Chloé DESDOUITS
Guillerme DUVILLIE
Swan ROCHER

M1 Informatique

TP de méthodes de résolution de problèmes NP-complets

2012

UM2

Table des matières

Chapitre 1

Partie théorique

1.1 Exercice 3 - Sur le problème du couplage maximum de poids minimum

1.1.1 Modélisation du problème

Soit un graphe $G = (V, E)$ avec V l'ensemble de ses sommets et E l'ensemble de ses arêtes. Soit $\{\forall(i,j) \in E, X_{(i,j)}\}$ un ensemble de variables booléennes qui indiquent le choix de l'arête (i,j) correspondante dans le couplage. Soit $P_{(i,j)}$ le poids de l'arête (i,j).

Le problème du couplage maximum de poids minimum peut être modélisé de la façon suivante :

Minimiser

$$\sum_{(i,j)\in E} (X_{(i,j)} \times P_{(i,j)})$$

Sous contraintes

$$\forall i \in V, \sum_{(i,j)\in E} X_{(i,j)} = 1$$

$$\forall(i,j) \in E, X_{(i,j))} \in \{0,1\}$$

$$\forall(i,j) \in E, P_{(i,j))} \geq 0$$

En effet, les contraintes forcent le couplage à être maximum tandis que la fonction objectif le force à tendre vers le poids minimum.

1.1.2 Modélisation du problème appliquée au graphe de la figure 2

Minimiser

$$\epsilon \times X_{ab} + \epsilon \times X_{bc} + \epsilon \times X_{ac} + M \times X_{ae} + M \times X_{cd} + M \times X_{bf} + \epsilon \times X_{df} + \epsilon \times X_{de} + \epsilon \times X_{fe}$$

Sous contraintes

$$X_{ab} + X_{ac} + X_{ae} = 1$$
$$X_{ab} + X_{bc} + X_{bf} = 1$$
$$X_{ac} + X_{bc} + X_{cd} = 1$$
$$X_{cd} + X_{de} + X_{df} = 1$$
$$X_{ae} + X_{de} + X_{df} = 1$$
$$X_{ef} + X_{df} + X_{bf} = 1$$
$$\forall (i,j) \in E, X_{(i,j))} \in \{0,1\}$$
$$\epsilon \geq 0$$
$$M \geq 0$$

1.1.3 Solution optimale entière $z(ILP)$

Sur un exemple de cette taille, il est facile de trouver une solution à la main. Il y a plusieurs solutions optimales de poids total $M + 2\epsilon$ sur cet exemple ; l'une d'entre elles est le couplage $\{(a,b),(c,d),(e,f)\}$.

La résolution de ce PLNE par *glpsol* (solveur de $GLPK$) donne bien la même solution.

1.1.4 Solution optimale $z(LP)$ pour le programme relaxé

Relaxer le programme revient à transformer la contrainte d'intégrité des $X_{(i,j)}$ en la contrainte suivante :

$$\forall (i,j) \in E, 0 \leq X_{(i,j))} \leq 1$$

En rentrant le PL relaxé dans *glpsol*, nous obtenons le couplage de poids total 3ϵ :

$$\{X_{ab} = 0.5; X_{ac} = 0.5; X_{bc} = 0.5; X_{df} = 0.5; X_{ef} = 0.5; X_{de} = 0.5\}$$

1.1.5 Conclusion sur la pertinence de la formulation

Chapitre 2

Partie pratique