Cours 5 - Applications et extensions

I. Applications de Delaunay : α-shape et α-complexe

1. Définition

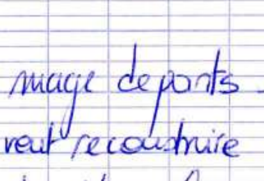
Motivation : reconnaissance de formes

On a un nuage de points dans le plan, issu de l'échantillonnage d'un objet, on veut reconstruire la forme de l'objet (/), l'enveloppe convexe (/) mais pas terrible. Comment sélectionner les arêtes rouges ?

Une idée : P le nuage de points $P = (p_1, \dots, p_n)$

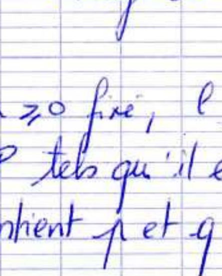
Def : Soit $\alpha \geq 0$ fixé, l'α-shape de P est l'ensemble des segments $[pq]$ $p, q \in P$ tels qu'il existe un disque $\mathcal{D}$ de rayon α, dont le bord contient p et q et l'intérieur ne contient aucun sommet de P

ex :



Rq : Si $\alpha = 0$, l'α-shape est vide.
Si $\alpha \to +\infty$, l'α-shape est l'env convexe de P.

Calcul : Pour chaque paire de points p, q, on a 2 centres de disques possibles. ($\text{si } pq \leq 2\alpha$, sinon $[pq] \notin \alpha$-shape)



Les centres sont sur la médiatrice de $[pq]$

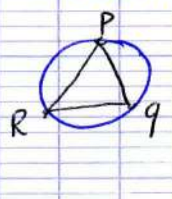
Ensuite, on décide si un des deux disques au moins ne contient aucun point de P.

On a un algo "naïf" en $\Theta(n^3)$.

② <u>Lien avec Delaunay</u>

<u>Lemme</u>: Une arête pq avec $p, q \in P$ $p \neq q$ appartient à la triangulation de Delaunay de P ssi il existe un disque $\mathcal{D}$ contenant p et q sur son bord et aucun point de P dans son intérieur.

Pr : Si $pq \in$ triangulation de Delaunay de P. pq est contenu dans au moins un triangle $T = p, q, R$ de cette triangulation le cercle circonscrit à T ne contient pas de point de P, on peut le prendre pour $\mathcal{D}$



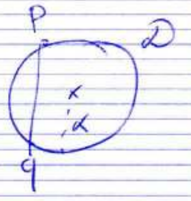
On suppose qu'on a un disque $\mathcal{D}$ vérifiant les hypothèses, on note d son centre, il est sur la médiatrice de $[pq]$.

On éloigne de de $[pq]$ en conservant $d \in$ médiatrice "$[n]$"
$p, q \in$ bord $(\mathcal{D})$

* Soit : le bord de $\mathcal{D}$ rencontre un point R de P, alors $\mathcal{D}$ est circonscrit à pqR et ne contient aucun sommet de P dans son intérieur. Par définition, p, q, R est un triangle de la triangulation de Delaunay (et $[pq] \in$ Delaunay)

* Soit : le ~~bord~~ cas précédent n'arrive pas, le demi-plan contenant d bordé par (pq) ne contient pas de sommet de P. $[pq] \in$ envConv(P) et donc $[pq] \in$ Delaunay

Corollaire : $\forall \alpha \geq 0$ les arêtes de l'α-shape sont des arêtes de la triangulation de Delaunay

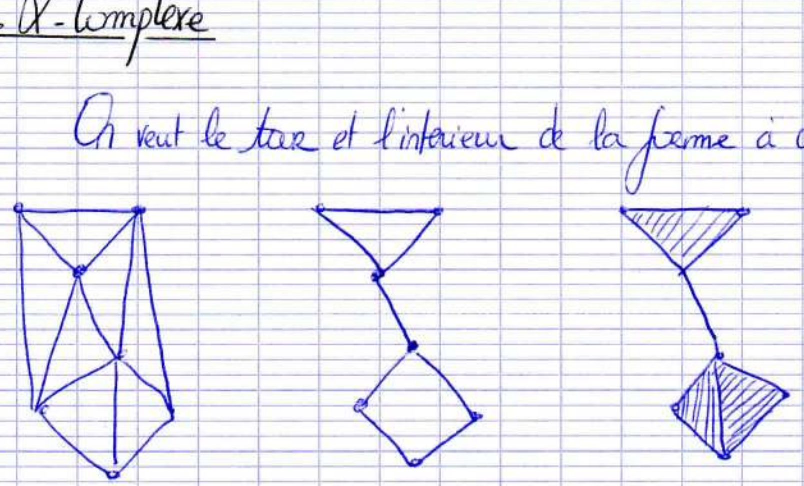


Pr Si $[pq] \in \alpha$-shape
$\exists$ D de rayon α avec p et q sur son bord et aucun point de P à l'intérieur donc $(pq) \in$ Delaunay

Remarque : Du coup, il n'y a plus que $(3n-6)$ - EnvConv(P) arêtes à tester → Algo en $O(n^2)$.

3. α-Complexe

On veut le tour et l'intérieur de la forme à déterminer



Delaunay (P) $\qquad$ α-Shape (P) $\qquad$ α-Complexe

Def : L'α-complexe contient :
- les triangles de Delaunay ayant un cercle circonscrit de rayon $\leq \alpha$
- les arêtes de l'α-Shape.

On le note C_α, l'α-shape était notée S_α.

Lemme : Un segment $[pq]$ d'un triangle de Delaunay ayant un cercle circonscrit de rayon $\leq \alpha$ appartient à S_α ssi il y a un unique disque de rayon α bordé par p et q

et ne contenant aucun point de P dans son intérieur.
. bord (C_α) = S_α

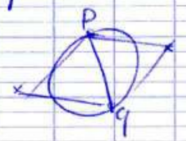
4. Comment calculer S_α et C_α

Rq : Si $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ alors $C_{\alpha_1} \subseteq C_{\alpha_2}$
En particulier, pour chaque triangle T de Delaunay, il existe α_T (= le rayon de son cercle circonscrit) tel que : $T \in C_\alpha \Leftrightarrow \alpha \geqslant \alpha_T$

On a la m̃ chose pour l'α-Shape.

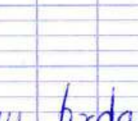
Pour chaque arête $[pq]$ de Delaunay, on a :
$\exists\ a_{pq}, b_{pq}$ tq $(pq) \in \alpha$-Shape ssi $a_{pq} \leqslant \alpha \leqslant b_{pq}$

On note C_{pq} le disque de diamètre $[pq]$



Si C_{pq} ne contient aucun sommet de P :
On note T et T' les triangles de Delaunay bordant (pq)
$a_{pq} = \frac{1}{2}pq$
$b_{pq} = \max\{$rayon circ (T), rayon circ $(T')\}$
(Si $(pq) \in$ envConv(P), T' n'existe pas, rayon circ $(T') = +\infty$
$b_{pq} = +\infty$)

Si C_{pq} contient un autre sommet de P :



On note T, T' les triangles de Delaunay bordant $[pq]$
$a_{pq} = \min\{$rayon circ (T), rayon cir $(T')\}$
$b_{pq} = \max\{$ ——— $\}$

Algo d'Edels Brunner (pré-traitement)

- Calculer Delaunay (P)
- Par chaque $T \in Del(P)$, calculer α_T (le rayon de son cercle circ)
- Par chaque arête $[pq] \in Del(P)$, calculer a_{pq} et b_{pq}

Fonctionne en $\Theta(n \log n)$

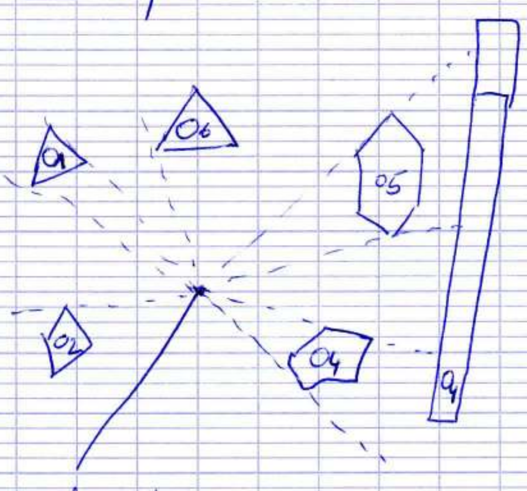
Ensuite, par α fixé, on produit S_α et C_α en temps $\Theta(n)$

Problème : Pourquoi prendre le même α pour tout le nuage de points ?
Il y a peut-être des zones ⊕ détaillées que d'autres.

II Arbre binaire de partition de l'espace (BSP tree _ Binary Space Partit°)

① Définition - Motivation

Ex : Un ensemble d'objets (polygones convexes) dans le plan
But : Représenter la vue de ses objets depuis un point de $\mathbb{R}^2$.



O_2		O_1		O_6		O_5	O_4	O_3

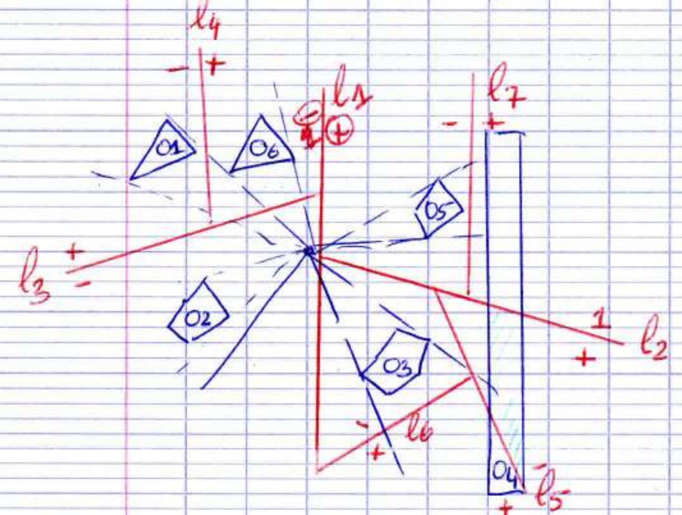
On veut cette vue

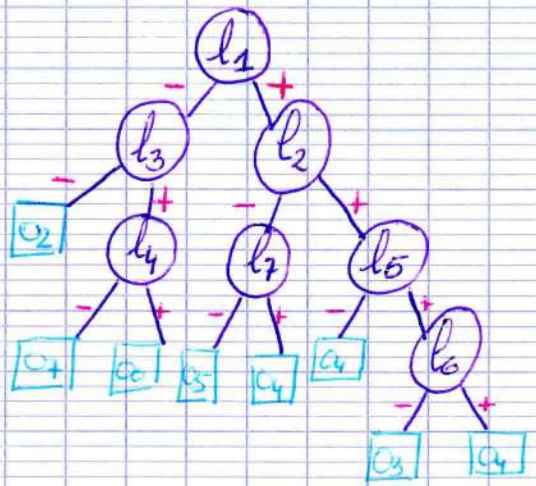
Algo du peintre

Profondeur 1, 2 et 3

Alors on dessine 3 à l'écran puis 2 et puis 1, enfin on affiche.
Pour cela, on utilise une structure de données (proche du graphe de localisation) : un BSP-tree.

. On partitionne le plan avec des coupes (droites, demi-droite ou segment) de telle sorte que chaque cellule (région du plan obtenue par la coupe) contienne un seul (objet (ou fragments d'objets).





① On prend le point et regarde par rapport à l_1, il est dans $l_1 \ominus$ donc on commence par représenter $l_1 \oplus$, ensuite il y a l_2, on prend le $\oplus$ car le point n'y est pas puis l_5 - car il est pas et on commence à représenter le petit bout de $\boxed{O_4}$

Plus précisément, un BSP-tree est un arbre binaire associé à un ensemble de coupes du plan et un ensemble d'objets (ou frag^t d'objets) tels que :

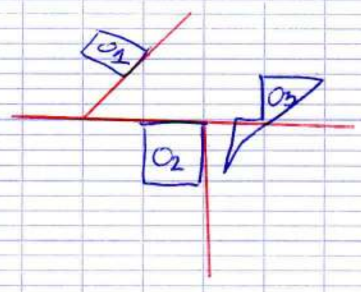
. A tout noeud v de l'arbre correspond une région du plan $P(v)$, un objet $o(v)$ et une coupe $\ell(v)$ avec :

– si v est une feuille, $\ell(v) = \phi$ et $o(v)$ est le seul objet de $\mathcal{P}(v)$.

- Si v est un noeud interne : $o(v) = \emptyset$. $\ell(v)$ partitionne $\mathcal{P}(v)$ en deux parties. $\mathcal{P}(v)^+$ et $\mathcal{P}(v)^-$ associés aux fils de v dans l'arbre.

Def : si les coupes sont portées par les côtés des objets, on appelle le BSP-tree une auto-partition

ex :



② Comment obtenir la vue ? (algo du peintre)

La position de l'observateur est Pici et on suppose qu'on a un BSP-tree T avec racine r.
On lance PEINTRE (v, Pici, T)

PEINTRE (v, Pici, T)

Si v est une feuille, dessiner $o(v)$
Sinon :
- Si Pici est du coté $\oplus$ de $\ell(v)$
  - Alors . PEINTRE (v^-, Pici, T) (v^- est associé au coté $\ominus$ de ℓ_v)
  - . PEINTRE (v^+, Pici, T)
- Sinon
  - . PEINTRE (v^+, Pici, T)
  - . PEINTRE (v^-, Pici, T)

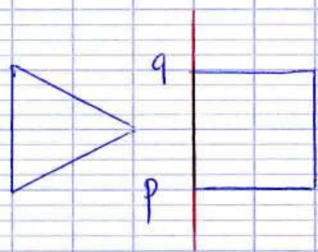
L'algo effectue un parcours en profondeur de T. Sa complexité est en $O(|T|)$. Comme T est binaire $|T| \leq 2 \times$ nbre de feuille

Pour minimiser le nombre de feuilles, on veut fragmenter le moins possible les objets de départ dans la construction du BSP

③ Création du BSP

On va faire une auto-partition

Lemme: $\boxed{\text{Si on a deux polygones convexes disjoints } P_1 \text{ et } P_2 \text{ contenus dans une zone } Z \text{ alors il existe } [pq] \text{ côté de } P_1 \text{ ou } P_2 \text{ telle que la coupe } (pq) \text{ sépare } P_1 \text{ et } P_2}$



Pr: (à la main). On prend $x \in P_1$, $y \in P_2$ tq

$$xy = \min\{p_1p_2 : p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\}$$

Si on note

x', x'', les voisins de x autour de P_1

y', y'', les voisins de y autour de P_2

Alors $[x, x']$, $[x, x'']$, $[y, y']$ ou $[y, y'']$ convient (admis

Rq : La coupe (pq) se construit en Θ(nbre de cotés de P_1 + nbre cotés de P_2) (voire mieux)

On construit ensuite l'algo : $BSP(v, Z, O_1, \dots, O_k)$ où v est le noeud courant de l'arbre, Z la zone à découper et $O_1, \dots, O_k$. Soit les objets (ou frag^t d'objets) $\subseteq Z$.

Au départ, on appelle $BSP(v, \mathbb{R}^2, O_1, \dots, O_n)$

<u>$BSP(v, Z, O_1, \dots, O_k)$</u>

- Si $k = 1$, marquer V comme feuille,
  - $O(v) \leftarrow O_1$
  - $P(v) \leftarrow t$
  - $\ell(v) \leftarrow \emptyset$,
- Sinon
  - trouver une coupe (pq) par le lemme précédent
  - $\ell(v) \leftarrow (pq)$
  - $P(v) \leftarrow z$
  - $O(v) \leftarrow \emptyset$
  - Z se partage en deux par (pq) : Z^+, Z^-
    - $O_i^+ = Z^+ \cap O_i$
    - $O_i^- = Z^- \cap O_i$
  - Créer deux fils à v : v^+ et v^-
  - $BSP(v^+, Z^+, O_1^+, \dots O_k^+)$
  - $BSP(v^-, Z^-, O_1^-, \dots, O_k^-)$

Lemme $\boxed{\text{L'algo se termine et le BSP a au } \oplus \ 2^n \text{ feuilles}}$

Preuve: On commence avec une zone ayant n objets puis

deux zones —— $n-1$ "

4 —— $n-2$ "

2^n —— 1

Remarque: Si les objets sont des segments :

- On peut ~~marquer~~ montrer que toute auto-partition a au $\oplus$ n^2 feuilles.
- L'algo précédent donne en moyenne $\Theta(n \log n)$ feuilles

L'existence d'un algo construisant un BSP avec $O(n)$ feuilles est ouverte.