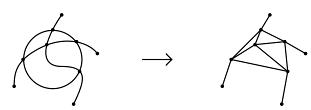
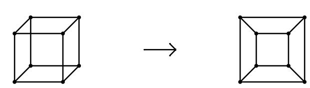
Graphes Planaires

27 avril 2008

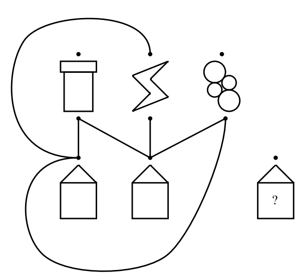
1 Motivation, Exemples

Le but est d'étudier la "Combinatoire" des dessins dans le plan ou des surfaces dans l'espace.





Prenons comme exemple un petit problème. On a 3 villas à raccorder à 3 centres d'approvisionnement (eau, gaz, électricité). Peut-on le faire sans croiser les canalisation ?
La réponse est non.



2 Définitions

Un graphe plan est un graphe "déssiné dans le plan" :
Ses sommets (notés V) sont des points de $\mathbb{R}^2$ et ses arêtes sont des courbes de $\mathbb{R}^2$ (arcs de Jordan simples) dont les extrémités sont des sommets de V et qui ne peuvent se croiser, sauf eventuellement en leurs extrémités. Un graphe est planaire si il peut être représenté (isomorphe) par un graphe plan.
Une telle représentation est appelée plongement plan (ou représentation plane).

2.1 Exemple

K_4 est un graphe complet à 4 éléments.
K_4 a une représentation plan : il est donc planaire.

Représentation non planaire Représentation plane

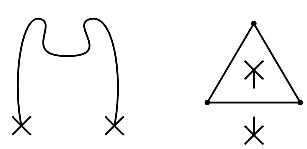
2.2 Lemme

Si H est sous-graphe de G planaire, alors H est planaire

2.3 Définitions

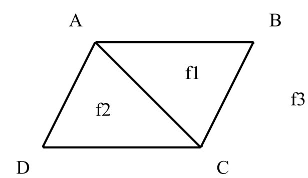
Lorsque l'on a un graphe plan, certains points de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas touchés.
Ces points de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont ni des sommets du graphes, ni n'appartienent à des arêtes, sont partitionnables en faces.

On dit que 2 points de $\mathbb{R}^2$ sont équivalents si on peut les relier par une courbe (arc de Jordan simple) qui ne touche aucun sommet de V et qui n'intersecte aucune arête du graphe.
On voit que "être équivalent" (...) est une relation d'équivalence.
Les classes de cette relation sont appelées les faces du graphe plan.
Parmis ces faces, une n'est pas bornée, elle est appelée la face externe.



2.4 Exemple

Le graphe a 3 faces

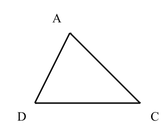


2.5 Définition

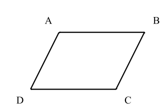
La frontière d'une face f est l'ensemble des points du plan qui 'bordent' f. On la note $Fr(f)$ et elle correspond à un sous-graphe du graphe planaire représenté.

2.6 Exemple

L'exemple ci dessous représente $Fr(f1)$.



L'exemple ci dessous représente $Fr(f3)$.

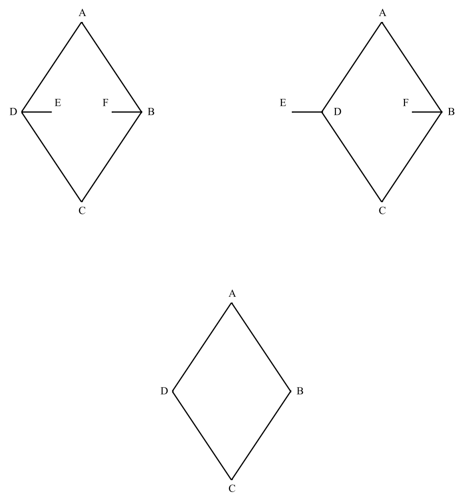


2.7 Remarque

Du point de vue des frontières, on peut avoir des plongement non équivalents !

2.8 Exemple

Considérons les 2 plongements ci dessus.
Dans le 1er plongement il existe une face de frontière (la face externe) :
Ce qui est faux dans le second plongement :



2.9 Lemme

G est planaire et contient un cycle
$\Longleftrightarrow$ Tout plongement plan de G a au moins 2 faces
(De plus, dans ce cas, la frontière de toute face contient au moins un cycle)

2.10 Théorème

Un graphe est planaire si et seulement si il admet un plongement sans croisement sur la sphère.

2.11 Preuve

Projection stéréographique depuis le pôle nord qui ne doit pas être un sommet ni appartenir à une arête du graphe.

2.12 Corollaire

Toute face peut être externe dans un autre prolongement.

2.13 Preuve

On projette le graphe plan sur la sphère, on positionne la face souhaitée pour qu'elle contienne le pôle nord, et on projette stéréographiquement.

3 Formule d'Euler

Ex : Représenter $K_5 - 1$ arête de façon plane ; Compter le nombre de faces.

3.1 Formule d'Euler

G plan et connexe, alors $n - m + f = 2$ avec
n le nombre de sommets
m le nombre d'arêtes
f le nombre de faces

3.2 Preuve (par récurrence sur f)

Si $f = 1$, alors G est un arbre (si il existe un cycle, alors $f \geq 2$) ; $m = n + 1$ donc OK
Prenons G un graphe plan à f faces.
G contient au moins un cycle car $f \geq 2$. On le note C, et e une arête de C. e est à la frontière d'exactement 2 faces : $f1$ et $f2$.
$G \setminus e$ est plan et connexe, ses faces sont celles de G, exceptées $f1$ et $f2$ qui sont remplacées par $f1 \cup f2$ ($G \setminus e$ a $f - 1$ faces).
On applique l'hypothèse de récurrence au rang $f - 1$:
$n(G \setminus e) - m(G \setminus e) + f(G \setminus e) = 2$
donc $n(G) - (m(G) - 1) + (f(G) - 1) = 2$
et $\quad n(G) - m(G) + f(G) = 2$ cqfd.

3.3 Corollaire1

Si G est planaire, quelle que soit la représentation plane de G, on obtient toujours le même nombre de faces ($m - n + 2$)

3.4 Corollaire2

Si G est simple (au plus une arête reliant les deux sommets) et si $n \geq 3$ alors $Gplanaire \Rightarrow m \leq 3n - 6$.

3.5 Preuve

On considère un plongement plan de G, on calcule la somme du nombre d'arêtes de la frontière de chaque face :

$$S = \sum_{fface} m(fr(f))$$

Une frontière contient au moins 3 arêtes (car on n'a pas de double arête formant une face à deux sommets, et le cas où il n'y a qu'une face et moins de 3 arêtes est immédiat) Donc $S \geq 3f$
Or chaque arête appartient au plus à deux faces.
Donc $S \leq 2n$
D'où $3f \leq 2n$
Donc $3m - 3n + 6 \leq 2n$ et $m \leq 3n - 6$

Si G est non connexe, sur chaque composante connexe :
$m_1 \leq 3n_1 - 6$
$m_2 \leq 3n_2 - 6$
...
$m_c \leq 3n_c - 6$
$m \leq 3n - 6 * c \leq 3n - 6$
Remarque : du coup K_5 n'est pas planaire ($n = 10$ et $3n - 6 = 9$).

3.6 Corollaire3

$K_{3,3}$ n'est pas planaire (pourtant $n = 9$ et $3n - 6$=12)

3.7 Preuve

Si $K_{3,3}$ tait planaire, comme pour le corollaire2 on calcule :

$$S = \sum_{\tilde{f} face} m(fr(\tilde{f}))$$

Chaque frontière contient un cycle, mais dans $K_{3,3}$ chaque cycle est de longueur ≥ 4.
Donc $S \geq 4f$.
Comme précédemment, $S \leq 2m$, d'où $m \geq 2f$
Donc (formule d'Euler : $f = m - n + 2$) $m \geq 2m - 2n + 4$
Donc $m \leq 2n + 4$
Or $m(K_{3,3}) = 9$ et $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$

3.8 Corollaire4

G planaire $\Rightarrow G$ a un sommet de degré ≤ 5

3.9 Preuve

Si $\forall x, d(x) \geq 6$ alors $\sum d(x) = 2m \geq 6n$ et $m \geq 3n$, ce qui est exclu.

3.10 Remarque

On prend un sommet de degré≤ 5 dans G : x_1
On prend un sommet de degré≤ 5 dans $G \setminus \{x_1\}$: x_2
On prend un sommet de degré≤ 5 dans $G \setminus \{x_1, x_2\}$: x_3
...
On prend un sommet de degré≤ 5 dans $G \setminus \{x_1, ..., x_i\}$: x_{i+1}
Pour chaque x_i, on note $C(x_i)$ ses voisins dans $G \setminus \{x_1, ..., x_i\}$ ($|L(x_i)| \leq 5$)
On a un stockage de taille ≤ 5 et l'adjacence se calcule en $O(1)$.
Pour savoir si xy est une arête, on regarde si $x \in L(y)$ ou si $y \in L(x)$.

3.11 Définition

G planaire avec $m = 3n - 6$ est dit triangulé.

3.12 Lemme

Soit G un graphe triangulé plan. Chaque face de G est un triangle.

3.13 Preuve

Si il existe une face de G qui n'est pas un triangle, on rajoute une arête dans cette face. Le graphe obtenu reste planaire avec $m = 3n - 6 + 1$, ce qui est exclu.

3.14 Propriétés

La triangulation d'un ensemble de points possède :
- $m = 3(n-1) - n_e$ arêtes
- $t = 2(n-1) - n_e$ triangles

La triangulation d'un polygone possède :
- $m = 2n - 3$ arêtes
- $t = n - 2$ triangles

3.15 Exemple d'utilisation de la formule d'Euler

Un solide platonicien est un polyèdre (dans $\mathbb{R}^3$) régulier (chaque face est un même polygone régulier et chaque sommet est incident au même nombre de faces) et convexe.
On obtient un graphe plongé sans croisement sur la sphère.
De plus chaque sommet a le même degré d.

Chaque face a pour frontière un cycle à p sommets.
On a Euler : $n - m + f = 2$

$$S = \sum_x d(x) : 2m = nd \rightarrow n = \frac{2m}{d}$$

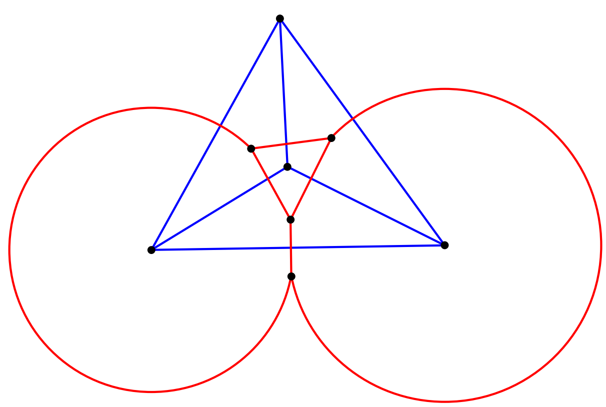
$$S = \sum_f m(fr(f)) : p.f = 2m \rightarrow f = \frac{2m}{p}$$

Euler devient $\frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{p} = 2$
Soit $\frac{1}{d} + \frac{1}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{2}$
Donc $\frac{1}{d} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$
Il y a donc un nombre fini de valeurs possibles pour d et p :

	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$d = 3$	Tétraèdre	Cube	Dodécaèdre	x
$d = 4$	Octaèdre	x	x	x
$d = 5$	Icosaèdre	x	x	x
$d = 6$	x	x	x	x

4 Coloration

Définition 4.1. *Soit G un graphe plan, on définit $\tilde{G}$, son dual : les sommets de $\tilde{G}$ sont les faces de G et deux sommets de $\tilde{G}$ sont adjacents si les faces correspondantes ont des frontières qui partagent au moins une arête.*



Propriété 4.1. *Si G est plan, $\tilde{G}$ est plan aussi.*

Définition 4.2. *Une coloration d'un graphe en k couleurs (k-coloration) est une application $c : V \rightarrow \{1, ..., k\}$ telle que, si $\{x, y\}$ est une arête, alors $c(x) \neq c(y)$.*

Définition 4.3. $\chi(G)$, *appelé* nombre chromatique, *est le minimum des* $\{k$ *:* G *est k-coloriable*$\}$.

Rq 4.1. *Colorer une carte sans avoir deux pays frontaliers de même couleur, revient à trouver une coloration du dual.*

Lemme 4.2. G *planaire* $\Longrightarrow \chi(G) \leq 6$*.*

Démonstration. Par rércurrence, on enlève un sommet x de degré inférieur ou égal à 5, on colorie le reste, puis on ajoute x. □

Propriété 4.3 (Heawood3, 1890)**.** G *planaire* $\Longrightarrow \chi(G) \leq 5$*.*

Théorème 4.1 (Appel et Hacken, 1976)**.** G *planaire* $\Longrightarrow \chi(G) \leq 4$*.*

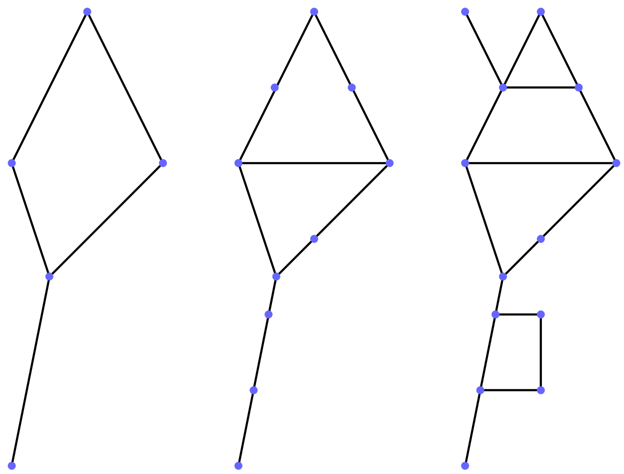
Rq 4.2. *Ceci est optimal :* K_4

Rq 4.3 (Robertson, Sanders, Seymour et Thomas, 1996)**.** *Une preuve plus simple a été donnée, ainsi qu'un algorithme quadratique.*

5 Critères de planarité

Définition 5.1. H *est une* subdivision *de* G *si on obtient* H *à partir de* G *en ajoutant des sommets sur les arêtes de* G*.*

Définition 5.2. G *est un* mineur topologique *de* H *si,* H *contient comme graphe une subdivision de* G*.*



subdivision mineur topologique

Rq 5.1. *Si H est planaire et contient G comme mineur topologique, alors G est planaire aussi.*

Théorème 5.1 (Kuratowski)**.** *G planaire $\iff$ G ne contient pas K_5 ou $K_{3,3}$ comme mineur (topologique).*

Rq 5.2. *Ce théorème fournit un certficiat de non-planarité.*