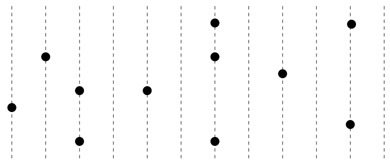
- TD 4 : Triangulations -

- Triangulation d'un ensemble de points -

- Exercice 1 -

Appliquer l'algorithme de triangulation incrémental vu en cours sur l'exemple suivant :



- Exercice 2 -

Montrer que trianguler un ensemble de n du plan doit nécessiter un temps en $\Omega(n \log n)$. Détailler précisément la réduction utilisée.

- Triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoï -

- Exercice 3 -

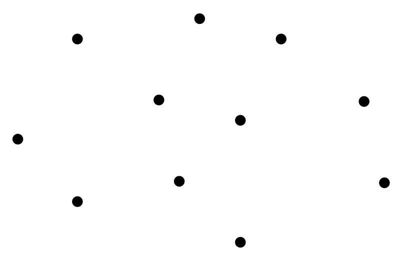
Le but de l'exercice est de savoir si un point P du plan est ou non à l'intérieur du cercle circonscrit à un triangle ABC.

1. Montrer la propriété suivante : si les points A, B et C sont sur un cercle de centre O tel que O et C soient du même côté de la droite (AB), alors $\widehat{AOB} = 2.\widehat{ACB}$.
2. Montrer alors que si D et C sont du même côté de la droite (AB) alors D appartient à l'intérieur du cercle circonscrit au triangle ABC si, et seulement si, $\widehat{ACB} \leq \widehat{ADB}$.
3. En déduire une procédure testant en temps $O(1)$ si un point D appartient ou non à l'intérieur du cercle circonscrit à un triangle ABC.
4. Plus algébriquement, on pourra montrer que la position de D par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC dépend du signe du déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Exercice 4 -

Calculer la triangulation de Delaunay et le diagramme de Voronoï de l'ensemble de points suivant :



- Exercice 5 -

Donner un ensemble de 4 points du plan dont la triangulation de Delaunay n'est pas la triangulation qui minimise le plus grand angle.

- Exercice 6 -

Donner une configuration de n points dont le diagramme de Voronoï contient une cellule à $n-1$ côtés.
Quel est le nombre moyen de côtés d'une cellule dans un diagramme de Voronoï ?

- Exercice 7 -

L'*arbre couvrant euclidien minimum* ($ACEM$) d'un ensemble P de n points du plan est un arbre connectant tous les points de P et de longueur totale minimum.

1. Montrer que dans la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points, chaque point est adjacent à son plus proche voisin.
2. Prouver que le graphe formé par la triangulation de Delaunay de P contient un ACEM de P.
3. En déduire un algorithme en $O(n \log n)$ pour calculer un ACEM de P.

- Exercice 8 -

On se donne V le diagramme de Voronoï d'un ensemble P de points, malheureusement, les points de P ont été effacés. Donner un procédé algorithmique pour les retrouver.

- Triangulation de polygones -

- Exercice 9 -

Donner le nombre de triangle dans la triangulation d'un polygone ayant p trous et n sommets (y compris ceux entourant les trous).

- Exercice 10 -

Le *flip* de l'arête pq dans une triangulation $\mathcal{T}$ consiste à transformer les deux triangles pqr et pqs incidents à pq en les triangles prs et qrs, les autre triangles de $\mathcal{T}$ étant inchangés.
Soit P un polygone convexe, montrer que l'on peut passer de toute triangulation de P à une autre à l'aide de flips d'arêtes.

- Exercice 11 -

Donner un exemple de triangulation de polygone dont le graphe dual :

1. est un chemin.
2. n'est pas un chemin.

- Exercice 12 - La galerie d'art -

Une galerie d'art est représentée par un polygone simple à n sommets. La galerie est surveillée par des gardiens placés aux sommets du polygone. Chaque gardien peut surveiller la portion de galerie visible depuis sa position. On cherche à minimiser le nombre de gardiens nécessaires tout en assurant que la totalité de la galerie soit surveillée.

1. Montrer que le graphe formée par une triangulation quelconque d'un polygone contient toujours un sommet de degré 2.
2. Montrer que ce graphe a un nombre chromatique de 3.
3. En déduire que $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens suffisent pour surveiller la galerie d'art.
4. Montrer que cette borne est optimale.