- Fiche de TD : Géométrie de base dans $\mathbb{R}^2$ -

Notations :

Le plan est muni d'un repère orthormal d'origine un point O et de vecteurs de bases $\vec{Oi}$ et $\vec{Oj}$ correspondants aux axes (Ox) et (Oy). Pour un point $p = (x, y)$ du plan, on note $\vec{p}$ le vecteur $\vec{Op}$. Les coordonnées polaires de p sont données par la distance r de O à p et l'angle θ, compté dans le sens direct du vecteur $\vec{Oi}$ au vecteur $\vec{Op}$.
Pour deux vecteurs $\vec{p_1} = (x_1, y_1)$ et $\vec{p_2} = (x_2, y_2)$, on rappelle que le produit scalaire de $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ est $\vec{p_1}.\vec{p_2} = x_1x_2 + y_1y_2$ et le déterminant de $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ est $\det(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = x_1y_2 - x_2y_1$.

- Exercice 1 -

En utilisant les coordonnées polaires, retrouver les propriétés de base suivantes :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ forment un angle de 90 degrés.
2. Démontrer que $\det(\vec{p_1}, \vec{p_2})$ est positif si, et seulement si, le vecteur $\vec{p_2}$ est dans le sens positif par rapport au vecteur $\vec{p_1}$.

- Exercice 2 -

Le but de l'exercice est de décrire une fonction permettant de tester si deux segments p_1p_2 et p_3p_4 s'intersectent ou non. On note (x_i, y_i) les coordonnées de chaque point p_i.

1. Dans le cas où les deux segments ne sont pas portés par une même droite, écrire un test permettant de savoir si p_1 et p_2 sont ou non du même côté de la droite (p_3p_4). En déduire la fonction de test dans ce cas-là.
2. Que se passe-t-il si les deux segments sont portés par une même droite ? Modifier votre routine pour traiter tous les cas.

- Exercice 3 -

Ecrire un algorithme sachant trier une séquence $(p_1, \ldots, p_n)$ de n points selon leur angle polaire par rapport à un sommet p_0 fixé. Essayer d'obtenir un temps d'exécution en $O(n \log(n))$.

- Exercice 4 -

Montrer comment déterminer en $O(n^3)$ si un ensemble de n points contient trois points alignés. De même, avec une complexité en $O(n^2 \log(n))$.

- Exercice 5 - Intérieur d'un polygone -

Etant donné un point $p_0 = (x_0, y_0)$, le *rayon horizontal droit* à partir de p_0 est $\{(x, y) : x \geq x_0 \texttt{ et } y = y_0\}$.

1. Montrer comment déterminer en $O(1)$ si un rayon horizontal partant de p_0 coupe un segment de droite $[p_1, p_2]$.
2. On considère P, un polygone simple (pas forcément convexe), donné par la suite $(p_1, \ldots, p_n, p_1)$ de ses sommets obtenue en parcourant sa frontière (dans le sens direct ou pas).
   (a) Sans preuve, que peut-on dire d'un rayon horizontal partant d'un sommet p_0 situé à l'intérieur de P vis-à-vis de la frontière de P ? Et si p_0 se trouve à l'extérieur de P ?
   (b) Donner un algorithme en $O(n)$ pour décider si un sommet p_0 est à l'intérieur ou à l'extérieur de P.