

# Calculus 1B

Complete Course Summary

Orin Levi

## חשבון אינפיניטסימלי 1ב

סיכום מקיף לקורס

אוניברסיטת תל אביב

מדעי המחשב



# תוכן העניינים

<b>7</b>	<b>I תורת הקבוצות והמספרים המשיים</b>	
<b>9</b>	<b>1 השפה המתמטית ותורת הקבוצות</b>	<b>1</b>
9	<b>1.1 מושגים בסיסיים</b>	1.1
9	<b>1.2 פעולות על קבוצות</b>	1.2
10	<b>1.3 פונקציות</b>	1.3
11	<b>1.4 קבוצות סופיות ואינסופיות</b>	1.4
12	<b>1.5 תרגילים</b>	1.5
<b>13</b>	<b>2 תוכנות�数ים המשיים</b>	<b>2</b>
13	<b>2.1 ערך מוחלט</b>	2.1
14	<b>2.2 חסמים</b>	2.2
14	<b>2.3 סופריםום ואיינפריםום</b>	2.3
15	<b>2.4 אקסימיות השלמות</b>	2.4
16	<b>2.5 תוכנות נוספות</b>	2.5
17	<b>2.6 ערך שלם</b>	2.6
17	<b>2.7 תרגילים</b>	2.7
<b>19</b>	<b>II סדרות וטורים</b>	<b>3</b>
<b>21</b>	<b>3 סדרות</b>	<b>3</b>
21	<b>3.1 מושגים בסיסיים</b>	3.1
21	<b>3.2 גבול של סדרה</b>	3.2
23	<b>3.3 אריתמטיקה של גבולות</b>	3.3
24	<b>3.4 משפט המונוטוניות</b>	3.4
24	<b>3.5 גבולות שימושיים</b>	3.5
25	<b>3.6 המספר <math>e</math></b>	3.6
25	<b>3.7 סדרות קושי</b>	3.7
26	<b>3.8 גבולות חלקיים, <math>\liminf</math> ו-<math>\limsup</math></b>	3.8
26	<b>3.9 תרגילים</b>	3.9
<b>29</b>	<b>4 טורים</b>	<b>4</b>
29	<b>4.1 הגדרות ותוכנות בסיסיות</b>	4.1
30	<b>4.2 מבחני התכנסות לטורים איזשליילים</b>	4.2
30	<b>4.2.1 מבחן ההשוואה</b>	4.2.1
31	<b>4.2.2 מבחן ההשוואה הגבולי</b>	4.2.2
31	<b>4.2.3 מבחן המנה (דلمבר)</b>	4.2.3
32	<b>4.2.4 מבחן השורש (קושי)</b>	4.2.4
32	<b>4.2.5 מבחן האינטגרל</b>	4.2.5

33 . . . . .	מבחן התכנסות לטורים כלליים	4.3
33 . . . . .	התכנסות בהחלה והתכנסות בתנאי	4.3.1
33 . . . . .	מבחן לייבנץ	4.3.2
34 . . . . .	מבחן דיריכלה ומבחן אבל	4.3.3
35 . . . . .	תרגילים	4.4

**37****III גבולות ורציפות**

<b>39</b>	<b>פונקציות במשתנה אחד</b>	<b>5</b>
39 . . . . .	פונקציות ממשיות	5.1
39 . . . . .	פונקציות אלמנטריות	5.2
40 . . . . .	פונקציות מיוחדות	5.3
40 . . . . .	תרגילים	5.4

<b>43</b>	<b>גבולות של פונקציות</b>	<b>6</b>
43 . . . . .	הגדרת גבול	6.1
44 . . . . .	ארכיטטיקה של גבולות	6.2
44 . . . . .	גבולות חד-צדדיים	6.3
44 . . . . .	גבולות באינסוף	6.4
44 . . . . .	גבולות חשובים	6.5
45 . . . . .	תרגילים	6.6

<b>47</b>	<b>רציפות</b>	<b>7</b>
47 . . . . .	הגדרת רציפות	7.1
47 . . . . .	ארכיטטיקה של פונקציות רציפות	7.2
48 . . . . .	משפט ערך הביניים	7.3
48 . . . . .	משפט ויירשטראס	7.4
49 . . . . .	רציפות במידה שווה	7.5
50 . . . . .	פונקציות הפיכות	7.6
50 . . . . .	תרגילים	7.7

**53****IV גזירות**

<b>55</b>	<b>גזירות</b>	<b>8</b>
55 . . . . .	הגדרת הנגזרת	8.1
55 . . . . .	כללי גזירה	8.2
56 . . . . .	טבלת נגזרות	8.3
56 . . . . .	משפטי ערך הביניים	8.4
57 . . . . .	כלל לופיטל	8.5
58 . . . . .	פולינום טילור	8.6
59 . . . . .	חקירת פונקציות	8.7
60 . . . . .	תרגילים	8.8

**61****V אינטגרל רימן**

<b>63</b>	<b>1: פונקציות קדומות וAINTEGRAL לא מסויים</b>	<b>9</b>
63	מבוא	9.1
63	פונקציה קדומה	9.2
63	הגדרה בסיסית	9.2.1
63	יחידות הקדומה	9.2.2
64	תכונת דרכו וקיים קדומה	9.3
64	סימון האינטגרל הלא מסויים	9.4
65	טבלת אינטגרלים בסיסיים	9.5
65	AINTEGRAL בחלוקת	9.6
66	שינוי משתנה	9.7
66	9.7.1 שינוי משתנה -- גרסה ראשונה	
67	9.7.2 שינוי משתנה -- גרסה שנייה	
67	דוגמאות נוספת	9.8
68	תרגילים	9.9
<b>69</b>	<b>2: אינטגרל מסויים וסקומי רימן</b>	<b>10</b>
69	מבוא	10.1
69	חלוקת ועידונים	10.2
69	סקומי דרכו	10.3
70	הAINTEGRAL העליון והתחתון	10.4
71	AINTEGRAL לфи דרכו	10.5
71	דוגמאות לאינטגרביליות	10.6
72	משפטי אינטגרביליות	10.7
73	תכונות האינטגרל המסוים	10.8
74	פונקציית רימן	10.9
74	תרגילים	10.10
75	משפט היסוד של החדו"א	10.11
75	AINTEGRAL מוקנית	10.12
75	AINTEGRAL לא מסויים	10.13
76	רציפות האינטגרל הלא מסויים	10.14
76	משפט היסודי הראשון	10.15
77	משפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי	10.16
78	נוסחת ניוטון-לייבניץ (משפט היסודי השני)	10.17
78	דוגמאות לחישוב אינטגרלים	10.18
79	גירה של אינטגרל עם גבולות משתנים	10.19
80	הערות חשובות	10.20
80	תרגילים	10.21
81	שיטות אינטגרציה לאינטגרל מסויים	10.22
81	AINTEGRAL בחלוקת לאינטגרל מסויים	10.23
82	שינוי משתנה -- גרסה ראשונה	10.24
82	שינוי משתנה -- גרסה שנייה	10.25
83	דוגמאות לשינוי משתנה	10.26
84	משפט ערך הביניים לאינטגרלים	10.27
85	משפט ערך הביניים הממושך	10.28
85	נוסחת רדוקציה	10.29
86	תרגילים	10.30

87	10.31 אינטגרלים לא אמיתיים ויישומים .....
87	10.32 הגדרת אינטגרל לא אמיתי מסווג ראשון .....
87	10.33 דוגמאות בסיסיות .....
88	10.34 אינטגרל לא אמיתי מסווג שני – סינגולריות .....
89	10.35 קритריון קושי לה收敛ות .....
89	10.36 מבחני השוואה .....
90	10.37 התכנסות בהחלטה והתכנסות בתנאי .....
91	10.38 קритריון אבל וkritirion דיריכלה .....
91	10.39 קשר בין טורים לאינטגרלים .....
92	10.40 יישומים גאומטריים .....
93	10.41 תרגילים .....

## **חלק I**

### **תורת הקבוצות והמספריים הממשיים**



# פרק 1

## השפה המתמטית ותורת הקבוצות

### 1.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 1.1 (קבוצה). קבוצה היא אוסף של אובייקטים הנקראים **איברים**. אם  $x$  הוא איבר בקבוצה  $A$ , נכתב  $x \in A$ . אם  $x$  אינו איבר ב- $A$ , נכתב  $x \notin A$ .

הגדרה 1.2 (תת-קבוצה). קבוצה  $A$  נקראת **תת-קבוצה** של  $B$  (ונסמן  $A \subseteq B$ ) אם כל איבר של  $A$  הוא גם איבר של  $B$ :

$$A \subseteq B \iff \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

הגדרה 1.3 (שוויון קבוצות). שתי קבוצות  $A$  ו- $B$  **שווות** (ונסמן  $A = B$ ) אם ורק אם  $.B \subseteq A$  וגם  $A \subseteq B$ .

#### קבוצות מספרים חשובות:

□ – המספרים הטבעיים  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

□ – המספרים השלמים  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

□ – המספרים הרציונליים  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

□ – המספרים ממשיים  $\mathbb{R}$

### 1.2 פעולות על קבוצות

**הגדרה 1.4 (פעולות קבוצתיות).** יהיו  $A, B$  קבוצות.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ או } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ וגם } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ וגם } x \notin B\}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

**טענה 1.5 (חוקי דה-מורגן).** יהיו  $A, B, C$  קבוצות. אז:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B) .1$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B) .2$$

הוכחה (סעיף 1).

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cup B) &\iff x \in C \text{ וגם } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in C \text{ וגם } (x \notin A \text{ וגם } x \notin B) \\ &\iff (x \in C \text{ וגם } x \notin A) \text{ וגם } (x \in C \text{ וגם } x \notin B) \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \blacksquare \end{aligned}$$

### 1.3 פונקציות

**הגדרה 1.6 (פונקציה).** פונקציה  $f$  מקבוצה  $A$  לקבוצה  $B$  (ונסמן  $f : A \rightarrow B$ ) היא התאמה שמשייכת לכל איבר  $x \in A$  איבר ייחיד  $f(x) \in B$ .

□ נקראת **תחום ההגדרה** (Domain) של  $f$

□ נקראת **הטוח** (Codomain) של  $f$

□ **התמונה** של  $f$  היא  $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$

**הגדרה 1.7 (סוגי פונקציות).** תהי  $f : A \rightarrow B$  פונקציה.

1.  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  אם לכל  $x_1, x_2 \in A$

2.  $f(x) = y$  אם לכל  $x \in A$ ,  $y \in B$ ,  $\text{Im}(f) = B$

3.  $f$  נקראת **הפיכה** (חח"ע ועל) אם היא חח"ע וגם על

**טענה 1.8.** פונקציה  $f : A \rightarrow B$  הפיכה אם ורק אם קיימת פונקציה  $g : B \rightarrow A$  כך  $g \circ f = \text{Id}_B$  ו גם  $f \circ g = \text{Id}_A$ . ב מקרה זה  $g$  ייחידה ונקראת **הפונקציה ההופכית** של  $f$ , ו מסומנת  $f^{-1}$ .

**דוגמה 1.** הפונקציה  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת  $f(x) = x^2$  **אייה חח"ע** כי  $f(1) = f(-1) = 1$ . אבל ה策ום  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  הוא חח"ע ועל, ולכן הפיך. הפונקציה ההופכית היא  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

## 1.4 קבוצות סופיות ואיינסופיות

**הגדרה 1.9.** קבוצה  $A$  נקראת **סופית** אם היא ריקה או קיים  $\mathbb{N} \in n$  כך שקיים התאמה חח"ע ועל בין  $A$  לבין  $\{1, 2, \dots, n\}$ . קבוצה שאינה סופית נקראת **איןסופית**.

**הגדרה 1.10 (עוצמה).** שתי קבוצות  $A$  ו- $B$  הן **שווות עוצמה** (ונסמן  $|A| = |B|$ ) אם קיימת פונקציה חח"ע ועל  $f : A \rightarrow B$ .

**הגדרה 1.11 (קבוצה בת מנייה).** קבוצה  $A$  נקראת **בת מנייה** אם היא סופית או שווה עוצמה  $\mathbb{N}$ . קבוצה אינסופית שווה עוצמה ל- $\mathbb{N}$  נקראת **בת מנייה איןסופית**.

### טענה 1.12.

1.  $\mathbb{Z}$  בת מנייה.
2.  $\mathbb{Q}$  בת מנייה.
3.  $\mathbb{R}$  **אייה** בת מנייה (משפט קנטור).

**הוכחה (סעיף 1).** נגדיר  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} : f$  על ידי:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{זוגי} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{אי-זוגי} \end{cases}$$

זו התאמה חח"ע ועל:  $0 \mapsto 0, 1 \mapsto -1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto -2, 4 \mapsto 2, \dots$

## 1.5 תרגילים

**תרגיל 1.** הוכיחו כי לכל קבוצות  $A, B, C$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**פתרון:**

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ וגם } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ וגם } (x \in B \text{ או } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ וגם } x \in B) \text{ או } (x \in A \text{ וגם } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**תרגיל 2.** תהי  $f : A \rightarrow B$  פונקציה. הוכיחו:

1.  $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D) : C, D \subseteq A$

2. על אם ורק אם לכל  $E \subseteq B$

**פתרון (סעיף 1, כיוון אחד):** נניח  $f$  חד-ע. יהי  $.C, D \subseteq A$  נניח  $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ .

**( $\supseteq$ )** תמיד מתקיים  $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$  כי  $f(c) = y = f(d)$   $\forall c \in C, d \in D$ ,  $\exists y \in f(C) \cap f(D)$ .

**( $\subseteq$ )** כיוון ש- $f$  חד-ע,  $\forall y \in f(C \cap D)$   $\exists !c \in C \cap D$   $\exists !d \in D$   $f(c) = f(d) = y$ .

לכן  $c = d$ ,  $c \in C \cap D$ ,  $c \in D$ ,  $\therefore c \in C \cap D$ .

**תרגיל 3.** הוכיחו כי  $\mathbb{Q}$  בת מנייה.

**פתרון:** נגדיר  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$  על ידי  $f(p, q) = \frac{p}{q}$ .

$f$  היא על (כל רצינלי הואמנה של שלם וטובי חיבור).

כיוון ש- $\mathbb{Z}$  בת מנייה ו- $\mathbb{N}_+$  בת מנייה, גם  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$  בת מנייה (מכפלה של בנות מנייה היא בת מנייה).

תמונה של קבוצה בת מנייה היא בת מנייה, לכן  $\text{Im}(f) = \mathbb{Q}$  בת מנייה. ■

## פרק 2

### תכונות המספרים ממשיים

#### 2.1 ערך מוחלט

הגדרה 2.1 (ערך מוחלט). לכל  $x \in \mathbb{R}$  נגדיר את הערך המוחלט של  $x$ :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

טענה 2.2 (תכונות ערך מוחלט). לכל  $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x| = 0 \iff x = 0 \quad 1.$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| \quad 2.$$

$$(y \neq 0) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad 3.$$

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad 4.$$

5. אידשוינו המשולש:

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad 6. \text{ אידשוינו המשולש ההפוך:}$$

הוכחת אידשוינו המשולש. מתקיימים  $-|x| \leq x \leq |x|$  וגם  $-|y| \leq y \leq |y|$ .

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\therefore |x + y| \leq |x| + |y|$$



**דוגמה.** הוכיחו כי לכל  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

**פתרון:** נציב  $b = y - z$ ,  $a = x - y$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \implies |(x-y) + (y-z)| \leq |x-y| + |y-z| \implies |x-z| \leq |x-y| + |y-z| \blacksquare$$

## 2.2 חסמים

**הגדרה 2.3 (חסם).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה לא ריקה.

ן.  $a \leq M \in \mathbb{R}$  נקרא **חסם מלעיל** של  $A$  אם לכל  $a \in A$  מתקיים

.  $a \geq m \in \mathbb{R}$  נקרא **חסם מלרע** של  $A$  אם לכל  $a \in A$  מתקיים

קבוצה נקראת **חסומה מלעיל/מלרע** אם יש לה חסם מלעיל/מלרע. קבוצה **חסומה** אם היא חסומה גם מלעיל וגם מלרע.

**הגדרה 2.4 (מקסימום ומינימום).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה לא ריקה.

ן.  $M \in A$  נקרא **מקסימום** של  $A$  (ונסמן  $M = \max A$ ) אם  $M$  חסם מלעיל של  $A$ .

.  $m \in A$  נקרא **מינימום** של  $A$  (ונסמן  $m = \min A$ ) אם  $m$  חסם מלרע של  $A$ .

**הערה.** לא לכל קבוצה יש מקסימום או מינימום!

**דוגמה:** לקבוצה  $(0, 1)$  אין מקסימום ואין מינימום.

## 2.3 סופרים וαιנפירים

**הגדרה 2.5 (סופרים).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל.  $s \in \mathbb{R}$  נקרא **סופרimum (חסם עליון מינימלי)** של  $A$  (ונסמן  $s = \sup A$ ) אם:

1.  $s$  חסם מלעיל של  $A$  (לכל  $a \in A$   $a \leq s$ )

2.  $s$  הוא החסם מלעיל הקטן ביותר: לכל  $0 > \varepsilon$  קיים  $a \in A$  כך ש- $\varepsilon - a > s$ .

**הדרה 2.6 (אינפימום).** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע. נקרא **אינפימום (חסם תחתון מקסימלי)** של  $A$  ונסמך  $t = \inf A$  אם:

1.  $t$  חסם מלרע של  $A$  (לכל  $a \in A$   $a \geq t$ )

2. הוא החסם מלרע **הגדול ביותר**: לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $a \in A$  כך ש- $\varepsilon + a < t$ .

**טענה 2.7 (אפיון הסופרים).**  $s = \sup A$  אם ורק אם מתקיימים שני התנאים:

1. לכל  $a \in A$   $a \leq s$

2. לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $a \in A$  כך ש- $s - \varepsilon < a$ .

**דוגמה 1.** מצאו  $\sup A$  ו- $\inf A$  עבור  $A = (0, 1]$

**פתרון:**

( $1 \in A$   $\max A = 1$   $\sup A = 1$ )  $\square$

( $\inf A = 0$  אבל  $\min A$  לא קיים כי  $0 \notin A$ )  $\square$

**הוכחה ש-**

1. חסם מלרע: לכל  $x > 0$  מתקיים  $x \in (0, 1]$ .

■  $.a < 0 + \varepsilon$ , נבחר  $a = \min(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}) \in A$  אז  $a < 0 + \varepsilon$ .

2. הוא החסם הגדול ביותר: לכל  $\varepsilon > 0$  נבחר  $a \in A$  כך ש- $s - \varepsilon < a$ .

**דוגמה 2.** מצאו  $\sup A$  עבור  $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$

**פתרון:** נטען  $\sup A = 1$ .

1. חסם מלעיל:  $\frac{n}{n+1} < 1$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

2. לכל  $\varepsilon > 0$ , נבחר  $n$  כך ש- $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$  (כלומר  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ ). אז:

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon \quad \blacksquare$$

## 2.4 אקסיומת השלמות

**אקסיומה 2.8 (אקסiomת השלמות).** לכל קבוצה  $A \subseteq \mathbb{R}$  לא ריקה וחסומה מלעיל קיים סופרים.

באופן שקול: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע קיים אינפימום.

**הערה חשובה.** אקסיומת השלמות היא מה שմבדיל את  $\mathbb{R}$  מ- $\mathbb{Q}$ !  
**דוגמה:** הקבוצה  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$  חסומה מלעיל ב- $\mathbb{Q}$  (למשל על ידי 2), אבל אין לה סופרימום ב- $\mathbb{Q}$ .  
 (הסופרימום היה צריך להיות  $\sqrt{2}$ , אבל  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .)

**משפט 2.9 (תכונת ארכימדס).** לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ , עם  $x > y$ , קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $y < nx$ .  
**באופן שקול:** לכל  $0 < \varepsilon$  קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

**הוכחה.** נניח בשילhouette שלכל  $n \in \mathbb{N}$ :  $nx \leq y$ .  
 אז הקבוצה  $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$  חסומה מלעיל (על ידי  $y$ ).  
 לפי אקסיומת השלמות, קיים  $s = \sup A$ .  
 כיון ש- $0 < x$ , מתקיים  $s - x < s$ , ולכן  $x - s < s$  אינו חסם מלעיל של  $A$ .  
 לכן קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $x - s < nx$ , כלומר  $s < (n+1)x$ .  
 אבל  $(n+1)x \in A$ , וזו סתירה לכך ש- $s$  חסם מלעיל של  $A$ . ■

**משפט 2.10 (כפיות הרציונליים).** בין כל שני ממשיים שונים קיים מספר רציונלי.  
 כלומר: לכל  $a, b \in \mathbb{R}$ , עם  $a < b$ , קיים  $q \in \mathbb{Q}$  כך ש- $a < q < b$ .

**הוכחה.** לפי תכונת ארכימדס, קיים  $n \in \mathbb{N}_+$  כך ש- $b - a < \frac{1}{n}$ , כלומר  $na < m = \lfloor na \rfloor + 1$  (המספר השלם הקטן ביותר גדול מ- $na$ ).  
 מצד אחד:  $na < m \leq na + 1$  ו- $\frac{m}{n} > a$ .  
 מצד שני:  $\frac{m}{n} \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$  ו- $q = \frac{m}{n}$  רציונלי. ■

## 2.5 תכונות נוספות

**טענה 2.11 (תכונות  $\sup$  ו- $\inf$ ).** יהיו  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  קבוצות לא ריקות וחסומות.

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} .1$$

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} .2$$

$$\inf A \geq \inf B \text{ ו-} \sup A \leq \sup B \text{ או } A \subseteq B \text{ אם } .3$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \text{ כאשר } \sup(A + B) = \sup A + \sup B .4$$

$$-A = \{-a : a \in A\} \text{ כאשר } \sup(-A) = -\inf A .5$$

**הוכחה (סעיף 4).** נסמן  $t = \sup B$ ,  $s = \sup A$ .  
**שלב 1:**  $s + t$  חסם מלעיל של  $A + B$ .  
 לכל  $a + b \leq s + t$ :  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $a \leq s$  ו-  $b \leq t$ , לכן  $t - b \geq a$ .  
**שלב 2:**  $s + t$  הוא החסם הקטן ביותר.  
 יהי  $\varepsilon > 0$ . קיימים  $b \in B$ ,  $a \in A$  כך ש-  $b - \frac{\varepsilon}{2} > s$  ו-  $a - \frac{\varepsilon}{2} > t$ .  
 ■  $a + b > s + t - \varepsilon$ , והאיבר  $a + b$  יותר גדול מ-  $s + t - \varepsilon$ .

## 2.6 ערך שלם

**הגדרה 2.12 (פונקציית הערך שלם).** לכל  $x \in \mathbb{R}$ , **הערך שלם** (או **פונקציית הרצפה**)  $[x]$  הוא המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל-  $x$ :

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

**טענה 2.13 (תכונות ערך שלם).** לכל  $x \in \mathbb{R}$

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad 1.$$

$$x - 1 < [x] \leq x \quad 2.$$

$$[x] = x \iff x \in \mathbb{Z} \quad 3.$$

## 2.7 תרגילים

**תרגיל 1.** הוכיחו כי לכל קבוצה לא ריקה  $A \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\sup A = -\inf(-A)$$

**פתרון:** נסמן  $t = \inf(-A)$  ו-  $s = \sup A$ .

**צ"ל:**  $s = -t$ .

$t$  חסם מלרע של  $-A$ : לכל  $-a \in -A$ ,  $-a \geq t$  (כלומר  $a \in A$  מתקיים  $t \geq -a$ ).

לכן  $-t$  חסם מלעיל של  $A$ , ומכאן  $-t \leq s$ .

באופן דומה (או מסימטריה):  $-s \leq t$ , כלומר  $t \leq -s$ .

■  $s = -t$ .

**תרגיל 2.** תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  לא ריקה וחסומה. הוכיחו כי אם  $\sup A \notin A$  אז קיימת סדרה  $(a_n)$  ב- $A$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$ .

**פתרון:** נסמן  $s = \sup A$ . לכל  $n \in \mathbb{N}_+$ , לפי אפיון הסופרימום, קיימים  $a_n \in A$  כך ש- $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$

(האי-שוויון  $s \leq a_n < s - \frac{1}{n}$  חסם מלעיל, והאי-שוויון  $a_n < s$  נובע מכיוון  $s \notin A$ ).  
לפי כלל הסנדוויץ':  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ . ■

**תרגיל 3.** מצאו  $\sup A$  ו- $\inf A$  עבור:

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

**פתרון:** נפרק למקרים:

□  $n$  זוגי:  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 0$

□  $n$  אי-זוגי:  $a_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1-n}{n^2}$

עבור 1:  $a_1 = -1 + 1 = 0$

עבור 2:  $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

עבור  $n$  אי-זוגי:  $a_n = \frac{1-n}{n^2} < 0$  : $\geq 3$

**מקסימום:**  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a_2 = \frac{3}{4}$  הוא האיבר הגדול ביותר (בודקים שלכל  $n \geq 2$  זוגי:  $a_n < a_2$ ).

לכן  $\sup A = \max A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

**אינפימום:** עבור  $n$  אי-זוגי גדול,  $a_n = \frac{1-n}{n^2} \rightarrow 0^-$

המינימום הוא  $a_3 = \frac{1-3}{9} = -\frac{2}{9}$

לכן  $\inf A = \min A = -\frac{2}{9}$

## **חלק II**

### **סזרות וטורים**



# פרק 3

## סדרות

### 3.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 3.1 (סדרה). סדרה (של מספרים ממשיים) היא פונקציה  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
במקום  $a(n)$  נכתוב  $a_n$  ונסמן את הסדרה ב-  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  או  $(a_n)$ .

הגדרה 3.2 (חסימות). סדרה  $(a_n)$  נקראת:

- **חסומה מלעיל** אם קיים  $M \in \mathbb{R}$  כך שכל  $n$ :  $a_n \leq M$
- **חסומה מרע** אם קיים  $m \in \mathbb{R}$  כך שכל  $n$ :  $a_n \geq m$
- **חסומה** אם היא חסומה מלועל ומרע (ש@a: קיים  $0 < M < M'$  כך  $|a_n| \leq M'$  לכל  $n$ )

הגדרה 3.3 (מוניוניות). סדרה  $(a_n)$  נקראת:

- **עולה (מוניונית)**:  $a_n \leq a_{n+1}$  לכל  $n$
- **עולה ממש**:  $a_n < a_{n+1}$  לכל  $n$
- **יורדת (מוניונית)**:  $a_n \geq a_{n+1}$  לכל  $n$
- **יורדת ממש**:  $a_n > a_{n+1}$  לכל  $n$

### 3.2 גבול של סדרה

הגדרה 3.4 (גבול של סדרה). יהיו  $L \in \mathbb{R}$ . נאמר כי הסדרה  $(a_n)$  **מתכנסת ל-**  $L$  (או  $L$  הוא **גבול** הסדרה) ונכתב  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  או  $a_n \rightarrow L$ , אם:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon$$

סדרה שאינה מתכנסת נקראת **מתבדרת**.

**פירוש אינטואיטיבי.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  אם לכל "סביבה" של  $L$  (קטע  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ), כמעט כל איברי הסדרה נמצאים בסביבה זו (כלומר, רק מספר סופי של איברים מחוץ לה).

**טענה 3.5 (יחידות הגבול).** אם  $(a_n)$  מתכנסת, אז הגבול שלה יחיד.

הוכחה. נניח  $a_n \rightarrow L$  ווגם  $a_n \rightarrow L'$  עם  $L \neq L'$ . נבחר  $0 < \varepsilon = \frac{|L-L'|}{2}$ .  
 קיים  $N_1$  כך  $\forall n > N_1$   $|a_n - L| < \varepsilon$ .  
 קיים  $N_2$  כך  $\forall n > N_2$   $|a_n - L'| < \varepsilon$ .  
 עבור  $n > \max(N_1, N_2)$

$$|L - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |L - L'|$$

סתירה! ■

**טענה 3.6 (סדרה מתבננת חסומה).** כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה. תהי  $|a_n - L| < 1$ . עבור  $n > N$ , קיים  $N$  כך  $\forall n > N$   $|a_n| < |L| + 1$ .  
 נגיד  $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, |L| + 1\}$ .  
 אז  $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . ■

**דוגמה 1.** הוכחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**פתרון:** יהי  $\varepsilon > 0$ . צ"ל: קיים  $N$  כך  $\forall n > N$   $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ .  
 נבחר  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ .  
 לכל  $n > N$ , שכן  $\varepsilon < \frac{1}{n}$ :  
 ■

**דוגמה 2.** הוכחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ .

**פתרון:**

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

יהי  $\varepsilon > 0$ . נבחר  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ .  
 ■  $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > N$

### 3.3 ארכיטמטיקה של גבולות

**משפט 3.7 (אריתמטיקה של גבולות).** יהיו  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  סדרות מתכנסות עם  $L$  ו- $M$ . כלומר  $a_n \rightarrow L$  ו- $b_n \rightarrow M$ .

א.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M \quad .1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = L - M \quad .2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M \quad .3$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ לכל } \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot L \quad .4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M} \text{ אם } M \neq 0 \quad .5$$

הוכחה (מכפלה).

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - a_n M + a_n M - LM| \leq |a_n||b_n - M| + |M||a_n - L|$$

כיוון ש- $(a_n)$  מתכנסת, היא חסומה: קיים  $K$  כך ש- $a_n \leq K$  לכל  $n$ .

יהי  $\varepsilon > 0$ . קיים  $N_1$  כך שלכל  $n > N_1$

$|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2K}$  :  
כך שלכל  $n > N_2$

לכל  $n > \max(N_1, N_2)$

$$|a_n b_n - LM| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |M| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

**משפט 3.8 (ככל הסנדוויץ').** יהיו  $(c_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(a_n)$  סדרות. אם:

$$\text{לכל } n \text{ גדול מספיק } a_n \leq b_n \leq c_n \quad .1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \quad .2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \quad \text{או}$$

הוכחה. יהי  $\varepsilon > 0$ . קיים  $N_1$  כך שלכל  $n > N_1$ ,  $|a_n - L| < \varepsilon$ , כלומר  $a_n < L + \varepsilon$ .

קיים  $N_2$  כך שלכל  $n > N_2$ ,  $|c_n - L| < \varepsilon$ , כלומר  $c_n > L - \varepsilon$ .

קיים  $N_3$  כך שלכל  $n > N_3$ ,  $a_n \leq b_n \leq c_n$ .

לכל  $n > \max(N_1, N_2, N_3)$

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

$$\blacksquare \quad \text{לכן } |b_n - L| < \varepsilon$$

**דוגמה.** חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ .  
**פתרון:**  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ , לכן  $-1 \leq \sin n \leq 1$ .  
 ■  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ , לפי כלל הסנדוויץ':  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{n} \right) = 0$

## 3.4 משפט המונוטוניות

**משפט 3.9** (התכונות סדרה מונוטונית חסומה).

1. סדרה עולה וחסומה מלעיל מתכנסת, וגבולה הוא  $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .
2. סדרה יורדת וחסומה מרעל מתכנסת, וגבולה הוא  $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

**הוכחה (סעיף 1).** תהי  $(a_n)$  עולה וחסומה מלועל. נגידר  $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  (קיים לפי אקסיומות השלמות).  
 יהי  $\varepsilon > 0$ . לפי אפיוון הסופרים, קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך ש-  $a_N > L - \varepsilon$ .  
 כיון שהסדרה עולה, לכל  $n > N$ :  $a_n > L - \varepsilon$ .  
 וכיון ש-  $L$  חסם מלועל:  $a_n \leq L < L + \varepsilon$ .  
 ■  $|a_n - L| < \varepsilon$  לכל  $n > N$ .

## 3.5 גבולות שימושיים

**טענה 3.10** (גבולות חשובים).

$$k > 0 \text{ לכל } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad 2.$$

$$a > 0 \text{ לכל } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad 3.$$

$$|q| < 1 \text{ לכל } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad 4.$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ לכל } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad 5.$$

$$a > 1 \text{ ו- } k \in \mathbb{N} \text{ לכל } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad 6.$$

**הוכחה (1).**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . נכתוב  $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$  כאשר  $h_n \geq 0$  (כי  $1 + \sqrt[n]{n} \geq 1$  לכל  $n \geq 1$ ).  
 אז  $n = (1 + h_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} h_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$  (מאי-שוויון ברנולי המורחב).  
 לכן  $0 \leq h_n \leq \sqrt[n]{\frac{2}{n}} \rightarrow 0$ , ומכאן  $h_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$ .  
 ■  $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \rightarrow 1$ , שכן  $h_n \rightarrow 0$ .

## 3.6 המספר $e$

**משפט 3.11.** הסדרה  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  מתכנסת. גבולה מוגדר כ-**המספר  $e$** :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\dots$$

הוכחה (רעיון). מראים ש- $(a_n)$  עולה וחסומה מלעיל (על ידי 3).

עליה: משתמשים באידשוין בין מוצע חשבוני לניאומטרי.

חסומה:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$  לכל  $n$ . ■

**טענה 3.12.** מתקיים גם:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

ובאופן כללי, לכל סדרה  $\infty \rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

## 3.7 סדרות קושי

**הגדרה 3.13 (סדרת קושי).** סדרה  $(a_n)$  נקראת **סדרת קושי** אם:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

**משפט 3.14 (קritisiron קושי להתכנסות).** סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

הוכחה ( $\Rightarrow$ ). תהי  $\varepsilon > 0$ . יהיו  $a_n \rightarrow L$ . קיימים  $N$  כך שלכל  $n > N$  :

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} : n > N$$

לכל  $m, n > N$

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad ■$$

### 3.8 גבולות חלקיים, $\liminf$ ו- $\limsup$

**הגדרה 3.15 (תת-סדרה).** תת-סדרה של  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  היא סדרה מהצורה  $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$  כאשר  $n_0 < n_1 < \dots < n_2 < \dots$  סדרה עולה ממש של אינדקסים.

**הגדרה 3.16 (גבול חלקי).** נקרא **גבול חלקי** של  $(a_n)$  אם קיימת תת-סדרה  $(a_{n_k})$  כך  $a_{n_k} \rightarrow L$ .

**משפט 3.17 (בולצאנדו-וירשטראס).** לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

**הגדרה 3.18 (גבול החלקיים).** תהי  $(a_n)$  סדרה חסומה.  $\liminf a_n = \limsup a_n$  אם ורק אם:

הו **גבול החלקי הגדול ביותר** של  $(a_n)$ .  $\limsup a_n = \liminf a_n$  אם ורק אם:

הו **גבול החלקי הקטן ביותר** של  $(a_n)$ .  $\liminf a_n = \limsup a_n$  אם ורק אם:

**טענה 3.19 (אפיון).**  $L = \limsup a_n = \liminf a_n$  אם ורק אם:

1. לכל  $0 > \varepsilon$  קיימים אינדקסים  $n$  כך  $a_n > L - \varepsilon$ .

2. לכל  $0 > \varepsilon$  קיימים רק מספר סופי של אינדקסים  $n$  כך  $a_n > L + \varepsilon$ .

**טענה 3.20.** סדרה חסומה  $(a_n)$  מתכנסת אם ורק אם  $\limsup a_n = \liminf a_n$  במקרה זה  $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$ .

### 3.9 תרגילים

**תרגיל 1.** חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n-1}{5n^2-n+2}$  פתרון:

$$\frac{2n^2+3n-1}{5n^2-n+2} = \frac{n^2(2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2})}{n^2(5 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2})} = \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} \rightarrow \frac{2 + 0 - 0}{5 - 0 + 0} = \frac{2}{5} \quad \blacksquare$$

**תרגיל 2.** הוכיחו כי הסדרה  $a_n = \frac{n!}{n^n}$  מתכנסת ומצאו את גבולה.

**פתרון:** נבדוק מונוטוניות:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

עבור  $n$  גדול מספיק:  $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1$  (כי  $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < 1$ ).

לכן הסדרה יורדת (מן- $n$  מסוים). היא גם חסומה מלרע (על ידי 0).

לכן מתכנסת. נסמן  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$\blacksquare .L = L(1 - \frac{1}{e}) = 0, \text{ לכן } L = L \cdot \frac{1}{e}$$

**תרגיל 3.** חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

**פתרון:**

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2 \rightarrow e^2 \quad \blacksquare$$

**תרגיל 4.** תהי  $(a_n)$  סדרה המקיימת  $a_1 = 2$  עם

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

**פתרון: שלב 1:**  $a_n > 0$  לכל  $n$  (באינדוקציה).

**שלב 2:**  $a_n \geq \sqrt{2}$  לכל  $n \geq 2$

$$\text{AM-GM: } a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \geq \sqrt{a_n^2 \cdot 2} = a_n\sqrt{2}$$

**שלב 3:** הסדרה יורדת (מן- $n=2$ )

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 2 - 2a_n^2}{2a_n} = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} \leq 0 \quad (\text{כי } a_n \geq \sqrt{2})$$

**שלב 4:** הסדרה יורדת וחסומה מלרע, לכן מתכנסת.

$$\text{נסמן } L = \sqrt{2}, L^2 = 2, 2L = L + \frac{2}{L}, L = \frac{1}{2}(L + \frac{2}{L}), \text{ לכן } L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$





## פרק 4

### טורים

#### 4.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

**הגדרה 4.1 (טור).** יהיו  $a_1, a_2, a_3, \dots$  סדרה. הטור  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  הוא הביטוי הפורמלי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .  
סכום החלקי ה- $N$ -י הוא  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N$ .

**הגדרה 4.2 (התכנסות טור).** הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים  $(S_N)$  מתכנסת.  
במקרה זה, סכום הטור הוא  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ .  
טור שאינו מתכנס נקרא **מתבדר**.

**דוגמה 1 (טור הגיאומטרי).**  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$   
**פתרון:**  $S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$  (עבור  $q \neq 1$ ).  
הטור מתכנס אם ורק אם  $|q| < 1$ , ו אז:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

**דוגמה 2 (טור ההרמוני).**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$   
**הוכחה:**

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots = 1 + \frac{k}{2} \rightarrow \infty$$

**טענה 4.3 (תנאי הכרחי להתכנסות).** אם הטור  $\sum a_n$  מתכנס אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

הוכחה. אם  $S_{n-1} \rightarrow S$  מתכנס, אז  $S_n \rightarrow S = \sum a_n$   
 ■  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$  לכן

ازהרה! התנאי  $0 \rightarrow a_n$  הוי הכרחי אך לא מספיק.  
 דוגמה נגדית:  $0 \sum \frac{1}{n}$  אבל  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  מתבדר!

**טענה 4.4 (לינאריות).** אם  $\sum b_n$  ו-  $\sum a_n$  מתכנסים, אז:

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n .1$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ לכל } \sum(c \cdot a_n) = c \cdot \sum a_n .2$$

## 4.2 מבחני התכנסות לטורים איד-שליליים

**טענה 4.5 (התכנסות טור איד-שלילי).** טור  $a_n \geq 0$  מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

הוכחה. ( $S_N$ ) עולה (כי  $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N$ ).  
 ■ סדרה עולה מתכנסת אם ורק אם היא חסומה מלעיל.

### 4.2.1 מבחן ההשוואה

**משפט 4.6 ( מבחן ההשוואה).** יהיו  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  סדרות עם  $0 \leq a_n \leq b_n$  לכל  $n$ .

1. אם  $\sum b_n$  מתכנס אז  $\sum a_n$  מתכנס.

2. אם  $\sum a_n$  מתבדר אז  $\sum b_n$  מתבדר.

הוכחה (סעיף 1).  $S_N^{(a)} = \sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^N b_n = S_N^{(b)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$   
 ■ לכן  $(S_N^{(a)})$  חסומה מלעיל, ולכן  $\sum a_n$  מתכנס.

**דוגמה.** הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  מתכנס.  
**פתרון:** לכל  $2 \leq n \geq 1$   $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$  (טור טלסקופי).  
 $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{N} \rightarrow 1$   
לפי מבחן ההשוואה,  $\sum \frac{1}{n^2}$  מתכנס. ■

### 4.2.2 מבחן ההשוואה הגבולי

**משפט 4.7 (מבחן ההשוואה הגבולי).** יהיו  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  סדרות חיוביות. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$  ( $L > 0$ ), אז:

$$\sum a_n \text{ מתכנס} \iff \sum b_n \text{ מתכנס}$$

**הוכחה.** קיימ  $N$  כך שלכל  $n > N$   $\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$ . לכן  $\frac{L}{2}b_n < a_n < \frac{3L}{2}b_n$ .  
לפי מבחן ההשוואה (ולינאריות),  $\sum b_n$  ו-  $\sum a_n$  מתכנסים או מתבדרים יחד. ■

**דוגמה.** בדקו התכנסות  $\sum \frac{1}{n^2}$  ( $b_n = \frac{1}{n^2}$ ).  
**פתרון:** נשווה  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n+1) \cdot n^2}{n^3 + 2n} = \frac{n^3 + n^2}{n^3 + 2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} \rightarrow 1 \in (0, \infty)$

לפי מבחן ההשוואה הגבولي, הטור מתכנס. ■

### 4.2.3 מבחן המנה (דلمבר)

**משפט 4.8 (מבחן המנה / דלמבר).** תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית. נסמן  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  (אם קיימים).

1. אם  $L < 1$  אז  $\sum a_n$  מתכנס.

2. אם  $L > 1$  אז  $\sum a_n$  מתבדר.

3. אם  $L = 1$  אז המבחן לא מכריע.

הוכחה (מקרה  $L < 1$ ). נבחר  $q$  כך ש-  $L < q < 1$ .  
 קיימים  $N$  כך שלכל  $n > N$ :  
 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ .  
 לכן  $a_N \cdot a_{N+k} < q^k$  לכל  $k \geq 1$ .  
 הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot a_N$  מתכנס (טור גיאומטרי עם  $|q| < 1$ ).  
 לפי מבחן ההשוואה,  $\sum a_n$  מתכנס. ■

**דוגמה 1.** בדקו התכונות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  פתרון:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

לפי מבחן המנה, הטור מתכנס. ■

**דוגמה 2.** בדקו התכונות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  פתרון:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

לפי מבחן המנה, הטור מתכנס. ■

#### 4.2.4 מבחן השורש (קושי)

**משפט 4.9 ( מבחן השורש / קושי ).** תהיו  $(a_n)$  סדרה א-שלילית. נסמן  $\sqrt[n]{a_n}$ .

1. אם  $\sum a_n < L < 1$  אז  $\sqrt[n]{a_n}$  מתכנס.
2. אם  $\sum a_n > 1$  אז  $\sqrt[n]{a_n}$  מתבדר.
3. אם  $L = 1$  אז המבחן לא מכריע.

**דוגמה.** בדקו התכונות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$  פתרון:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$$

לפי מבחן השורש, הטור מתכנס. ■

#### 4.2.5 מבחן האינטגרל

**משפט 4.10 (מבחן האינטגרל).** תהי  $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה יורדת ורציפה. אז הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  מתכנס אם ורק אם האינטגרל  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  מתכנס.

דוגמה (טור  $p$ ).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ מתכנס} \iff p > 1$$

הוכחה:  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  יורדת ורציפה.  
 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  מתכנס אם ורק אם  $p < 1$  (ראינו בפרק 11).  
■ לפי מבחן האינטגרל, גם הטור מתכנס אם ורק אם  $p > 1$ .

## 4.3 מבחן התכנסות לטורים כלליים

### 4.3.1 התכנסות בהחלה וה收敛ות בתנאי

**הגדרה 4.11 (התכנסות בהחלה).** טור  $\sum a_n$  מתכנס בהחלה אם הטור  $\sum |a_n|$  מתכנס.

**משפט 4.12.** אם טור מתכנס בהחלה אז הוא מתכנס.

הוכחה. נשתמש בקריטריון קושי. יהי  $\varepsilon > 0$ .  
 $\exists N$  כך שלכל  $m > n > N$  כיוון ש-  $\sum |a_n|$  מתכנס, קיים

$$\sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$$

לכן:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$$

לפי קритריון קושי,  $\sum a_n$  מתכנס. ■

**הגדרה 4.13 (התכנסות בתנאי).** טור  $\sum a_n$  מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אך לא מתכנס בהחלה.

### 4.3.2 מבחן לייבניץ

**משפט 4.14 ( מבחון ליבנייז לטורים מתחלפים ).** יהי  $(a_n)$  סדרה עם:

$$\text{1. } a_n \geq 0 \text{ לכל } n$$

$$\text{2. } (a_n) \text{ יורדת מונוטונית}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ .3}$$

אז הטור המתחלף  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$  מתכנס.

הוכחה. נבחן את הסכומים החלקיים:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

כל סוגרים חיובי (כי  $(a_n)$  יורדת), לכן  $(S_{2n})$  עולה.  
גם:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

לכן  $(S_{2n})$  חסומה מלעיל.

סדרה עולה וחסומה מותכנסת. נסמן

$$\text{. } S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \rightarrow S + 0 = S$$

גם ■ . $S_n \rightarrow S$

**דוגמה (הטור ההרמוני המתחלף).**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

הוכחה שמתכנס:  $a_n \rightarrow 0$ ,  $a_n > 0$  מקיימת:  $a_n = \frac{1}{n}$  יורדת, לפי ליבנייז, הטור מותכנס.

הערה: זהו טור שמתכנס בתנאי (לא בהחלט, כי  $\sum \frac{1}{n}$  מתבדר). ■

### 4.3.3 מבחון דיריכלה ו מבחון אבל

**משפט 4.15 ( מבחון דיריכלה ).** יהיו  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  סדרות כך ש:

1. סדרת הסכומים החלקיים  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  חסומה

2.  $(b_n)$  מונוטונית ומותכנסת ל-0

אז הטור  $\sum a_n b_n$  מותכנס.

**משפט 4.16 ( מבחון אבל ).** יהיו  $(b_n)$ ,  $(a_n)$  סדרות כך ש:

1. הטור  $\sum a_n$  מתכנס

2.  $(b_n)$  מונוטונית וחסומה

אז הטור  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

## תרגילים 4.4

**תרגיל 1.** בדקו התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} .1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} .2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} .3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} .4$$

**פתרונות:**

(א) מבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

**מתכנס.**

(ב) מבחן האינטגרל עם  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_2^{\infty} = \infty$$

**מתבדר.**

(ג) מבחן ליבניץ:  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  יורדת ומוגנשת ל-0.

הטור  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  מתכנס (בתנאי, לא בהחלה).

(ד) מבחן המנה (ראינו קודם):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

**מתכנס.**

**תרגיל 2.** הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**פתרון (רמז):** זהה תוצאה מפורסמת (בעית באז). ההוכחה המלאה משתמשת בפיתוח טיילור של  $\frac{\sin x}{x}$  או בניתו כפורייה.  
נוכיח רק את ההתקנות: לכל  $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

לכן:

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{N} < 1$$

לכן  $2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + 1 = 2$ . הטור מתכנס. ■

**תרגיל 3.** קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלה, בתנאי, או מתבדרים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} . 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} . 2.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1} . 3.$$

**פתרונות:**

(א) מתכנס, שכן  $\sum \frac{1}{n^2}$  מתכנס בהחלה. ■

(ב)  $\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  מתכנס.

לפי מבחן ההשוואה,  $\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$  מתכנס, שכן הטור מתכנס בהחלה. ■

(ג)  $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1} \rightarrow (-1)^n$ , לא מתכנס ל-0.

לפי התנאי ההכרחי, הטור מתבדר. ■

## **חלק III**

### **גבולות ורציפות**



## פרק 5

### פונקציות במשתנה אחד

#### 5.1 פונקציות ממשיות

הגדרה 5.1. פונקציה ממשית היא פונקציה  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  כאשר  $D \subseteq \mathbb{R}$  נקראת תחום ההגדרה.

הגדרה 5.2 (סוגי פונקציות). פונקציה  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת:

- **חסומה מלעיל:** קיים  $M$  כך ש- $f(x) \leq M$  לכל  $x \in D$
- **חסומה מלרע:** קיים  $m$  כך ש- $f(x) \geq m$  לכל  $x \in D$
- **חסומה:** חסומה מלועל ומלרע
- **עליה:**  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **עליה ממש:**  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **זוגית:**  $f(-x) = f(x)$  לכל  $x$  (והתחום סימטרי)
- **אי-זוגית:**  $f(-x) = -f(x)$  לכל  $x$
- **מחזוריות:** קיים  $T > 0$  כך ש- $f(x+T) = f(x)$  לכל  $x$

#### 5.2 פונקציות אלמנטריות

**הפונקציות האלמנטריות:**

1. **פולינומיים:**  $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
2. **פונקציות רצינוליות:**  $\frac{p(x)}{q(x)}$  (מנת פולינומיים)
3. **פונקציות טריגונומטריות:**  $\sin, \cos, \tan, \cot$
4. **פונקציות טריגונומטריות הפוכות:**  $\arcsin, \arccos, \arctan$
5. **פונקציה מעריכית:**  $a^x$  או  $e^x$
6. **פונקציה לוגריתמית:**  $\ln x$  או  $\log_a x$
7. **חזקת כללית:**  $x^a = e^{a \ln x}$  ( $a > 0$  ו- $x > 0$ )

**5.3 פונקציות מיוחדות****פונקציית דיריכלה:**

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

פונקציה זו אינה רציפה בשום נקודה!

**פונקציית הסימן:**

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

**פונקציית הערך השלים (רצפה):**

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

**5.4 תרגילים**

**תרגיל 1.** הוכיחו כי לכל פונקציה זוגית  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  קיימות פונקציה זוגית  $f$  ופונקציה אי-זוגית  $h$  כך ש- $f = g + h$ .

**פתרון:** נגדיר:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

נבדוק:

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \quad \square$$

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x) \quad \square$$

$$\blacksquare \quad g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x) \quad \square$$



# פרק 6

## גבולות של פונקציות

### 6.1 הגדרת גבול

הגדרה 6.1 (גבול של פונקציה – הגדרת  $\varepsilon$ - $\delta$ ). יהיו  $x_0$  נקודת צבירה של  $D$ . נאמר ש-  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  אם  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

הגדרה 6.2 (גבול – הגדרת היינה). הגדרת  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  אם לכל סדרה  $(x_n)$  בתחום עם  $x_n \neq x_0$  מתקיים  $f(x_n) \rightarrow L$  כאשר  $x_n \rightarrow x_0$ .

משפט 6.3 (שקליות ההגדרות). הגדרת  $\varepsilon$ - $\delta$  והגדרת היינה שקולות.

דוגמה 1. הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$   
פתרון: יהיו  $\varepsilon > 0$ . צ"ל: קיימים  $\delta > 0$  כך שאם  $|x - 2| < \delta$  אז  $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$ .  
 $|(3x - 1) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2|$   
נבחר  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$   
אם  $|x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$  אז  $|3x - 6| = 3|x - 2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

דוגמה 2. הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$   
פתרון (רעיון): מאידך שוויון גיאומטרי: לכל  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

כיון ש-  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ , לפי כלל הסנדוויץ':  $\cos x \rightarrow 1$

## 6.2 ארכיטמטיקה של גבולות

**משפט 6.4 (ארכיטמטיקה של גבולות).** אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$  ו-  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + M \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M \quad .2$$

$$(M \neq 0 \text{ ואם } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}) \quad .3$$

**משפט 6.5 (כלל הסנדוויץ').** אם  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  בסביבה מינימלית של  $x_0$ , ו-  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$  אז  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$

## 6.3 גבולות חד-צדדיים

**הגדרה 6.6 (גבולות חד-צדדיים).**

□ **גבול מימין:**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ \varepsilon}} f(x) = L$

□ **גבול משמאל:**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ |f(x) - L| < \varepsilon}} f(x) = L$

**טענה 6.7.**  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$  אם ורק אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

## 6.4 גבולות באינסוף

**הגדרה 6.8.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$  אם  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

**הגדרה 6.9.**  $\forall K > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

## 6.5 גבולות חשובים

**טענה 6.10 (גבולות חשובים).**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \quad 5.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad 7.$$

## 6.6 תרגילים

**תרגיל 1.** חשבו  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$   
פתרונות:

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &\rightarrow 1, & \frac{1 - \cos x}{x^2} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}, & \cos x &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\blacksquare .1 \cdot \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

**תרגיל 2.** חשבו  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$   
פתרונות:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{(x-1)/2}\right]^{2x/(x-1)}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{2x}{x-1} &\rightarrow 2 \text{ ו } \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{(x-1)/2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e \\ \blacksquare .e^2 \end{aligned}$$



# פרק 7

## רציפות

### 7.1 הגדרת רציפות

הגדרה 7.1 (רציפות בנקודה).  $f$  רציפה בנקודה  $x_0$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .  
כלומר:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

הגדרה 7.2 (רציפות בקטע).  $f$  רציפה בקטע  $I$  אם היא רציפה בכל נקודה של  $I$ .  
(בקצוות סגורים — רציפות חד-צדדית).

טענה 7.3 (אפיון הינה לרציפות).  $f$  רציפה ב- $x_0$  אם ורק אם לכל סדרה  $x_n \rightarrow x_0$  מתקיים  
 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

דוגמה 1. פונקציית דיריכלה  $D(x)$  אינה רציפה בשום נקודה.  
הוכחה: לכל  $x_0 \in \mathbb{R}$ , קיימות סדרות  $r_n \rightarrow x_0$  (רצינליות) ו- $i_n \rightarrow x_0$  (אי-רצינליות).  
לכל  $n$ , אבל  $D(r_n) = 1$  ולכל  $n$ ,  $D(i_n) = 0$ .  
לכן הגבול  $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x)$  לא קיים. ■

### 7.2 ארכיטמטיקה של פונקציות רציפות

**משפט 7.4.** אם  $f, g$  רציפות ב- $x_0$  אז גם:

$$x_0 \text{ רציפה ב- } f + g \text{ .} \quad 1.$$

$$x_0 \text{ רציפה ב- } f \cdot g \text{ .} \quad 2.$$

$$(g(x_0) \neq 0 \text{ (אם)} \frac{f}{g} \text{ רציפה ב- } x_0 \text{ (אם } g \text{ רציפה ב- } x_0 \text{ ו- } f \text{ רציפה ב- } g(x_0) \text{)}} \quad 3.$$

$$(g(x_0) \neq 0 \text{ (אם } g \text{ רציפה ב- } x_0 \text{ ו- } f \text{ רציפה ב- } g(x_0) \text{)}} \quad 4.$$

**טענה 7.5.** כל פונקציה אלמנטרית רציפה בתחום הגדרתה.

### 7.3 משפט ערך הביניים

**משפט 7.6 (משפט ערך הביניים – IVT).** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. אם ( $f(a) < c < f(b)$ ) או ( $f(x_0) = c$  כך קיימים  $a < x_0 < b$  ו- $f(x_0) = c$  מגיעים לסתירה). ■

הוכחה (רעיון). נגידיר  $A = \{x \in [a, b] : f(x) < c\}$ . נגידיר  $A$  לא ריקה (כי  $a \in A$ ) וחסומה מלעיל (על ידי  $b$ ).

$$\text{נגידיר } x_0 = \sup A$$

מראים ש- $x_0$  מוגעים לסתירה. ■

**דוגמה (קיים שורש).** לכל פולינום ממעלה אי-זוגנית יש שורש ממשי.

הוכחה: יהיו  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  עם  $n$  אי-זוגני.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$$

לכן קיימים  $a < b$  כך ש- $p(a) < 0 < p(b)$

לפי IVT, קיים  $x_0 \in (a, b)$  כך  $p(x_0) = 0$ .

### 7.4 משפט ויירשטראס

**הגדרה 7.7 (קטע קומפקטי).** קטע  $[a, b]$  סגור וחסום נקרא **קומפקטי**.

**משפט 7.8 (וירשטראס – קיום מקסימום ומינימום).** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה בקטע סגור וחסום. אז:

1.  $f$  חסומה.

2.  $f$  מקבלת מקסימום ומינימום: קיימים  $x_1, x_2 \in [a, b]$  כך ש- $\max f$

הוכחה (סעיף 2, קיום מקסימום).  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ .  $f$  חסומה, לכן קיים  $x_n \in [a, b]$  כך ש- $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ . לכל  $n$ , קיים  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$  (לפי בולצאננו-וירשטראס) קיימת תת-סדרה  $(x_{n_k})$  סדרה חסומה ב- $[a, b]$ .

מרציפות  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ :  
 $f(x_{n_k}) \leq M$  (כי  $f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}$ )  
 $f(x_0) = M$  מיחידות הגבול: ■

## 7.5 רציפות במידה שווה

**הגדרה 7.9 (רציפות במידה שווה).**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה במידה שווה אם:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

הבדל:

- **רציפות:**  $\delta$  תלוי ב- $\varepsilon$  וב- $x_0$
- **רציפות במידה שווה:**  $\delta$  תלוי רק ב- $\varepsilon$ , עובד לכל הנקודות

**משפט 7.10 (הינה-קנטור).** אם  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה בקטע סגור וחסום, אז  $f$  רציפה במידה שווה.

**דוגמה (לא רציפה במידה שווה).**  $f(x) = \frac{1}{x}$  על  $(0, 1]$  אינה רציפה במידה שווה.  
**הוכחה:** נבחר  $\varepsilon = 1$ . לכל  $\delta > 0$ , נבחר  $x = \delta$ ,  $y = \frac{\delta}{2}$ , אז  $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ , אבל:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta} \right| = \frac{1}{\delta}$$

עבור  $\delta$  קטן מספיק,  $\frac{1}{\delta} > 1 = \varepsilon$ .

## 7.6 פונקציות הפיכות

**משפט 7.11.** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ומונוטונית ממש. אז:

1. הפיכה  $f$

2. רציפה  $f^{-1} : f([a, b]) \rightarrow [a, b]$ .

## 7.7 תרגילים

**תרגיל 1.** הוכחו כי המשוואה  $x^5 + x = 1$  יש לה פתרון יחיד בקטע  $[0, 1]$ .

**פתרון:** נגדיר  $f(x) = x^5 + x - 1$ .

$f(1) = 1 > 0$ ,  $f(0) = -1 < 0$ .

לפי IVT קיים  $c \in (0, 1)$  כך  $f(c) = 0$ .

**חידות:**  $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$  לכל  $x$ , לכן  $f$  עולה ממש, ולכן יש לכל היותר פתרון אחד.



**תרגיל 2.** תהי  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  רציפה. הוכחו שקיים נקודת שבת, כלומר  $x_0 \in [0, 1]$  כך  $f(x_0) = x_0$ .

**פתרון:** נגדיר  $g(x) = f(x) - x$ .

$g(0) \in [0, 1]$  כי  $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ .

$g(1) \in [0, 1]$  כי  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ .

אם  $g(0) = 0$  אז  $x_0 = 0$  נקודת שבת.

אם  $g(1) = 0$  אז  $x_0 = 1$  נקודת שבת.

אחרת,  $g(0) > 0 > g(1)$ , ולפי IVT קיים  $x_0 \in (0, 1)$  כך  $g(x_0) = 0$ .



**תרגיל 3.** הוכיחו כי  $f(x) = \sqrt{x}$  רציפה במידה שווה על  $[0, \infty)$ .

**פתרון:** יהי  $\varepsilon > 0$ .

**מקרה 1:**  $x, y \geq \varepsilon^2$ :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{2\varepsilon}$$

נבחר  $.|x - y| < \delta_1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ , אז  $\delta_1 = 2\varepsilon^2$

**מקרה 2:**  $x$  או  $y$  קטנים מ- $\varepsilon^2$ . אז  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$  (כי  $\sqrt{a} < a$  ו- $a < \varepsilon^2$ ).

■  $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon^2) = \varepsilon^2$



## **חלק IV**

### **גזרות**



# פרק 8

## גזרות

### 8.1 הגדרת הגזרת

הגדרה 8.1 (גזרת). תהי  $f$  מוגדרת בסביבה של  $x_0$ . **הגזרת** של  $f$  בנקודה  $x_0$  היא:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

אם הגבול קיים וסופי, נאמר ש- $f$  גזירה ב- $x_0$ .

טענה 8.2 אם  $f$  גזירה ב- $x_0$  אז  $f$  רציפה ב- $x_0$ .

הוכחה.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

לכן  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

אזהרה! ההפק לא נכון:  $|x|$  רציפה ב-0 אבל לא גזירה שם.

### 8.2 כללי גזירה

**משפט 8.3 (ארכיטמטיקה של גזירות).** אם  $f, g$  גזירות ב- $x_0$  אז:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad 1.$$

$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0) \quad 2.$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad 3.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \quad 4.$$

**משפט 8.4 (כלל השרשרת).** אם  $g$  גזירה ב- $x_0$  ו- $f$  גזירה ב- $g(x_0)$ , אז:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

**משפט 8.5 (נגזרת פונקציה הפוכה).** אם  $f$  גזירה והפיכה עם  $0 \neq f'(x_0)$ , אז:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\text{או בסימון אחר: } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

### 8.3 טבלת גזירות

גזירות חשובות:

$f'(x)$	$f(x)$
$nx^{n-1}$	$x^n$
$e^x$	$e^x$
$a^x \ln a$	$a^x$
$\frac{1}{x \ln a}$	$\ln x$
$\cos x$	$\log_a x$
$-\sin x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\cos x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\tan x$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arccos x$
	$\arctan x$

### 8.4 משפטי ערך הביניים

**משפט 8.6 (פרמה).** אם  $f$  מקבלת מקסימום או מינימום מקומי ב- $x_0$  פנימית, ו- $f$  גזירה ב- $x_0$ , אז  $f'(x_0) = 0$ .

**משפט 8.7 (רול).** אם  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ב-,  $(a, b)$ , גזירה ב-,  $[a, b]$ , אז קיים  $c \in (a, b)$  כך ש-  $f'(c) = 0$ .

**משפט 8.8 (לגרנז' / ערך הביניים לנגזרות).** אם  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ב-,  $[a, b]$  וגזירה ב-,  $(a, b)$ , אז קיים  $c \in (a, b)$  כך ש-:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

הוכחה. נגדיר  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ .  
אז  $g(b) = f(b) - f(a)$  ו-  $g(a) = f(a) - f(a)$ .  
לפי רול, קיים  $c \in (a, b)$  כך ש-  $g'(c) = 0$ .  
■  $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

**משפט 8.9 (קושי).** אם  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות ב-,  $(a, b)$  ונגזרות ב-,  $(a, b)$  עם  $g'(x) \neq 0$  לכל  $x \in (a, b)$ , אז קיים  $c \in (a, b)$  כך ש-:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

## 8.5 כלל לופיטל

**משפט 8.10 (כלל לופיטל – צורה 0/0).** אם  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .  
בנסיבות מנוקבת של  $a$ , וקיים  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  (כולל  $\pm\infty$ ), אז:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

**משפט 8.11 (כלל לפיטל – צורה  $\frac{\infty}{\infty}$ ).** אם  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$  וקיים  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  אז  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

**דוגמה 1.** חשבו  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ .  
**פתרון:** צורה  $\frac{0}{0}$ . לפיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

**דוגמה 2.** חשבו  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ .  
**פתרון:** צורה  $(-\infty) \cdot 0$ . נכתוב  $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$  (צורה  $\frac{\infty}{\infty}$ ).  
 לפיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad \blacksquare$$

**דוגמה 3.** חשבו  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .  
**פתרון:** צורה  $0^0$ . נכתוב  $x^x = e^{x \ln x}$ .  
 מודוגמה:  $x \ln x \rightarrow 0$ .  
 $\blacksquare$   $x^x = e^{x \ln x} \rightarrow e^0 = 1$   
 לכן 1

## 8.6 פולינום טיילור

**הגדרה 8.12 (פולינום טיילור).** אם  $f$  גזירה  $n$  פעמים ב- $x_0$ , **פולינום טיילור מדרגה  $n$  סביב  $x_0$**  הוא:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

**משפט 8.13 (טילור עם שארית לגרנץ').** אם  $f$  גזירה  $n+1$  פעמים ב- $[a, b]$ , אז לכל  $x \in [a, b]$  קיים  $c$  בין  $x_0$  ל- $x$  כך ש:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

כאשר השארית היא:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

**פתרונות מקלורן חשובים (סביב  $x_0 = 0$ ):**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (|x| \leq 1, x \neq -1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$$

## 8.7 חקירות פונקציות

**טענה 8.14 (תנאי לעליה/ירידה).** תהי  $f$  גזירה בקטע  $I$ .

$f'$  עולה ממש ב- $I \Rightarrow f'' > 0$  □

$f'$  יורדת ממש ב- $I \Rightarrow f'' < 0$  □

$f'$  עולה (לא בהכרח ממש) ב- $I \Rightarrow f'' \geq 0$  □

**טענה 8.15 ( מבחון הנגזרת השנייה לקיצון).** אם  $f'(x_0) = 0$  ו-  $f''(x_0) \neq 0$

$x_0$  נקודת מינימום מקומי  $\Rightarrow f''(x_0) > 0$  □

$x_0$  נקודת מקסימום מקומי  $\Rightarrow f''(x_0) < 0$  □

**הגדרה 8.16 (קעירות).**  $f$  קעורה כלפי מעלה (קמורה) בקטע אם  $f'' > 0$  בקטע.  
 $f$  קעורה כלפי מטה (קמורה) בקטע אם  $f'' < 0$  בקטע.  
**נקודות פיתול:** נקודת שבה  $f$  משנה קעירות.

## 8.8 תרגילים

**תרגיל 1.** חשבו  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$ .  
**פתרון:** נשתמש בפיתוח טיילור:  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - O(x^7)$

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^5}{120} - O(x^7)$$

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120} - O(x^2) \rightarrow \frac{1}{120} \quad \blacksquare$$

**תרגיל 2.** חקרו את הפונקציה  $f(x) = xe^{-x}$  (מקסימום, מינימום, קעירות, אסימפטוטות).

**פתרון: תחומי:**  $\mathbb{R}$ .

**נקודות:**

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

**נקודות קריטיות:**  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow f''(1) = e^{-1}(1-2) = -e^{-1} < 0$  מקסימום מקומי.

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

**קעירות:**  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

$x < 2 : f'' < 0$  (קעורה כלפי מטה).

$x > 2 : f'' > 0$  (קעורה כלפי מעלה).

$$f(2) = 2e^{-2}$$

**אסימפטוטות:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0 \quad (\text{לופיטל})$$

**אסימפטוטה אופקית**  $y = 0$  ב-  $x \rightarrow \infty$ .  $\blacksquare$

**תרגיל 3.** הוכיחו כי לכל  $x > 0$   $\ln(1+x) < x$ .

**פתרון:** נגדיר  $f(x) = x - \ln(1+x)$  לכל  $x > 0$

$$f(0) = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$$

לכן  $f$  עולה ממש ב-  $(0, \infty)$ .

מכאן  $x > \ln(1+x)$  לכל  $x > 0$ , כלומר  $f(x) > f(0) = 0$   $\blacksquare$

**חלק V**

**אינטגרל רימן**



# פרק 9

## 1: פונקציות קדומות וaintegral לא מסויים

### 9.1 מבוא

ביחידה זו נלמד על הפעולה הפוכה לגזירה -- מציאת **פונקציה קדומה**. נגדיר את האינטגרל הלא מסויים ונלמד שיטות בסיסיות לחישובו.

### 9.2 פונקציה קדומה

#### 9.2.1 הגדרה בסיסית

הגדרה: 8.42 **פונקציה קדומה**  
יהי  $I$  קטע ותהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה. נאמר כי **פונקציה  $F$  של  $f$**  היא **קדומה** של  $f$  כאשר  $F$  גזירה ב- $I$  ומתקיים  $F' = f$ .

דוגמאות:

- ה**פונקציה**  $F(x) = x^2$  היא קדומה של  $f(x) = 2x$  כי  $(x^2)' = 2x$ .
- ה**פונקציה**  $F(x) = \sin x$  היא קדומה של  $f(x) = \cos x$  כי  $(\sin x)' = \cos x$ .
- ה**פונקציה**  $F(x) = e^x$  היא קדומה של  $f(x) = e^x$  כי  $(e^x)' = e^x$ .

#### 9.2.2 ייחדות הקדומה

טענה: 8.43 **יחידות הקדומה עד כדי קבוע**  
יהי  $I$  קטע, תהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה ותהי  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  קדומה של  $f$ . אז לכל פונקציה  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  מתקיים:  
 $G(x) = F(x) + c$  ורק אם קיימים  $c \in \mathbb{R}$  כך שכל  $x \in I$  מתקיים  $G(x) = F(x) + c$ .

**הוכחה (רעיון):**

אם  $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$  אז  $G(x) = F(x) + c$ , כלומר  $G$  קדומה. ( $\Leftarrow$ )  
 אם  $G$  קדומה אז  $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ . פונקציה שנגזרתה אפס בקטע היא קבועה (מסקנה 8.13), לכן  $G - F = c$  קבוע כלשהו.

**מסקנה חשובה:**

אםقيمت קדומה אחת, אז קיימות **איןסוף קדומות** -- כל אחת מהן שונה מהאחרות בקבוע בלבד.

### 9.3 תכונת דרכו וקיום קדומה

**הערה 8.44: תכונת דרכו**

אם  $F$  היא קדומה של  $f$  אז לפי משפט דרכו, כיוון שמתקיים  $f' = F$  נסיק כי  $f$  מקיימת את **תכונת דרכו** (תכונת ערך הבינאים לנגזרות).

**מסקנה:** לפונקציה שלא מקיימת את **תכונת דרכו** לא קיימת פונקציה קדומה.

**דוגמה לפונקציה ללא קדומה:**

הfonקציה  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

אינה מקיימת את **תכונת דרכו** ("קופצת" מ- $-1$  ב- $0$ ), ולכן **לא קיימת לה קדומה**.

### 9.4 סימון האינטגרל הלא מסוים

**סימון:**

יהי  $I$  קטע ותהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה. נניח כי קיימת ל- $f$  קדומה. את **אוסף הקדומות** של  $f$  נסמן:

$$\int f(x) dx$$

אם  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  קדומה של  $f$  אז נרשום:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

כאשר  $c$  מייצג קבוע שרירותי.

## 9.5 טבלת אינטגרלים בסיסיים

להלן אינטגרלים בסיסיים שחשוב לזכור:

תחום	קדומה	פונקציה
, $n \in \mathbb{N}$ כל קטע	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x^n$
$(0, +\infty)$	$\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$	$(\lambda \neq -1)$
קטע שאינו כולל 0	$\ln x  + c$	$\frac{1}{x}$
כל קטע	$e^x + c$	$e^x$
כל קטע	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$(a > a^x0, a \neq 1)$
כל קטע	$-\cos x + c$	$\sin x$
כל קטע	$\sin x + c$	$\cos x$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan x + c$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$(0, \pi)$	$-\cot x + c$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$(-1, 1)$	$\arcsin x + c$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
כל קטע	$\arctan x + c$	$\frac{1}{1+x^2}$

## 9.6 אינטגרציה בחלוקת

### טענה 8.45 אינטגרציה בחלוקת

יהי  $I$  קטע ותהינה  $F, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות ב- $I$ . נניח כי  $F' \cdot g$  קיימת קדומה ב- $I$ . אז קיימת  $F' \cdot g$  קדומה ב- $I$  ומתקיים:

$$\int F'(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

הוכחה:

לפי ההנחה קיימת  $L^1 g \cdot F : I \rightarrow \mathbb{R}$  קדומה ב- $I$ , נסמנה  $H$ .  
 נתבונן ב- $F \cdot g - H$ .  
 גזירות ולכון  $F \cdot g - H$  גזירה ומתקיים:

$$(F \cdot g - H)' = F' \cdot g + F \cdot g' - F \cdot g' = F' \cdot g$$

לכן  $F \cdot g - H$  היא קדומה של  $F' \cdot g$  ב- $I$ , ומכאן:

$$\int F'(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

דוגמה: קדומה ל- $\ln x$  בקטע  $(0, +\infty)$ 

נגיד  $x \in (0, +\infty)$   $g(x) = \ln x$ ,  $F(x) = x$  לכל  $x \in (0, +\infty)$   
 $g'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $F'(x) = 1$  גזירות ומתקיים  
 לכל  $x \in (0, +\infty)$   $F(x)g'(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$  מתקיים  
 מכאן  $x \cdot g'(x) = H(x)$  היא קדומה של  $F \cdot g$   
 לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int \ln x dx = \int F'(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

## 9.7 שינוי משתנה

### 9.7.1 שינוי משתנה -- גרסה ראשונה

טענה: 8.46 שינוי משתנה (1)

יהיו  $I, J$  קטעים ותהיינה  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ו- $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות. נניח כי  $f$  בעלת קדומה  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ . בנוסף, נניח כי  $g$  גזירה ב- $J$ . אז קיימת  $L^1 (f \circ g) \cdot g' : J \rightarrow \mathbb{R}$  קדומה ב- $J$  ומתקיים:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

הוכחה:

נתבונן ב- $F \circ g : J \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 גזירות, לכן לפי כלל השרשרת  $F \circ g$  גזירה ומתקיים:

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$$

לכן  $F \circ g$  קדומה של  $(f \circ g) \cdot g'$ .

**דוגמה: קדומה ל-** $x$  בקטע  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .  
 לכל  $I$  מתקיים  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .  
 נגיד  $(g(x) = \cos x : I \rightarrow (0, +\infty))$  על ידי  $g' = -\sin x$ .  
 גזירה ב- $I$  ומתקיים  $f(u) = -\frac{1}{u}$  על ידי  $f'(u) = -\ln u$ .  
 הפונקציה  $F(u) = -\ln u$  היא קדומה של  $f$ .  
 לכל  $I$  מתקיים:

$$f(g(x)) \cdot g'(x) = f(\cos x) \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x$$

לפי משפט שינוי משתנה נסיק כי:

$$\int \tan x \, dx = F(g(x)) + c = -\ln(\cos x) + c$$

## 9.7.2 שינוי משתנה -- גרסה שנייה

### טענה 8.47: שינוי משתנה (2)

יהיו  $I, J$  קטעים ותהיינה  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ו- $I \rightarrow J$  פונקציות. נניח כי  $g$  גזירה ב- $J$ , על ומתקיים  $0 \neq g'(x) \neq 0$  לכל  $J \in x$ . בנוסף, נניח כי  $(f \circ g)' : J \rightarrow \mathbb{R}$  היא בעלת קדומה  $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ . אז:

1. הפיכה  $g : J \rightarrow I$ .

2. קיימת ל- $f$  קדומה ב- $I$  ומתקיים:

$$\int f(x) \, dx = F(g^{-1}(x)) + c$$

### הוכחה (רעיון):

(1) לפי ההנחה לכל  $J \in x$  מתקיים  $0 \neq g'(x) \neq 0$ . לפי משפט דרשו נסיק כי  $g'$  שומרת סימן ב- $J$ , על כן  $g$  מונוטונית ממש. מכאן  $g$  חד-חד-ערכית, ולפי ההנחה  $g$  על, ולכן  $g$  הפיכה.  
 (2) נתבונן ב- $\mathbb{R} \rightarrow I : F \circ g^{-1}$ . לפי כלל השרשרת ונגזרת פונקציה הפוכה:

$$(F \circ g^{-1})'(x) = F'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) = (f \circ g)(g^{-1}(x)) \cdot g'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x)$$

## 9.8 דוגמאות נוספות

**דוגמה:**  $a > 0$  עבור  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$   
 נגידיר  $.g'(t) = a$  אז  $.g(t) = at$   
 $(f \circ g)(t) \cdot g'(t) = \frac{1}{a^2+a^2t^2} \cdot a = \frac{1}{a(1+t^2)}$   
**קדומה:**  $\frac{1}{a} \arctan t$  לכן:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

**דוגמה:**  $(-a, a)$  עבור  $a > 0$  בקטע  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$   
 באופן דומה:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

## 9.9 תרגילים

### תרגילים:

1. הוכיחו כי קיימת פונקציה  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  שמקיימת את תכונות דרכו אך **לא קיימת** לה פונקציה קדומה.

2. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int xe^x dx \quad \square$$

$$\int x^2 e^x dx \quad \square$$

$$\int e^x \sin x dx \quad \square$$

$$\int \arcsin x dx \quad \square$$

3. מצאו קדומה ל-  $\frac{1}{x^2-a^2}$  (עבור  $a \neq 0$ ) בקטע מתאים.

**רמז:** השתמשו בפירוק:  $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$

# פרק 10

## 2: אינטגרל מסוים וסכומי רימן

### 10.1 מבוא

ביחידה זו נגידר את **האינטגרל מסוים** באמצעות סכומי דרבו. נלמד מתי פונקציה היא אינטגרבילית ונכיר את תכונות האינטגרל.

### 10.2 חלוקות ועידונים

#### הגדרה 9.1: חלוקה

יהי  $[a, b]$  קטע. **חלוקת** של הקטע  $[a, b] = \{x_i\}_{i=0}^n$  היא קבוצה  $\Pi$  של נקודות המקיימות:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

הפרמטר של החלוקת מסומן  $\lambda(\Pi)$  ומוגדר:

$$\lambda(\Pi) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

#### הגדרה 9.2: עידון

יהי  $[a, b]$  קטע. תהינה  $\Pi_1, \Pi_2$  חלוקות של  $[a, b]$ . נאמר כי  $\Pi_2$  היא **עידון** של  $\Pi_1$  כאשר  $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ .

#### הערה:

- אם  $\Pi_2$  היא עידון של  $\Pi_1$  אז  $\lambda(\Pi_2) \leq \lambda(\Pi_1)$
- לכל שתי חלוקות קיימת חלוקה שהיא עידון של שתיהן (האיחוד שלהן).

### 10.3 סכומי דרבו

**הגדרה 9.3: סכומי ריבוי**

תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה ותהי  $\Pi$  חלוקה של  $[a, b] = \{x_i\}_{i=0}^n$ . סכום ריבוי העליון של  $f$  ביחס לחלוקת  $\Pi$ :

$$\overline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

סכום ריבוי התחתון של  $f$  ביחס לחלוקת  $\Pi$ :

$$\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

**טענה 9.4: תכונות סכומי ריבוי**

תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה. אז:

1. לכל חלוקה  $\Pi$  של  $[a, b]$  מתקיים:

$$(b - a) \cdot \inf f \leq \underline{S}(f, \Pi) \leq \overline{S}(f, \Pi) \leq (b - a) \cdot \sup f$$

2. לכל שתי חלוקות  $\Pi_1, \Pi_2$  של  $[a, b]$ , אם  $\Pi_2$  היא עידן של  $\Pi_1$  אז:

$$\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \underline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_1)$$

3. לכל שתי חלוקות  $\Pi_1, \Pi_2$  של  $[a, b]$  מתקיים:

$$\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_2)$$

**הוכחה (רעיון):**

(1) לכל  $i$  מתקיים  $(x_{i+1} - x_i) > 0$ . כפל ב- $\inf f \leq \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f \leq \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \leq \sup f$ . וסבירה נותרנים את אי-השוויון.

(2) מספיק להוכיח עבור עידן בנקודת אחת. אם  $y \in (x_k, x_{k+1})$  מתקיים  $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{y\}$  כאשר  $\Pi_1 = \{x_k, x_{k+1}\}$ .

$$\sup_{[x_k, x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1} - x_k) \geq \sup_{[x_k, y]} f \cdot (y - x_k) + \sup_{[y, x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1} - y)$$

(3) קיימים עידן משותף של  $\Pi_1$  ושל  $\Pi_2$ . לפי (2):

$$\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \underline{S}(f, \Pi_3) \leq \overline{S}(f, \Pi_3) \leq \overline{S}(f, \Pi_2)$$

**10.4 האינטגרל העליון והתחתון**

**הגדרה 9.5 אינטגרל עליון ותחתון**תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.האינטגרל **העליון** של  $f$  ב- $[a, b]$ :

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \{ \overline{S}(f, \Pi) : \Pi \text{ חלוקה של } [a, b] \}$$

ה**האינטגרל התחתון** של  $f$  ב- $[a, b]$ :

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup \{ \underline{S}(f, \Pi) : \Pi \text{ חלוקה של } [a, b] \}$$

**הערה 9.6:**לכל פונקציה חסומה  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  מתקיים:

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

**10.5 אינטגרביליות לפי דרכו****הגדרה 9.7 אינטגרביליות**תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה. נאמר כי **אינטגרבילית (לפי דרכו)** ב- $[a, b]$  כאשר:

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

במקרה זה נסמן:

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

**טענה 9.8 קרייטריון אינטגרביליות**תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$  אם ורק אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $\Pi$  של  $[a, b]$  כך ש:

$$\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi) < \varepsilon$$

**10.6 דוגמאות לאינטגרביליות**

**דוגמה: פונקציה קבועה**

$$\begin{aligned} \text{תהי } f(x) = \alpha \text{ לכל } x \in [a, b] \\ \text{לכל חלוקה } \Pi : \bar{S}(f, \Pi) = \underline{S}(f, \Pi) = \alpha(b - a) \\ \text{lכן } \int_a^b \alpha \, dx = \alpha(b - a) \end{aligned}$$

**דוגמה: פונקציית דיריבלה (לא אינטגרבילית)**

הfonקציה  $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

לכל חלוקה  $\Pi$  ולכל תת-קטע  $[x_i, x_{i+1}]$

$$\sup_{[x_i, x_{i+1}]} D = 1 \quad \square$$

$$\inf_{[x_i, x_{i+1}]} D = 0 \quad \square$$

$$\text{lכן } \underline{S}(D, \Pi) = 0 \text{ ו-} \bar{S}(D, \Pi) = 1 \text{ לכל חלוקה.}$$

מכאן:  $D = 0$ , ולכן  $D$  **לא אינטגרבילית**.

**דוגמה:  $f(x) = x^2$**

לחלוקת שווה  $x_i = \frac{i}{n}$  עם  $\prod_n$

$$\underline{S}(f, \Pi_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

$$\bar{S}(f, \Pi_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

$$\text{lכן } \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

## 10.7 משפטי אינטגרביליות

**טענה 9. פונקציה רציפה היא אינטגרבילית**

תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. אז  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

**הוכחה (רעיון):**

רציפה בקטע סגור וחסום, לכן רציפה במידה שווה. לכל  $0 > \varepsilon$  קיים  $\delta > 0$  כך שאם  $|x - y| < \delta$  אז  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ . ניקח חלוקה  $\Pi$  עם  $\lambda(\Pi) < \delta$ . בכל תת-קטע  $[x_i, x_{i+1}]$  נסsat

$$\sup_{[x_i, x_{i+1}]} f - \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

לכן:

$$\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

**טענה 9.20: פונקציה מונוטונית היא אינטגרבילית**

תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מונוטונית. אז  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

**טענה 9.21: פונקציה חסומה עם מספר סופי של נקודות אי-רציפות**

תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה שרציפה בכל הנקודות מלבד **מספר סופי** של נקודות. אז  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

## 10.8. **תכונות האינטגרל המסוים**

**תכונות האינטגרל:**

תהיינה  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרביליות. אז:

**1. לינאריות:**

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \quad \square$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ לכל } \int_a^b \alpha f dx = \alpha \int_a^b f dx \quad \square$$

**2. מונוטוניות:** אם  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \in [a, b]$  אז  $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$

**3. אדיטיביות בתוחום:** לכל  $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

**4. אי-שוויון המשולש:**

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

**טענה 9.25: מכפלת פונקציות אינטגרביליות**  
תהיינה  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרביליות. אז  $f \cdot g$  אינטגרבילית.

**הוכחה (רעיון):**  
ראשית מוכחים שאם  $f$  אינטגרבילית אז  $f^2$  אינטגרבילית. לאחר מכן משתמשים בזהות:

$$f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

**טענה 9.27: הרכבה עם פונקציה רציפה**  
תהי  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  אינטגרבילית ותהי  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. אז  $g \circ f$  אינטגרבילית.

## 10.9 פונקציית רימן

**פונקציית רימן -- אינטגרבילית עם אינסוף נקודות אי-רציפות**  
הפונקציה  $R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ במצומס, } p, q \in \mathbb{N}_+, \gcd(p, q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ או } x = 0 \end{cases}$$

**טענה:**  $R$  אינטגרבילית ב- $[0, 1]$  ומתקיים  $\int_0^1 R(x) dx = 0$ .

**רעיון ההוכחה:** לכל  $\varepsilon > 0$  יש רק מספר סופי של נקודות  $x$  עבורן  $R(x) \geq \varepsilon$ . מכסים אותן בקטעים קטנים, ובשאר  $\sup R < \varepsilon$ .

## 10.10 תרגילים

**תרגילים:**

1. יהי  $\int_a^b \alpha \, dx = \alpha(b-a)$ . הראו כי  $f(x) = \alpha$  אינטגרבילית ומתקיים  $f(x_0) = \alpha$  קטע ו-  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

2. תהינה  $f, g$  אינטגרבילות עם  $f \geq g$  ו-  $f(x_0) > g(x_0)$  בנקודת אחת. האם בהכרח  $\int_a^b f > \int_a^b g$ ?

**תשובה:** לא בהכרח! אם  $f(x_0) > g(x_0)$  רק בנקודת בודד, האינטגרל לא משתנה. אבל אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , אז קיימת סביבה שבה  $f > g$ , ואז  $\int_a^b f > \int_a^b g$ .

3. תהי  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית. הוכיחו:

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f \quad \square \text{ אם } f \text{ זוגית:}$$

$$\int_{-a}^a f = 0 \quad \square \text{ אם } f \text{ אי-זוגית:}$$

4. תהינה  $f, g$  אינטגרבילות. הוכיחו כי  $\max(f, g) \geq \min(f, g)$  אינטגרביליות.

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|), \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

## 10.11 משפט היסוד של החזו"א

יחידה זו עוסקת בקשר העמוק בין אינטגרציה ונגירה – המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

## 10.12 אינטגרביליות מקומית

**הגדרה 10.1 (אינטגרביליות מקומית).** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע ותהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה. נאמר כי  $f$  אינטגרבילית מקומית על  $I$  כאשר לכל  $a, b \in I$  עם  $a < b$  הפונקציה  $f$  אינטגרבילית על  $[a, b]$ .

**דוגמה.** תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. אז  $f$  אינטגרבילית מקומית על כל קטע, כי פונקציה רציפה בקטעי סגור היא אינטגרבילית.

**מוסכמה.** אם  $b < a$  אז נגדיר:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

## 10.13 אינטגרל לא מסויים

**הגדרה 10.2 (אינטגרל לא מסוים).** יהיו  $I$  קטע ותהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית מקומית ב- $I$ . פונקציה  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת אינטגרל לא מסוים של  $f$  כאשר קיים  $I \in a \in \mathbb{R}$  כך שמתקיים:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{ לכל } x \in I$$

**תרגיל.** יהיו  $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרלים לא מסוימים של  $f$ . הוכיחו כי קיים  $c \in \mathbb{R}$  כך  $x \in I$  לכל  $F(x) - G(x) = c$ .

## 10.14 רציפות האינטגרל הלא מסוים

**טענה 10.3 (רציפות האינטגרל הלא מסוים).** יהיו  $I$  קטע, תהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית מקומית, ויהי  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרל לא מסוים של  $f$ .

1. **רציפה ב- $I$ .**

2. אם בנוסף  $f$  חסומה ב- $I$ , אז  $F$  היא פונקציה ליפשיץ (קיים  $M > 0$  כך ש- $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$  לכל  $x, y \in I$ ).

הובחה. יהיו  $x_0 \in I$ .  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . קיים  $\eta > 0$  כך ש- $f$  חסומה ב- $I$  על ידי  $M > 0$ .

**שלב 1:** כיוון ש- $f$  אינטגרבילית מקומית, קיים  $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \neq \emptyset$ .

**שלב 2:** לכל  $x$  עם  $|x - x_0| < \eta$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq M|x - x_0|$$

**שלב 3:** נבחר  $\delta = \min(\eta, \frac{\varepsilon}{M})$ .

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

לכן  $F$  רציפה ב- $x_0$ .

## 10.15 המשפט היסודי הראשון

**טענה 10.4 (גזרות האינטגרל הלא מסוימים).** יהיו  $I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  קטע,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית מקומית, ו- $F$  אינטגרל לא מסוים של  $f$ .  
אם  $f$  רציפה ב- $x_0$  אז  $F$  גירה ב- $x_0$  ומתקיים:

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

הוכחה. יהיו  $\varepsilon > 0$ . כיוון ש- $f$  רציפה ב- $x_0$ , קיימים  $0 < \delta < \delta$  שלכל  $t$  עם

$$|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחן את המנה:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0)$$

נשתמש בכך ש-

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt$$

לכל  $|x - x_0| < \delta$

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot |x - x_0| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

לכן  $F'(x_0) = f(x_0)$  (כלומר,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ ) ■

## 10.16 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי

**משפט 10.5 (המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי).** יהיו  $I \rightarrow \mathbb{R}$  קטע ותהי  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .  
אם  $f$  רציפה אז קיימת ל- $f$  פונקציה קדומה ב- $I$ .

הוכחה. נבחר  $a \in I$  ונגידו:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

לפי טענה 10.4 בכל נקודה  $I$  ( $x \in I$  רציפה) מתקיים  
לכן  $F$  היא קדומה של  $f$  ■.

**משמעות המשפט.** המשפט קשור בין שני מושגים נפרדים לכורחה:

□ **גזרה** — מציאת קצב שינוי מקומי

□ **אינטגרציה** — מציאת שטח מצטבר

המשפט מראה שאינטגרציה היא הפעולה הפוכה לגזרה!

## 10.17 נוסחת ניוטון-לייבניצ (המשפט היסודי השני)

**משפט 10.6 (נוסחת ניוטון-לייבניצ).** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . אם  $f$  אינטגרבילית ובעל קדומה ב- $a$  אז לכל קדומה  $F$  של  $f$  מתקיים:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b. \quad \text{סימן.}$$

**הוכחה (רעיון).** **שלב 1:** בוחרים חלוקה  $\lambda(\Pi) < \delta$  עם  $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  שם סכום רימן קרובה לאינטגרל.

**שלב 2:** לפי משפט לגרנץ, בכל תת-קטע  $[x_i, x_{i+1}]$  קיים  $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$  כך ש:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

**שלב 3:** סכימה:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = S(f, \Pi, \xi)$$

**שלב 4:** בגבול  $0 \rightarrow \lambda(\Pi)$ , סכום רימן שואף לאינטגרל:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \blacksquare$$

## 10.18 דוגמאות לחישוב אינטגרלים

**דוגמה 1.**

$$\int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

**דוגמה 2.** חישוב  $\int_1^e \ln x \, dx$  ידוע כי  $x - x \ln x$  היא קדומה של  $\ln x$  (ניתן לאמת בכך). לכן:

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 0 - (-1) = 1$$

**דוגמה 3.** חישוב  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$  משתמשים בזהות  $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$

## 10.19 גזירה של אינטגרל עם גבולות משתנים

**מסקנה 1 (גבול עליון משתנה).** אם  $f$  רציפה ב- $I$ , אז הפונקציה:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

מקיימת  $.x \in I F'(x) = f(x)$  לכל

**מסקנה 2 (גבולות כלליים – כלל לייבניץ).** אם  $f$  רציפה, ו- $u(x), v(x)$  גזירות, אז:

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

הוכחה. נגדיר  $G(x) = \int_a^x f(t) \, dt$  כך ש-  $G'(x) = f(x)$  אז:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = G(v(x)) - G(u(x))$$

לפי כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dx} [G(v(x)) - G(u(x))] = G'(v(x)) \cdot v'(x) - G'(u(x)) \cdot u'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$



**דוגמה.** חשבו  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$

**פתרון:** כאן  $0$ ,  $f(t) = e^{-t^2}$ ,  $v(x) = x^2$ ,  $u(x) = 0$ .  
לפי כלל ליבנץ:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x - e^{-0} \cdot 0 = 2xe^{-x^4}$$

## 10.20 הערות חשובות

### הערות 10.7

1. **נגזרת של פונקציה גיירה** אינה בהכרח אינטגרבילית רימן.

**דוגמה:** הפונקציה  $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$  עבור  $x \neq 0$  ו- $F(0) = 0$  היא גיירה ב- $[0, 1]$ , אך  $F'$  אינה חסומה ולכון אינה אינטגרבילית רימן.

2. יש דוגמאות לנגזרת **חסומה** שאינה אינטגרבילית רימן (למשל פונקציית Volterra).

## 10.21 תרגילים

**תרגיל 1.** חשבו:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad 1.$$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx \quad 2.$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx \quad 3.$$

**תרגיל 2.** מצאו את  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt}{x^3}$

**רמז:** השתמשו בכלל לפיטל או בפיתוח טיילור.

**תרגיל 3.** תהי  $f$  רציפה ב- $\mathbb{R}$ . הוכיחו כי אם  $\int_0^x f(t) dt = 0$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ , אז  $f \equiv 0$ .

**תרגיל 4.** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. הוכיחו כי:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx = f(a)$$

## 10.22 שיטות אינטגרציה לאינטגרל מסוים

יחידה זו עוסקת בהתאםות אינטגרציה (אינטגרציה בחלוקת ו שינוי משתנה) לאינטגרל מסוים, ובמשפט ערך הביניים לאינטגרלים.

## 10.23 אינטגרציה בחלוקת לאינטגרל מסוים

**טענה 10.8 (אינטגרציה בחלוקת).** תהיינה  $F, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות ב- $[a, b]$ , ונגזרותיהן  $F', g'$  אינטגרביליות רימן ב- $[a, b]$ . אז:

$$\int_a^b F'(x)g(x) dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x) dx$$

הוכחה. נגדיר  $H(x) = F(x) \cdot g(x)$ . לפי כלל המכפלה:

$$H'(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

לכן  $F'(x)g(x) = H'(x) - F(x)g'(x)$   
נשלב ונשתמש בנוסחת ניוטון-לייבניצ'י:

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x)g(x) dx &= \int_a^b H'(x) dx - \int_a^b F(x)g'(x) dx \\ &= H(b) - H(a) - \int_a^b F(x)g'(x) dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x) dx \end{aligned}$$



**סיכום מקוצר.**

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

**דוגמה 1.** חישוב  $\int_0^1 xe^x dx$   
נגדיר  $(\text{כ}\text{ד ש-}x) g(x) = x$ ,  $(F'(x) = e^x \text{ כ}\text{ד ש-} F(x) = e^x)$   
פתרון:

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1 dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

**דוגמה 2.** חישוב  $\int_0^\pi x \sin x \, dx$ .

נגיד  $f(x) = \sin x$ ,  $F'(x) = \cos x$  (כך ש-  $F(x) = -\cos x$ )

**פתרון:**

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \, dx = \pi - (-1) - 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \pi$$

**דוגמה 3.** חישוב  $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$ .

נבצע אינטגרציה בחלקים עם  $dv = dx$ ,  $u = (\ln x)^2$

$$v = x, du = \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 2 \ln x \, dx = e - 2 \int_1^e \ln x \, dx$$

מבחן קודמת:  $\int_1^e \ln x \, dx = 1$ . לכן:

$$\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2 \cdot 1 = e - 2$$

## 10.24 שינוי משתנה – גרסה ראשונה

**טענה 10.9 (שינוי משתנה – גרסה 1).** תהיינה  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ו-  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ . נניח כי:

□  $f$  בעלת קדומה ואינטגרבילות ב-  $[a, b]$

□  $g$  גזירה ב-  $[c, d]$

□  $(f \circ g)' \cdot g'$  אינטגרבילות על  $[c, d]$

אזי:

$$\int_c^d (f \circ g)(x) g'(x) \, dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(t) \, dt$$

**דרץ לזכור.** אם הגבולות המשתנים:  $x = c \Rightarrow t = g(c)$ ,  $x = d \Rightarrow t = g(d)$ ,  $dt = g'(x)dx$  אז  $t = g(x)$ .

## 10.25 שינוי משתנה – גרסה שנייה

**טענה 10.10 (שינויי משתנה – גרסה 2).** תהיינה  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש:

□ אינטגרבילית ב- $[a, b]$

□ גזירה והפיכה

□ רציפה

אז  $(f \circ g) \cdot g'$  אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f \circ g)(t) g'(t) dt$$

**הערה 10.11.** מתקיים גם:

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) |g'(t)| dt = \int_a^b f(x) dx$$

(תלו依 בסדר הגבולות ובסימן של  $g'$ ).

## 10.26 דוגמאות לשינוי משתנה

**דוגמה 1.** חישוב  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  (שטח רביע מעגל היחידה).  
נגיד  $x = \sin t$  על  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . אז:

$$dx = \cos t dt \quad \square$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \square$$

$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

**פתרון:**

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$\text{משתמשים בזיהות } \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + 0 - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$

**טעות נפוצה בשינוי משתנה.**

בניסיון לחשב  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  עם  $g(x) = \frac{1}{x}$  ה**בעה**: הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{x}$  אינה מוגדרת ב- $[0, 1]$ !  
יתרה מכך:

$$g([-1, 0)) = (-\infty, -1]$$

$$g((0, 1]) = [1, +\infty)$$

התচום והטוחח אינם תואמים, ואין להפעיל את משפט שינוי המשתנה.  
**הפתרון הנכון:** חישוב ישיר:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

**דוגמה 2.** חישוב  $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$  המשמשים בזיהות

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) dx = [\tan x - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

## 10.27 משפט ערך הביניים לאינטגרלים

**טענה 10.12 (משפט ערך הביניים לאינטגרלים).** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית. אז קיים  $\mu \in [\inf f, \sup f]$

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

יתר על כן: אם  $f$  רציפה אז קיים  $c \in [a, b]$  כך ש:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

**הוכחה (למקרה הרציף).** נסמן  $M = \sup f$ ,  $m = \inf f$

מהד:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

לכן:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \in [m, M]$$

אם  $f$  רציפה, לפי משפט ערך הביניים של וירשטראס קיים  $c \in [a, b]$  כך ש- $\mu = f(c)$

**פרשנות גאומטרית.** הערך  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  הוא **הממוצע** של  $f$  על הקטע  $[a, b]$ . המשפט אומר שקיימת נקודה  $c$  שבה ערך הפונקציה שווה בדיק לVERAGE.

## 10.28 משפט ערך הביניים הממושך

**טענה 10.13 (גרסה ממושכלת).** תהינה  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרביליות. נניח כי  $g \geq 0$ . אז קיים  $\mu \in [\inf f, \sup f]$  כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

יתר על כן: אם  $f$  רציפה אז קיים  $c \in [a, b]$  כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

**דוגמה.** הוכיחו כי  $\frac{2}{3\pi} \leq \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{\pi}$ .

**פתרון:** נגדיר  $g(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  על  $[2\pi, 3\pi]$ . נדרשו לב ש- $\int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx \geq 0$  (זה לא נכון). שימו לב ש- $\sin x \geq 0$  בקטע  $[2\pi, 3\pi]$  (ב עצמי  $\sin(3\pi) = 0$ ,  $\sin(2\pi) = 0$ ,  $\sin(\pi) = -1$ ). ובעוד דרך ערכיהם חיוביים ושליליים).  
**תיקון:** השתמש בטענה 10.13 בקטע  $[2\pi, 3\pi]$  כאשר  $g(x) = \sin x \geq 0$  בקטע  $[2\pi, 3\pi]$  (זה נכון כי הקטע  $[2\pi, 3\pi]$  מכסה בדיק חצי מהאזור של סינוס מ-0 עד 0 דרך 1). לפי טענה 10.13 קיים  $c \in [2\pi, 3\pi]$  כך ש:

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{c} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx$$

נחשב:

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{2\pi}^{3\pi} = -\cos(3\pi) + \cos(2\pi) = -(-1) + 1 = 2$$

לכן:

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{2}{c}$$

כיוון ש- $\frac{1}{3\pi} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2\pi}$ , מתקיים  $c \in [2\pi, 3\pi]$ , ומכאן:

$$\frac{2}{3\pi} \leq \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

## 10.29 נוסחת רדוקציה

**נוסחת רדוקציה.** לכל  $n \geq 2$ :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

**הוכחה.** נכתוב:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx$$

אינטגרציה בחלקים עם  $dv = \sin x \, dx$ ,  $u = \sin^{n-1} x$

$$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\cos x$$

$$= \left[ -\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

הגבולות מתאפסים. משתמשים ב-  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

$$\text{נסמן } I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \quad \Rightarrow \quad nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$



## תרגילים 10.30

**תרגיל 1.** חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx .1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx .2 \quad (\text{השתמשו בנוסחת הרדוקציה})$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx .3$$

**תרגיל 2.** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. הוכיחו כי:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) \, dx = f(a)$$

**תרגיל 3.** חשבו  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ .  
**רמז:** פתחו את  $\ln(1+x)$  לטור טיילור ושלבו איבר-איבר.

**תרגיל 4.** הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{אם } f \text{ זוגית:}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{אם } f \text{ אי-זוגית:}$$

## 10.31 אינטגרלים לא אמיתיים ויישומים

יחידה זו עוסקת באינטגרלים לא אמיתיים (אינטגרלים עם גבולות אינסופיים או עם נקודות סינגולריות), מבחן התכנסות, ויישומים גאומטריים.

## 10.32 הגדרת אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

**הגדרה 11.1 (אינטגרל לא אמיתי – גבול אינסופי).** תהי  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ : פונקציה אינטגרבילית מקומית ב- $[a, +\infty)$ .  
 נגיד  $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{לכל } x \in [a, +\infty)$$

נאמר כי **האינטגרל הלא אמיתי של  $f$  בקטע  $[a, +\infty)$  מתכנס** כאשר קיימים סופי הגבול  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  במקרה זה נסמן:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

אם הגבול אינו קיים או אינו סופי – נאמר שהאינטגרל **מתבדר** (או לא מתכנס).

**הערה 11.2.** באופן דומה מגדירים אינטגרל לא אמיתי על קטעים מהצורה  $(-\infty, a]$ :

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt$$

## 10.33 דוגמאות בסיסיות

**דוגמה 1.**  $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$  – לא מתכנס.  
פתרונות:

$$\int_0^x \cos t \, dt = \sin x$$

הגבול  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  אינו קיים (מתנדנד בין  $-1$  ל- $1$ ).

**דוגמה 2.**  $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \, dx$  עבור  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  
פתרונות:

$$\int_0^x e^{\alpha t} \, dt = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1)$$

הגבול  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x}$  קיים וסופי אם ורק אם  $\alpha < 0$ .  
במקרה זה:

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha} (0 - 1) = -\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|}$$

**דוגמה 3.**  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$   
פתרונות:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt = \arctan x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

**דוגמה חשובה – אינטגרל**  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx$

◻ עבור  $\alpha = 1$ :  $\int_1^x \frac{1}{t} \, dt = \ln x \rightarrow +\infty$  – מתבדר.

◻ עבור  $\alpha > 1$ : הגבול קיים וסופי אם ורק אם  $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} \, dt = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ .

סיכום:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx \text{ מתכנס} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

## 10.34 אינטגרל לא אמיתי מסוג שני – סינגולריות

**הגדרה 11.3** (אינטגרל לא אמייתי – סינגולריות בגבול). תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית מקומית ב- $[a, b]$ . נאמר כי האינטגרל **לא אמייתי** מתכנס כאשר קיים וסوفي הגבול:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

**דוגמה 1.**  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$  – מתכנס.  
**פתרון:** יש סינגולריות ב- $x=0$ .

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\varepsilon} = 2$$

**דוגמה 2.**  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  – מתבדר.  
**פתרון:**

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [-\ln \varepsilon] = +\infty$$

**דוגמה חשובה – אינטגרל**  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  **סיכום:**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ מתכנס} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

## 10.35 קритריון קושי להתכנסות

**kritериון קושי.** האינטגרל  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  מתכנס אם ורק אם: לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $M > p > q > M$  כך שכל  $M \geq a$

$$\left| \int_p^q f(x) dx \right| < \varepsilon$$

## 10.36 מבחני השוואה

**מבחן ההשוואה.** תהיינה  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרביליות מקומית עם  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \geq a$ .

1. אם  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  מותכנס – אז  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  מותכנס.

2. אם  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  מותבדר – אז  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  מותבדר.

**מבחן ההשוואה הגבולי.** תהיינה  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  אי-שליליות ואינטגרביליות מקומית. אם  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, +\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ מותכנס} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ מותכנס}$$

**דוגמה.** קבעו האם  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$  מותכנס.  
**פתרון:** נשווה  $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1 \in (0, +\infty)$$

כיוון ש- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  מותכנס ( $\alpha = 2 > 1$ ), גם  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$  מותכנס.

## 10.37 התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

**הגדרה 11.11 (התכנסות בהחלט).** תהי  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית מקומית. נאמר כי האינטגרל  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  מותכנס בהחלט כאשר האינטגרל  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  מותכנס.

**טענה 11.12** אם האינטגרל מותכנס בהחלט אז הוא מותכנס.

**הוכחה.** מカリיטריוון קושי: לכל  $0 < \varepsilon$  קיים  $M$  כך שלכל  $M$  :

$$\left| \int_p^q f(x) dx \right| \leq \int_p^q |f(x)| dx < \varepsilon$$

לכן  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  מותכנס. ■

**הגדרה (התכונות בתנאי).** אינטגרל שמתכנס אך לא מתכנס בהחלט נקרא **מתכנס בתנאי**.

**דוגמה.**  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  – **מתכנס בתנאי.**  
 (證明ים עם קритריון דיריכלה; האינטגרל  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  מתבדר.)

## 10.38 קритריון אבל וקריטריון דיריכלה

**טענה 11.20 (קריטריון אבל).** תהיינה  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . נניח כי:

1.  $f$  רציפה ו- $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  מתכנס.

2.  $g$  מונוטונית וחסומה.

אז  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  מתכנס.

**טענה 11.21 (קריטריון דיריכלה).** תהיינה  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . נניח כי:

1.  $f$  רציפה ו- $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  חסומה.

2.  $g$  מונוטונית ו- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

אז  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  מתכנס.

**דוגמה – שימוש בקריטריון דיריכלה.**

הוכיחו כי  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  מתכנס.

**פתרון:** נגדיר  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f(x) = \sin x$ .

$(\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos x) - (\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos 0)$  חסומה (ערכים בין  $-1$  ל- $1$ ).

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  יורדת ו-

לפי קритריון דיריכלה, האינטגרל מתכנס.

## 10.39 קשר בין טורים לאינטגרלים

**טענה 11.19 (מבחן האינטגרל).** תהי  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית מקומית, **א-שלילית** ו **יורצת**.

או לכל  $N \in \mathbb{N}_+$

$$\sum_{n=1}^N f(a+n) \leq \int_a^{a+N} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{N-1} f(a+n)$$

**יתר על כן:** האינטגרל  $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$  מתכנס אם ורק אם הטור  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  מתכנס.

**יישום – הטור ההרמוני.**

הטור  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  והאינטגרל  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  קשורים. מהמשפט:

$$\ln(N+1) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N$$

לכן  $N$  ובפרט הטור **מתבדר**.

## 10.40 יישומים גאומטריים

**שטח בין עקומות.** עבור  $f \geq g$  ב-  $[a, b]$ , השטח בין  $y = f(x)$  ל-  $y = g(x)$  הוא:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

**דוגמה.** שטח בין  $y = x^2$  ו-  $y = x$  ב-  $[0, 1]$ . פתרון: בקטע זה  $x \geq x^2$ , לכן:

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

**נפח גוף סיבוב (שיטת הדיסקים).** סיבוב השטח מתחת ל-  $y$  סביב ציר  $x$ :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

**דוגמה.** נפח כדור ברדיוס  $R$  מסובבים את  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  (חצי מעגל) סביב ציר  $x$ :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R \\ &= \pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \pi \left( -R^3 + \frac{R^3}{3} \right) = \pi \cdot \frac{2R^3}{3} + \pi \cdot \frac{2R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

**אורך קשת.** לעקומה  $y = f(x)$  עם  $f'$  רציפה:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**דוגמה.** אורך הקשת  $y = \frac{x^{3/2}}{3}$  ב-  $[0, 4]$  **פתרונות:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{x}, \quad 1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{x}{4} = \frac{4+x}{4} \\ L &= \int_0^4 \sqrt{\frac{4+x}{4}} dx = \int_0^4 \frac{\sqrt{4+x}}{2} dx \\ &\text{נציב } u = 4+x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} [(4+x)^{3/2}]_0^4 = \frac{1}{3} (8^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{1}{3} (16\sqrt{2} - 8) = \frac{8(2\sqrt{2} - 1)}{3} \end{aligned}$$

**שטח פנים של גוף סיבוב.** סיבוב הקשת  $y = f(x)$  סביב ציר  $x$ :

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**תרגיל 1.** קבעו התכונות:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad 1.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \quad 2.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \quad 3.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx \quad 4.$$

**תרגיל 2.** חשבו את נפח הגוף הנוצר מסיבוב  $y = e^{-x}$  סביב ציר  $x$  ב- $(-\infty, +\infty)$ .

**תרגיל 3.** תהי  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  אי-שלילית ואיינטגרבילית מקומית. הוכיחו כי אם מתכנס וגם קיים  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , אז הגבול שווה 0.

**תרגיל 4.** תהי  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  אי-שלילית, יורדת ואיינטגרבילית מקומית. הגידרו:

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$$

הוכיחו כי  $\{a_n\}$  מתכנסת.

**הערה:** זו הדרך להציג את **קבוע אוילר-מסקרוני**  $\gamma \approx 0.5772$ .

**תרגיל 5.** הוכיחו כי:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**רמז:** זהו האינטגרל הנאוסיאני. ההוכחה המלאה משתמש באינטגרל כפול.