Chapitre 1

Exercices généraux

1.1 Modèle du dentiste

On considère une file d'attente à un serveur.
On suppose que le débit moyen est Λ, le temps moyen de réponse est $E[R]$, le temps moyen d'attente est $E[W]$, le temps moyen de service est $[E]S$, l'espérance de longueur de la file d'attente est $E[L]$, le nombre moyen de clients en train d'attendre est $E[L_W]$, le nombre moyen de clients en train d'être servis est $E[L_S]$ et la probabilité pour que le serveur soit occupé est U.
1- Ecrire une relation entre $E[R]$, $E[S]$ et $E[W]$ (relation 1).
2- Ecrire une relation entre $E[L]$, $E[L_W]$ et $E[L_S]$ (relation 2).
3- Exprimer $E[L_S]$ en fonction de U.
4- Montrer que l'on passe de la relation 1 à la relation 2 en faisant une opération simple et montrer qu'on trouve ainsi une relation connue entre U, Λ et $E[S]$.
5- On considère un dentiste. Le nombre moyen de patients présents chez lui est 2.8, le nombre moyen de patients dans la salle d'attente est 2, le nombre moyen de clients arrivant en une heure est 4. Déduire les autres critères de performances et caractéristiques du traitement.

1.2 Temps d'attente d'un train

On considère une voie ferrée sur laquelle les passages des trains sont séparés par des durées (durée entre deux trains successifs) de deux types possibles :

- 90% de ces durées sont constantes et égales à 6 mn.
- 10% de ces durées sont constantes et égales à 54 mn.

1- Calculer la durée moyenne séparant deux trains successifs
2- Un individu arrive à un instant quelconque. Au bout de combien de temps en moyenne pourra-t-il prendre un train ?
On fera le calcul de deux façons différentes :
a- En calculant la probabilité pour que l'individu arrive pendant un intervalle court entre deux trains. On en déduira le temps d'attente résiduelle.
b- En appliquant la formule de Pollaczek Khintchine.
3- Comparer les résultats de 1 et 2. Ces résultats semblent-ils paradoxaux ?

Chapitre 2

Chaînes de Markov à temps discret

2.1 Etude d'une Chaîne de Markov à Temps Discret

Soit une chaîne de Markov à trois états : 1, 2 et 3.
Les probabilités de transition de l'état 1 vers les états 2 et 3 sont respectivement $1-p$ et p.
La probabilité de transition de l'état 2 vers l'état 1 est 1.
Les probabilités de transition de l'état 3 vers les états 2 et 3 sont respectivement α et $1-\alpha$.
1- Pour quelles valeurs du couple (α, p) cette chaîne est-elle irréductible et apériodique ?
2- Pour (α, p) vérifiant ces conditions, déterminer les probabilités d'état à l'équilibre.
3- En régime permanent, pour quelles valeurs de (α, p) les trois états sont-ils équiprobables ?
4- Calculer le temps moyen de premier retour en 2.

2.2 Processus de naissance et de mort

Soit une chaîne de Markov infinie dont les états sont numérotés à partir de 0.
La probabilité de transition de l'état n à $n+1$ est p.
La probabilité de transition de l'état n à $n-1$ est q.

Démontrer qu'il faut avoir $p < q$ pour que les états soient récurrents non nuls. On utilisera un théorème vu en cours et on effectuera des coupes pour trouver rapidement la solution.

2.3 Modèles de trafic sur un lien

On considère un lien transportant des cellules de longueur constante. Compte tenu du synchronisme global, on modélise le trafic sous forme d'une chaîne de Markov à temps discret.
1- Trafic de Bernoulli
On suppose que les cellules sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque unité de temps on a une probabilité p qu'il y ait une cellule et $1-p$ qu'il n'y en ait pas. Si l'on note $Z(t)$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a une cellule à l'instant t et 0 sinon, on a $P[Z(t) = 1] = p$ et $P[Z(t) = 0] = 1 - p$ pour toutes les valeurs de t.
a- Modéliser ce processus sous forme d'une chaîne de Markov à deux états.
b- Calculer les probabilités des états, le débit de cellules et les deux premiers moments du temps séparant deux cellules successives.
2- Trafic Bursty Geometric
On suppose que le trafic comporte des silences et des rafales. Pendant les silences il n'y a pas de cellule sur le lien ; pendant les rafales, il y a une cellule à chaque unité de temps. On note $X(t)$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on est dans une rafale à l'instant t et 0 dans un silence. On suppose que $P[X(t+1) = 1/X(t) = 1] = p$ et $P[X(t+1) = 0/X(t) = 0] = q$.
a- Montrer que l'on peut représenter le processus $(X(t))$ par une chaîne de Markov.

b- Déterminer les probabilités stationnaires des deux états et le débit de cellules. Montrer que les durées des silences et des rafales sont géométriquement distribuées. En déduire leur durée moyenne. Déterminer les deux premiers moments du temps séparant deux cellules successives.
c- Pour quelles valeurs de p et q un processus Bursty Geometric est-il un processus de Bernoulli ?
3- Trafic Interrupted Bernoulli Process (IBP)
Le trafic comporte de nouveau des silences et des rafales de durées géométriquement distribuées de paramètres respectifs p et q. Durant les rafales, les cellules arrivent selon un processus de Bernoulli de paramètre α. Soit $Y(t)$ le processus des arrivées de cellules. On aura donc $P[Y(t) = 1/X(t) = 1] = \alpha$ et $P[Y(t) = 0/X(t) = 0] = 1$.
a- $Y(t)$ est-il un processus markovien ?
b- Déterminer le débit, les longueurs moyennes des silences et des rafales d'un processus IBP.

Chapitre 3

Chaînes de Markov à temps continu

3.1 Processus de Poisson

Application des processus de naissance et de mort : cas d'un processus de naissance pure. C'est un processus pour lequel la probabilité conditionnelle de naissance entre t et $t + dt$ vaut λdt.
Soit K la variable aléatoire correspondant au nombre de naissances entre 0 et t :

$$P[K(t + dt) = k + 1/K(t) = k] = \lambda dt$$

1- Ecrire les équations différentielles permettant d'étudier la famille de fonctions (P_k), où :

$$P_k(t) = P[K(t) = k]$$

2- Démontrer que l'on obtient

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

3- Calculer $E[K(t)]$ et $E[K(t)(K(t) - 1)]$. En déduire $Var[K(t)]$.
4- Calculer la fonction de répartition du temps séparant deux arrivées. En déduire sa densité de probabilité. Donner son espérance mathématique.

Chapitre 4

Files d'attentes simples

4.1 Modèle du réparateur

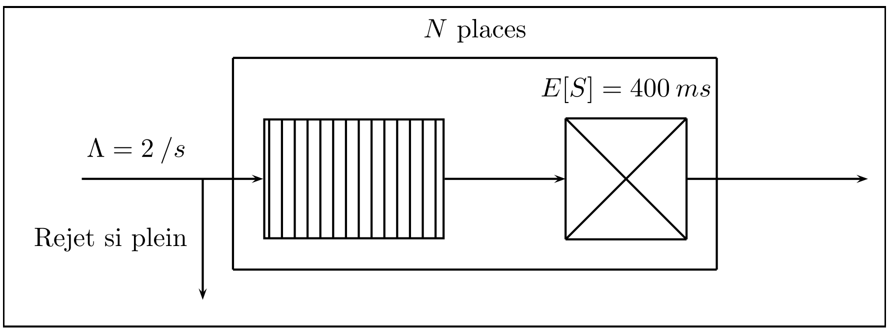
On considère une chaîne de Markov modélisant K machines indépendantes.
Chacune d'elles peut tomber en panne avec un taux λ.
Un réparateur répare une seule machine à la fois avec le taux μ.

1- Exprimer le taux de passage de l'état (n machines en panne) à l'état ($n+1$ machines en panne). On fera une démonstration rigoureuse. Il sera peut-être nécessaire de démontrer au préalable un lemme sur la loi de l'inf d'un certain nombre de variables de loi exponentielle.

2- Calculer la probabilité d'avoir K machines en panne.

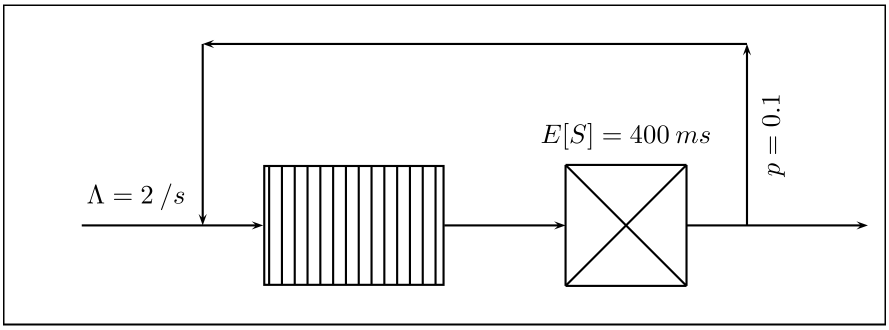
3- Application numérique : $K = 7$, $\lambda = 0.001$, $\mu = 1$.

4.2 Unité de transmission à capacité limitée



On suppose que les messages forment un trafic poissonnien, de débit moyen 2 messages par seconde. La durée de transmission est exponentielle de moyenne $E[S] = 400\,ms$ et on néglige les erreurs de transmission. On suppose que la priorité est FIFO.
Quelle doit être la capacité du nœud de transmission pour que la probabilité de rejet soit inférieure à 10^{-3} ?

4.3 Unité de transmission avec des erreurs de transmission



On considère un émetteur de messages.

- Les messages arrivent avec un débit moyen de 2 messages par seconde.
- La durée moyenne de transmission est $E[S] = 400\,ms$.
- Le taux d'erreur (donc de retransmission) est $p = 10\%$.
- La capacité est infinie

On fait les hypothèses suivantes : arrivées poissonniennes, services exponentiels, priorité FIFO.
1- Calculer l'espérance e du nombre de passages d'un client dans cette file.
2- Calculer l'espérance du temps R séparant l'arrivée du message et le moment où il est transmis correctement.

4.4 Etude de la file M/M/C/C

Il s'agit d'une file avec arrivées poissonniennes de taux λ avec C serveurs exponentiels de taux μ et avec C places dans la file d'attente. Cela signifie que seuls peuvent entrer dans la file les clients qui peuvent immédiatement commencer à être servis, les autres sont rejetés.
1- Démontrer que le nombre de clients dans la file constitue un processus de naissance et de mort. Calculer les taux d'arrivée et de départ conditionnels.
2- Calculer la probabilité des divers états possibles.
3- En déduire la probabilité pour qu'un client arrivant de l'extérieur soit rejeté. Le résultat est connu sous le nom de première formule d'Erlang.
4- Calculer le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen de réponse.

4.5 File à Serveurs Hétérogènes

On se propose d'étudier une file d'attente simple ayant 2 serveurs. Dans tout l'exercice, les arrivées seront supposées poissonniennes de taux λ. Les temps de service sont exponentiels, la discipline est FCFS (premier arrivé, premier servi), la file est à capacité infinie.

1- Serveurs homogènes

On suppose dans un premier temps que les deux serveurs sont identiques. Le taux de service est μ (cf. Fig 4.1). Quand un seul serveur est disponible, le premier client en attente choisit ce serveur. Quand les deux serveurs sont disponibles, le client choisit aléatoirement et équiprobablement un des deux serveurs.

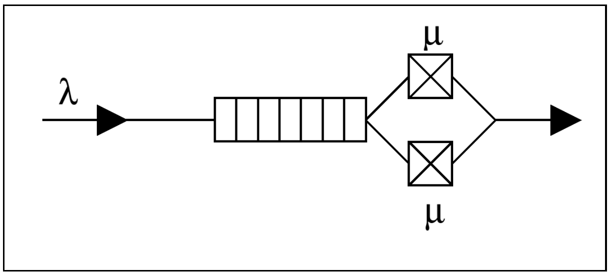


FIG. 4.1 – Serveurs homogènes

a- Donner la notation de Kendall de cette file.
b- On note $N(t)$ le nombre de clients dans la file à l'instant t.
Montrer que $N(t)$ est un processus markovien (on pourra montrer que l'inf de deux lois exponentielles indépendantes de paramètres μ_1 et μ_2 est une loi exponentielle).
Démontrer que $N(t)$ constitue un processus de naissance et de mort et calculer les taux d'arrivée et de départ conditionnels.
c- On veut calculer les probabilités des divers états possibles.
On note π_i la probabilité qu'il y ait i clients dans la file à l'état stationnaire.
Démontrer que :

$$\forall i \geq 1 \quad \pi_i = 2\rho^i \pi_0 \quad avec \quad \rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

Déterminer π_0.
Quelle est la condition de stabilité de la file ?
d- Déterminer le nombre moyen $E[L]$ de clients dans la file.
Quel est le temps moyen de réponse E[R] ?
On rappelle que pour $\rho < 1$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$

2- Serveurs hétérogènes

On suppose maintenant que le serveur 1 est deux fois plus rapide que le serveur 2 (cf. Fig 4.2).
On note 2μ le taux de service du serveur 1 et μ le taux de service du serveur 2.
Le choix du serveur se fait de la façon suivante :
Si un seul serveur est disponible, le premier client en attente choisit ce serveur.
Si les deux serveurs sont libres, le premier client en attente choisit le serveur le plus rapide (le serveur 1).

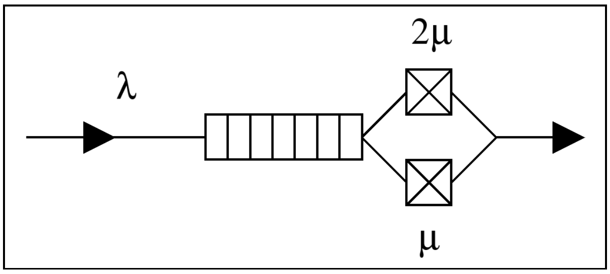


FIG. 4.2 – Serveurs hétérogènes

a- On note $N(t)$ le nombre de clients dans la file à l'instant t.
N(t) est-il un processus markovien ?
b- On sépare l'état où l'on a un seul client dans la file en deux états :
état $1'$: il y a un seul client dans la file, il se trouve dans le serveur 1.
état 1" : il y a un seul client dans la file, il se trouve dans le serveur 2.
On considère le processus $E(t)$:
$E(t) = i$, avec $i = 0$ ou $i \geq 2$ s'il y a i clients dans la file à l'instant t.
$E(t) = 1'$, s'il y a un client dans la file à l'instant t qui se trouve dans le serveur 1.
$E(t) = 1$", s'il y a un client dans la file à l'instant t qui se trouve dans le serveur 2.
Montrer que $E(t)$ est un processus markovien.
Calculer les taux d'arrivée et de départ conditionnels.
$E(t)$ est-il un processus de naissance et de mort ?
c- On cherche la limite stationnaire de ce processus.
Pour simplifier les calculs on suppose que $\lambda = \mu$.
On note π_i la probabilité stationnaire d'être dans l'état i de la chaîne de Markov.
Déterminer les probabilités des différents états.
On pourra suivre la démarche suivante : déterminer π_3 en fonction de π_2, puis π_{i+2} en fonction de π_2 pour $i > 0$. En écrivant trois équations entre π_0, $\pi_{1'}$, $\pi_{1''}$, et π_2, montrer que :

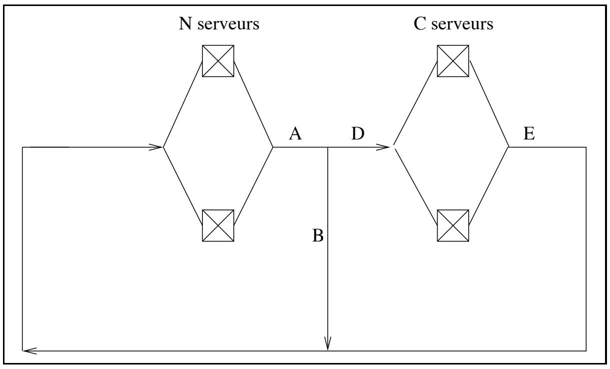
$$\pi_0 = 5\pi_2 \quad \pi_{1'} = 2\pi_2 \quad \pi_{1''} = \pi_2$$

Utiliser la condition de normalisation et déterminer les π_i.
Le système est-il stable ?

d- Quel est le nombre moyen $E[L]$ de clients dans la file ?
Quel est le temps moyen de réponse $E[R]$?
Quel est le taux d'occupation de chacun des serveurs ?
Quel est le temps moyen d'attente $E[W]$?
Quelle est la proportion de clients servis par chacun des deux serveurs ?

4.6 Performance d'un étage d'abonnés - File M/M/C/C/N

Dans le modèle d'un lien du réseau téléphonique par une file M/M/C/C, on suppose que le nombre d'utilisateurs potentiels du lien est infini. Si cette hypothèse est raisonnable dans le cœur du réseau, elle peut se révéler un peu forte dans la partie d'accès (commutateurs d'accès, cellule d'un réseau GSM ...). L'objectif de cet exercice est d'étudier les performances d'un lien dans le cas où le nombre d'utilisateurs pouvant être joints par ce lien est limité à N (taille de la population N, $C << N$).
On modélise alors le lien de la façon suivante :



La deuxième file correspond au lien. Un client dans cette file correspond à un appel téléphonique en cours.
La première file correspond aux abonnés qui ne sont pas en communication. Le temps de réflexion (temps passé dans la file 1) avant une tentative d'appel est supposé exponentiel de taux λ. La durée de la communication est supposée exponentielle de taux μ.

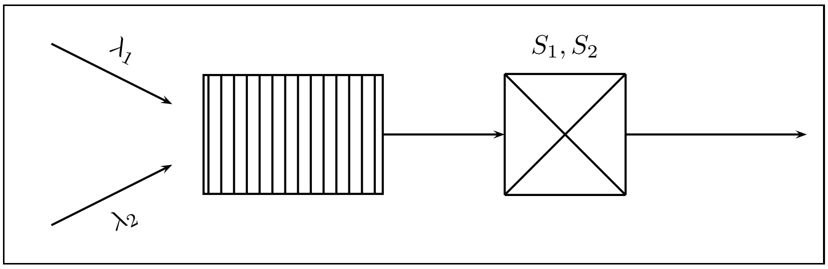
Quand un appel arrive (en provenance ou à destination d'un abonné qui n'est pas encore en communication), il est accepté s'il reste de la place dans la deuxième file ou rejeté (on suppose alors que l'utilisateur repasse dans la file 1, on ne tient pas compte de son impatience potentielle). On veut déterminer la probabilité de rejet d'appel.

1- Soit N_t le nombre d'appels en cours à l'instant t. Montrer que $(N_t,\ t \in \mathbb{R})$ est un processus markovien ergodique.

2- Déterminer les probabilités en régime stationnaire.

3- On veut déterminer la probabilité de rejet. Pour cela, déterminer le flux offert au lien (débit au point A : Λ_A) et le débit rejeté (débit au point B : Λ_B). En déduire la probabilité de rejet. Que constate-t-on ?

4.7 Influence de la variance des services et de la loi de priorité



On suppose qu'il y a deux classes de clients.
Les arrivées sont poissonniennes :
- classe 1 : une arrivée toutes les $2,4\,s$;
- classe 2 : une arrivée toutes les $0,8\,s$.

Les services :
- classe 1 : moyenne $E[S_1] = 0,6\,s$;
- classe 2 : moyenne $E[S_2] = 0,3\,s$.

Comparer les temps de réponse (globaux et par classe) dans le cas de services exponentiels et déterministes et de discipline PS ou FCFS.

4.8 Longueur des paquets IP

L'analyse de la distribution des paquets IP dans l'Internet montre qu'il y a de très nombreux paquets de petite taille (Acquittements TCP, paquet ICMP).
Dans le présent exercice, on les suppose tous de la même taille égale à $l_1 = 50$ octets. Un deuxième pic est constitué par des paquets d'environ $l_2 = 500$ octets (limités par le MSS standard) et un troisième pic de paquets rentrant dans des trames Ethernet ($l_3 = 1500$ octets). On suppose que les fréquences d'apparition des autres types de paquets sont négligeables. Une campagne de mesure a donné les résultats suivants :
Taille moyenne des paquets : $E[L] = 500$ octets.
Ecart-Type : $\sigma(L) = 500$ octets.

On considère un lien à 100 Mb/s reliant un routeur A à un routeur B chargé à 80% dans le sens de A vers B.
On s'intéresse au temps moyen passé dans la file de sortie du routeur A en attente d'émission vers le routeur B. On considère que les arrivées des paquets dans la file constituent pour chacun des trois types de paquets un processus poissonnien et que la discipline est FIFO.
1- Déterminer le temps moyen passé par un paquet de chacun des trois types dans la file de sortie du routeur (attente + service) en fonction des grandeurs caractéristiques du système.
2- Faire les applications numériques.