- TD 5 : Extensions et applications -

- Alpha-shape et Alpha-Complexe -

- Exercice 1 - Calcul du rayon du cercle circonscrit -

Le but de l'exercice est d'obtenir une routine pour calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle. Bien entendu, on ne cherche pas à avoir toujours un résultat entier à cette requête.

a. Montrer (rappeler) que si AB est le diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$ et que C est un troisième point de $\mathcal{C}$, alors ABC est rectangle en C.

b. Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b et c la valeur des angles du triangle respectivement en les sommets A, B et C. En considérant I la base de la hauteur de ABC issue de B, montrer que $\sin(a) \cdot BC = \sin(b) \cdot AC$. En déduire que $\frac{\sin(a)}{BC} = \frac{\sin(b)}{AC} = \frac{\sin(c)}{AB}$.

c. Montrer que si ABC est un triangle et que P est un point quelconque du plan, alors on peut permuter A, B et C de telle sorte que P et C soient du même coté de la droite (AB).

A et C du m côté de (BC)

d. Soit ABC un triangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et O le centre de $\mathcal{C}$. On suppose que O et C sont du même côté de la droite (AB). On note A' le symétrique de B par rapport à O. D'après l'exercice 3 de la fiche de td 4 ('arcs capables'), on sait que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA'C}$ sont égaux. En déduire que $2 \cdot OB \cdot \sin(\widehat{BAC}) = BC$.

e. Conclure.

- Exercice 2 - α-shape -

Dans tout l'exercice P désigne un nuage de n points du plan.

a. Si P est fixé, et $\alpha < \min\{pq \ : \ p \in P, \ q \in P, \ p \neq q\}$, où pq désigne la distance de p à q, montrer que l'α-shape de P est vide.

b. Montrer que quelquesoit $\alpha > 0$, il est possible de trouver une configuration de points P telle que l'α-shape de P ne soit pas son enveloppe convexe.

- Binary Space Partition -

- Exercice 3 - Découpe d'objets -

Donner un exemple d'ensemble d'objets (convexes) dans le plan tel que n'importe quel BSP-tree oblige à couper au moins un de ces objets.

- Exercice 4 - BSP de segments -

On suppose qu'on a un ensemble $\mathcal{S}$ de n segments du plan.

a. Donner un exemple d'ensemble $\mathcal{S}$ pour lequel un BSP construit par auto-partition à taille $\Omega(n^2)$.

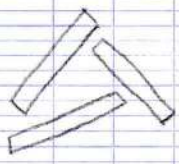
b. Donner un exemple d'ensemble $\mathcal{S}$ pour lequel tout BSP construit par auto-partition à taille au moins $\lceil 4n/3 \rceil$, alors que $\mathcal{S}$ admet un BSP de taille n.

c. Donner un exemple d'ensemble $\mathcal{S}$ pour lequel tout BSP construit par auto-partition à profondeur au moins $\Omega(n)$.

23 Avril 2012
TD5
1

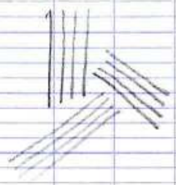
TD5 - Extensions et Applications

Exercice 3



La première coupe est une droite, on sera obligé de couper 1 objet en 2.

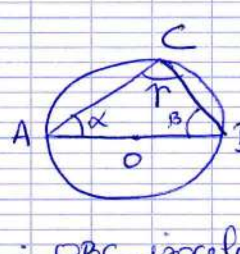
Exercice 4



« Possible » mais pas trouvé
La première coupe, coupe un nbre linéaire de seg[ts].
¡ Ne fonctionne pas !

Exercice 1

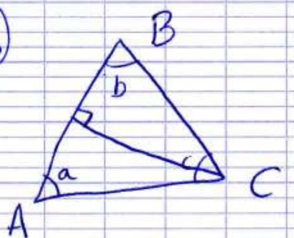
(a)



OAC isocèle ; OBC isocèle

ABC : $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$ donc $\alpha + \beta = 90$

(b)



Montrer que $\sin(b) \times BC = \sin(a) \times AC$

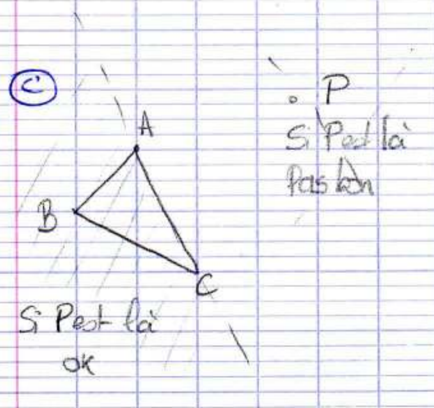
. $\sin(a) = \frac{IC}{AC}$ (car Δ rectangle)

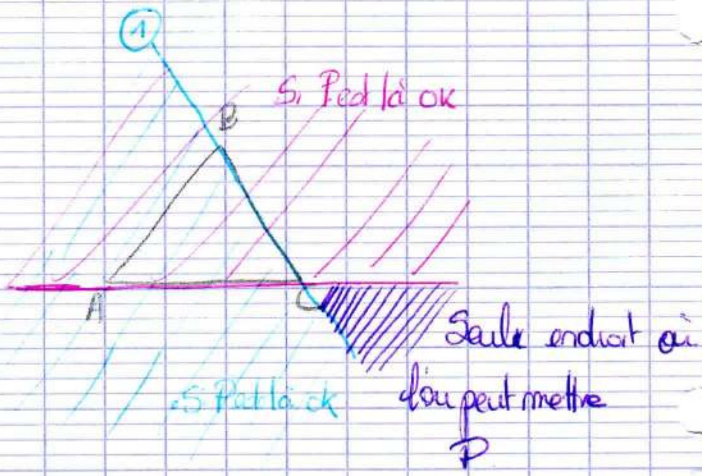
. $\sin(b) = \frac{IC}{BC}$

Donc $\sin(b) \times BC = \sin(a) \times AC$

Donc : $\frac{\sin(a)}{BC} = \frac{\sin(b)}{AC} = \frac{\sin(c)}{AB}$ par symétrie pour $\sin(c)$

c)





Cas 1 : P et A sont du même coté de (BC)

$A \leftarrow C$

$B \leftarrow B$

$C \leftarrow A$

Cas 2 : P et B sont du même coté de (AC)

$A \leftarrow A$

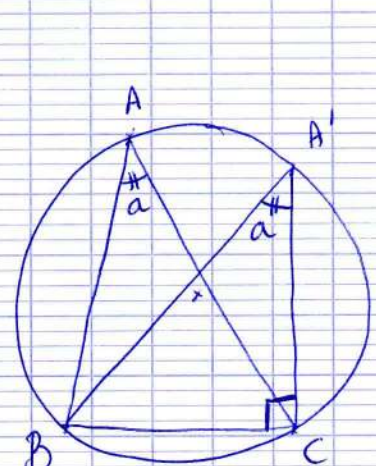
$B \leftarrow C$

$C \leftarrow B$

Cas 3 : P et C sont du meme coté de (AB)

Pas de permutation.

d)



23 Avril 2012

TD5

(2)

$\sin(a) = \frac{BC}{BA'}$ donc $2 \times BO \times \sin(a) = BC$

(e) On se donne ABC un triangle. On note O le centre de son cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

A permutation près sur A, B, et C par (c), A et O sont du m̂ côté de (BC)

Dans ce cas, par (d), le rayon de $\mathcal{C}$, R vaut :

$$R = \frac{BC}{2\sin(a)}$$

Par (b) $R = \frac{BC}{2\sin(a)} = \frac{AC}{2\sin(b)} = \frac{AB}{2\sin(c)}$

RAYON $(A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C))$

$d = \det(\vec{AC}, \vec{AB}) = [(x_C - x_A) \times (y_B - y_A)] - [(y_C - y_A) \times (x_B - x_A)]$

Si $d = 0$ return (+ infini)

Sinon

return $\left(\frac{BC \times AC \times AB}{2 \det(\vec{AC}, \vec{AB})}\right)$ (1)

$$\boxed{(1) = \frac{\sqrt{\left[(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2\right] \times \left[(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2\right] \times \left[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right]}}{2d}}$$