Aide mémoire sur les systèmes avec perte

On considère un système composé de k serveurs (éventuellement $k = +\infty$). On suppose que le processus d'arrivée est un processus de Poisson de paramètre λ. Les temps de service sont supposés indépendants de même loi exponentielle de paramètre μ.

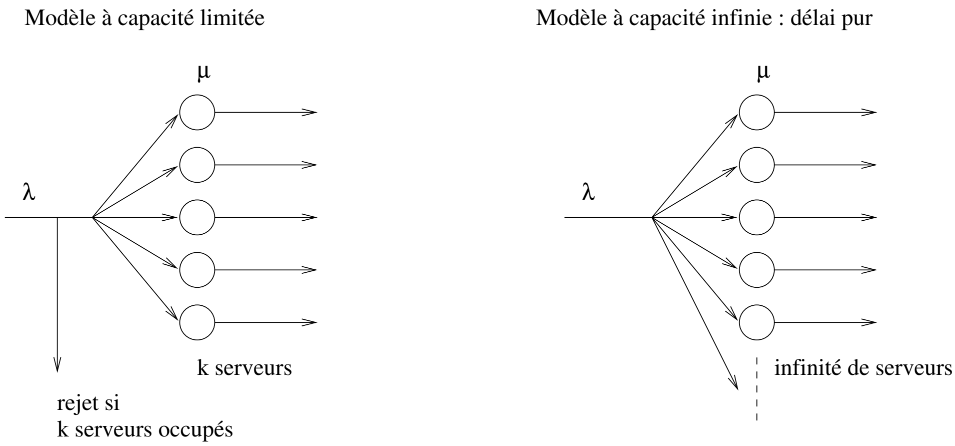

FIG. 1 – Modèle des systèmes de ressources sans buffer à capacité finie (rejet) ou infinie

Le processus aléatoire $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, nombre de clients dans la file à l'instant t est un processus de Markov en temps continu à valeur dans $\mathbb{N}$.

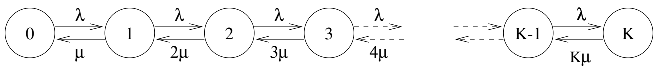

FIG. 2 – Graphe d'état associé au processus $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ associé à la file $M/M/K/K$.

Indice de performance	Capacité K $M/M/K/K$	Capacité infinie $M/M/K/\infty$ (hyp : trafic léger)
Charge	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Taux d'utilisation du système	$\frac{\rho}{K}$	0
Probabilité stationnaire	$\pi_n = \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}$, $\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{K} \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$.	$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$,
Nombre moyen de clients $\overline{N}$	$\rho(1-\pi_K)$	ρ
Temps de réponse W	$\mathbb{P}(W \leqslant x) = \pi_K + (1-\pi_K)(1-e^{-\mu x})$	$\mathbb{P}(W \leqslant x) = (1-e^{-\mu x})$
Probabilité de rejet $\mathbb{P}(N > K)$	$\pi_K = \frac{\frac{\rho^K}{K!}}{\sum_{n=0}^{K}\frac{\rho^n}{n!}}$	$\mathbb{P}(N > K) = e^{-\rho}\sum_{n=K+1}^{+\infty}\frac{\rho^n}{n!}$

La formule donnant la probabilité de rejet est appellée formule d'Erlang-B en honneur du mathématicien Danois Agner Krarup Erlang (1878-1929) qui le premier établit les formules permettant le dimensionnement des centraux téléphoniques. *The theory of probability and telephone conversations* en 1909. Formules sur les pertes et les temps d'attente en 1917.

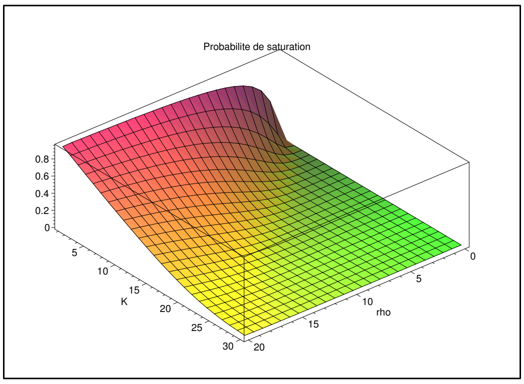

FIG. 3 – Probabilité qu'un client arrivant trouve le système saturé

Comportement de la file$M/GI/\infty$

On considère une file d'attente $M/GI/\infty$. C'est un modèle de système à délai pur, il n'y a pas de contention d'accès aux ressources. Le processus d'arrivée est un processus de Poisson de paramètre λ. Les temps de services sont indépendants de même distribution de fonction de répartition F. On suppose que les temps de services sont indépendants du processus d'arrivée.

On note $\{N_t\}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ le processus d'arrivée des clients (processus de Poisson) et $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ le processus représentant le nombre de clients dans le système à t.

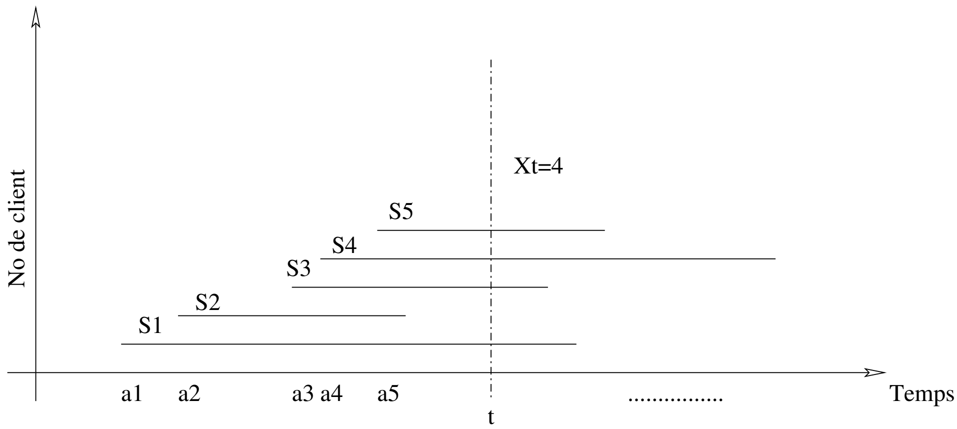

FIG. 4 – Exemple de comportement de la $M/GI/\infty$, le trait horizontal de longueur S_i représente la présence du client i dans le système

Comme le processus d'arrivée est un processus de Poisson, conditionnellement au nombre k d'arrivées sur $[0, t]$, les instants d'arrivée se répartissent sur l'intervalle comme le réarrangement par ordre croissant de k tirages aléatoires indépendants de loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,t]}$.

On note p_t la probabilité qu'un client arrivant à un instant arbitraire sur $[0, t]$ soit présent dans le système à l'instant t.

$$p_t = \mathbb{P}(U + S \geqslant t) = \frac{1}{t}\int_0^t (1 - F(u))du,$$

avec U de loi uniforme sur $[0, t]$ et S de fonction de répartition F, on note $Z = S + U$.

On va calculer la loi du couple (X_t, D_t). La quantité $D_t = N_t - X_t$ représente le nombre de clients sortis du système sur l'intervalle $[0, t]$. En passant par les séries génératrices,

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= \mathbb{E}x^{X_t}y^{D_t}, \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{x}{y}\right)^{X_t} y^{N_t}, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left((\frac{x}{y})^{X_t} y^{N_t} | N_t = k \right) \mathbb{P}(N_t = k), \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\frac{x}{y})^{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{U_i + S_i \geqslant t}} y^k \mathbb{P}(N_t = k), \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1 - p_t + p_t \frac{x}{y}) y \right]^k \mathbb{P}(N_t = k), \\
&= e^{\lambda t \left((1 - p_t + p_t \frac{x}{y}) y - 1 \right)}, \\
&= e^{\lambda t p_t (x-1)} e^{\lambda t (1-p_t)(y-1)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent X_t et D_t sont indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda t p_t$ pour X_t et $\lambda t(1 - p_t)$ pour D_t.

Comme

$$\lim_{t \to +\infty} t p_t = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t (1 - F(u)) du = \mathbb{E}S,$$

on déduit que la loi asymptotique du nombre de clients dans le système est une loi de Poisson de paramètre $\lambda \mathbb{E}S$. Dans ce cas, la loi asymptotique ne dépend pas de la forme de la distribution du temps de service, le modèle simple $M/M/K/\infty$ est parfaitement robuste.