Calculus 1B

Complete Course Summary

Orin Levi

חשבון אינפיניטסימלי 1ב

סיכום מקיף לקורס

אוניברסיטת תל אביב

מדעי המחשב

4 בפברואר 2026

תוכן העניינים

חלק I

תורת הקבוצות והמספרים הממשיים

פרק 1

השפה המתמטית ותורת הקבוצות

1.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 1.1 (קבוצה). **קבוצה** היא אוסף של אובייקטים הנקראים **איברים**. אם x הוא איבר בקבוצה A, נכתוב $x \in A$. אם x אינו איבר ב־A, נכתוב $x \notin A$.

הגדרה 1.2 (תת־קבוצה). קבוצה A נקראת **תת־קבוצה** של B (ונסמן $A \subseteq B$) אם כל איבר של A הוא גם איבר של B:

$$A \subseteq B \iff \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

הגדרה 1.3 (שוויון קבוצות). שתי קבוצות A ו־B **שוות** (ונסמן $A = B$) אם ורק אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

קבוצות מספרים חשובות:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — המספרים הטבעיים
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ — המספרים השלמים
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ — המספרים הרציונליים
- $\mathbb{R}$ — המספרים הממשיים

1.2 פעולות על קבוצות

הגדרה 1.4 (פעולות קבוצתיות). יהיו A, B קבוצות.

1. **איחוד:** $A \cup B = \{x : x \in A \text{ או } x \in B\}$
2. **חיתוך:** $A \cap B = \{x : x \in A \text{ וגם } x \in B\}$
3. **הפרש:** $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ וגם } x \notin B\}$
4. **הפרש סימטרי:** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

טענה 1.5 (חוקי דה־מורגן). יהיו A, B, C קבוצות. אז:

1. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
2. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

הוכחה (סעיף 1).

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cup B) &\iff x \in C \text{ וגם } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in C \text{ וגם } (x \notin A \text{ וגם } x \notin B) \\ &\iff (x \in C \text{ וגם } x \notin A) \text{ וגם } (x \in C \text{ וגם } x \notin B) \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3 פונקציות

הגדרה 1.6 (פונקציה). **פונקציה** f מקבוצה A לקבוצה B (ונסמן $f : A \to B$) היא התאמה שמשייכת לכל איבר $x \in A$ איבר יחיד $f(x) \in B$.

- A נקראת **תחום ההגדרה** (Domain) של f
- B נקראת **הטווח** (Codomain) של f
- **התמונה** של f היא $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$

הגדרה 1.7 (סוגי פונקציות). תהי $f : A \to B$ פונקציה.

1. f נקראת **חד־חד ערכית (חח"ע)** אם לכל $x_1, x_2 \in A$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
2. f נקראת **על** אם $\mathrm{Im}(f) = B$, כלומר לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש־$f(x) = y$
3. f נקראת **הפיכה (חח"ע ועל)** אם היא חח"ע וגם על

טענה 1.8. פונקציה $f : A \to B$ הפיכה אם ורק אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש־$g \circ f = \mathrm{Id}_A$ וגם $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.
במקרה זה g יחידה ונקראת **הפונקציה ההופכית** של f, ומסומנת f^{-1}.

דוגמה 1. הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = x^2$ **אינה חח"ע** כי $f(1) = f(-1) = 1$. אבל הצמצום $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ הוא חח"ע ועל, ולכן הפיך. הפונקציה ההופכית היא $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

1.4 קבוצות סופיות ואינסופיות

הגדרה 1.9. קבוצה A נקראת **סופית** אם היא ריקה או קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שקיימת התאמה חח"ע ועל בין A לבין $\{1, 2, \ldots, n\}$.
קבוצה שאינה סופית נקראת **אינסופית**.

הגדרה 1.10 (עוצמה). שתי קבוצות A ו־B הן **שוות עוצמה** (ונסמן $|A| = |B|$) אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \to B$.

הגדרה 1.11 (קבוצה בת מנייה). קבוצה A נקראת **בת מנייה** אם היא סופית או שווה עוצמה ל־$\mathbb{N}$.
קבוצה אינסופית ששווה עוצמה ל־$\mathbb{N}$ נקראת **בת מנייה אינסופית**.

טענה 1.12.

1. $\mathbb{Z}$ בת מנייה.
2. $\mathbb{Q}$ בת מנייה.
3. $\mathbb{R}$ **אינה** בת מנייה (משפט קנטור).

הוכחה (סעיף 1). נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ על ידי:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{זוגי } n \\ -\frac{n+1}{2} & \text{אי־זוגי } n \end{cases}$$

זו התאמה חח"ע ועל: $0 \mapsto 0, 1 \mapsto -1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto -2, 4 \mapsto 2, \ldots$ ■

1.5 תרגילים

תרגיל 1. הוכיחו כי לכל קבוצות A, B, C:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

פתרון:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ וגם } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ וגם } (x \in B \text{ או } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ וגם } x \in B) \text{ או } (x \in A \text{ וגם } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

תרגיל 2. תהי $f : A \to B$ פונקציה. הוכיחו:

1. f חח"ע אם ורק אם לכל $C, D \subseteq A$: $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$
2. f על אם ורק אם לכל $E \subseteq B$: $f(f^{-1}(E)) = E$

פתרון (סעיף 1, כיוון אחד): נניח f חח"ע. יהיו $C, D \subseteq A$.
($\subseteq$) תמיד מתקיים $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.
($\supseteq$) יהי $y \in f(C) \cap f(D)$. אז קיימים $c \in C$, $d \in D$ כך ש־$f(c) = y = f(d)$.
כיוון ש־f חח"ע, $c = d$. לכן $c \in C \cap D$, ומכאן $y = f(c) \in f(C \cap D)$. $\blacksquare$

תרגיל 3. הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ בת מנייה.
פתרון: נגדיר $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Q}$ על ידי $f(p, q) = \frac{p}{q}$.
f היא על (כל רציונלי הוא מנה של שלם וטבעי חיובי).
כיוון ש־$\mathbb{Z}$ בת מנייה ו־$\mathbb{N}_+$ בת מנייה, גם $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ בת מנייה (מכפלה של בנות מנייה היא בת מנייה).
תמונה של קבוצה בת מנייה היא בת מנייה, לכן $\mathbb{Q} = \mathrm{Im}(f)$ בת מנייה. $\blacksquare$

פרק 2

תכונות המספרים הממשיים

2.1 ערך מוחלט

הגדרה 2.1 (ערך מוחלט). לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר את **הערך המוחלט** של x:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

טענה 2.2 (תכונות ערך מוחלט). לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $|x| \geq 0$, ו־$x = 0 \iff |x| = 0$
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (עבור $y \neq 0$)
4. $-|x| \leq x \leq |x|$
5. **אי־שוויון המשולש:** $|x + y| \leq |x| + |y|$
6. **אי־שוויון המשולש ההפוך:** $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

הוכחת אי־שוויון המשולש. מתקיים $-|x| \leq x \leq |x|$ וגם $-|y| \leq y \leq |y|$.
בחיבור: $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$.
לכן $|x + y| \leq |x| + |y|$. ■

דוגמה. הוכיחו כי לכל $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

פתרון: נציב $a = x - y$, $b = y - z$ באי־שוויון המשולש:

$$|a+b| \leq |a|+|b| \implies |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z| \implies |x-z| \leq |x-y|+|y-z|$$ ■

2.2 חסמים

הגדרה 2.3 (חסם). תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה.

- $M \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם מלעיל** של A אם לכל $a \in A$ מתקיים $a \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם מלרע** של A אם לכל $a \in A$ מתקיים $a \geq m$.

קבוצה נקראת **חסומה מלעיל/מלרע** אם יש לה חסם מלעיל/מלרע. קבוצה **חסומה** אם היא חסומה גם מלעיל וגם מלרע.

הגדרה 2.4 (מקסימום ומינימום). תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה.

- $M \in A$ נקרא **מקסימום** של A (ונסמן $M = \max A$) אם M חסם מלעיל של A.
- $m \in A$ נקרא **מינימום** של A (ונסמן $m = \min A$) אם m חסם מלרע של A.

הערה. לא לכל קבוצה יש מקסימום או מינימום!
דוגמה: לקבוצה $(0, 1)$ אין מקסימום ואין מינימום.

2.3 סופרימום ואינפימום

הגדרה 2.5 (סופרימום). תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל.
$s \in \mathbb{R}$ נקרא **סופרימום (חסם עליון מינימלי)** של A ונסמן $s = \sup A$ אם:

1. s חסם מלעיל של A (לכל $a \in A$: $a \leq s$)
2. s הוא החסם מלעיל **הקטן ביותר**: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־$a > s - \varepsilon$

הגדרה 2.6 (אינפימום). תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע.
$t \in \mathbb{R}$ נקרא **אינפימום (חסם תחתון מקסימלי)** של A ונסמן $t = \inf A$ אם:

1. t חסם מלרע של A (לכל $a \in A$: $a \geq t$)
2. t הוא החסם מלרע **הגדול ביותר**: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש-$a < t + \varepsilon$

טענה 2.7 (אפיון הסופרימום). $s = \sup A$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים:

1. לכל $a \in A$: $a \leq s$
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש-$a > s - \varepsilon$

דוגמה 1. מצאו $\sup A$ ו-$\inf A$ עבור $A = (0, 1]$.
פתרון:

- $\sup A = 1$ (ו-$\max A = 1$ כי $1 \in A$)
- $\inf A = 0$ (אבל $\min A$ לא קיים כי $0 \notin A$)

הוכחה ש-$\inf A = 0$:

1. 0 חסם מלרע: לכל $x \in (0, 1]$ מתקיים $x > 0$.
2. 0 הוא החסם הגדול ביותר: לכל $\varepsilon > 0$, נבחר $a = \min(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}) \in A$. אז $a < 0 + \varepsilon$. ■

דוגמה 2. מצאו $\sup A$ עבור $A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$.
פתרון: נטען $\sup A = 1$.

1. 1 חסם מלעיל: $\frac{n}{n+1} < 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
2. לכל $\varepsilon > 0$, נבחר n כך ש-$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ (כלומר $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$). אז:

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon \quad ■$$

2.4 אקסיומת השלמות

אקסיומה 2.8 (אקסיומת השלמות). לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל **קיים סופרימום**.
באופן שקול: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע קיים אינפימום.

הערה חשובה. אקסיומת השלמות היא מה שמבדיל את $\mathbb{R}$ מ־$\mathbb{Q}$!
דוגמה: הקבוצה $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ חסומה מלעיל ב־$\mathbb{Q}$ (למשל על ידי 2), אבל אין לה סופרימום ב־$\mathbb{Q}$.
(הסופרימום היה צריך להיות $\sqrt{2}$, אבל $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

משפט 2.9 (תכונת ארכימדס). לכל $x, y \in \mathbb{R}$ עם $x > 0$, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$nx > y$.
באופן שקול: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{n} < \varepsilon$.

הוכחה. נניח בשלילה שלכל $n \in \mathbb{N}$: $nx \le y$.
אז הקבוצה $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ חסומה מלעיל (על ידי y).
לפי אקסיומת השלמות, קיים $s = \sup A$.
כיוון ש־$x > 0$, מתקיים $s - x < s$, ולכן $s - x$ אינו חסם מלעיל של A.
לכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$nx > s - x$, כלומר $(n+1)x > s$.
אבל $(n+1)x \in A$, וזו סתירה לכך ש־s חסם מלעיל של A. ■

משפט 2.10 (צפיפות הרציונליים). בין כל שני ממשיים שונים קיים מספר רציונלי.
כלומר: לכל $a, b \in \mathbb{R}$ עם $a < b$, קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש־$a < q < b$.

הוכחה. לפי תכונת ארכימדס, קיים $n \in \mathbb{N}_+$ כך ש־$\frac{1}{n} < b - a$, כלומר $1 < n(b-a)$.
נגדיר $m = \lfloor na \rfloor + 1$ (המספר השלם הקטן ביותר הגדול מ־na).
אז $na < m \le na + 1$.
מצד אחד: $\frac{m}{n} > a$.
מצד שני: $\frac{m}{n} \le \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$.
לכן $a < \frac{m}{n} < b$ והמספר $q = \frac{m}{n}$ רציונלי. ■

2.5 תכונות נוספות

טענה 2.11 (תכונות sup ו־inf). יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות.

1. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
2. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$
3. אם $A \subseteq B$ אז $\sup A \le \sup B$ ו־$\inf A \ge \inf B$
4. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ כאשר $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$
5. $\sup(-A) = -\inf A$ כאשר $-A = \{-a : a \in A\}$

הוכחה (סעיף 4). נסמן $s=\sup A$, $t=\sup B$.
שלב 1: $s+t$ חסם מלעיל של $A+B$.
לכל $a\in A$, $b\in B$: $a\le s$ ו־$b\le t$, לכן $a+b\le s+t$.
שלב 2: $s+t$ הוא החסם הקטן ביותר.
יהי $\varepsilon>0$. קיימים $a\in A$, $b\in B$ כך ש־$a>s-\frac{\varepsilon}{2}$ ו־$b>t-\frac{\varepsilon}{2}$.
לכן $a+b>s+t-\varepsilon$, והאיבר $a+b\in A+B$. ■

2.6 ערך שלם

הגדרה 2.12 (פונקציית הערך השלם). לכל $x\in\mathbb{R}$, **הערך השלם** (או **פונקציית הרצפה**) $\lfloor x\rfloor$ הוא המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל־x:

$$\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}:n\le x\}$$

טענה 2.13 (תכונות ערך שלם). לכל $x\in\mathbb{R}$:

1. $\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1$
2. $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$
3. $\lfloor x\rfloor=x \iff x\in\mathbb{Z}$

2.7 תרגילים

תרגיל 1. הוכיחו כי לכל קבוצה לא ריקה $A\subseteq\mathbb{R}$:

$$\sup A=-\inf(-A)$$

פתרון: נסמן $s=\sup A$ ו־$t=\inf(-A)$.
צ"ל: $s=-t$.
t חסם מלרע של $-A$: לכל $-a\in -A$ (כלומר $a\in A$) מתקיים $-a\ge t$, כלומר $a\le -t$.
לכן $-t$ חסם מלעיל של A, ומכאן $s\le -t$.
באופן דומה (או מסימטריה): $-s\le t$, כלומר $-t\le s$.
מכאן $s=-t$. ■

תרגיל 2. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה. הוכיחו כי אם $\sup A \notin A$ אז קיימת סדרה (a_n) ב־A כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

פתרון: נסמן $s = \sup A$. לכל $n \in \mathbb{N}_+$, לפי אפיון הסופרימום, קיים $a_n \in A$ כך ש:

$$s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$$

(האי־שוויון $a_n \leq s$ נובע מכך ש־s חסם מלעיל, והאי־שוויון $a_n < s$ נובע מכך ש־$s \notin A$).
לפי כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. ■

תרגיל 3. מצאו $\sup A$ ו־$\inf A$ עבור:

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

פתרון: נפרק למקרים:

- n זוגי: $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 0$
- n אי־זוגי: $a_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1-n}{n^2}$

עבור $n = 1$: $a_1 = -1 + 1 = 0$.
עבור $n = 2$: $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
עבור n אי־זוגי $3 \geq$: $a_n = \frac{1-n}{n^2} < 0$.
מקסימום: $a_2 = \frac{3}{4}$ הוא האיבר הגדול ביותר (בודקים שלכל $n \geq 2$ זוגי: $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$).
לכן $\sup A = \max A = \frac{3}{4}$.
אינפימום: עבור n אי־זוגי גדול, $a_n = \frac{1-n}{n^2} \to 0^-$.
המינימום הוא $a_3 = \frac{1-3}{9} = -\frac{2}{9}$.
לכן $\inf A = \min A = -\frac{2}{9}$. ■

חלק II

סדרות וטורים

פרק 3

סדרות

3.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 3.1 (סדרה). **סדרה** (של מספרים ממשיים) היא פונקציה $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
במקום $a(n)$ נכתוב a_n ונסמן את הסדרה ב-$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ או (a_n).

הגדרה 3.2 (חסימות). סדרה (a_n) נקראת:

- **חסומה מלעיל** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל n: $a_n \le M$
- **חסומה מלרע** אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל n: $a_n \ge m$
- **חסומה** אם היא חסומה מלעיל ומלרע (שקול: קיים $M > 0$ כך ש-$|a_n| \le M$ לכל n)

הגדרה 3.3 (מונוטוניות). סדרה (a_n) נקראת:

- **עולה (מונוטונית)**: $a_n \le a_{n+1}$ לכל n
- **עולה ממש**: $a_n < a_{n+1}$ לכל n
- **יורדת (מונוטונית)**: $a_n \ge a_{n+1}$ לכל n
- **יורדת ממש**: $a_n > a_{n+1}$ לכל n

3.2 גבול של סדרה

הגדרה 3.4 (גבול של סדרה). יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר כי הסדרה (a_n) **מתכנסת ל-**L (או L הוא **גבול** הסדרה) ונכתוב $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ או $a_n \to L$, אם:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon}$$

סדרה שאינה מתכנסת נקראת **מתבדרת**.

פירוש אינטואיטיבי. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל "סביבה" של L (קטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$), כמעט כל איברי הסדרה נמצאים בסביבה זו (כלומר, רק מספר סופי של איברים מחוץ לה).

טענה 3.5 (יחידות הגבול). אם (a_n) מתכנסת, אז הגבול שלה יחיד.

הוכחה. נניח $a_n \to L$ וגם $a_n \to L'$ עם $L \neq L'$.
נבחר $\varepsilon = \frac{|L-L'|}{2} > 0$.
קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$: $|a_n - L| < \varepsilon$.
קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$: $|a_n - L'| < \varepsilon$.
עבור $n > \max(N_1, N_2)$:

$$|L - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |L - L'|$$

סתירה! ■

טענה 3.6 (סדרה מתכנסת חסומה). כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה. תהי $a_n \to L$. עבור $\varepsilon = 1$, קיים N כך שלכל $n > N$: $|a_n - L| < 1$, כלומר $|a_n| < |L| + 1$.
נגדיר $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_N|, |L|+1\}$.
אז $|a_n| \leq M$ לכל $n \in \mathbb{N}$. ■

דוגמה 1. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
פתרון: יהי $\varepsilon > 0$. צ"ל: קיים N כך שלכל $n > N$: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.
נבחר $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$.
לכל $n > N$: $n > \frac{1}{\varepsilon}$, לכן $\frac{1}{n} < \varepsilon$, כלומר $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. ■

דוגמה 2. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.
פתרון:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$.
לכל $n > N$: $\frac{1}{n} < \varepsilon$. ■

3.3 אריתמטיקה של גבולות

משפט 3.7 (אריתמטיקה של גבולות). יהיו (a_n), (b_n) סדרות מתכנסות עם $a_n \to L$ ו־$b_n \to M$. אז:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = L - M$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$
4. $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot L$ לכל $c \in \mathbb{R}$
5. אם $M \neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$

הוכחה (מכפלה).

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - a_n M + a_n M - LM| \leq |a_n||b_n - M| + |M||a_n - L|$$

כיוון ש־(a_n) מתכנסת, היא חסומה: קיים K כך ש־$|a_n| \leq K$ לכל n.
יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$: $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$.
קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$: $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2K}$.
לכל $n > \max(N_1, N_2)$:

$$|a_n b_n - LM| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |M| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

משפט 3.8 (כלל הסנדוויץ'). יהיו (a_n), (b_n), (c_n) סדרות. אם:

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ לכל n גדול מספיק
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$

אז $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$: $|a_n - L| < \varepsilon$, כלומר $L - \varepsilon < a_n$.
קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$: $|c_n - L| < \varepsilon$, כלומר $c_n < L + \varepsilon$.
קיים N_3 כך שלכל $n > N_3$: $a_n \leq b_n \leq c_n$.
לכל $n > \max(N_1, N_2, N_3)$:

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

לכן $|b_n - L| < \varepsilon$. $\blacksquare$

דוגמה. חשבו $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$.
פתרון: $-1\le\sin n\le 1$, לכן $-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{1}{n}$.
כיוון ש־$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, לפי כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$. ■

3.4 משפט המונוטוניות

משפט 3.9 (התכנסות סדרה מונוטונית חסומה).

1. סדרה **עולה וחסומה מלעיל** מתכנסת, וגבולה הוא $\sup\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$.
2. סדרה **יורדת וחסומה מלרע** מתכנסת, וגבולה הוא $\inf\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$.

הוכחה (סעיף 1). תהי (a_n) עולה וחסומה מלעיל. נגדיר $L=\sup\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ (קיים לפי אקסיומת השלמות).
יהי $\varepsilon>0$. לפי אפיון הסופרימום, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־$a_N>L-\varepsilon$.
כיוון שהסדרה עולה, לכל $n>N$: $a_n\ge a_N>L-\varepsilon$.
וכיוון ש־L חסם מלעיל: $a_n\le L<L+\varepsilon$.
לכן $|a_n-L|<\varepsilon$ לכל $n>N$. ■

3.5 גבולות שימושיים

טענה 3.10 (גבולות חשובים).

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$ לכל $k>0$
2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
3. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ לכל $a>0$
4. $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ לכל $|q|<1$
5. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ לכל $a\in\mathbb{R}$
6. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ לכל $k\in\mathbb{N}$ ו־$a>1$

הוכחה ($\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$**).** נכתוב $\sqrt[n]{n}=1+h_n$ כאשר $h_n\ge 0$ (כי $\sqrt[n]{n}\ge 1$ לכל $n\ge 1$).
אז $n=(1+h_n)^n\ge 1+\binom{n}{2}h_n^2=1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$ (מאי־שוויון ברנולי המורחב).
לכן $h_n^2\le\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$, ומכאן $0\le h_n\le\sqrt{\frac{2}{n}}\to 0$.
לפי כלל הסנדוויץ': $h_n\to 0$, לכן $\sqrt[n]{n}=1+h_n\to 1$. ■

3.6 המספר e

משפט 3.11. הסדרה $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת.
גבולה מוגדר כ־**המספר** e:

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828...}$$

הוכחה (רעיון). מראים ש־(a_n) עולה וחסומה מלעיל (על ידי 3).
עולה: משתמשים באי־שוויון בין ממוצע חשבוני לגיאומטרי.
חסומה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ לכל n. ■

טענה 3.12. מתקיים גם:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

ובאופן כללי, לכל סדרה $a_n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

3.7 סדרות קושי

הגדרה 3.13 (סדרת קושי). סדרה (a_n) נקראת **סדרת קושי** אם:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n > N : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

משפט 3.14 (קריטריון קושי להתכנסות). סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

הוכחה (⇐). תהי $a_n \to L$. יהי $\varepsilon > 0$.
קיים N כך שלכל $n > N$: $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.
לכל $m,n > N$:

$$|a_m - a_n| \le |a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad ■$$

3.8 גבולות חלקיים, $\limsup$ ו־$\liminf$

הגדרה 3.15 (תת־סדרה). **תת־סדרה** של (a_n) היא סדרה מהצורה $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ כאשר $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ סדרה עולה ממש של אינדקסים.

הגדרה 3.16 (גבול חלקי). $L \in \mathbb{R}$ נקרא **גבול חלקי** של (a_n) אם קיימת תת־סדרה (a_{n_k}) כך ש־$a_{n_k} \to L$.

משפט 3.17 (בולצאנו־וויירשטראס). לכל סדרה חסומה יש תת־סדרה מתכנסת.

הגדרה 3.18 ($\limsup$ ו־$\liminf$). תהי (a_n) סדרה חסומה.

- $\limsup_{n\to\infty} a_n$ הוא **הגבול החלקי הגדול ביותר** של (a_n)
- $\liminf_{n\to\infty} a_n$ הוא **הגבול החלקי הקטן ביותר** של (a_n)

טענה 3.19 (אפיון $\limsup$). $L = \limsup a_n$ אם ורק אם:

1. לכל $\varepsilon > 0$ קיימים אינסוף אינדקסים n כך ש־$a_n > L - \varepsilon$
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיימים רק מספר סופי של אינדקסים n כך ש־$a_n > L + \varepsilon$

טענה 3.20. סדרה חסומה (a_n) מתכנסת אם ורק אם $\limsup a_n = \liminf a_n$.
במקרה זה $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

3.9 תרגילים

תרגיל 1. חשבו $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-1}{5n^2-n+2}$.
פתרון:

$$\frac{2n^2+3n-1}{5n^2-n+2} = \frac{n^2(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(5-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})} = \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \to \frac{2+0-0}{5-0+0} = \frac{2}{5} \quad \blacksquare$$

תרגיל 2. הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{n!}{n^n}$ מתכנסת ומצאו את גבולה.
פתרון: נבדוק מונוטוניות:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

עבור n גדול מספיק: $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n < 1$ (כי $\frac{1}{e} < 1 \leftarrow \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$).
לכן הסדרה יורדת (מ־n מסוים). היא גם חסומה מלרע (על ידי 0).
לכן מתכנסת. נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.
מהיחס: $L = L \cdot \frac{1}{e}$, כלומר $L(1-\frac{1}{e}) = 0$, לכן $L = 0$. ■

תרגיל 3. חשבו $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.
פתרון:

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2 \to e^2 \quad \blacksquare$$

תרגיל 4. תהי (a_n) סדרה המקיימת $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ עם $a_1 = 2$.
הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.
פתרון: **שלב 1:** $a_n > 0$ לכל n (באינדוקציה).
שלב 2: $a_n \ge \sqrt{2}$ לכל $n \ge 2$.
$a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} \ge \sqrt{2}$ (מאי־שוויון AM-GM: $\frac{a_n^2+2}{2} \ge \sqrt{a_n^2\cdot 2} = a_n\sqrt{2}$).
שלב 3: הסדרה יורדת (מ־$n=2$):

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2+2-2a_n^2}{2a_n} = \frac{2-a_n^2}{2a_n} \le 0 \text{ (כי } a_n \ge \sqrt{2}\text{)}$$

שלב 4: הסדרה יורדת וחסומה מלרע, לכן מתכנסת.
נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. מהנוסחה: $L = \frac{1}{2}(L + \frac{2}{L})$, לכן $2L = L + \frac{2}{L}$, $L^2 = 2$, $L = \sqrt{2}$.
■

פרק 4

טורים

4.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה 4.1 (טור). יהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. **הטור** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא הביטוי הפורמלי $a_1+a_2+a_3+\cdots$
הסכום החלקי ה־N־י הוא $S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_N$.

הגדרה 4.2 (התכנסות טור). הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס** אם סדרת הסכומים החלקיים (S_N) מתכנסת.
במקרה זה, **סכום הטור** הוא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$.
טור שאינו מתכנס נקרא **מתבדר**.

דוגמה 1 (הטור הגיאומטרי). $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\cdots$
פתרון: $S_N=\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ (עבור $q\neq 1$).
הטור מתכנס אם ורק אם $|q|<1$, ואז:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad (|q|<1)}$$

דוגמה 2 (הטור ההרמוני). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ **מתבדר**.
הוכחה:

$$S_{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots > 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots = 1+\frac{k}{2}\to\infty$$

טענה 4.3 (תנאי הכרחי להתכנסות). אם הטור $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הוכחה. אם $S = \sum a_n$ מתכנס, אז $S_n \to S$ ו־$S_{n-1} \to S$.
לכן $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$. ■

אזהרה! התנאי $a_n \to 0$ הוא **הכרחי אך לא מספיק**.
דוגמה נגדית: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ אבל $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר!

טענה 4.4 (לינאריות). אם $\sum a_n$ ו־$\sum b_n$ מתכנסים, אז:

1. $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
2. $\sum(c \cdot a_n) = c \cdot \sum a_n$ לכל $c \in \mathbb{R}$

4.2 מבחני התכנסות לטורים אי־שליליים

טענה 4.5 (התכנסות טור אי־שלילי). טור $\sum a_n$ עם $a_n \geq 0$ מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

הוכחה. (S_N) עולה (כי $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N$).
סדרה עולה מתכנסת אם ורק אם היא חסומה מלעיל. ■

4.2.1 מבחן ההשוואה

משפט 4.6 (מבחן ההשוואה). יהיו (a_n), (b_n) סדרות עם $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל n.

1. אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum a_n$ מתבדר אז $\sum b_n$ מתבדר.

הוכחה (סעיף 1). $S_N^{(a)} = \sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n = S_N^{(b)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
לכן $(S_N^{(a)})$ חסומה מלעיל, ולכן $\sum a_n$ מתכנס. ■

דוגמה. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.
פתרון: לכל $n \geq 2$: $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$ (טור טלסקופי).
$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)}=1-\frac{1}{N}\to 1$.
לפי מבחן ההשוואה, $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס. ■

4.2.2 מבחן ההשוואה הגבולי

משפט 4.7 (מבחן ההשוואה הגבולי). יהיו (a_n), (b_n) סדרות חיוביות. אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ כאשר $0<L<\infty$, אז:

$$\sum a_n \text{ מתכנס} \iff \sum b_n \text{ מתכנס}$$

הוכחה. קיים N כך שלכל $n>N$: $\frac{L}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3L}{2}$.
לכן $\frac{L}{2}b_n<a_n<\frac{3L}{2}b_n$.
לפי מבחן ההשוואה (ולינאריות), $\sum a_n$ ו־$\sum b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחד. ■

דוגמה. בדקו התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2n}$.
פתרון: נשווה ל־$b_n=\frac{1}{n^2}$ (הטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס).

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(n+1)\cdot n^2}{n^3+2n}=\frac{n^3+n^2}{n^3+2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}\to 1\in(0,\infty)$$

לפי מבחן ההשוואה הגבולי, הטור **מתכנס**. ■

4.2.3 מבחן המנה (דלמבר)

משפט 4.8 (מבחן המנה / דלמבר). תהי (a_n) סדרה חיובית. נסמן $L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (אם קיים).

1. אם $L<1$ אז $\sum a_n$ **מתכנס**.
2. אם $L>1$ אז $\sum a_n$ **מתבדר**.
3. אם $L=1$ אז **המבחן לא מכריע**.

הוכחה (מקרה $L<1$). נבחר q כך ש־$L<q<1$.
קיים N כך שלכל $n>N$: $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$.
לכן $a_{N+k}<q^k\cdot a_N$ לכל $k\geq 1$.
הטור $\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cdot a_N$ מתכנס (טור גיאומטרי עם $|q|<1$).
לפי מבחן ההשוואה, $\sum a_n$ מתכנס. ■

דוגמה 1. בדקו התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.
פתרון:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\to\frac{1}{e}<1$$

לפי מבחן המנה, הטור **מתכנס**. ■

דוגמה 2. בדקו התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.
פתרון:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\to 0<1$$

לפי מבחן המנה, הטור **מתכנס**. ■

4.2.4 מבחן השורש (קושי)

משפט 4.9 (מבחן השורש / קושי). תהי (a_n) סדרה אי־שלילית. נסמן $L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

1. אם $L<1$ אז $\sum a_n$ **מתכנס**.
2. אם $L>1$ אז $\sum a_n$ **מתבדר**.
3. אם $L=1$ אז **המבחן לא מכריע**.

דוגמה. בדקו התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}$.
פתרון:

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n+1}}\to\frac{1}{3}<1$$

לפי מבחן השורש, הטור **מתכנס**. ■

4.2.5 מבחן האינטגרל

משפט 4.10 (מבחן האינטגרל). תהי $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ פונקציה יורדת ורציפה.
אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס.

דוגמה (טור p).

$$p>1 \iff \text{מתכנס } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

הוכחה: $f(x)=\frac{1}{x^p}$ יורדת ורציפה.
$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ מתכנס אם ורק אם $p>1$ (ראינו בפרק 11).
לפי מבחן האינטגרל, גם הטור מתכנס אם ורק אם $p>1$. ■

4.3 מבחני התכנסות לטורים כלליים

4.3.1 התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

הגדרה 4.11 (התכנסות בהחלט). טור $\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם הטור $\sum|a_n|$ מתכנס.

משפט 4.12. אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

הוכחה. נשתמש בקריטריון קושי. יהי $\varepsilon>0$.
כיוון ש־$\sum|a_n|$ מתכנס, קיים N כך שלכל $m>n>N$:

$$\sum_{k=n+1}^{m}|a_k|<\varepsilon$$

לכן:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\right|\le\sum_{k=n+1}^{m}|a_k|<\varepsilon$$

לפי קריטריון קושי, $\sum a_n$ מתכנס. ■

הגדרה 4.13 (התכנסות בתנאי). טור **מתכנס בתנאי** אם הוא מתכנס אך לא מתכנס בהחלט.

4.3.2 מבחן לייבניץ

משפט 4.14 (מבחן לייבניץ לטורים מתחלפים). יהי (a_n) סדרה עם:

1. $a_n \geq 0$ לכל n
2. (a_n) יורדת מונוטונית
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

אז הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ **מתכנס**.

הוכחה. נבחן את הסכומים החלקיים:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

כל סוגריים חיובי (כי (a_n) יורדת), לכן (S_{2n}) עולה.
גם:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

לכן (S_{2n}) חסומה מלעיל.
סדרה עולה וחסומה מתכנסת. נסמן $S = \lim S_{2n}$.
גם $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S + 0 = S$.
לכן $S_n \to S$. ■

דוגמה (הטור ההרמוני המתחלף).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

הוכחה שמתכנס: $a_n = \frac{1}{n}$ מקיימת: $a_n > 0$, יורדת, $a_n \to 0$.
לפי לייבניץ, הטור מתכנס.
הערה: זהו טור שמתכנס **בתנאי** (לא בהחלט, כי $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר). ■

4.3.3 מבחן דיריכלה ומבחן אבל

משפט 4.15 (מבחן דיריכלה). יהיו (a_n), (b_n) סדרות כך ש:

1. סדרת הסכומים החלקיים $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ **חסומה**
2. (b_n) **מונוטונית ומתכנסת ל-**0

אז הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

משפט 4.16 (מבחן אבל). יהיו (a_n), (b_n) סדרות כך ש:

1. הטור $\sum a_n$ **מתכנס**
2. (b_n) **מונוטונית וחסומה**

אז הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

4.4 תרגילים

תרגיל 1. בדקו התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

פתרונות:

(א) מבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1$$

מתכנס. ■

(ב) מבחן האינטגרל עם $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_2^{\infty} = \infty$$

מתבדר. ■

(ג) מבחן לייבניץ: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ יורדת ומתכנסת ל-0.

הטור $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **מתכנס** (בתנאי, לא בהחלט). ■

(ד) מבחן המנה (ראינו קודם):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e} < 1$$

מתכנס. ■

תרגיל 2. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

פתרון (רמז): זוהי תוצאה מפורסמת (בעיית באזל). ההוכחה המלאה משתמשת בפיתוח טיילור של $\frac{\sin x}{x}$ או בניתוח פורייה.

נוכיח רק את ההתכנסות: לכל $n\geq 2$:

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

לכן:

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{N}<1$$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1+1=2$. הטור מתכנס. ■

תרגיל 3. קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי, או מתבדרים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}$

פתרונות:

(א) $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס, לכן $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ **מתכנס בהחלט**. ■

(ב) $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, ו-$\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

לפי מבחן ההשוואה, $\sum\frac{|\sin n|}{n^2}$ מתכנס, לכן הטור **מתכנס בהחלט**. ■

(ג) $a_n=\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}\to(-1)^n\cdot 1$, לא מתכנס ל-0.

לפי התנאי ההכרחי, הטור **מתבדר**. ■

חלק III

גבולות ורציפות

פרק 5

פונקציות במשתנה אחד

5.1 פונקציות ממשיות

הגדרה 5.1. פונקציה ממשית היא פונקציה $f: D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}$ נקרא **תחום ההגדרה**.

הגדרה 5.2 (סוגי פונקציות). פונקציה $f: D \to \mathbb{R}$ נקראת:

- **חסומה מלעיל:** קיים M כך ש־$f(x) \leq M$ לכל $x \in D$
- **חסומה מלרע:** קיים m כך ש־$f(x) \geq m$ לכל $x \in D$
- **חסומה:** חסומה מלעיל ומלרע
- **עולה:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **עולה ממש:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **זוגית:** $f(-x) = f(x)$ לכל x (והתחום סימטרי)
- **אי־זוגית:** $f(-x) = -f(x)$ לכל x
- **מחזורית:** קיים $T > 0$ כך ש־$f(x+T) = f(x)$ לכל x

5.2 פונקציות אלמנטריות

הפונקציות האלמנטריות:

1. **פולינומים:** $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
2. **פונקציות רציונליות:** $\frac{p(x)}{q(x)}$ (מנת פולינומים)
3. **פונקציות טריגונומטריות:** $\sin, \cos, \tan, \cot$
4. **פונקציות טריגונומטריות הפוכות:** $\arcsin, \arccos, \arctan$
5. **פונקציה מעריכית:** a^x או e^x
6. **פונקציה לוגריתמית:** $\log_a x$ או $\ln x$
7. **חזקה כללית:** $x^a = e^{a \ln x}$ (עבור $x > 0$)

5.3 פונקציות מיוחדות

פונקציית דיריכלה:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

פונקציה זו אינה רציפה בשום נקודה!

פונקציית הסימן:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

פונקציית הערך השלם (רצפה):

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

5.4 תרגילים

תרגיל 1. הוכיחו כי לכל פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קיימות פונקציה זוגית g ופונקציה אי־זוגית h כך ש־$f=g+h$.

פתרון: נגדיר:

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

נבדוק:

- $g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$ — **זוגית**
- $h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x)$ — **אי־זוגית**
- $g(x)+h(x)=\frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$ ■

פרק 6

גבולות של פונקציות

6.1 הגדרת גבול

הגדרה 6.1 (גבול של פונקציה — הגדרת ε-δ). יהי x_0 נקודת צבירה של D. נאמר ש־$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אם:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

הגדרה 6.2 (גבול — הגדרת היינה). $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אם לכל סדרה (x_n) בתחום עם $x_n \neq x_0$ ו־$x_n \to x_0$ מתקיים $f(x_n) \to L$.

משפט 6.3 (שקילות ההגדרות). הגדרת ε-δ והגדרת היינה שקולות.

דוגמה 1. הוכיחו כי $\lim_{x\to 2}(3x-1) = 5$.

פתרון: יהי $\varepsilon > 0$. צ"ל: קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x-2| < \delta$ אז $|(3x-1)-5| < \varepsilon$.

$|(3x-1)-5| = |3x-6| = 3|x-2|$.

נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

אם $|x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ אז $|3x-6| = 3|x-2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. ■

דוגמה 2. הוכיחו כי $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

פתרון (רעיון): מאי־שוויון גיאומטרי: לכל $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

כיוון ש־$\cos x \to 1$ כש־$x \to 0$, לפי כלל הסנדוויץ': $\frac{\sin x}{x} \to 1$. ■

6.2 אריתמטיקה של גבולות

משפט 6.4 (אריתמטיקה של גבולות). אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ו־$\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ אז:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = L+M$
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$
3. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (אם $M\neq 0$)

משפט 6.5 (כלל הסנדוויץ'). אם $f(x)\le g(x)\le h(x)$ בסביבה מנוקבת של x_0, ו־$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$, אז $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.

6.3 גבולות חד־צדדיים

הגדרה 6.6 (גבולות חד־צדדיים).

- **גבול מימין:** $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ אם $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
- **גבול משמאל:** $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ אם $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

טענה 6.7. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

6.4 גבולות באינסוף

הגדרה 6.8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם $\forall\varepsilon>0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

הגדרה 6.9. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ אם $\forall K>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>K$.

6.5 גבולות חשובים

טענה 6.10 (גבולות חשובים).

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$
6. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
7. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

6.6 תרגילים

תרגיל 1. חשבו $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

פתרון:

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$$

כש־$x\to 0$:

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \qquad \frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}, \qquad \cos x \to 1$$

לכן הגבול הוא $1\cdot\frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$. ■

תרגיל 2. חשבו $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

פתרון:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x = \left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{(x-1)/2}\right]^{2x/(x-1)}$$

כש־$x\to\infty$: $(1+\frac{2}{x-1})^{(x-1)/2} \to e$ ו־$\frac{2x}{x-1} \to 2$.

לכן הגבול הוא e^2. ■

פרק 7

רציפות

7.1 הגדרת רציפות

הגדרה 7.1 (רציפות בנקודה). f **רציפה בנקודה** x_0 אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
כלומר:

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

הגדרה 7.2 (רציפות בקטע). f **רציפה בקטע** I אם היא רציפה בכל נקודה של I.
(בקצוות סגורים — רציפות חד־צדדית.)

טענה 7.3 (אפיון היינה לרציפות). f רציפה ב־x_0 אם ורק אם לכל סדרה $x_n \to x_0$ מתקיים $f(x_n) \to f(x_0)$.

דוגמה 1. פונקציית דיריכלה $D(x)$ אינה רציפה בשום נקודה.
הוכחה: לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, קיימות סדרות $r_n \to x_0$ (רציונליות) ו־$i_n \to x_0$ (אי־רציונליות).
$D(r_n) = 1$ לכל n, אבל $D(i_n) = 0$ לכל n.
לכן הגבול $\lim_{x\to x_0} D(x)$ לא קיים. ■

7.2 אריתמטיקה של פונקציות רציפות

משפט 7.4. אם f,g רציפות ב־x_0 אז גם:

1. $f+g$ רציפה ב־x_0
2. $f\cdot g$ רציפה ב־x_0
3. $\frac{f}{g}$ רציפה ב־x_0 (אם $g(x_0)\neq 0$)
4. $f\circ g$ רציפה ב־x_0 (אם g רציפה ב־x_0 ו־f רציפה ב־$g(x_0)$)

טענה 7.5. כל פונקציה אלמנטרית רציפה בתחום הגדרתה.

7.3 משפט ערך הביניים

משפט 7.6 (משפט ערך הביניים — IVT). תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אם $f(a)<c<f(b)$ (או $f(b)<c<f(a)$), אז קיים $x_0\in(a,b)$ כך ש־$f(x_0)=c$.

הוכחה (רעיון). נגדיר $A=\{x\in[a,b]:f(x)<c\}$.
A לא ריקה (כי $a\in A$) וחסומה מלעיל (על ידי b).
נגדיר $x_0=\sup A$.
מראים ש־$f(x_0)=c$ (אם $f(x_0)<c$ או $f(x_0)>c$ מגיעים לסתירה). ■

דוגמה (קיום שורש). לכל פולינום ממעלה אי־זוגית יש שורש ממשי.
הוכחה: יהי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ עם n אי־זוגי.
$\lim_{x\to\infty}p(x)=\infty$ ו־$\lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$.
לכן קיימים $a<0<b$ כך ש־$p(a)<0<p(b)$.
לפי IVT, קיים $x_0\in(a,b)$ כך ש־$p(x_0)=0$. ■

7.4 משפט ויירשטראס

הגדרה 7.7 (קטע קומפקטי). קטע $[a,b]$ סגור וחסום נקרא **קומפקטי**.

משפט 7.8 (ויירשטראס — קיום מקסימום ומינימום). תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע סגור וחסום. אז:

1. f חסומה.
2. f מקבלת מקסימום ומינימום: קיימים $x_1,x_2\in[a,b]$ כך ש־$f(x_1)=\min f$ ו־$f(x_2)=\max f$.

הוכחה (סעיף 2, קיום מקסימום). f חסומה, לכן קיים $M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$.
לכל n, קיים $x_n\in[a,b]$ כך ש־$f(x_n)>M-\frac{1}{n}$.
(x_n) סדרה חסומה ב־$[a,b]$, לכן (לפי בולצאנו־ויירשטראס) קיימת תת־סדרה $x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$.
מרציפות f: $f(x_{n_k})\to f(x_0)$.
גם $f(x_{n_k})\to M$ (כי $M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\le M$).
מיחידות הגבול: $f(x_0)=M$. ■

7.5 רציפות במידה שווה

הגדרה 7.9 (רציפות במידה שווה). $f:D\to\mathbb{R}$ **רציפה במידה שווה** אם:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in D:|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

ההבדל:

- **רציפות:** δ תלוי ב־ε **וב־**x_0
- **רציפות במידה שווה:** δ תלוי **רק ב־**ε, עובד לכל הנקודות

משפט 7.10 (היינה־קנטור). אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע סגור וחסום, אז f רציפה במידה שווה.

דוגמה (לא רציפה במידה שווה). $f(x)=\frac{1}{x}$ על $(0,1]$ **אינה** רציפה במידה שווה.
הוכחה: נבחר $\varepsilon=1$. לכל $\delta>0$, נבחר $x=\delta$, $y=\frac{\delta}{2}$.
אז $|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$, אבל:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{\delta}-\frac{2}{\delta}\right|=\frac{1}{\delta}$$

עבור δ קטן מספיק, $\frac{1}{\delta}>1=\varepsilon$. ■

7.6 פונקציות הפיכות

משפט 7.11. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית ממש. אז:

1. f הפיכה
2. $f^{-1}:f([a,b])\to[a,b]$ רציפה

7.7 תרגילים

תרגיל 1. הוכיחו כי המשוואה $x^5+x=1$ יש לה פתרון יחיד בקטע $[0,1]$.
פתרון: נגדיר $f(x)=x^5+x-1$.
$f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$.
לפי IVT, קיים $x_0\in(0,1)$ כך ש-$f(x_0)=0$.
יחידות: $f'(x)=5x^4+1>0$ לכל x, לכן f עולה ממש, ולכן יש לכל היותר פתרון אחד.
■

תרגיל 2. תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה. הוכיחו שקיימת נקודת שבת, כלומר $x_0\in[0,1]$ כך ש-$f(x_0)=x_0$.
פתרון: נגדיר $g(x)=f(x)-x$.
$g(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0$ (כי $f(0)\in[0,1]$).
$g(1)=f(1)-1\leq 0$ (כי $f(1)\in[0,1]$).
אם $g(0)=0$ אז $x_0=0$ נקודת שבת.
אם $g(1)=0$ אז $x_0=1$ נקודת שבת.
אחרת, $g(0)>0>g(1)$, ולפי IVT קיים $x_0\in(0,1)$ כך ש-$g(x_0)=0$, כלומר $f(x_0)=x_0$.
■

תרגיל 3. הוכיחו כי $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה על $[0,\infty)$.

פתרון: יהי $\varepsilon>0$.

מקרה 1: $x,y\geq\varepsilon^2$. אז:

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\frac{|x-y|}{2\varepsilon}$$

נבחר $\delta_1=2\varepsilon^2$, אז $|x-y|<\delta_1\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\varepsilon$.

מקרה 2: x או y קטנים מ-ε^2. אז $|x-y|<\varepsilon^2\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\varepsilon$ (כי $\sqrt{a}<\varepsilon$ אם $a<\varepsilon^2$).

נבחר $\delta=\min(\delta_1,\varepsilon^2)=\varepsilon^2$. ■

חלק IV

גזירות

פרק 8

גזירות

8.1 הגדרת הנגזרת

הגדרה 8.1 (נגזרת). תהי f מוגדרת בסביבה של x_0. **הנגזרת** של f בנקודה x_0 היא:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

אם הגבול קיים וסופי, נאמר ש־f **גזירה** ב־x_0.

טענה 8.2. אם f גזירה ב־x_0 אז f רציפה ב־x_0.

הוכחה.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

לכן $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

אזהרה! ההפך לא נכון: $f(x) = |x|$ רציפה ב־0 אבל לא גזירה שם.

8.2 כללי גזירה

משפט 8.3 (אריתמטיקה של נגזרות). אם f, g גזירות ב־x_0 אז:

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ **(כלל המכפלה)**
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ (אם $g(x_0) \neq 0$) **(כלל המנה)**

משפט 8.4 (כלל השרשרת). אם g גזירה ב־x_0 ו־f גזירה ב־$g(x_0)$, אז:

$$\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)}$$

משפט 8.5 (נגזרת פונקציה הפוכה). אם f גזירה והפיכה עם $f'(x_0) \neq 0$, אז:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

או בסימון אחר: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

8.3 טבלת נגזרות

נגזרות חשובות:

$f'(x)$	$f(x)$
nx^{n-1}	x^n
e^x	e^x
$a^x \ln a$	a^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x$
$\cos x$	$\sin x$
$-\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

8.4 משפטי ערך הביניים

משפט 8.6 (פרמה). אם f מקבלת מקסימום או מינימום מקומי ב־x_0 פנימית, ו־f גזירה ב־x_0, אז $f'(x_0) = 0$.

משפט 8.7 (רול). אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ב־$[a,b]$, גזירה ב־(a,b), ו־$f(a) = f(b)$, אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש־$f'(c) = 0$.

משפט 8.8 (לגרנז' / ערך הביניים לנגזרות). אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b), אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

הוכחה. נגדיר $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
אז $g(a) = f(a)$ ו־$g(b) = f(a)$.
לפי רול, קיים $c \in (a,b)$ כך ש־$g'(c) = 0$.
$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

משפט 8.9 (קושי). אם $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפות ב־$[a,b]$ וגזירות ב־(a,b) עם $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$, אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

8.5 כלל לופיטל

משפט 8.10 (כלל לופיטל — צורה $\frac{0}{0}$). אם $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, ו־$g'(x) \neq 0$ בסביבה מנוקבת של a, וקיים $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (כולל $\pm\infty$), אז:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

משפט 8.11 (כלל לופיטל — צורה $\frac{\infty}{\infty}$). אם $\lim_{x\to a}|f(x)| = \lim_{x\to a}|g(x)| = \infty$, וקיים $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, אז:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

דוגמה 1. חשבן $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$.

פתרון: צורה $\frac{0}{0}$. לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

דוגמה 2. חשבן $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

פתרון: צורה $0\cdot(-\infty)$. נכתוב $x\ln x = \frac{\ln x}{1/x}$ (צורה $\frac{-\infty}{\infty}$).

לופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 \quad \blacksquare$$

דוגמה 3. חשבן $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

פתרון: צורה 0^0. נכתוב $x^x = e^{x\ln x}$.

מדוגמה 2: $x\ln x \to 0$.

לכן $x^x = e^{x\ln x} \to e^0 = 1$. $\blacksquare$

8.6 פולינום טיילור

הגדרה 8.12 (פולינום טיילור). אם f גזירה n פעמים ב־x_0, **פולינום טיילור מדרגה** n סביב x_0 הוא:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots}$$

משפט 8.13 (טיילור עם שארית לגרנז'). אם f גזירה $n+1$ פעמים ב־$[a,b]$, אז לכל $x \in [a,b]$ קיים c בין x_0 ל־x כך ש:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

כאשר השארית היא:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

פיתוחי מקלורן חשובים (סביב $x_0 = 0$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (|x| \le 1, x \neq -1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

8.7 חקירת פונקציות

טענה 8.14 (תנאי לעלייה/ירידה). תהי f גזירה בקטע I.

- $f' > 0$ ב־I $\Rightarrow$ f עולה ממש ב־I
- $f' < 0$ ב־I $\Rightarrow$ f יורדת ממש ב־I
- $f' \ge 0$ ב־I $\Rightarrow$ f עולה (לא בהכרח ממש) ב־I

טענה 8.15 (מבחן הנגזרת השנייה לקיצון). אם $f'(x_0) = 0$ ו־$f''(x_0) \neq 0$:

- $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ x_0 נקודת מינימום מקומי
- $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 נקודת מקסימום מקומי

הגדרה 8.16 (קעירות). f **קעורה כלפי מעלה** (קמורה) בקטע אם $f''>0$ בקטע.
f **קעורה כלפי מטה** (קעורה) בקטע אם $f''<0$ בקטע.
נקודת פיתול: נקודה שבה f משנה קעירות.

8.8 תרגילים

תרגיל 1. חשב $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$.
פתרון: נשתמש בפיתוח טיילור: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - O(x^7)$.

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^5}{120} - O(x^7)$$

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120} - O(x^2) \to \frac{1}{120} \quad \blacksquare$$

תרגיל 2. חקרו את הפונקציה $f(x) = xe^{-x}$ (מקסימום, מינימום, קעירות, אסימפטוטות).
פתרון: **תחום:** $\mathbb{R}$.
נגזרות:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

נקודות קריטיות: $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$.
$x=1 \Rightarrow f''(1) = e^{-1}(1-2) = -e^{-1} < 0$ מקסימום מקומי.
$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.
קעירות: $f''(x)=0 \Rightarrow x=2$.
$x<2$: $f''<0$ (קעורה כלפי מטה).
$x>2$: $f''>0$ (קעורה כלפי מעלה).
$x=2$ נקודת פיתול, $f(2)=2e^{-2}$.
אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0(\text{לופיטל})$$

אסימפטוטה אופקית $y=0$ ב־$x\to\infty$. $\blacksquare$

תרגיל 3. הוכיחו כי לכל $x>0$: $\ln(1+x) < x$.
פתרון: נגדיר $f(x) = x - \ln(1+x)$ לכל $x>0$.
$f(0)=0$.
$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$ לכל $x>0$.
לכן f עולה ממש ב־$(0,\infty)$.
מכאן $f(x) > f(0) = 0$ לכל $x>0$, כלומר $x > \ln(1+x)$. $\blacksquare$

חלק V

אינטגרל רימן

פרק 9

1: פונקציות קדומות ואינטגרל לא מסוים

9.1 מבוא

ביחידה זו נלמד על הפעולה ההפוכה לגזירה -- מציאת **פונקציה קדומה**. נגדיר את האינטגרל הלא מסוים ונלמד שיטות בסיסיות לחישובו.

9.2 פונקציה קדומה

9.2.1 הגדרה בסיסית

הגדרה 8.42: פונקציה קדומה
יהי I קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר כי פונקציה $F : I \to \mathbb{R}$ היא **קדומה** של f כאשר F גזירה ב־I ומתקיים $F' = f$.

דוגמאות:

- הפונקציה $F(x) = x^2$ היא קדומה של $f(x) = 2x$ כי $F'(x) = 2x = f(x)$.
- הפונקציה $F(x) = \sin x$ היא קדומה של $f(x) = \cos x$ כי $(\sin x)' = \cos x$.
- הפונקציה $F(x) = e^x$ היא קדומה של $f(x) = e^x$ כי $(e^x)' = e^x$.

9.2.2 יחידות הקדומה

טענה 8.43: יחידות הקדומה עד כדי קבוע
יהי I קטע, תהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה ותהי $F : I \to \mathbb{R}$ קדומה של f. אז לכל פונקציה $G : I \to \mathbb{R}$ מתקיים:
G קדומה של f **אם ורק אם** קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים $G(x) = F(x) + c$.

הוכחה (רעיון):
($\Leftarrow$) אם $G(x)=F(x)+c$ אז $G'(x)=F'(x)+0=f(x)$, כלומר G קדומה.
($\Rightarrow$) אם G קדומה אז $(G-F)'=G'-F'=f-f=0$. פונקציה שנגזרתה אפס בקטע היא קבועה (מסקנה 8.13), לכן $G-F=c$ לקבוע כלשהו.

מסקנה חשובה:
אם קיימת קדומה אחת, אז קיימות **אינסוף קדומות** -- כל אחת מהן שונה מהאחרות בקבוע בלבד.

9.3 תכונת דרבו וקיום קדומה

הערה 8.44: תכונת דרבו
אם F היא קדומה של f אז לפי משפט דרבו, כיוון שמתקיים $f=F'$ נסיק כי f מקיימת את **תכונת דרבו** (תכונת ערך הביניים לנגזרות).
מסקנה: לפונקציה שלא מקיימת את תכונת דרבו **לא קיימת** פונקציה קדומה.

דוגמה לפונקציה ללא קדומה:
הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הנתונה על ידי:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

אינה מקיימת את תכונת דרבו (``קופצת" מ־(-1) ל־1 ב־$x=0$), ולכן **לא קיימת לה קדומה**.

9.4 סימון האינטגרל הלא מסוים

סימון:
יהי I קטע ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה. נניח כי קיימת ל־f קדומה. את **אוסף הקדומות** של f נסמן:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

אם $F:I\to\mathbb{R}$ קדומה של f אז נרשום:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+c$$

כאשר c מייצג קבוע שרירותי.

9.5 טבלת אינטגרלים בסיסיים

להלן אינטגרלים בסיסיים שחשוב לזכור:

פונקציה	קדומה	תחום
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$n\in\mathbb{N}$, כל קטע
x^λ $(\lambda\neq -1)$	$\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}+c$	$(0,+\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$	קטע שאינו כולל 0
e^x	e^x+c	כל קטע
a^x $(a>0, a\neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	כל קטע
$\sin x$	$-\cos x+c$	כל קטע
$\cos x$	$\sin x+c$	כל קטע
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x+c$	$(0,\pi)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$	$(-1,1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x+c$	כל קטע

9.6 אינטגרציה בחלקים

טענה 8.45: אינטגרציה בחלקים
יהי I קטע ותהיינה $F,g:I\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ב־I. נניח כי ל־$F\cdot g'$ קיימת קדומה ב־I. אז קיימת ל־$F'\cdot g$ קדומה ב־I ומתקיים:

$$\int F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

הוכחה:
לפי ההנחה קיימת ל־$F \cdot g'$ קדומה ב־I, נסמנה $H : I \to \mathbb{R}$.
נתבונן ב־$F \cdot g - H$.
F, g, H גזירות ולכן $F \cdot g - H$ גזירה ומתקיים:

$$(F \cdot g - H)' = F' \cdot g + F \cdot g' - F \cdot g' = F' \cdot g$$

לכן $F \cdot g - H$ היא קדומה של $F' \cdot g$ ב־I, ומכאן:

$$\int F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

דוגמה: קדומה ל־$\ln x$ בקטע $(0, +\infty)$
נגדיר $F(x) = x$, $g(x) = \ln x$ לכל $x \in (0, +\infty)$.
F, g גזירות ומתקיים $F'(x) = 1$, $g'(x) = \frac{1}{x}$.
לכל $x \in (0, +\infty)$ מתקיים $F(x)g'(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
מכאן $H(x) = x$ היא קדומה של $F \cdot g'$.
לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c$$

9.7 שינוי משתנה

9.7.1 שינוי משתנה -- גרסה ראשונה

טענה 8.46: שינוי משתנה (1)
יהיו I, J קטעים ותהיינה $f : I \to \mathbb{R}$ ו־$g : J \to I$ פונקציות. נניח כי f בעלת קדומה $F : I \to \mathbb{R}$. בנוסף, נניח כי g גזירה ב־J. אז קיימת ל־$(f \circ g) \cdot g'$ קדומה ב־J ומתקיים:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c$$

הוכחה:
נתבונן ב־$F \circ g : J \to \mathbb{R}$.
F ו־g גזירות, לכן לפי כלל השרשרת $F \circ g$ גזירה ומתקיים:

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$$

לכן $F \circ g$ קדומה של $(f \circ g) \cdot g'$.

דוגמה: קדומה ל־$\tan x$ בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
לכל $x \in I$ מתקיים $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
נגדיר $g : I \to (0, +\infty)$ על ידי $g(x) = \cos x$.
g גזירה ב־I ומתקיים $g'(x) = -\sin x$.
נגדיר $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ על ידי $f(u) = -\frac{1}{u}$.
הפונקציה $F(u) = -\ln u$ היא קדומה של f.
לכל $x \in I$ מתקיים:

$$f(g(x)) \cdot g'(x) = f(\cos x) \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x$$

לפי משפט שינוי משתנה נסיק כי:

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = F(g(x)) + c = -\ln(\cos x) + c$$

9.7.2 שינוי משתנה -- גרסה שנייה

טענה 8.47: שינוי משתנה (2)
יהיו I, J קטעים ותהיינה $f : I \to \mathbb{R}$ ו־$g : J \to I$ פונקציות. נניח כי g גזירה ב־J, **על**, ומתקיים $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in J$. בנוסף, נניח כי $(f \circ g) \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ היא בעלת קדומה $F : J \to \mathbb{R}$. אז:

1. $g : J \to I$ הפיכה.
2. קיימת ל־f קדומה ב־I ומתקיים:

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(g^{-1}(x)) + c$$

הוכחה (רעיון):
(1) לפי ההנחה לכל $x \in J$ מתקיים $g'(x) \neq 0$. לפי משפט דרבו נסיק כי g' שומרת סימן ב־J, על כן g מונוטונית ממש. מכאן g חד-חד-ערכית, ולפי ההנחה g על, ולכן g הפיכה.
(2) נתבונן ב־$F \circ g^{-1} : I \to \mathbb{R}$. לפי כלל השרשרת ונגזרת פונקציה הפוכה:

$$(F \circ g^{-1})'(x) = F'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) = (f \circ g)(g^{-1}(x)) \cdot g'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x)$$

9.8 דוגמאות נוספות

דוגמה: $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ **עבור** $a>0$
נגדיר $g(t)=at$. אז $g'(t)=a$.
$(f\circ g)(t)\cdot g'(t)=\frac{1}{a^2+a^2t^2}\cdot a=\frac{1}{a(1+t^2)}$
קדומה: $\frac{1}{a}\arctan t$.
לכן:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

דוגמה: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$ **עבור** $a>0$ **בקטע** $(-a,a)$
באופן דומה:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+c$$

9.9 תרגילים

תרגילים:

1. הוכיחו כי קיימת פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ שמקיימת את תכונת דרבו אך **לא קיימת** לה פונקציה קדומה.
2. חשבו את האינטגרלים הבאים:
   - $\int xe^x\,\mathrm{d}x$
   - $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$
   - $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$
   - $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$
3. מצאו קדומה ל-$\frac{1}{x^2-a^2}$ (עבור $a\neq 0$) בקטע מתאים.
   רמז: השתמשו בפירוק: $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$

פרק 10

2: אינטגרל מסוים וסכומי רימן

10.1 מבוא

ביחידה זו נגדיר את **האינטגרל המסוים** באמצעות סכומי דרבו. נלמד מתי פונקציה היא אינטגרבילית ונכיר את תכונות האינטגרל.

10.2 חלוקות ועידונים

הגדרה 9.1: חלוקה

יהי $[a,b]$ קטע. **חלוקה** של הקטע $[a,b]$ היא קבוצה $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ של נקודות המקיימות:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

הפרמטר של החלוקה מסומן $\lambda(\Pi)$ ומוגדר:

$$\lambda(\Pi) = \max_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

הגדרה 9.2: עידון

יהי $[a,b]$ קטע. תהיינה Π_1, Π_2 חלוקות של $[a,b]$. נאמר כי Π_2 היא **עידון** של Π_1 כאשר $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$.

הערה:

- אם Π_2 היא עידון של Π_1 אז $\lambda(\Pi_2) \le \lambda(\Pi_1)$.
- לכל שתי חלוקות קיימת חלוקה שהיא עידון של שתיהן (האיחוד שלהן).

10.3 סכומי דרבו

הגדרה 9.3: סכומי דרבו
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **חסומה** ותהי $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ חלוקה של $[a,b]$.
סכום דרבו העליון של f ביחס לחלוקה Π:

$$\overline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)\right)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

סכום דרבו התחתון של f ביחס לחלוקה Π:

$$\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)\right)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

טענה 9.4: תכונות סכומי דרבו
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אז:

1. לכל חלוקה Π של $[a,b]$ מתקיים:

$$(b-a)\cdot\inf f\le\underline{S}(f,\Pi)\le\overline{S}(f,\Pi)\le(b-a)\cdot\sup f$$

2. לכל שתי חלוקות Π_1,Π_2 של $[a,b]$, אם Π_2 היא עידון של Π_1 אז:

$$\underline{S}(f,\Pi_1)\le\underline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_1)$$

3. לכל שתי חלוקות Π_1,Π_2 של $[a,b]$ מתקיים:

$$\underline{S}(f,\Pi_1)\le\overline{S}(f,\Pi_2)$$

הוכחה (רעיון):
(1) לכל i מתקיים $\inf f\le\inf_{[x_i,x_{i+1}]}f\le\sup_{[x_i,x_{i+1}]}f\le\sup f$. כפל ב־$(x_{i+1}-x_i)>0$ וסכימה נותנים את אי-השוויון.
(2) מספיק להוכיח עבור עידון בנקודה אחת. אם $\Pi_2=\Pi_1\cup\{y\}$ כאשר $y\in(x_k,x_{k+1})$, אז:

$$\sup_{[x_k,x_{k+1}]}f\cdot(x_{k+1}-x_k)\ge\sup_{[x_k,y]}f\cdot(y-x_k)+\sup_{[y,x_{k+1}]}f\cdot(x_{k+1}-y)$$

(3) קיים עידון משותף Π_3 של Π_1 ושל Π_2. לפי (2):

$$\underline{S}(f,\Pi_1)\le\underline{S}(f,\Pi_3)\le\overline{S}(f,\Pi_3)\le\overline{S}(f,\Pi_2)$$

10.4 האינטגרל העליון והתחתון

הגדרה 9.5: אינטגרל עליון ותחתון
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
האינטגרל העליון של f ב־$[a,b]$:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{\overline{S}(f,\Pi) : \Pi \text{ חלוקה של } [a,b]\right\}$$

האינטגרל התחתון של f ב־$[a,b]$:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\underline{S}(f,\Pi) : \Pi \text{ חלוקה של } [a,b]\right\}$$

הערה 9.6:
לכל פונקציה חסומה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

10.5 אינטגרביליות לפי דרבו

הגדרה 9.7: אינטגרביליות
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נאמר כי f **אינטגרבילית (לפי דרבו)** ב־$[a,b]$ כאשר:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

במקרה זה נסמן:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

טענה 9.8: קריטריון אינטגרביליות
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. f אינטגרבילית ב־$[a,b]$ **אם ורק אם** לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π של $[a,b]$ כך ש:

$$\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \varepsilon$$

10.6 דוגמאות לאינטגרביליות

דוגמה: פונקציה קבועה
תהי $f(x)=\alpha$ לכל $x\in[a,b]$.
לכל חלוקה Π: $\overline{S}(f,\Pi)=\underline{S}(f,\Pi)=\alpha(b-a)$.
לכן f אינטגרבילית ומתקיים $\int_a^b \alpha\,\mathrm{d}x=\alpha(b-a)$.

דוגמה: פונקציית דיריכלה (לא אינטגרבילית)
הפונקציה $D:[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

לכל חלוקה Π ולכל תת-קטע $[x_i,x_{i+1}]$:

- $\sup_{[x_i,x_{i+1}]} D=1$ (כי יש רציונליים בכל קטע)
- $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} D=0$ (כי יש אי-רציונליים בכל קטע)

לכן $\overline{S}(D,\Pi)=1$ ו־$\underline{S}(D,\Pi)=0$ לכל חלוקה.
מכאן: $\overline{\int_0^1} D=1$, $\underline{\int_0^1} D=0$, ולכן D **לא אינטגרבילית**.

דוגמה: $f(x)=x^2$ ב־$[0,1]$
לחלוקה שווה Π_n עם $x_i=\frac{i}{n}$:

$$\underline{S}(f,\Pi_n)=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}$$

$$\overline{S}(f,\Pi_n)=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}$$

לכן $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

10.7 משפטי אינטגרביליות

טענה 9.17: פונקציה רציפה היא אינטגרבילית
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **רציפה**. אז f אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

הוכחה (רעיון):
f רציפה בקטע סגור וחסום, לכן רציפה במידה שווה. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
ניקח חלוקה Π עם $\lambda(\Pi) < \delta$. בכל תת-קטע $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\sup_{[x_i,x_{i+1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

לכן:

$$\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

טענה 9.20: פונקציה מונוטונית היא אינטגרבילית
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה **מונוטונית**. אז f אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

טענה 9.21: פונקציה חסומה עם מספר סופי של נקודות אי-רציפות
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה שרציפה בכל הנקודות מלבד **מספר סופי** של נקודות.
אז f אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

10.8 תכונות האינטגרל המסוים

תכונות האינטגרל:
תהיינה $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות. אז:

1. **לינאריות:**
   - $\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x$
   - $\int_a^b \alpha f\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f\,\mathrm{d}x$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$
2. **מונוטוניות:** אם $f(x) \le g(x)$ לכל $x \in [a,b]$ אז $\int_a^b f\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g\,\mathrm{d}x$.
3. **אדיטיביות בתחום:** לכל $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_a^c f\,\mathrm{d}x + \int_c^b f\,\mathrm{d}x$$

4. **אי-שוויון המשולש:**

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$$

טענה 9.25: מכפלת פונקציות אינטגרביליות
תהיינה $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות. אז $f \cdot g$ אינטגרבילית.

הוכחה (רעיון):
ראשית מוכיחים שאם f אינטגרבילית אז f^2 אינטגרבילית. לאחר מכן משתמשים בזהות:

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$$

טענה 9.27: הרכבה עם פונקציה רציפה
תהי $f : [a,b] \to [c,d]$ אינטגרבילית ותהי $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ רציפה. אז $g \circ f$ אינטגרבילית.

10.9 פונקציית רימן

פונקציית רימן -- אינטגרבילית עם אינסוף נקודות אי-רציפות
הפונקציה $R : [0,1] \to \mathbb{R}$ מוגדרת:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ בצמצום } , p, q \in \mathbb{N}_+, \gcd(p,q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ או } x = 0 \end{cases}$$

טענה: R אינטגרבילית ב־$[0,1]$ ומתקיים $\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
רעיון ההוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ יש רק מספר **סופי** של נקודות x עבורן $R(x) \geq \varepsilon$. מכסים אותן בקטעים קטנים, ובשאר $\sup R < \varepsilon$.

10.10 תרגילים

תרגילים:

1. יהי $[a,b]$ קטע ו־$\alpha \in \mathbb{R}$. הראו כי $f(x) = \alpha$ אינטגרבילית ומתקיים $\int_a^b \alpha \, \mathrm{d}x = \alpha(b-a)$.
2. תהיינה f,g אינטגרביליות עם $f \geq g$ ו־$f(x_0) > g(x_0)$ בנקודה אחת. האם בהכרח $\int_a^b f > \int_a^b g$?

   תשובה: לא בהכרח! אם $f(x_0) > g(x_0)$ רק בנקודה בודדת, האינטגרל לא משתנה. אבל **אם** f **רציפה** ב־x_0, אז קיימת סביבה שבה $f > g$, ואז $\int_a^b f > \int_a^b g$.
3. תהי $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. הוכיחו:
   - ☐ אם f זוגית: $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$
   - ☐ אם f אי־זוגית: $\int_{-a}^a f = 0$
4. תהיינה f,g אינטגרביליות. הוכיחו כי $\max(f,g)$ ו־$\min(f,g)$ אינטגרביליות.

   רמז: $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$

10.11 משפט היסוד של החדו"א

יחידה זו עוסקת בקשר העמוק בין אינטגרציה וגזירה — המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

10.12 אינטגרביליות מקומית

הגדרה 10.1 (אינטגרביליות מקומית). יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר כי f **אינטגרבילית מקומית על** I כאשר לכל $a,b \in I$ עם $a<b$ הפונקציה f אינטגרבילית על $[a,b]$.

דוגמה. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה. אז f אינטגרבילית מקומית על כל קטע, כי פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית.

מוסכמה. אם $b<a$ אז נגדיר:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

10.13 אינטגרל לא מסוים

הגדרה 10.2 (אינטגרל לא מסוים). יהי I קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית ב־I. פונקציה $F : I \to \mathbb{R}$ נקראת **אינטגרל לא מסוים של** f כאשר קיים $a \in I$ כך שמתקיים:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{לכל} x \in I$$

תרגיל. יהיו $F, G : I \to \mathbb{R}$ אינטגרלים לא מסוימים של f. הוכיחו כי קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$F(x) - G(x) = c$ לכל $x \in I$.

10.14 רציפות האינטגרל הלא מסוים

טענה 10.3 (רציפות האינטגרל הלא מסוים). יהי I קטע, תהי $f : I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית, ויהי $F : I \to \mathbb{R}$ אינטגרל לא מסוים של f.

1. F **רציפה** ב־I.
2. אם בנוסף f **חסומה** ב־I, אז F היא **פונקציית ליפשיץ** (קיים $M > 0$ כך ש־$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ לכל $x, y \in I$).

הוכחה. יהי $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. יהי $x_0 \in I$.
שלב 1: כיוון ש־f אינטגרבילית מקומית, קיים $\eta > 0$ כך ש־f חסומה ב־$I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ על ידי $M > 0$.
שלב 2: לכל x עם $|x - x_0| < \eta$:

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq M|x - x_0|$$

שלב 3: נבחר $\delta = \min\left(\eta, \frac{\varepsilon}{M}\right)$. אז לכל x עם $|x - x_0| < \delta$:

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

לכן F רציפה ב־x_0. ∎

10.15 המשפט היסודי הראשון

טענה 10.4 (גזירות האינטגרל הלא מסוים). יהי I קטע, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית, ו־F אינטגרל לא מסוים של f.
אם f **רציפה ב־**x_0 אז F **גזירה ב־**x_0 ומתקיים:

$$\boxed{F'(x_0) = f(x_0)}$$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. כיוון ש־f רציפה ב־x_0, קיים $\delta > 0$ כך שלכל t עם $|t - x_0| < \delta$:

$$|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחן את המנה:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)$$

נשתמש בכך ש־$f(x_0) = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t$$

לכל $|x - x_0| < \delta$:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot |x - x_0| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

לכן $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, כלומר $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

10.16 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי

משפט 10.5 (המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי). יהי I קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$.
אם f **רציפה** אז **קיימת ל־**f **פונקציה קדומה ב־**I.

הוכחה. נבחר $a \in I$ ונגדיר:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

לפי טענה 10.4, בכל נקודה $x \in I$ (שם f רציפה) מתקיים $F'(x) = f(x)$.
לכן F היא קדומה של f ב־I. ■

משמעות המשפט. המשפט קושר בין שני מושגים נפרדים לכאורה:

- **גזירה** — מציאת קצב שינוי מקומי
- **אינטגרציה** — מציאת שטח מצטבר

המשפט מראה שאינטגרציה היא הפעולה ההפוכה לגזירה!

10.17 נוסחת ניוטון־לייבניץ (המשפט היסודי השני)

משפט 10.6 (נוסחת ניוטון־לייבניץ). תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. **אם** f **אינטגרבילית ובעלת קדומה ב־**$[a,b]$ אז **לכל קדומה** F **של** f מתקיים:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

סימון. $F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$

הוכחה (רעיון). **שלב 1:** בוחרים חלוקה $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ עם $\lambda(\Pi) < \delta$ כך שסכום רימן קרוב לאינטגרל.

שלב 2: לפי משפט לגרנז', בכל תת־קטע $[x_i, x_{i+1}]$ קיים $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ כך ש:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

שלב 3: סכימה:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \big[F(x_{i+1}) - F(x_i)\big] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = S(f, \Pi, \xi)$$

שלב 4: בגבול $\lambda(\Pi) \to 0$, סכום רימן שואף לאינטגרל:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \blacksquare$$

10.18 דוגמאות לחישוב אינטגרלים

דוגמה 1.

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

דוגמה 2. חישוב $\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$.
ידוע כי $x\ln x - x$ היא קדומה של $\ln x$ (ניתן לאמת בגזירה). לכן:

$$\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = \left[x\ln x - x\right]_1^e = (e\cdot 1 - e) - (1\cdot 0 - 1) = 0 - (-1) = 1$$

דוגמה 3. חישוב $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.
משתמשים בזהות $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

10.19 גזירה של אינטגרל עם גבולות משתנים

מסקנה 1 (גבול עליון משתנה). אם f רציפה ב־I ו־$a \in I$, אז הפונקציה:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

מקיימת $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in I$.

מסקנה 2 (גבולות כלליים — כלל לייבניץ). אם f רציפה, ו־$u(x), v(x)$ גזירות, אז:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(v(x))\cdot v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x)}$$

הוכחה. נגדיר $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ כך ש־$G'(x) = f(x)$.
אז:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = G(v(x)) - G(u(x))$$

לפי כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dx}\left[G(v(x)) - G(u(x))\right] = G'(v(x))\cdot v'(x) - G'(u(x))\cdot u'(x) = f(v(x))\cdot v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x)$$

■

דוגמה. חשבון $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
פתרון: כאן $u(x)=0$, $v(x)=x^2$, $f(t)=e^{-t^2}$.
לפי כלל לייבניץ:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-(x^2)^2}\cdot 2x - e^{-0}\cdot 0 = 2xe^{-x^4}$$

10.20 הערות חשובות

הערות. 10.7.

1. **נגזרת של פונקציה גזירה** אינה בהכרח אינטגרבילית רימן.
   דוגמה: הפונקציה $F(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ עבור $x\neq 0$ ו־$F(0)=0$ היא גזירה ב־$[0,1]$, אך F' אינה חסומה ולכן אינה אינטגרבילית רימן.
2. יש דוגמאות לנגזרת **חסומה** שאינה אינטגרבילית רימן (למשל פונקציית Volterra).

10.21 תרגילים

תרגיל 1. חשבון:

1. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$

תרגיל 2. מצאו את $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3}$.
רמז: השתמשו בכלל לופיטל או בפיתוח טיילור.

תרגיל 3. תהי f רציפה ב־$\mathbb{R}$. הוכיחו כי אם $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, אז $f\equiv 0$.

תרגיל 4. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

10.22 שיטות אינטגרציה לאינטגרל מסוים

יחידה זו עוסקת בהתאמת שיטות האינטגרציה (אינטגרציה בחלקים ושינוי משתנה) לאינטגרל המסוים, ובמשפט ערך הביניים לאינטגרלים.

10.23 אינטגרציה בחלקים לאינטגרל מסוים

טענה 10.8 (אינטגרציה בחלקים). תהיינה $F, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ב־$[a, b]$, ונגזרותיהן F', g' אינטגרביליות רימן ב־$[a, b]$. אז:

$$\boxed{\int_a^b F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

הוכחה. נגדיר $H(x) = F(x) \cdot g(x)$. לפי כלל המכפלה:

$$H'(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

לכן $F'(x)g(x) = H'(x) - F(x)g'(x)$.
נשלב ונשתמש בנוסחת ניוטון־לייבניץ:

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b H'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= H(b) - H(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

■

סימון מקוצר.

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

דוגמה 1. חישוב $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.
נגדיר $F(x) = e^x$ (כך ש־$F'(x) = e^x$), $g(x) = x$ (כך ש־$g'(x) = 1$).
פתרון:

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

דוגמה 2. חישוב $\int_0^\pi x\sin x \,\mathrm{d}x$.
נגדיר $F(x)=-\cos x$ (כך ש־$F'(x)=\sin x$), $g(x)=x$.
פתרון:

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x=[-x\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi-(-1)-0+[\sin x]_0^\pi=\pi+0=\pi$$

דוגמה 3. חישוב $\int_1^e(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.
נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u=(\ln x)^2$, $dv=dx$.
אז $du=\frac{2\ln x}{x}dx$, $v=x$.

$$\int_1^e(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=[x(\ln x)^2]_1^e-\int_1^e 2\ln x\,\mathrm{d}x=e-2\int_1^e\ln x\,\mathrm{d}x$$

מדוגמה קודמת: $\int_1^e\ln x\,\mathrm{d}x=1$. לכן:

$$\int_1^e(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=e-2\cdot 1=e-2$$

10.24 שינוי משתנה — גרסה ראשונה

טענה 10.9 (שינוי משתנה — גרסה 1). תהיינה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו־$g:[c,d]\to[a,b]$. נניח כי:

- f בעלת קדומה ואינטגרבילית ב־$[a,b]$
- g גזירה ב־$[c,d]$
- $(f\circ g)\cdot g'$ אינטגרבילית על $[c,d]$

אז:

$$\boxed{\int_c^d(f\circ g)(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{g(c)}^{g(d)}f(t)\,\mathrm{d}t}$$

דרך לזכור. אם $t=g(x)$, אז $dt=g'(x)dx$. הגבולות משתנים: $x=c\Rightarrow t=g(c)$, $x=d\Rightarrow t=g(d)$.

10.25 שינוי משתנה — גרסה שנייה

טענה 10.10 (שינוי משתנה — גרסה 2). תהיינה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו־$g:[c,d]\to[a,b]$ כך ש:

- f אינטגרבילית ב־$[a,b]$
- g גזירה והפיכה
- g' רציפה

אז $(f\circ g)\cdot g'$ אינטגרבילית ומתקיים:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f\circ g)(t)g'(t)\,\mathrm{d}t}$$

הערה. 10.11 מתקיים גם:

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))|g'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(תלוי בסדר הגבולות ובסימן של g').

10.26 דוגמאות לשינוי משתנה

דוגמה 1. חישוב $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (שטח רבע מעגל היחידה).
נגדיר $x=\sin t$ על $[0,\frac{\pi}{2}]$. אז:

- $dx=\cos t\,dt$
- $x=0\Rightarrow t=0$
- $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

פתרון:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

משתמשים בזהות $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$:

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right) = \frac{\pi}{4}$$

טעות נפוצה בשינוי משתנה.
בניסיון לחשב $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ עם $g(x) = \frac{1}{x}$:
הבעיה: הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$ **אינה מוגדרת** ב־$0 \in [-1,1]$!
יתרה מכך:

- $g([-1,0)) = (-\infty,-1]$
- $g((0,1]) = [1,+\infty)$

התחום והטווח אינם תואמים, ואין להפעיל את משפט שינוי המשתנה.
הפתרון הנכון: חישוב ישיר:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

דוגמה 2. חישוב $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.
משתמשים בזהות $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = [\tan x - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

10.27 משפט ערך הביניים לאינטגרלים

טענה 10.12 (משפט ערך הביניים לאינטגרלים). תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. אז **קיים** $\mu \in [\inf f, \sup f]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$$

יתר על כן: אם f **רציפה** אז **קיים** $c \in [a,b]$ כך ש:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)}$$

הוכחה (למקרה הרציף). נסמן $m = \inf f$, $M = \sup f$.
מחד:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

לכן:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \in [m,M]$$

אם f רציפה, לפי משפט ערך הביניים של ויירשטראס קיים $c \in [a,b]$ כך ש־$f(c) = \mu$. ■

פרשנות גאומטרית. הערך $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ הוא **הממוצע** של f על הקטע $[a,b]$.
המשפט אומר שקיימת נקודה c שבה ערך הפונקציה שווה בדיוק לממוצע.

10.28 משפט ערך הביניים הממושקל

טענה 10.13 (גרסה ממושקלת). תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות. נניח כי $g\geq 0$. אז **קיים** $\mu\in[\inf f,\sup f]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

יתר על כן: אם f **רציפה** אז **קיים** $c\in[a,b]$ כך ש:

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה. הוכיחו כי $\frac{2}{3\pi}\leq\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\pi}$.
פתרון: נגדיר $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$ על $[2\pi,3\pi]$.
שימו לב ש־$\sin x\geq 0$ בקטע $[2\pi,3\pi]$ (זה לא נכון! $\sin x\geq 0$ רק ב־$[2\pi,3\pi]$ אם $x\in[2\pi,3\pi]$... בעצם $\sin(2\pi)=0$, $\sin(3\pi)=0$, ובאמצע $\sin x$ עובר דרך ערכים חיוביים ושליליים).
תיקון: נשתמש בטענה 10.13 בקטע $[2\pi,3\pi]$ כאשר $g(x)=\sin x\geq 0$ עבור $x\in[2\pi,3\pi]$
(זה נכון כי הקטע $[2\pi,3\pi]$ מכסה בדיוק חצי מחזור שלם של סינוס מ־0 עד 0 דרך 1).
לפי טענה 10.13 קיים $c\in[2\pi,3\pi]$ כך ש:

$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

נחשב:

$$\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_{2\pi}^{3\pi} = -\cos(3\pi)+\cos(2\pi) = -(-1)+1 = 2$$

לכן:

$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{c}$$

כיוון ש־$c\in[2\pi,3\pi]$, מתקיים $\frac{1}{3\pi}\leq\frac{1}{c}\leq\frac{1}{2\pi}$, ומכאן:

$$\frac{2}{3\pi}\leq\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}$$

10.29 נוסחת רדוקציה

נוסחת רדוקציה. לכל $n \geq 2$:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x}$$

הוכחה. נכתוב:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$$

אינטגרציה בחלקים עם $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x \,\mathrm{d}x$:

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \,\mathrm{d}x, \quad v = -\cos x$$

$$= \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

הגבולות מתאפסים. משתמשים ב־$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$$

נסמן $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$:

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \quad \Rightarrow \quad nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

■

10.30 תרגילים

תרגיל 1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int_0^1 x \arctan x \,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \,\mathrm{d}x$ (השתמשו בנוסחת הרדוקציה)
3. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x$

תרגיל 2. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) \,\mathrm{d}x = f(a)$$

תרגיל 3. חשבון $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
רמז: פתחו את $\ln(1+x)$ לטור טיילור ושלבו איבר־איבר.

תרגיל 4. הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$:

1. אם f זוגית: $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
2. אם f אי־זוגית: $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

10.31 אינטגרלים לא אמיתיים ויישומים

יחידה זו עוסקת באינטגרלים לא אמיתיים (אינטגרלים עם גבולות אינסופיים או עם נקודות סינגולריות), מבחני התכנסות, ויישומים גאומטריים.

10.32 הגדרת אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

הגדרה 11.1 (אינטגרל לא אמיתי — גבול אינסופי). תהי $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה **אינטגרבילית מקומית** ב־$[a,+\infty)$.
נגדיר $F:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ על ידי:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{לכל} x\in[a,+\infty)$$

נאמר כי **האינטגרל הלא אמיתי** של f בקטע $[a,+\infty)$ **מתכנס** כאשר קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
במקרה זה נסמן:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

אם הגבול אינו קיים או אינו סופי — נאמר שהאינטגרל **מתבדר** (או לא מתכנס).

הערה 11.2. באופן דומה מגדירים אינטגרל לא אמיתי על קטעים מהצורה $(-\infty,a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

10.33 דוגמאות בסיסיות

דוגמה 1. $\int_0^{+\infty} \cos x \,\mathrm{d}x$ — **לא מתכנס.**
פתרון:

$$\int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t = \sin x$$

הגבול $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ אינו קיים (מתנדנד בין -1 ל־1).

דוגמה 2. $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \,\mathrm{d}x$ עבור $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
פתרון:

$$\int_0^x e^{\alpha t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)$$

הגבול ב־$x \to +\infty$ קיים וסופי **אם ורק אם** $\alpha < 0$.
במקרה זה:

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}(0-1) = -\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|}$$

דוגמה 3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.
פתרון:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \arctan x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

דוגמה חשובה — אינטגרל $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$.

- עבור $\alpha = 1$: $\int_1^x \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = \ln x \to +\infty$ — **מתבדר.**
- עבור $\alpha \neq 1$: $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$. הגבול קיים וסופי **אם ורק אם** $\alpha > 1$.

סיכום:

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x \text{ מתכנס } \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

10.34 אינטגרל לא אמיתי מסוג שני — סינגולריות

הגדרה 11.3 (אינטגרל לא אמיתי — סינגולריות בגבול). תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית מקומית ב־$[a,b)$.
נאמר כי **האינטגרל הלא אמיתי** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס** כאשר קיים וסופי הגבול:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

דוגמה 1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2$ — **מתכנס**.
פתרון: יש סינגולריות ב־$x=0$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[2\sqrt{x}]_\varepsilon^1=2-\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{\varepsilon}=2$$

דוגמה 2. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ — **מתבדר**.
פתרון:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[-\ln\varepsilon]=+\infty$$

דוגמה חשובה — אינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.
סיכום:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ מתכנס } \Leftrightarrow \alpha<1}$$

10.35 קריטריון קושי להתכנסות

קריטריון קושי. האינטגרל $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס** אם ורק אם:
לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\geq M$ כך שלכל $q>p>M$:

$$\left|\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

10.36 מבחני השוואה

מבחן ההשוואה. תהיינה $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות מקומית עם $0\le f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

1. אם $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס — אז $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
2. אם $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתבדר — אז $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ מתבדר.

מבחן ההשוואה הגבולי. תהיינה $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ אי־שליליות ואינטגרביליות מקומית. אם $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L\in(0,+\infty)$ — אז:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ מתכנס} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\text{מתכנס}$$

דוגמה. קבעו האם $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
פתרון: נשווה ל־$g(x)=\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1/x}=1\in(0,+\infty)$$

כיוון ש־$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ מתכנס ($\alpha=2>1$), גם $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ **מתכנס**.

10.37 התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

הגדרה 11.11 (התכנסות בהחלט). תהי $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית. נאמר כי האינטגרל $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס בהחלט** כאשר האינטגרל $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

טענה 11.12. אם האינטגרל **מתכנס בהחלט** אז הוא **מתכנס**.

הוכחה. מקריטריון קושי: לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך שלכל $q>p>M$:

$$\left|\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_p^q|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$$

לכן $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס. ■

הגדרה (התכנסות בתנאי). אינטגרל שמתכנס אך **לא** מתכנס בהחלט נקרא **מתכנס בתנאי**.

דוגמה. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ — **מתכנס בתנאי**.
(מוכיחים עם קריטריון דיריכלה; האינטגרל $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ מתבדר.)

10.38 קריטריון אבל וקריטריון דיריכלה

טענה 11.20 (קריטריון אבל). תהיינה $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. נניח כי:

1. f רציפה ו־$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
2. g מונוטונית וחסומה.

אז $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס**.

טענה 11.21 (קריטריון דיריכלה). תהיינה $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. נניח כי:

1. f רציפה ו־$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ **חסומה**.
2. g מונוטונית ו־$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

אז $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס**.

דוגמה — שימוש בקריטריון דיריכלה.
הוכיחו כי $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
פתרון: נגדיר $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

1. $F(x) = \int_1^x \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos x + \cos 1$ חסומה (ערכים בין $\cos 1 - 1$ ל־$\cos 1 + 1$).
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ יורדת ו־$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

לפי קריטריון דיריכלה, האינטגרל מתכנס.

10.39 קשר בין טורים לאינטגרלים

טענה 11.19 (מבחן האינטגרל). תהי $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית, **אי־שלילית ויורדת**.
אז לכל $N\in\mathbb{N}_+$:

$$\sum_{n=1}^{N} f(a+n) \le \int_a^{a+N} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=0}^{N-1} f(a+n)$$

יתר על כן: האינטגרל $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס **אם ורק אם** הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$ מתכנס.

יישום — הטור ההרמוני.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ והאינטגרל $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ קשורים.
מהמשפט:

$$\ln(N+1) \le \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \le 1+\ln N$$

לכן $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sim\ln N$ ובפרט הטור **מתבדר**.

10.40 יישומים גאומטריים

שטח בין עקומות. עבור $g\ge f$ ב־$[a,b]$, השטח בין $y=f(x)$ ל־$y=g(x)$ הוא:

$$\boxed{S=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה. שטח בין $y=x^2$ ו־$y=x$ ב־$[0,1]$.
פתרון: בקטע זה $x\ge x^2$, לכן:

$$S=\int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

נפח גוף סיבוב (שיטת הדיסקים). סיבוב השטח מתחת ל־$y=f(x)$ סביב ציר x:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה. נפח כדור ברדיוס R.
מסובבים את $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (חצי מעגל) סביב ציר x:

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)=\pi\cdot\frac{2R^3}{3}+\pi\cdot\frac{2R^3}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}$$

אורך קשת. לעקומה $y=f(x)$ עם f' רציפה:

$$\boxed{L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה. אורך הקשת $y=\frac{x^{3/2}}{3}$ ב־$[0,4]$.
פתרון:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x},\quad 1+[f'(x)]^2=1+\frac{x}{4}=\frac{4+x}{4}$$

$$L=\int_0^4\sqrt{\frac{4+x}{4}}\,\mathrm{d}x=\int_0^4\frac{\sqrt{4+x}}{2}\,\mathrm{d}x$$

נציב $u=4+x$:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}[(4+x)^{3/2}]_0^4=\frac{1}{3}(8^{3/2}-4^{3/2})=\frac{1}{3}(16\sqrt{2}-8)=\frac{8(2\sqrt{2}-1)}{3}$$

שטח פנים של גוף סיבוב. סיבוב הקשת $y=f(x)$ סביב ציר x:

$$\boxed{A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}$$

10.41 תרגילים

תרגיל 1. קבעו התכנסות:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x$

תרגיל 2. חשבו את נפח הגוף הנוצר מסיבוב $y = e^{-x}$ סביב ציר x ב־$[0, +\infty)$.

תרגיל 3. תהי $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ אי־שלילית ואינטגרבילית מקומית. הוכיחו כי אם $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס וגם קיים $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, אז הגבול שווה 0.

תרגיל 4. תהי $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ אי־שלילית, יורדת ואינטגרבילית מקומית. הגדירו:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

הוכיחו כי $\{a_n\}$ מתכנסת.

הערה: זו הדרך להגדיר את **קבוע אוילר־מסקרוני** $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0.5772$.

תרגיל 5. הוכיחו כי:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

רמז: זהו האינטגרל הגאוסיאני. ההוכחה המלאה משתמשת באינטגרל כפול.