אלגברה לינארית 1ב

סיכום מקיף לקורס

אוניברסיטת תל אביב

תוכן העניינים

1 מערכות משוואות ליניאריות

מערכת משוואות לינארית: מערכת של m משוואות ב-n נעלמים מעל שדה F:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1.1 פעולות שורה אלמנטריות

שלוש פעולות ששומרות על קבוצת הפתרונות:

1. **החלפת שורות:** $R_i \leftrightarrow R_j$
2. **כפל בסקלר:** $R_i \to c \cdot R_i$ כאשר $c \neq 0$
3. **חיבור כפולה:** $R_i \to R_i + c \cdot R_j$

1.2 צורה מדורגת

מטריצה מדורגת: מטריצה היא **מדורגת** אם:

1. שורות אפסים נמצאות מתחת לשורות שאינן אפסים
2. האיבר הפותח בכל שורה נמצא מימין לאיבר הפותח של השורה שמעליה

1.3 מטריצות אלמנטריות

מטריצה אלמנטרית: מטריצה המתקבלת מביצוע פעולת שורה אלמנטרית אחת על מטריצת היחידה I.

שלושה סוגים:

- E_{ij} - החלפת שורות i ו-j
- $E_i(c)$ - כפל שורה i בסקלר $c \neq 0$
- $E_{ij}(c)$ - הוספת c כפולות שורה j לשורה i

מטריצה הפיכה כמכפלת מטריצות אלמנטריות: מטריצה A הפיכה אם ורק אם ניתן לכתוב:

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k$$

כאשר E_i מטריצות אלמנטריות.

1.4 סוגי פתרונות

משפט - מספר פתרונות: למערכת לא-הומוגנית יש בדיוק אחת משלוש אפשרויות:

- **אין פתרון** - יש שורת סתירה
- **פתרון יחיד** - אין משתנים חופשיים
- **אינסוף פתרונות** - יש משתנים חופשיים

1.5 קשר בין משוואות, נעלמים ומימדים

משפט - m משוואות ב-n נעלמים: למערכת $Ax = b$ כאשר $A \in M_{m\times n}$:

- אם $n > m$ ויש פתרון, יש אינסוף פתרונות (לפחות $n - m$ משתנים חופשיים)
- מספר המשתנים החופשיים = $n - \text{rank}(A)$
- יש פתרון $\Leftrightarrow b \in C(A)$

2 מרחבים וקטוריים

מרחב וקטורי: מרחב וקטורי מעל שדה F הוא קבוצה V עם פעולות חיבור וכפל בסקלר המקיימות 8 אקסיומות.

2.1 אקסיומות החיבור

1. **קומוטטיביות:** $u + v = v + u$
2. **אסוציאטיביות:** $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. **איבר אדיש:** קיים $0 \in V$ כך ש-$v + 0 = v$
4. **איבר נגדי:** לכל v קיים $-v$ כך ש-$v + (-v) = 0$

2.2 אקסיומות הכפל בסקלר

5. **דיסטריבוטיביות על וקטורים:** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
6. **דיסטריבוטיביות על סקלרים:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
7. **אסוציאטיביות מעורבת:** $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
8. **כפל ב-1:** $1 \cdot v = v$

2.3 תת-מרחב

קריטריון לתת-מרחב: $W \subseteq V$ היא תת-מרחב אם ורק אם:

1. $W \neq \emptyset$ (בדרך כלל מראים $0 \in W$)
2. **סגירות לחיבור:** $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
3. **סגירות לכפל בסקלר:** $\alpha \in F, v \in W \Rightarrow \alpha v \in W$

2.4 סכום וחיתוך

סכום תתי מרחבים:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

סכום ישר: הסכום $W_1 + W_2$ הוא **סכום ישר** ($W_1 \oplus W_2$) אם:

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

תנאים שקולים לסכום ישר: התנאים הבאים שקולים:

1. $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$
2. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$
3. $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$
4. כל $v \in W_1 + W_2$ ניתן לכתיבה יחידה כ-$v = w_1 + w_2$

2.5 מישור ומרחב

מישור ב-$\mathbb{R}^3$: מישור העובר דרך נקודה P_0 עם וקטורי כיוון v_1, v_2 (בלתי תלויים):

$$\Pi = \{P_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

מישור הוא תת-מרחב אם ורק אם הוא עובר דרך הראשית.

ישר ב-$\mathbb{R}^n$: ישר העובר דרך P_0 בכיוון $v \neq 0$:

$$L = \{P_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$$

3 תלות לינארית, בסיס ומימד

3.1 צירוף לינארי

צירוף לינארי: יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$. צירוף לינארי שלהם:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

כאשר $\alpha_i \in F$.

3.2 תלות לינארית

תלות לינארית: קבוצה $\{v_1,\dots,v_n\}$ **תלויה לינארית** אם קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in F$, **לא כולם אפס**, כך ש:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

3.3 פרישה

פרישה (Span):

$$\text{Span}\{v_1,\dots,v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n : \alpha_i \in F\}$$

3.4 בסיס ומימד

בסיס: קבוצה $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ היא **בסיס** של V אם:

1. B בלתי תלויה לינארית
2. B פורשת את V

משפט שטייניץ: לכל שני בסיסים של V יש אותו מספר איברים. מספר זה נקרא **המימד** של V: $\dim(V)$

3.5 נוסחת המימדים

נוסחת המימדים לסכום:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

4 העתקות לינאריות

העתקה לינארית: $T : V \to W$ היא העתקה לינארית אם לכל $u, v \in V$ ולכל $\alpha \in F$:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

4.1 גרעין ותמונה

גרעין ותמונה:

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$
$$\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$$

משפט המימדים:
$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

4.2 חד-חד-ערכיות ועל

משפט: יהי $T : V \to W$ העתקה לינארית:

- T חח"ע $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}$
- T על $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = W$

4.3 מטריצה מייצגת

מטריצה מייצגת: יהי $T : V \to W$, B בסיס של V, C בסיס של W.
המטריצה המייצגת $[T]_B^C$: העמודה ה-j היא וקטור הקואורדינטות של $T(v_j)$ לפי C.

נוסחת הקשר:
$$[T(v)]_C = [T]_B^C \cdot [v]_B$$

5 דטרמיננטות

5.1 דטרמיננטות של מטריצות קטנות

מטריצה 2×2:
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

5.2 תכונות הדטרמיננטה

תכונות פעולות שורה:

- החלפת שתי שורות: כפל ב-(-1)
- כפל שורה בסקלר α: כפל ב-α
- הוספת כפולה של שורה לאחרת: **לא משתנה**

5.3 משפטים חשובים

כפליות:
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

שחלוף:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

הפיכה: A הפיכה $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$
ואם A הפיכה:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

5.4 מטריצות מיוחדות

דטרמיננטה של מטריצות מיוחדות:

- **משולשית עליונה/תחתונה:** $\det(A) =$ מכפלת האלכסון
- **אלכסונית:** $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$
- **מטריצת בלוקים:** אם $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ אז $\det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$

5.5 השפעת פעולות על הדטרמיננטה

פעולות שורה ועמודה:

- החלפת שורות/עמודות: $\det \to -\det$
- כפל שורה/עמודה ב-c: $\det \to c \cdot \det$
- הוספת כפולה: $\det$ לא משתנה

אדישות לשחלוף: $\det(A^T) = \det(A)$

5.6 מינור ומטריצה מצורפת

מינור: M_{ij} הוא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת ממחיקת שורה i ועמודה j.
קופקטור (מינור מסומן):

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

מטריצה צמודה (מצורפת):

$$\text{adj}(A) = (C_{ji}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots \\ C_{12} & C_{22} & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

שימו לב: האינדקסים מתחלפים!

נוסחת ההופכי:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

תכונות המטריצה המצורפת:

- $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$
- $\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$
- $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B) \cdot \text{adj}(A)$

5.7 פיתוח לפי שורה/עמודה

פיתוח לפלס:

לפי שורה i:
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

לפי עמודה j:
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

6 מטריצות דומות ושינוי בסיס

6.1 מטריצת מעבר

מטריצת מעבר: יהיו $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ו-$C = \{u_1, \ldots, u_n\}$ שני בסיסים של V.
מטריצת המעבר $P_{C \leftarrow B}$ היא המטריצה שעמודותיה הן וקטורי הקואורדינטות של איברי B לפי C:
$$[P_{C \leftarrow B}]_j = [v_j]_C$$

נוסחת שינוי בסיס:
$$[v]_C = P_{C \leftarrow B} \cdot [v]_B$$

תכונות מטריצת מעבר:

1. $P_{C \leftarrow B}$ הפיכה, ו-$P_{C \leftarrow B}^{-1} = P_{B \leftarrow C}$
2. $P_{D \leftarrow B} = P_{D \leftarrow C} \cdot P_{C \leftarrow B}$

6.2 מטריצות דומות

מטריצות דומות: שתי מטריצות $A, B \in M_n(F)$ נקראות **דומות** אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש:

$$B = P^{-1}AP$$

שימור תחת דמיון: אם A ו-B דומות, אז:

1. $\det(A) = \det(B)$
2. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$
3. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$
4. להן אותו פולינום אופייני
5. להן אותם ערכים עצמיים

קשר בין מטריצות מייצגות: אם $T : V \to V$ ו-B, C בסיסים של V, אז:

$$[T]_C = P_{C\leftarrow B}^{-1} \cdot [T]_B \cdot P_{C\leftarrow B}$$

כלומר: מטריצות מייצגות של אותה העתקה הן דומות!

7 מרחבי שורות ועמודות

מרחב העמודות: **מרחב העמודות** של מטריצה $A \in M_{m\times n}(F)$ הוא תת-המרחב של F^m הנפרש ע"י עמודות A:

$$C(A) = \mathrm{Span}\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

כאשר A_j היא העמודה ה-j של A.

מרחב השורות: **מרחב השורות** של מטריצה A הוא תת-המרחב של F^n הנפרש ע"י שורות A:

$$R(A) = \mathrm{Span}\{R_1, R_2, \ldots, R_m\} = C(A^T)$$

דרגת מטריצה:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim(C(A)) = \dim(R(A))$$

כלומר: מימד מרחב העמודות שווה למימד מרחב השורות!

קשר לפעולות שורה: פעולות שורה אלמנטריות:

1. **משמרות** את מרחב השורות
2. **לא בהכרח משמרות** את מרחב העמודות
3. **משמרות** את יחסי התלות הלינארית בין העמודות

מציאת בסיס:
בסיס למרחב השורות: השורות השונות מאפס בצורה המדורגת.
בסיס למרחב העמודות: העמודות של A המקורית במיקומי הפיבוטים.

8 כלל קרמר

כלל קרמר: תהי $Ax = b$ מערכת משוואות כאשר $A \in M_n(F)$ הפיכה.
אזי הפתרון היחיד הוא:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר A_i היא המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-i בוקטור b.

דוגמה - שימוש בכלל קרמר:
עבור המערכת $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

9 ערכים עצמיים ולכסון

(נושא זה נלמד בלינארית 2ב)

ערך עצמי ווקטור עצמי: סקלר $\lambda \in F$ הוא **ערך עצמי** של מטריצה A אם קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש:

$$Av = \lambda v$$

הוקטור $v \neq 0$ נקרא **וקטור עצמי** השייך לערך העצמי λ.

9.1 מציאת ערכים עצמיים

הפולינום האופייני: λ ערך עצמי של A אם ורק אם:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

הפולינום $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ נקרא **הפולינום האופייני**.

9.2 מרחב עצמי וריבויים

מרחב עצמי: המרחב העצמי של λ הוא:

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{v \in V : Av = \lambda v\}$$

ריבויים:

- **ריבוי אלגברי:** מספר הפעמים ש-λ מופיע כשורש של הפולינום האופייני
- **ריבוי גיאומטרי:** $\dim(V_\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I))$

יחס בין הריבויים: לכל ערך עצמי λ:
$1 \leq$ ריבוי גיאומטרי $\leq$ ריבוי אלגברי

9.3 לכסון

מטריצה לכסינה: מטריצה A נקראת **לכסינה** אם קיימת מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש:

$$A = PDP^{-1}$$

או באופן שקול: $D = P^{-1}AP$

תנאים ללכסינות:

- $A \in M_n(F)$ לכסינה $\Leftrightarrow$ יש לה n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית
- **תנאי מספיק:** אם ל-A יש n ערכים עצמיים **שונים**, אז A לכסינה
- A לכסינה $\Leftrightarrow$ לכל ע"ע: ריבוי גיאומטרי = ריבוי אלגברי

תכונות מטריצות לכסינות: אם $A = PDP^{-1}$ אז:

- $A^k = PD^kP^{-1}$
- $\det(A)$ = מכפלת הערכים העצמיים
- $\mathrm{tr}(A)$ = סכום הערכים העצמיים

10 מכפלה פנימית

(נושא זה נלמד בלינארית 2ב)

מכפלה פנימית: מכפלה פנימית על מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ המקיימת:

1. **לינאריות בארגומנט הראשון:** $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ ו-$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
2. **סימטריה:** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
3. **חיוביות:** $\langle v, v \rangle \geq 0$, ושוויון אם"ם $v = 0$

10.1 נורמה ואי-שוויונות

נורמה מושרית:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

אי-שוויון קושי-שוורץ:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

שוויון מתקיים אם"ם u, v תלויים לינארית.

10.2 אורתוגונליות

אורתוגונליות:

- $u \perp v$ (אורתוגונליים) אם $\langle u, v \rangle = 0$
- קבוצה **אורתוגונלית:** $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$
- קבוצה **אורתונורמלית:** אורתוגונלית וגם $\|v_i\| = 1$ לכל i

משלים אורתוגונלי:

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \; \forall w \in W\}$$

משפט: $V = W \oplus W^\perp$ ולכן $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$

10.3 תהליך גרם-שמידט

אלגוריתם גרם-שמידט:
נתונה קבוצה $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בלתי תלויה.
שלב 1 - אורתוגונליזציה:

$$u_1 = v_1, \quad u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle} u_j$$

שלב 2 - נרמול:

$$e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

10.4 הטלה אורתוגונלית

נוסחאות הטלה:
הטלה על וקטור:

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u$$

הטלה על תת-מרחב (עם בסיס אורתונורמלי $\{e_1, \ldots, e_k\}$):

$$\text{proj}_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i\rangle e_i$$

11 נוסחאות חשובות - סיכום

נוסחאות מרכזיות:

(1) נוסחת המימדים לסכום: $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$

(2) משפט המימדים להעתקות: $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$

(3) דרגת מטריצה: $\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(T_A))$

(4) כפליות דטרמיננטה: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(5) הרכבת העתקות: $[S \circ T]_B^D = [S]_C^D \cdot [T]_B^C$

(6) אי-שוויון קושי-שוורץ: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$