On cherche à prouver qu'il n'existe pas d'algorithme ρ-approché permettant de résoudre le problème du voyageur de commerce sans l'inégalité triangulaire. Pour ce faire, raisonnons par l'absurde.

Hypothèse : il existe un algorithme ρ-approché, $\rho \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse au problème du cycle Hamiltonien :

Algorithm 1 Problème du cycle Hamiltonien

$\forall (i,j) \in V^2$
if $\{i,j\} \in E$ **then**
    $d_{ij} \leftarrow 1$
else
    $d_{ij} \leftarrow \rho|V| + 1$
end if
$\mu \leftarrow A(V, D)$
if longueur(μ) $\leq \rho|V|$ **then**
    G est Hamiltonien
else
    G n'est pas Hamiltonien
end if

En effet, si longueur(μ) $\leq \rho|V|$, alors il n'y a aucune arête de valeur $\rho|V| + 1$, donc toutes les distances entre 2 villes consécutives de μ sont égales à 1, donc G est Hamiltonien.

Si longueur(μ) $> \rho$, comme l'algorithme est ρ-approché, on a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{l(\mu)}{c^*} & \leq & \rho \\ \Rightarrow \quad c^* & \geq & \frac{l(\mu)}{\rho} > |V| \end{array}$$

Donc le meilleur cycle n'utilise pas que des arêtes de poids 1, et donc G n'est pas Hamiltonien.

1 Comment trouver un schéma d'approximation polynomial ?

Trouver un algorithme pseudo polynomial (la complexité dépend de la valeur de la donnée de façon polynomiale). Pour accélérer le calcul, on divise la valeur de la donnée, mais on introduit des erreurs liées à la division : on perd l'optimalité, la division n'est pas forcément pertinente.

Une autre technique utilisée, repose sur le calcul d'échantillons, c'est à dire une partie des solutions et les solutions *oubliées* ont un représentant dans l'échantillon.

1.1 Problème du sac à dos

On énonce le problème du sac à dos ainsi :

$$KP \left\{ \begin{array}{lcl} \max p_i x_i & & \\ \sum a_i x_i & < & B \end{array} \right.$$

p_i (resp. a_i) est le poids (resp. le volume) de l'objet i, avec B le volume du sac à dos, $x_i \in \{0, 1\}$ et :

- $x_i = 0 \rightarrow$ l'objet i n'est pas mis dans le sac à dos
- $x_i = 1 \rightarrow$ l'objet i est mis dans le sac à dos