

$$\begin{aligned} \Lambda_E &= \sum_{k=0}^{C} k\mu\pi(k) \\ &= \sum_{k=1}^{C} k\mu\pi(k) \\ &= \sum_{k=1}^{C} k\mu \frac{N!}{(N-k)!k!}\rho^k \pi(0) \\ &= \sum_{k=1}^{C} \lambda\rho^{k-1} \frac{N!}{(N-k+1)!(k-1)!}(N-(k-1))\pi(0) \\ &= \sum_{k=1}^{C} \lambda(N-(k-1))C_N^{k-1}\rho^{k-1}\pi(0) \\ &= \sum_{k=1}^{C} \lambda(N-(k-1))\pi(k-1) \\ &= \sum_{k=0}^{C-1} \lambda(N-k)\pi(k) \end{aligned}$$

Calcul de la probabilité de rejet

La probabilité de rejet est égale à : $1 - \frac{\Lambda_D}{\Lambda_A}$. Or $\Lambda_D = \Lambda_E$. Nous déterminons :

$$P(rejet) = 1 - \frac{\Lambda_E}{\Lambda_A} = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{C-1} \lambda(N-k)\pi(k)}{\sum_{k=0}^{C} (N-k)\lambda\pi(k)}$$

soit :

$$P(rejet) = \frac{(N-C)\lambda\pi(C)}{\sum_{k=0}^{C} (N-k)\lambda\pi(k)}$$

En simplifiant, comme dans la première méthode, ceci conduit à

$$P(rejet) = \Pi_{N-1}(C)$$

Conclusion

Dans cet exercice, la propriété PASTA ne s'applique pas. On observe que la probabilité de rejet est égale à la probabilité que l'on aurait eu d'avoir C serveurs occupés si il y avait eu $N-1$ clients et non N.

En réalité, ce résultat n'est pas le seul fruit du hasard. Il s'agit en fait de l'application particulière à ce problème d'un théorème connu sous le nom **Sevcik Mitrani** :

Lorsqu'un client entre dans une file dans un réseau BCMP il voit cette file dans un état qui est en moyenne l'état de la file dans le même réseau fermé mais avec un client de moins au total dans le réseau fermé

Influence de la variance des services et de la loi de priorité

Nous avons : $U_i = \rho_i = \lambda_i E[S_i]$ d'où :

$$U_1 = \rho_1 = 0.25 \text{ et } U_2 = \rho_2 = 0.375$$

Pour calculer U, probabilité que le serveur soit occupé, il suffit d'additionner les probabilités précédentes :

$$U = U_1 + U_2 = 0.625$$

On peut aussi écrire que $U = \rho = \lambda E[S]$ où λ est le débit global et $E[S]$ le temps moyen de service, toutes classes confondues :

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 1/2.4 + 1/0.8 = 1.6667 = 1/0.6$$

$E[S]$ est la moyenne des temps de service :

$$E[S] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[S_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[S_2] = 0.375$$

ce qui donne :

$$U = \rho = 0.375/0.6 = 0.625$$

Service PS
Dans ce cas, on a $E[W_i] = E[S_i]\dfrac{\rho}{1-\rho}$, d'où :

$$E[W_1] = E[S_1]\frac{\rho}{1-\rho} = 1 \text{ et } E[W_2] = E[S_2]\frac{\rho}{1-\rho} = 0.5$$

Pour calculer E[W], il suffit de dire que c'est la moyenne des temps de séjour dans le buffer :

$$E[W] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[W_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[W_2] = 0.625$$

On peut aussi dire que :

$$E[W] = E[S]\frac{\rho}{1-\rho} = 0.625$$

Dans le cas d'un service PS, que les services soient constants ou exponentiels, nous avons :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} E[R_1] & = & E[W_1] + E[S_1] & = & 1.6 \\ E[R_2] & = & E[W_2] + E[S_2] & = & 0.8 \\ E[R] & = & E[W] + E[S] & = & 1 \end{array}}$$

Service FCFS

La formule l'attente $E[W_i] = \dfrac{1}{1-\rho} \displaystyle\sum_{j=1}^{C} \rho_j E[S_j] \dfrac{1 + C_j^2}{2}$ montre que l'attente dans le buffer est indépendante des classes, mais dépend des carrés des coefficients des services.
Services Constants
On a alors $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$ d'où :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = \frac{1}{1-\rho} \frac{\rho_1 E[S_1] + \rho_2 E[S_2]}{2} = 0.35$$

Dans le cas d'un service FCFS avec services constants, nous avons :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} E[R_1] & = & E[W_1] + E[S_1] & = & 0.95 \\ E[R_2] & = & E[W_2] + E[S_2] & = & 0.65 \\ E[R] & = & E[W] + E[S] & = & 0.725 \end{array}}$$

Services Exponentiels
Pour une loi exponentielle, le coefficient de variation est 1, soit $C_1 = 1$ et $C_2 = 1$, d'où :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = \frac{1}{1-\rho}(\rho_1 E[S_1] + \rho_2 E[S_2]) = 0.70$$

Dans le cas d'un service FCFS avec services exponentiels, nous avons :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} E[R_1] & = & E[W_1]+E[S_1] & = & 1.3 \\ E[R_2] & = & E[W_2]+E[S_2] & = & 1 \\ E[R] & = & E[W]+E[S] & = & 1.075 \end{array}}$$

Conclusion
Dans le cas d'une discipline FCFS, le temps d'attente dans le buffer est le même pour toutes les classes. Dans le cas d'une discipline PS, cela lisse la variance des services.

Longueur des paquets IP

1- Soit λ_i, $i = (1,2,3)$ les taux d'arrivées en octets par secondes de chacun des trois types de paquets. Le débit d'arrivée dans la file de sortie du routeur A est donc : $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Nous savons de plus que ces arrivées suivent une loi poissonnienne de taux Λ, puisque la somme de plusieurs flux poissonniens est poissonnienne.

Les arrivées sont donc poissonniennes, le temps de service S_i est constant ($S_i = \frac{l_i}{D}$), la discipline est FCFS, la capacitée est infinie et la population est infinie.
La discipline étant FCFS, le temps d'attente dans le buffer est le même pour toutes les classes (et donc en moyenne) et vaut, puisque le carré du coefficient de variation de ce service est 0 :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = E[W_3] = \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{3}\frac{\rho_i S_i}{2}$$

ρ est la charge du serveur, c'est à dire du lien. Il nous reste à déterminer la somme $\sum_{i=1}^{3}\rho_i S_i$:

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\rho_i S_i & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\lambda_i S_i^2 & \text{(car } \rho_i = \lambda_i S_i\text{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left(\frac{l_i}{D}\right)^2 & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i (l_i)^2 & \\ & = & \displaystyle\frac{\Lambda}{D^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\lambda_i}{\Lambda}(l_i)^2 & \\ & = & \displaystyle\frac{\Lambda}{D^2}E[L^2] & \\ & = & \displaystyle\frac{\Lambda}{D^2}(E[L]^2+\sigma^2[L]) & \end{array}$$

d'où :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = E[W_3] = \frac{\Lambda}{2D^2(1-\rho)}(E[L]^2+\sigma^2[L])$$

Il reste alors à déterminer Λ. Nous pouvons déterminer le taux de service moyen : $E[S] = \frac{E[L]}{D}$ d'où :

$$\Lambda = \frac{\rho}{E[S]} = \frac{\rho D}{E[L]}$$

D'où :

$$E[W] = E[W_1] = E[W_2] = E[W_3] = \frac{\rho}{2DE[L](1-\rho)}(E[L]^2+\sigma^2[L]) = \frac{\rho}{2D(1-\rho)}E[L]\left(1+\frac{\sigma^2[L]}{E^2[L]}\right)$$

Le temps d'attente passé dans la file de sortie du routeur (attente + service) est donc :

$$\forall i \in [1,3] \quad E[R_i] = E[W] + S_i = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{E[L]}{2D}\left(1+\frac{\sigma^2[L]}{E^2[L]}\right) + \frac{l_i}{D}$$

et en moyenne :

$$E[R] = E[W] + E[S] = \frac{E[L]}{D}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\frac{E[L]}{2D}\left(1+\frac{\sigma^2[L]}{E^2[L]}\right)+1\right)$$

2- Applications numériques Les temps de services pour chaque classe et moyen sont :

$$ES_1 = 0.5\,\mu s \quad S_2 = 5\,\mu s \quad S_3 = 15\,\mu s$$

Système multi-programmé à mémoire virtuelle

1- Le fait que la file WAIT ne soit jamais vide implique qu'il y a toujours $M = 4$ clients dans le système central. L'étude faite ici est à forte charge.

Pour calculer le temps de réponse moyen R du système complet, on peut écrire la formule de Little, appliquée au réseau entier :

$$(E[Z] + E[R])\Lambda = N$$

On en déduit que (formule 1) :

$$\boxed{E[R] = \frac{N}{\Lambda} - E[Z] = 21\ s}$$

Pour calculer le temps de réponse moyen $E[R']$ du système central, on peut appliquer la formule de Little au système central :

$$E[R']\Lambda = M$$

On en déduit que :

$$\boxed{E[R'] = \frac{M}{\Lambda} = 10\ s}$$

Le temps moyen $E[W]$ d'attente dans la file WAIT vérifie l'équation : $E[R] = E[W] + E[R']$. On en déduit que :

$$\boxed{E[W] = E[R] - E[R'] = 11\ s}$$

2- Calculer les demandes totales de traitement au CPU et au disque, par interaction.
Les demandes totales de traitement au disque et au CPU sont respectivement $e_{DK}E[S_{DK}]$ et $e_{CPU}E[S_{CPU}]$.

Pour une intéraction, il y a $e_{DK} = 50$ appels au disque. Nous avons donc :

$$\boxed{e_{DK}E[S_{DK}] = 50\ 40\ 10^{-3} = 2\ s}$$

Ne connaissant pas $E[S_{CPU}]$ (on peut démontrer que e_{CPU} est égal à 51), nous écrivons que $e_{CPU}E[S_{CPU}] = 2s$:

$$\boxed{e_{CPU}E[S_{CPU}] = 2\ s}$$

Pour ces demandes totales au disque et au CPU, nous pouvons majorer le débit de sortie du système central. En effet, le taux d'utilisation de chaque serveur est strictement inférieur à 1. Il y a donc deux inéquations à vérifier :

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{U_{CPU}}{e_{CPU}E[S_{CPU}]} < \frac{1}{e_{CPU}E[S_{CPU}]}\\ \Lambda &= \frac{U_{DK}}{e_{DK}E[S_{DK}]} < \frac{1}{e_{DK}E[S_{DK}]}\end{aligned}$$

Ces deux inéquations conduisent à écrire que le débit de sortie du système central est effectivement majoré :

$$\boxed{\Lambda < 0.5\, interaction/s}$$

Par la suite, on fera l'hypothèse que les services disque et CPU sont distribués suivant des lois exponentielles et indépendantes, que la loi de priorité est FIFO et que les files sont infinies.

3- Nous pouvons décider de modéliser le système central par un réseau ouvert. Si les entrées dans le système étaient poissonniennes, nous nous trouverions dans les conditions d'application du théorème de Jackson.

Dans le cas de services exponentiels, nous savons que le nombre de clients dans la file CPU est $\frac{\rho_{CPU}}{1-\rho_{CPU}}$ avec $\rho_{CPU} = \Lambda e_{CPU} E[S_{CPU}] = 0,4 * 2 = 0,8$ et que celui dans la file du disque est $\frac{\rho_{DK}}{1-\rho_{DK}}$ avec $\rho_{DK} = \Lambda e_{DK} E[S_{DK}] = 0,4 * 2 = 0.8$. Le nombre de clients dans chacune des deux files est donc de $\frac{0.8}{1-0.8} = 4$.

$$\boxed{\text{Le degré de multiprogrammation serait donc de 8.}}$$

Le temps de réponse du système central est déterminé en appliquant la loi de Little au système central :

$$\boxed{\text{Le temps de réponse du système central serait de } E[R'] = \tfrac{8}{0,4} = 20\, s}$$

Les réponses ne correspondent donc pas aux mesures.

$$\boxed{\text{En conclusion, les entrées ne sont pas poissonniennes.}}$$

4- Nous pouvons ici appliquer le théorème de Gordon et Newell. Il est possible de calculer directement les probabilités ou d'appliquer l'algorithme de Reiser

Calcul direct des probabilités

Soient n_1 et n_2 le nombre de clients dans la file CPU, respectivement DK. Nous avons toujours $n_1 + n_2 = 4$. Les probabilités sont, en application du théorème de Gordon et Newell :

$$\begin{array}{lclcl}
P(4,0) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^4(e_{DK}S_{DK})^0 & = & C(2)^4(2)^0 = C(2)^4 \\
P(3,1) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^3(e_{DK}S_{DK})^1 & = & C(2)^3(2)^1 = C(2)^4 \\
P(2,2) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^2(e_{DK}S_{DK})^2 & = & C(2)^2(2)^2 = C(2)^4 \\
P(1,3) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^1(e_{DK}S_{DK})^3 & = & C(2)^1(2)^3 = C(2)^4 \\
P(0,4) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^0(e_{DK}S_{DK})^4 & = & C(2)^0(2)^4 = C(2)^4
\end{array}$$

Nous constatons que toutes ces probabilités sont égales. De plus, leur somme est égale à 1. Nous en déduisons :

$$P(4,0) = P(3,1) = P(2,2) = P(1,3) = P(0,4) = \frac{1}{5} = 0,2$$

Le taux d'utilisation du serveur CPU est donc de $U_{CPU} = 1 - P(0,4) = 0.8$, celui du serveur DK est de $U_{DK} = 1 - P(4,0) = 0.8$. Le débit Λ est obtenu en écrivant :

$$\boxed{\Lambda = \frac{U_{CPU}}{e_{CPU}E[S_{CPU}]} = \frac{U_{DK}}{e_{DK}E[S_{DK}]} = \frac{0,8}{2} = 0,4\, interaction/s}$$

Le nombre de clients dans la file CPU est : $L_{CPU} = 4P(4,0) + 3P(3,1) + 2P(2,2) + 1P(1,0) = 10 * 0,2 = 2$. De même, celui dans la file DK est de $L_{DK} = 2$.

Le nombre de clients total est donc bien de $M = 4$. On applique la formule de Little pour trouver le temps de réponse du système central :

$$\boxed{E[R'] = \frac{M}{\Lambda} = \frac{4}{0,4} = 10\, s.}$$

Algorithme de Reiser

K	1	2	3	4
$e_{CPU}R_{CPU}(K)$	2	3	4	5
$e_{DK}R_{DK}(K)$	2	3	4	5
$\Lambda(K)$	1/4	1/3	3/8	2/5
$L_{CPU}(K)$	1/2	1	3/2	2
$L_{DK}(K)$	1/2	1	3/2	2

Nous aurions pu déterminer la dernière colonne en observant la symétrie pour les deux files. Vu que $e_{CPU}E[S_{CPU}] = e_{DK}E[S_{DK}]$, on a toujours $L_{CPU}(K) = L_{DK}(K) = \frac{K}{2}$. En particulier, $L_{CPU}(3) = L_{DK}(3) = \frac{3}{2}$. Nous pouvions donc directement écrire la quatrième colonne.

Nous déterminons le débit :

$$\boxed{\Lambda = \frac{2}{5} = 0,4\, interaction/s}$$

Nous déterminons le temps de réponse du système central :

$$\boxed{E[R'] = e_{CPU}E[R_{CPU}(4)] + e_{DK}E[R_{DK}(4)] = 10\ s}$$

Conclusion

Nous avons pu retrouver le débit et le temps de réponse du système central. Nous pouvons donc affirmer que :

$$\boxed{\text{Le modèle fermé est valable}}$$

5- Nous pouvons ici appliquer le théorème de Gordon et Newell. Il est possible de calculer directement les probabilités ou d'apliquer l'algorithme de Reiser

La file WAIT n'étant jamais vide, nous pourrions reprendre les raisonnements de la seconde question déterminer :

$$e_{DK}E[S_{DK}] = 25 * 40 * 10^{-3} = 1\ s$$

Algorithme de Reiser

K	1	2
$e_{CPU}R_{CPU}(K)$	2	10/3
$e_{DK}R_{DK}(K)$	1	4/3
$\Lambda(K)$	1/3	3/7
$L_{CPU}(K)$	2/3	10/7
$L_{DK}(K)$	1/3	4/7

Nous déterminons le débit :

$$\boxed{\Lambda = \frac{3}{7} \simeq 0,43\, interaction/s}$$

Nous déterminons le temps de réponse du système central :

$$\boxed{E[R'] = e_{CPU}E[R_{CPU}(2)] + e_{DK}E[R_{DK}(2)] = \frac{14}{3} \simeq 4,7\ s}$$

Calcul direct des probabilités

Soient n_1 et n_2 le nombre de clients dans la file CPU, respectivement DK. Nous avons toujours $n_1 + n_2 = 2$. Les probabilités sont, en application du théorème de Gordon et Newell :

$$\begin{array}{rclcl}
P(2,0) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^2(e_{DK}S_{DK})^0 & = & C(2)^2(1)^0 = 4C \\
P(1,1) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^1(e_{DK}S_{DK})^1 & = & C(2)^1(1)^1 = 2C \\
P(0,2) & = & C(e_{CPU}E[S_{CPU}])^0(e_{DK}S_{DK})^2 & = & C(2)^0(1)^2 = C
\end{array}$$

De plus, leur somme est égale à 1. Nous en déduisons que $C = \frac{1}{7}$ d'où

$$P(2,0) = \frac{4}{7},\ P(1,1) = \frac{2}{7},\ P(0,2) = \frac{1}{7}$$

Le taux d'utilisation du serveur CPU est donc de $U_{CPU} = 1 - P(0,2) = \frac{6}{7}$, celui du serveur DK est de $U_{DK} = 1 - P(2,0) = \frac{3}{7}$. Le débit Λ est obtenu en écrivant :

$$\boxed{\Lambda = \frac{U_{CPU}}{e_{CPU}E[S_{CPU}]} = \frac{U_{DK}}{e_{DK}E[S_{DK}]} = \frac{3}{7} \simeq 0,43\, interaction/s}$$

Le nombre de clients dans la file CPU est : $L_{CPU} = 2P(2,0) + 1P(1,1) = \dfrac{10}{7}$. De même, celui dans la file DK est de $L_{DK} = \dfrac{4}{7}$.
Le nombre de clients total est donc bien de $M = 2$. On applique la formule de Little pour trouver le temps de réponse du système central :

$$\boxed{E[R'] = \frac{M}{\Lambda} = \frac{2}{\frac{3}{7}} = \frac{14}{3} \simeq 4,7\, s}$$

Calcul du taux de recouvrement
Le taux de recouvrement CPU/disque est la probabilité pour que ces deux unités soient actives simultanément. Il faut donc avoir déterminé les probabilités des nombres de clients dans chaque file pour le déterminer.

$$\boxed{\text{Taux de recouvrement} = P(1,1) = \frac{2}{7} \simeq 0,29 \simeq 29\%}$$

Conclusion
Pour comparer les deux configurations, il ne faut pas comparer les temps de réponse des deux systèmes centraux ! En effet, il s'agit de comparer les performances, vu des terminaux. Un terminal sera donc sensible au temps de réponse du système global, c'est à dire à celui du système central plus celui de la file WAIT. Il est évident que lorsque le nombre de clients dans le système central diminue, le temps de réponse du système central diminue. Il n'est donc pas utile de comparer les temps de réponse. Mais il est aussi évident que lorsque le degré de multiprogrammation diminue, le temps d'attente dans la file WAIT augmente. C'est la somme du temps de réponse du système central et du temps d'attente dans la file WAIT qui nous intéresse ou, ce qui est équivalent vu la formule 1 de la question 1, le débit global. Il vaut donc mieux comparer les débits de ces deux systèmes. Nous observons que celui du second système est légèrement supérieur à celui du premier. En conclusion,

$$\boxed{\text{Il vaut mieux comparer les débits. Cette nouvelle configuration donne de meilleures performances.}}$$

Du choix du point où l'on compte le débit global dans un réseau fermé

1- Nous notons e_i le nombre moyen de passages dans la file i, et e le vecteur dont les composantes sont les e_i. Le réseau étant ouvert, e vérifie l'équation $e = q + eP$ où :

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre moyen de passages par file est donc :

$$\boxed{e_1 = 6 \qquad e_2 = 3 \qquad e_3 = 2}$$

Le réseau est stable si et seulement si $\forall i \in [1,3] \quad \rho_i = \lambda e_i E[S_i] < 1$. Ici, $\rho_1 = \frac{3}{4}$, $\rho_2 = \frac{1}{2}$, $\rho_3 = \frac{1}{4}$.