Chloé DESDOUITS
Guillerme DUVILLIE
Swan ROCHER

M1 Informatique

TP de méthodes de résolution de problèmes NP-complets

2012

UM2

Table des matières

Chapitre 1

Partie théorique

1.1 Exercice 2 - Sur le problème de la couverture d'ensembles

1.1.1 Modélisation du problème à l'aide de la PLNE

On considère le problème de la couverture d'ensemble, défini par : Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, soient $S_1, \ldots, S_m$ des sous-ensembles non vides de E tels que $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, on a : $S_i \subset E$. On associe à chaque ensemble S_j un poids $w_j \geq 0$. Le problème consiste à trouver une collection de sous-ensemble de poids minimum et telle que $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = E$.

Ce problème peut s'exprimer à l'aide de la Programmation Linéaire en Nombres entiers de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{r} minz = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \\ \sum_{x_j/e_i \in x_j} x_j \geq 1 \quad \forall e_i \in E \\ x_i \in \{O, 1\} \end{array} \right.$$

1.1.2 Procédure d'arrondis

Soit $f = \max_{i=1,\ldots,n} f_i$, avec f_i le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles de E contenant e_i : $f_i = |\{j : e \in S_j\}|$.

Définissons la procédure d'arrondis suivante :

$$x_i = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & x_i \geq \frac{1}{f} \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

Cherchons à démontrer que cette procédure d'arrondis garantit une solution réalisable. Pour ce faire, nous allons procéder par l'absurde. Supposons qu'il existe un sommet k qui ne repsecte pas sa contrainte d'intégrité associée, à savoir :

$$\sum_{x_j/e_k \in x_j} < 1$$

Les variables x_j de cette contrainte étant définies positives et entières, le cas pris en considération si dessus implique que toutes les variables de l'inéquation sont nulles pour le programme en nombres entiers et donc :

$$\forall x_j / e_k \in x_j < \frac{1}{f}$$

dans le cas de la version relaxée du problème. Or ceci n'est possible que si le nombre de sous-ensemble contenant x_k est supérieur à f, ce qui est impossible par définition. Tous les sommets respectent donc leur contrainte d'intégrité et on en déduit que la procédure d'arrondis garantit une solution réalisable.

1.1.3 Existence d'un algorithme f-approché

1.2 Exercice 3 - Sur le problème du couplage maximum de poids minimum

1.2.1 Modélisation du problème

Soit un graphe $G = (V, E)$ avec V l'ensemble de ses sommets et E l'ensemble de ses arêtes. Soit $\{\forall (i,j) \in E, X_{(i,j)}\}$ un ensemble de variables booléennes qui indiquent le choix de l'arête (i,j) correspondante dans le couplage. Soit $P_{(i,j)}$ le poids de l'arête (i,j).

Le problème du couplage maximum de poids minimum peut être modélisé de la façon suivante :

Minimiser

$$\sum_{(i,j) \in E} (X_{(i,j)} \times P_{(i,j)})$$

Sous contraintes

$$\forall i \in V, \sum_{(i,j) \in E} X_{(i,j)} = 1$$

$$\forall (i,j) \in E, X_{(i,j))} \in \{0, 1\}$$

$$\forall (i,j) \in E, P_{(i,j))} \geq 0$$

En effet, les contraintes forcent le couplage à être maximum tandis que la fonction objectif le force à tendre vers le poids minimum.

1.2.2 Modélisation du problème appliquée au graphe de la figure 2

Minimiser

$$\epsilon \times X_{ab} + \epsilon \times X_{bc} + \epsilon \times X_{ac} + M \times X_{ae} + M \times X_{cd} + M \times X_{bf} + \epsilon \times X_{df} + \epsilon \times X_{de} + \epsilon \times X_{fe}$$

Sous contraintes

$$X_{ab} + X_{ac} + X_{ae} = 1$$

$$X_{ab} + X_{bc} + X_{bf} = 1$$
$$X_{ac} + X_{bc} + X_{cd} = 1$$
$$X_{cd} + X_{de} + X_{df} = 1$$
$$X_{ae} + X_{de} + X_{df} = 1$$
$$X_{ef} + X_{df} + X_{bf} = 1$$
$$\forall (i,j) \in E, X_{(i,j))} \in \{0,1\}$$
$$\epsilon \geq 0$$
$$M \geq 0$$

1.2.3 Solution optimale entière $z(ILP)$

Sur un exemple de cette taille, il est facile de trouver une solution à la main. Il y a plusieurs solutions optimales de poids total $M + 2\epsilon$ sur cet exemple ; l'une d'entre elles est le couplage $\{(a,b),(c,d),(e,f)\}$.

La résolution de ce PLNE par *glpsol* (solveur de $GLPK$) donne bien la même solution.

1.2.4 Solution optimale $z(LP)$ pour le programme relaxé

Relaxer le programme revient à transformer la contrainte d'intégrité des $X_{(i,j)}$ en la contrainte suivante :

$$\forall (i,j) \in E, 0 \leq X_{(i,j))} \leq 1$$

En rentrant le PL relaxé dans *glpsol*, nous obtenons le couplage de poids total 3ϵ :

$$\{X_{ab} = 0.5; X_{ac} = 0.5; X_{bc} = 0.5; X_{df} = 0.5; X_{ef} = 0.5; X_{de} = 0.5\}$$

1.2.5 Conclusion sur la pertinence de la formulation

Chapitre 2

Partie pratique