Calculus 1B (Zenzor)

Orin Levi

חדו"א 1ב למדמ"ח ת"א— סיכום לפי אביב צנזור

תוכן העניינים

1 יחידה 1: פונקציות קדומות ואינטגרל לא מסוים

1.1 מבוא

ביחידה זו נלמד על הפעולה ההפוכה לגזירה -- מציאת **פונקציה קדומה**. נגדיר את האינטגרל הלא מסוים ונלמד שיטות בסיסיות לחישובו.

1.2 פונקציה קדומה

1.2.1 הגדרה בסיסית

הגדרה 8.42: פונקציה קדומה
יהי I קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר כי פונקציה $F : I \to \mathbb{R}$ היא **קדומה** של f כאשר F גזירה ב־I ומתקיים $F' = f$.

דוגמאות:

- הפונקציה $F(x) = x^2$ היא קדומה של $f(x) = 2x$ כי $F'(x) = 2x = f(x)$.
- הפונקציה $F(x) = \sin x$ היא קדומה של $f(x) = \cos x$ כי $(\sin x)' = \cos x$.
- הפונקציה $F(x) = e^x$ היא קדומה של $f(x) = e^x$ כי $(e^x)' = e^x$.

1.2.2 יחידות הקדומה

טענה 8.43: יחידות הקדומה עד כדי קבוע
יהי I קטע, תהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה ותהי $F : I \to \mathbb{R}$ קדומה של f. אז לכל פונקציה $G : I \to \mathbb{R}$ מתקיים:
G קדומה של f **אם ורק אם** קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים $G(x) = F(x) + c$.

הוכחה (רעיון):
($\Leftarrow$) אם $G(x) = F(x) + c$ אז $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$, כלומר G קדומה.
($\Rightarrow$) אם G קדומה אז $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. פונקציה שנגזרתה אפס בקטע היא קבועה (מסקנה 8.13), לכן $G - F = c$ לקבוע כלשהו.

מסקנה חשובה:
אם קיימת קדומה אחת, אז קיימות **אינסוף קדומות** -- כל אחת מהן שונה מהאחרות בקבוע בלבד.

1.3 תכונות דרבו וקיום קדומה

הערה 8.44: תכונת דרבו
אם F היא קדומה של f אז לפי משפט דרבו, כיוון שמתקיים $F' = f$ נסיק כי f מקיימת את **תכונת דרבו** (תכונת ערך הביניים לנגזרות).
מסקנה: לפונקציה שלא מקיימת את תכונת דרבו **לא קיימת** פונקציה קדומה.

דוגמה לפונקציה ללא קדומה:
הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הנתונה על ידי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

אינה מקיימת את תכונת דרבו (``קופצת" מ־(-1) ל־1 ב־$x = 0$), ולכן **לא קיימת לה קדומה**.

1.4 סימון האינטגרל הלא מסוים

סימון:
יהי I קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה. נניח כי קיימת ל־f קדומה. את **אוסף הקדומות** של f נסמן:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x$$

אם $F : I \to \mathbb{R}$ קדומה של f אז נרשום:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + c$$

כאשר c מייצג קבוע שרירותי.

1.5 טבלת אינטגרלים בסיסיים

להלן אינטגרלים בסיסיים שחשוב לזכור:

פונקציה	קדומה	תחום
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$n \in \mathbb{N}$, כל קטע
x^λ $(\lambda \neq -1)$	$\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}+c$	$(0,+\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+c$	קטע שאינו כולל 0
e^x	e^x+c	כל קטע
a^x $(a>0, a\neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	כל קטע
$\sin x$	$-\cos x+c$	כל קטע
$\cos x$	$\sin x+c$	כל קטע
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x+c$	$(0,\pi)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$	$(-1,1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x+c$	כל קטע

1.6 אינטגרציה בחלקים

טענה 8.45: אינטגרציה בחלקים
יהי I קטע ותהיינה $F,g:I\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ב־I. נניח כי ל־$F\cdot g'$ קיימת קדומה ב־I. אז קיימת ל־$F'\cdot g$ קדומה ב־I ומתקיים:

$$\int F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

הוכחה:
לפי ההנחה קיימת ל־$F\cdot g'$ קדומה ב־I, נסמנה $H:I\to\mathbb{R}$.
נתבונן ב־$F\cdot g-H$.
F,g,H גזירות ולכן $F\cdot g-H$ גזירה ומתקיים:

$$(F\cdot g-H)' = F'\cdot g + F\cdot g' - F\cdot g' = F'\cdot g$$

לכן $F\cdot g-H$ היא קדומה של $F'\cdot g$ ב־I, ומכאן:

$$\int F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

דוגמה: קדומה ל־$\ln x$ בקטע $(0,+\infty)$

נגדיר $F(x)=x$, $g(x)=\ln x$ לכל $x\in(0,+\infty)$.

F,g גזירות ומתקיים $F'(x)=1$, $g'(x)=\frac{1}{x}$.

לכל $x\in(0,+\infty)$ מתקיים $F(x)g'(x)=x\cdot\frac{1}{x}=1$.

מכאן $H(x)=x$ היא קדומה של $F\cdot g'$.

לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x=\int F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=x\ln x-\int 1\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+c$$

1.7 שינוי משתנה

1.7.1 שינוי משתנה -- גרסה ראשונה

טענה 8.46: שינוי משתנה (1)

יהיו I,J קטעים ותהיינה $f:I\to\mathbb{R}$ ו־$g:J\to I$ פונקציות. נניח כי f בעלת קדומה $F:I\to\mathbb{R}$. בנוסף, נניח כי g גזירה ב־J. אז קיימת ל־$(f\circ g)\cdot g'$ קדומה ב־J ומתקיים:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x=F(g(x))+c$$

הוכחה:

נתבונן ב־$F\circ g:J\to\mathbb{R}$.

F ו־g גזירות, לכן לפי כלל השרשרת $F\circ g$ גזירה ומתקיים:

$$(F\circ g)'=(F'\circ g)\cdot g'=(f\circ g)\cdot g'$$

לכן $F\circ g$ קדומה של $(f\circ g)\cdot g'$.

דוגמה: קדומה ל־$\tan x$ בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

לכל $x\in I$ מתקיים $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

נגדיר $g:I\to(0,+\infty)$ על ידי $g(x)=\cos x$.

g גזירה ב־I ומתקיים $g'(x)=-\sin x$.

נגדיר $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ על ידי $f(u)=-\frac{1}{u}$.

הפונקציה $F(u)=-\ln u$ היא קדומה של f.

לכל $x\in I$ מתקיים:

$$f(g(x))\cdot g'(x)=f(\cos x)\cdot(-\sin x)=-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=\tan x$$

לפי משפט שינוי משתנה נסיק כי:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x=F(g(x))+c=-\ln(\cos x)+c$$

1.7.2 שינוי משתנה -- גרסה שנייה

טענה 8.47: שינוי משתנה (2)
יהיו I, J קטעים ותהיינה $f : I \to \mathbb{R}$ ו-$g : J \to I$ פונקציות. נניח כי g גזירה ב-J, **על**, ומתקיים $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in J$. בנוסף, נניח כי $(f \circ g) \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ היא בעלת קדומה $F : J \to \mathbb{R}$. אז:

1. $g : J \to I$ הפיכה.
2. קיימת ל-f קדומה ב-I ומתקיים:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(g^{-1}(x)) + c$$

הוכחה (רעיון):
(1) לפי ההנחה לכל $x \in J$ מתקיים $g'(x) \neq 0$. לפי משפט דרבו נסיק כי g' שומרת סימן ב-J, על כן g מונוטונית ממש. מכאן g חד-חד-ערכית, ולפי ההנחה g על, ולכן g הפיכה.
(2) נתבונן ב-$F \circ g^{-1} : I \to \mathbb{R}$. לפי כלל השרשרת ונגזרת פונקציה הפוכה:

$$(F \circ g^{-1})'(x) = F'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) = (f \circ g)(g^{-1}(x)) \cdot g'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x)$$

1.8 דוגמאות נוספות

דוגמה: $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ **עבור** $a > 0$
נגדיר $g(t) = at$. אז $g'(t) = a$.
$(f \circ g)(t) \cdot g'(t) = \frac{1}{a^2+a^2t^2} \cdot a = \frac{1}{a(1+t^2)}$
קדומה: $\frac{1}{a}\arctan t$.
לכן:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

דוגמה: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$ **עבור** $a > 0$ **בקטע** $(-a, a)$
באופן דומה:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

1.9 תרגילים

תרגילים:

1. הוכיחו כי קיימת פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ שמקיימת את תכונת דרבו אך **לא קיימת** לה פונקציה קדומה.
2. חשבו את האינטגרלים הבאים:
   - $\int xe^x\,\mathrm{d}x$
   - $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$
   - $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$
   - $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$
3. מצאו קדומה ל-$\frac{1}{x^2-a^2}$ (עבור $a\neq 0$) בקטע מתאים.

   רמז: השתמשו בפירוק: $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$

2 יחידה 2: אינטגרל מסוים וסכומי רימן

2.1 מבוא

ביחידה זו נגדיר את **האינטגרל המסוים** באמצעות סכומי דרבו. נלמד מתי פונקציה היא אינטגרבילית ונכיר את תכונות האינטגרל.

2.2 חלוקות ועידונים

הגדרה 9.1: חלוקה

יהי $[a,b]$ קטע. **חלוקה** של הקטע $[a,b]$ היא קבוצה $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ של נקודות המקיימות:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

הפרמטר של החלוקה מסומן $\lambda(\Pi)$ ומוגדר:

$$\lambda(\Pi)=\max_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$$

הגדרה 9.2: עידון

יהי $[a,b]$ קטע. תהיינה Π_1,Π_2 חלוקות של $[a,b]$. נאמר כי Π_2 היא **עידון** של Π_1 כאשר $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

הערה:

- אם Π_2 היא עידון של Π_1 אז $\lambda(\Pi_2) \leq \lambda(\Pi_1)$.
- לכל שתי חלוקות קיימת חלוקה שהיא עידון של שתיהן (האיחוד שלהן).

2.3 סכומי דרבו

הגדרה 9.3: סכומי דרבו
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה **חסומה** ותהי $\Pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ חלוקה של $[a,b]$.
סכום דרבו העליון של f ביחס לחלוקה Π:

$$\overline{S}(f,\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

סכום דרבו התחתון של f ביחס לחלוקה Π:

$$\underline{S}(f,\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

טענה 9.4: תכונות סכומי דרבו
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אז:

1. לכל חלוקה Π של $[a,b]$ מתקיים:

$$(b-a)\cdot \inf f \leq \underline{S}(f,\Pi) \leq \overline{S}(f,\Pi) \leq (b-a)\cdot \sup f$$

2. לכל שתי חלוקות Π_1, Π_2 של $[a,b]$, אם Π_2 היא עידון של Π_1 אז:

$$\underline{S}(f,\Pi_1) \leq \underline{S}(f,\Pi_2) \leq \overline{S}(f,\Pi_2) \leq \overline{S}(f,\Pi_1)$$

3. לכל שתי חלוקות Π_1, Π_2 של $[a,b]$ מתקיים:

$$\underline{S}(f,\Pi_1) \leq \overline{S}(f,\Pi_2)$$

הוכחה (רעיון):
(1) לכל i מתקיים $\sup f \leq \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f \leq \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \leq \inf f$. כפל ב־$(x_{i+1}-x_i) > 0$ וסכימה נותנים את אי-השוויון.
(2) מספיק להוכיח עבור עידון בנקודה אחת. אם $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{y\}$ כאשר $y \in (x_k, x_{k+1})$, אז:

$$\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1}-x_k) \geq \sup_{[x_k,y]} f \cdot (y-x_k) + \sup_{[y,x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1}-y)$$

(3) קיים עידון משותף Π_3 של Π_1 ושל Π_2. לפי (2):

$$\underline{S}(f,\Pi_1) \leq \underline{S}(f,\Pi_3) \leq \overline{S}(f,\Pi_3) \leq \overline{S}(f,\Pi_2)$$

2.4 האינטגרל העליון והתחתון

הגדרה 9.5: אינטגרל עליון ותחתון
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
האינטגרל העליון של f ב־$[a,b]$:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{\overline{S}(f,\Pi) : \Pi \text{ חלוקה של } [a,b]\right\}$$

האינטגרל התחתון של f ב־$[a,b]$:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\underline{S}(f,\Pi) : \Pi \text{ חלוקה של } [a,b]\right\}$$

הערה 9.6:
לכל פונקציה חסומה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.5 אינטגרביליות לפי דרבו

הגדרה 9.7: אינטגרביליות
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נאמר כי f **אינטגרבילית (לפי דרבו)** ב־$[a,b]$ כאשר:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

במקרה זה נסמן:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

טענה 9.8: קריטריון אינטגרביליות
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. f אינטגרבילית ב־$[a,b]$ **אם ורק אם** לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π של $[a,b]$ כך ש:

$$\overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi)<\varepsilon$$

2.6 דוגמאות לאינטגרביליות

דוגמה: פונקציה קבועה
תהי $f(x)=\alpha$ לכל $x\in[a,b]$.
לכל חלוקה Π: $\overline{S}(f,\Pi)=\underline{S}(f,\Pi)=\alpha(b-a)$.
לכן f אינטגרבילית ומתקיים $\int_a^b \alpha\,\mathrm{d}x=\alpha(b-a)$.

דוגמה: פונקציית דיריכלה (לא אינטגרבילית)
הפונקציה $D:[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

לכל חלוקה Π ולכל תת-קטע $[x_i,x_{i+1}]$:

- $\sup_{[x_i,x_{i+1}]} D=1$ (כי יש רציונליים בכל קטע)
- $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} D=0$ (כי יש אי-רציונליים בכל קטע)

לכן $\overline{S}(D,\Pi)=1$ ו־$\underline{S}(D,\Pi)=0$ לכל חלוקה.
מכאן: $\overline{\int_0^1} D=1$, $\underline{\int_0^1} D=0$, ולכן D **לא אינטגרבילית**.

דוגמה: $f(x)=x^2$ ב־$[0,1]$
לחלוקה שווה Π_n עם $x_i=\frac{i}{n}$:

$$\underline{S}(f,\Pi_n)=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}$$

$$\overline{S}(f,\Pi_n)=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}$$

לכן $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

2.7 משפטי אינטגרביליות

טענה 9.17: פונקציה רציפה היא אינטגרבילית
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **רציפה**. אז f אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

הוכחה (רעיון):
f רציפה בקטע סגור וחסום, לכן רציפה במידה שווה. לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.
ניקח חלוקה Π עם $\lambda(\Pi)<\delta$. בכל תת-קטע $[x_i,x_{i+1}]$:

$$\sup_{[x_i,x_{i+1}]} f-\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

לכן:

$$\overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi)<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon$$

טענה 9.20: פונקציה מונוטונית היא אינטגרבילית
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה **מונוטונית**. אז f אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

טענה 9.21: פונקציה חסומה עם מספר סופי של נקודות אי-רציפות
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה שרציפה בכל הנקודות מלבד **מספר סופי** של נקודות. אז f אינטגרבילית ב־$[a,b]$.

2.8 תכונות האינטגרל המסוים

תכונות האינטגרל:
תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות. אז:
1. **לינאריות:**
   - $\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f\,\mathrm{d}x+\int_a^b g\,\mathrm{d}x$
   - $\int_a^b \alpha f\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$
2. **מונוטוניות:** אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$ אז $\int_a^b f\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g\,\mathrm{d}x$.
3. **אדיטיביות בתחום:** לכל $c\in(a,b)$:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x=\int_a^c f\,\mathrm{d}x+\int_c^b f\,\mathrm{d}x$$

4. **אי-שוויון המשולש:**

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$$

טענה 9.25: מכפלת פונקציות אינטגרביליות
תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות. אז $f\cdot g$ אינטגרבילית.

הוכחה (רעיון):
ראשית מוכיחים שאם f אינטגרבילית אז f^2 אינטגרבילית. לאחר מכן משתמשים בזהות:

$$f\cdot g=\frac{1}{4}\big((f+g)^2-(f-g)^2\big)$$

טענה 9.27: הרכבה עם פונקציה רציפה
תהי $f:[a,b]\to[c,d]$ אינטגרבילית ותהי $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ רציפה. אז $g\circ f$ אינטגרבילית.

2.9 פונקציית רימן

פונקציית רימן -- אינטגרבילית עם אינסוף נקודות אי-רציפות
הפונקציה $R:[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת:

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q} \text{ בצמצום}, p,q\in\mathbb{N}_+, \gcd(p,q)=1\\ 0, & x\notin\mathbb{Q} \text{ או } x=0\end{cases}$$

טענה: R אינטגרבילית ב־$[0,1]$ ומתקיים $\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x=0$.
רעיון ההוכחה: לכל $\varepsilon>0$ יש רק מספר **סופי** של נקודות x עבורן $R(x)\geq\varepsilon$. מכסים אותן בקטעים קטנים, ובשאר $\sup R<\varepsilon$.

2.10 תרגילים

תרגילים:

1. יהי $[a,b]$ קטע ו־$\alpha \in \mathbb{R}$. הראו כי $f(x)=\alpha$ אינטגרבילית ומתקיים $\int_a^b \alpha \, \mathrm{d}x = \alpha(b-a)$.
2. תהיינה f,g אינטגרביליות עם $f \geq g$ ו־$f(x_0) > g(x_0)$ בנקודה אחת. האם בהכרח $\int_a^b f > \int_a^b g$?

   תשובה: לא בהכרח! אם $f(x_0) > g(x_0)$ רק בנקודה בודדת, האינטגרל לא משתנה. אבל **אם** f **רציפה** ב־x_0, אז קיימת סביבה שבה $f > g$, ואז $\int_a^b f > \int_a^b g$.
3. תהי $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. הוכיחו:
   - אם f זוגית: $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$
   - אם f אי־זוגית: $\int_{-a}^{a} f = 0$
4. תהיינה f,g אינטגרביליות. הוכיחו כי $\max(f,g)$ ו־$\min(f,g)$ אינטגרביליות.

   רמז: $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$

3 משפט היסוד של החדו"א

יחידה זו עוסקת בקשר העמוק בין אינטגרציה וגזירה — המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

3.1 אינטגרביליות מקומית

הגדרה 10.1 (אינטגרביליות מקומית). יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר כי f **אינטגרבילית מקומית על** I כאשר לכל $a,b \in I$ עם $a<b$ הפונקציה f אינטגרבילית על $[a,b]$.

דוגמה. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה. אז f אינטגרבילית מקומית על כל קטע, כי פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית.

מוסכמה. אם $a<b$ אז נגדיר:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.2 אינטגרל לא מסוים

הגדרה 10.2 (אינטגרל לא מסוים). יהי I קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית ב־I. פונקציה $F : I \to \mathbb{R}$ נקראת **אינטגרל לא מסוים של** f כאשר קיים $a \in I$ כך שמתקיים:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{לכל} x \in I$$

תרגיל. יהיו $F, G : I \to \mathbb{R}$ אינטגרלים לא מסוימים של f. הוכיחו כי קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$F(x) - G(x) = c$ לכל $x \in I$.

3.3 רציפות האינטגרל הלא מסוים

טענה 10.3 (רציפות האינטגרל הלא מסוים). יהי I קטע, תהי $f : I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית, ויהי $F : I \to \mathbb{R}$ אינטגרל לא מסוים של f.

1. F **רציפה** ב־I.
2. אם בנוסף f **חסומה** ב־I, אז F היא **פונקציית ליפשיץ** (קיים $M > 0$ כך ש־$|F(x) - F(y)| \le M|x - y|$ לכל $x, y \in I$).

הוכחה. יהי $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. יהי $x_0 \in I$.
שלב 1: כיוון ש־f אינטגרבילית מקומית, קיים $\eta > 0$ כך ש־f חסומה ב־$I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ על ידי $M > 0$.
שלב 2: לכל x עם $|x - x_0| < \eta$:

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \le M|x - x_0|$$

שלב 3: נבחר $\delta = \min\left(\eta, \frac{\varepsilon}{M}\right)$. אז לכל x עם $|x - x_0| < \delta$:

$$|F(x) - F(x_0)| \le M \cdot |x - x_0| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

לכן F רציפה ב־x_0. ∎

3.4 המשפט היסודי הראשון

טענה 10.4 (גזירות האינטגרל הלא מסוים). יהי I קטע, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית, ו־F אינטגרל לא מסוים של f.
אם f **רציפה ב־**x_0 אז F **גזירה ב־**x_0 ומתקיים:

$$\boxed{F'(x_0) = f(x_0)}$$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. כיוון ש־f רציפה ב־x_0, קיים $\delta > 0$ כך שלכל t עם $|t - x_0| < \delta$:

$$|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחן את המנה:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t - f(x_0)$$

נשתמש בכך ש־$f(x_0) = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0)\, \mathrm{d}t$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - f(x_0)\right) \mathrm{d}t$$

לכל $|x - x_0| < \delta$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot |x - x_0| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

לכן $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, כלומר $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

3.5 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי

משפט 10.5 (המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי). יהי I קטע ותהי $f : I \to \mathbb{R}$. **אם f רציפה** אז **קיימת ל־f פונקציה קדומה ב־I.**

הוכחה. נבחר $a \in I$ ונגדיר:

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$$

לפי טענה 10.4, בכל נקודה $x \in I$ (שם f רציפה) מתקיים $F'(x) = f(x)$. לכן F היא קדומה של f ב־I. ■

משמעות המשפט. המשפט קושר בין שני מושגים נפרדים לכאורה:

- **גזירה** — מציאת קצב שינוי מקומי
- **אינטגרציה** — מציאת שטח מצטבר

המשפט מראה שאינטגרציה היא הפעולה ההפוכה לגזירה!

3.6 נוסחת ניוטון־לייבניץ (המשפט היסודי השני)

משפט 10.6 (נוסחת ניוטון־לייבניץ). תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. **אם** f **אינטגרבילית ובעלת קדומה ב־**$[a,b]$ אז **לכל קדומה** F **של** f מתקיים:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

סימון. $F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$

הוכחה (רעיון). **שלב 1:** בוחרים חלוקה $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ עם $\lambda(\Pi) < \delta$ כך שסכום רימן קרוב לאינטגרל.

שלב 2: לפי משפט לגרנז', בכל תת־קטע $[x_i, x_{i+1}]$ קיים $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ כך ש:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

שלב 3: סכימה:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \big[F(x_{i+1}) - F(x_i)\big] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = S(f, \Pi, \xi)$$

שלב 4: בגבול $\lambda(\Pi) \to 0$, סכום רימן שואף לאינטגרל:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \blacksquare$$

3.7 דוגמאות לחישוב אינטגרלים

דוגמה 1.

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

דוגמה 2. חישוב $\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$.

ידוע כי $x\ln x - x$ היא קדומה של $\ln x$ (ניתן לאמת בגזירה). לכן:

$$\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = \big[x\ln x - x\big]_1^e = (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 0 - (-1) = 1$$

דוגמה 3. חישוב $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.
משתמשים בזהות $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

3.8 גזירה של אינטגרל עם גבולות משתנים

מסקנה 1 (גבול עליון משתנה). אם f רציפה ב־I ו־$a \in I$, אז הפונקציה:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

מקיימת $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in I$.

מסקנה 2 (גבולות כלליים — כלל לייבניץ). אם f רציפה, ו־$u(x), v(x)$ גזירות, אז:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, \mathrm{d}t = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)}$$

הוכחה. נגדיר $G(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ כך ש־$G'(x) = f(x)$.
אז:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, \mathrm{d}t = G(v(x)) - G(u(x))$$

לפי כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dx}\left[G(v(x)) - G(u(x))\right] = G'(v(x)) \cdot v'(x) - G'(u(x)) \cdot u'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

■

דוגמה. חשבו $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.
פתרון: כאן $u(x) = 0$, $v(x) = x^2$, $f(t) = e^{-t^2}$.
לפי כלל לייבניץ:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x - e^{-0} \cdot 0 = 2xe^{-x^4}$$

3.9 הערות חשובות

הערה 10.7.

1. **נגזרת של פונקציה גזירה** אינה בהכרח אינטגרבילית רימן.
דוגמה: הפונקציה $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ עבור $x \neq 0$ ו־$F(0) = 0$ היא גזירה ב־$[0, 1]$, אך F' אינה חסומה ולכן אינה אינטגרבילית רימן.

2. יש דוגמאות לנגזרת **חסומה** שאינה אינטגרבילית רימן (למשל פונקציית Volterra).

3.10 תרגילים

תרגיל 1. חשבו:

1. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$

תרגיל 2. מצאו את $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3}$.
רמז: השתמשו בכלל לופיטל או בפיתוח טיילור.

תרגיל 3. תהי f רציפה ב־$\mathbb{R}$. הוכיחו כי אם $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, אז $f \equiv 0$.

תרגיל 4. תהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

4 שיטות אינטגרציה לאינטגרל מסוים

יחידה זו עוסקת בהתאמת שיטות האינטגרציה (אינטגרציה בחלקים ושינוי משתנה) לאינטגרל המסוים, ובמשפט ערך הביניים לאינטגרלים.

4.1 אינטגרציה בחלקים לאינטגרל מסוים

טענה 10.8 (אינטגרציה בחלקים). תהיינה $F, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ב־$[a, b]$, ונגזרותיהן F', g' אינטגרביליות רימן ב־$[a, b]$. אז:

$$\boxed{\int_a^b F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

הוכחה. נגדיר $H(x) = F(x) \cdot g(x)$. לפי כלל המכפלה:

$$H'(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

לכן $F'(x)g(x) = H'(x) - F(x)g'(x)$.

נשלב ונשתמש בנוסחת ניוטון־לייבניץ:

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b H'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= H(b) - H(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

■

סימון מקוצר.

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

דוגמה 1. חישוב $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.

נגדיר $F(x) = e^x$ (כך ש־$F'(x) = e^x$), $g(x) = x$ (כך ש־$g'(x) = 1$).

פתרון:

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

דוגמה 2. חישוב $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$.

נגדיר $F(x) = -\cos x$ (כך ש־$F'(x) = \sin x$), $g(x) = x$.

פתרון:

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi - (-1) - 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \pi$$

דוגמה 3. חישוב $\int_1^e (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.
נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$.
אז $du = \frac{2\ln x}{x} dx$, $v = x$.

$$\int_1^e (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 2\ln x \,\mathrm{d}x = e - 2\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$$

מדוגמה קודמת: $\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x = 1$. לכן:

$$\int_1^e (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x = e - 2 \cdot 1 = e - 2$$

4.2 שינוי משתנה — גרסה ראשונה

טענה 10.9 (שינוי משתנה — גרסה 1). תהיינה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ו־$g : [c,d] \to [a,b]$. נניח כי:

- f בעלת קדומה ואינטגרבילית ב־$[a,b]$
- g גזירה ב־$[c,d]$
- $(f \circ g) \cdot g'$ אינטגרבילית על $[c,d]$

אז:

$$\boxed{\int_c^d (f \circ g)(x) g'(x) \,\mathrm{d}x = \int_{g(c)}^{g(d)} f(t) \,\mathrm{d}t}$$

דרך לזכור. אם $t = g(x)$, אז $dt = g'(x)dx$. הגבולות משתנים: $x = c \Rightarrow t = g(c)$, $x = d \Rightarrow t = g(d)$.

4.3 שינוי משתנה — גרסה שנייה

טענה 10.10 (שינוי משתנה — גרסה 2). תהיינה $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ו־$g : [c,d] \to [a,b]$ כך ש:

- f אינטגרבילית ב־$[a,b]$
- g גזירה והפיכה
- g' רציפה

אז $(f \circ g) \cdot g'$ אינטגרבילית ומתקיים:

$$\boxed{\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f \circ g)(t) g'(t) \,\mathrm{d}t}$$

הערה 10.11. מתקיים גם:

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))|g'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(תלוי בסדר הגבולות ובסימן של g').

4.4 דוגמאות לשינוי משתנה

דוגמה 1. חישוב $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (שטח רבע מעגל היחידה).
נגדיר $x=\sin t$ על $[0,\frac{\pi}{2}]$. אז:

- $dx=\cos t\,dt$
- $x=0\Rightarrow t=0$
- $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

פתרון:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

משתמשים בזהות $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$:

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right) = \frac{\pi}{4}$$

טעות נפוצה בשינוי משתנה.
בניסיון לחשב $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ עם $g(x)=\frac{1}{x}$:
הבעיה: הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x}$ **אינה מוגדרת** ב־$0\in[-1,1]$!
יתרה מכך:

- $g([-1,0))=(-\infty,-1]$
- $g((0,1])=[1,+\infty)$

התחום והטווח אינם תואמים, ואין להפעיל את משפט שינוי המשתנה.
הפתרון הנכון: חישוב ישיר:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

דוגמה 2. חישוב $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \,\mathrm{d}x$.
משתמשים בזהות $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) \,\mathrm{d}x = [\tan x - x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

4.5 משפט ערך הביניים לאינטגרלים

טענה 10.12 (משפט ערך הביניים לאינטגרלים). תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. אז **קיים** $\mu \in [\inf f, \sup f]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$$

יתר על כן: אם f **רציפה** אז **קיים** $c \in [a,b]$ כך ש:

$$\boxed{\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)}$$

הוכחה (למקרה הרציף). נסמן $m = \inf f$, $M = \sup f$.
מחד:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

לכן:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x}{b-a} \in [m, M]$$

אם f רציפה, לפי משפט ערך הביניים של ויירשטראס קיים $c \in [a,b]$ כך ש־$\mu = f(c)$. ■

פרשנות גאומטרית. הערך $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ הוא **הממוצע** של f על הקטע $[a,b]$.
המשפט אומר שקיימת נקודה c שבה ערך הפונקציה שווה בדיוק לממוצע.

4.6 משפט ערך הביניים המומשקל

טענה 10.13 (גרסה ממושקלת). תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות. נניח כי $g\geq 0$. אז **קיים** $\mu\in[\inf f,\sup f]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

יתר על כן: אם f **רציפה** אז **קיים** $c\in[a,b]$ כך ש:

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה. הוכיחו כי $\frac{2}{3\pi}\leq\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\pi}$.

פתרון: נגדיר $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$ על $[2\pi,3\pi]$.

שימו לב ש־$\sin x\geq 0$ בקטע $[2\pi,3\pi]$ (זה לא נכון! $\sin x\geq 0$ רק ב־$[2\pi,3\pi]$ אם $x\in[2\pi,3\pi]$... בעצם $\sin(2\pi)=0$, $\sin(3\pi)=0$, ובאמצע $\sin x$ עובר דרך ערכים חיוביים ושליליים).

תיקון: נשתמש בטענה 10.13 בקטע $[2\pi,3\pi]$ כאשר $g(x)=\sin x\geq 0$ עבור $x\in[2\pi,3\pi]$ (זה נכון כי הקטע $[2\pi,3\pi]$ מכסה בדיוק חצי מחזור שלם של סינוס מ־0 עד 0 דרך 1).

לפי טענה 10.13 קיים $c\in[2\pi,3\pi]$ כך ש:

$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{c}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

נחשב:

$$\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=[-\cos x]_{2\pi}^{3\pi}=-\cos(3\pi)+\cos(2\pi)=-(-1)+1=2$$

לכן:

$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{c}$$

כיוון ש־$c\in[2\pi,3\pi]$, מתקיים $\frac{1}{3\pi}\leq\frac{1}{c}\leq\frac{1}{2\pi}$, ומכאן:

$$\frac{2}{3\pi}\leq\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}$$

4.7 נוסחת רדוקציה

נוסחת רדוקציה. לכל $n\geq 2$:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x}$$

הוכחה. נכתוב:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$$

אינטגרציה בחלקים עם $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x \,\mathrm{d}x$:

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \,\mathrm{d}x, \quad v = -\cos x$$

$$= \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

הגבולות מתאפסים. משתמשים ב־$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$$

נסמן $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$:

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \quad\Rightarrow\quad nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad\Rightarrow\quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

■

4.8 תרגילים

תרגיל 1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int_0^1 x \arctan x \,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \,\mathrm{d}x$ (השתמשו בנוסחת הרדוקציה)
3. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x$

תרגיל 2. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

תרגיל 3. חשבו $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \,\mathrm{d}x$.
רמז: פתחו את $\ln(1+x)$ לטור טיילור ושלבו איבר־איבר.

תרגיל 4. הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$:

1. אם f זוגית: $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
2. אם f אי־זוגית: $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

5 אינטגרלים לא אמיתיים ויישומים

יחידה זו עוסקת באינטגרלים לא אמיתיים (אינטגרלים עם גבולות אינסופיים או עם נקודות סינגולריות), מבחני התכנסות, ויישומים גאומטריים.

5.1 הגדרת אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

הגדרה 11.1 (אינטגרל לא אמיתי — גבול אינסופי). תהי $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה **אינטגרבילית מקומית** ב־$[a, +\infty)$.

נגדיר $F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{לכל} x \in [a, +\infty)$$

נאמר כי **האינטגרל הלא אמיתי** של f בקטע $[a, +\infty)$ **מתכנס** כאשר קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

במקרה זה נסמן:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

אם הגבול אינו קיים או אינו סופי — נאמר שהאינטגרל **מתבדר** (או לא מתכנס).

הערה 11.2. באופן דומה מגדירים אינטגרל לא אמיתי על קטעים מהצורה $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

5.2 דוגמאות בסיסיות

דוגמה 1. $\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$ — **לא מתכנס**.

פתרון:

$$\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x$$

הגבול $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ אינו קיים (מתנדנד בין -1 ל־1).

דוגמה 2. $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ עבור $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

פתרון:

$$\int_0^x e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)$$

הגבול ב־$x \to +\infty$ קיים וסופי **אם ורק אם** $\alpha < 0$.

במקרה זה:

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}(0-1) = -\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|}$$

דוגמה 3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

פתרון:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

דוגמה חשובה — אינטגרל $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

- עבור $\alpha = 1$: $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x \to +\infty$ — **מתבדר**.
- עבור $\alpha \neq 1$: $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$. הגבול קיים וסופי **אם ורק אם** $\alpha > 1$.

סיכום:

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ מתכנס } \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

5.3 אינטגרל לא אמיתי מסוג שני — סינגולריות

הגדרה 11.3 (אינטגרל לא אמיתי — סינגולריות בגבול). תהי $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית מקומית ב־$[a,b)$.

נאמר כי **האינטגרל הלא אמיתי** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס** כאשר קיים וסופי הגבול:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

דוגמה 1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$ — **מתכנס.**
פתרון: יש סינגולריות ב־$x=0$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2 - \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{\varepsilon} = 2$$

דוגמה 2. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ — **מתבדר.**
פתרון:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[-\ln\varepsilon] = +\infty$$

דוגמה חשובה — אינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.
סיכום:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ מתכנס } \Leftrightarrow \alpha < 1}$$

5.4 קריטריון קושי להתכנסות

קריטריון קושי. האינטגרל $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס** אם ורק אם:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M \geq a$ כך שלכל $q > p > M$:

$$\left|\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

5.5 מבחני השוואה

מבחן ההשוואה. תהיינה $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות מקומית עם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ לכל $x \geq a$.

1. אם $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס — אז $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
2. אם $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתבדר — אז $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ מתבדר.

מבחן ההשוואה הגבולי. תהיינה $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ אי־שליליות ואינטגרביליות מקומית.
אם $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, +\infty)$ — אז:

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ מתכנס} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ מתכנס}$$

דוגמה. קבעו האם $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
פתרון: נשווה ל־$g(x) = \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1 \in (0, +\infty)$$

כיוון ש־$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ מתכנס ($\alpha = 2 > 1$), גם $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ **מתכנס**.

5.6 התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

הגדרה 11.11 (התכנסות בהחלט). תהי $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית.
נאמר כי האינטגרל $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס בהחלט** כאשר האינטגרל $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

טענה 11.12. אם האינטגרל **מתכנס בהחלט** אז הוא **מתכנס**.

הוכחה. מקריטריון קושי: לכל $\varepsilon > 0$ קיים M כך שלכל $q > p > M$:

$$\left|\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_p^q |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

לכן $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס. ■

הגדרה (התכנסות בתנאי). אינטגרל שמתכנס אך **לא** מתכנס בהחלט נקרא **מתכנס בתנאי**.

דוגמה. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ — **מתכנס בתנאי**.
(מוכיחים עם קריטריון דיריכלה; האינטגרל $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ מתבדר.)

5.7 קריטריון אבל וקריטריון דיריכלה

טענה 11.20 (קריטריון אבל). תהיינה $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. נניח כי:

1. f רציפה ו־$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
2. g מונוטונית וחסומה.

אז $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס**.

טענה 11.21 (קריטריון דיריכלה). תהיינה $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. נניח כי:

1. f רציפה ו־$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ **חסומה**.
2. g מונוטונית ו־$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

אז $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ **מתכנס**.

דוגמה — שימוש בקריטריון דיריכלה.
הוכיחו כי $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ מתכנס.
פתרון: נגדיר $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

1. $F(x) = \int_1^x \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos x + \cos 1$ חסומה (ערכים בין $\cos 1 - 1$ ל־$\cos 1 + 1$).
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ יורדת ו־$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

לפי קריטריון דיריכלה, האינטגרל מתכנס.

5.8 קשר בין טורים לאינטגרלים

טענה 11.19 (מבחן האינטגרל). תהי $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית, **אי־שלילית ויורדת**.
אז לכל $N \in \mathbb{N}_+$:

$$\sum_{n=1}^{N} f(a+n) \le \int_a^{a+N} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=0}^{N-1} f(a+n)$$

יתר על כן: האינטגרל $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס **אם ורק אם** הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$ מתכנס.

יישום — הטור ההרמוני.
הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ והאינטגרל $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ קשורים.
מהמשפט:

$$\ln(N+1)\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\le 1+\ln N$$

לכן $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sim\ln N$ ובפרט הטור **מתבדר**.

5.9 יישומים גאומטריים

שטח בין עקומות. עבור $f\ge g$ ב־$[a,b]$, השטח בין $y=f(x)$ ל־$y=g(x)$ הוא:

$$\boxed{S=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה. שטח בין $y=x^2$ ו־$y=x$ ב־$[0,1]$.
פתרון: בקטע זה $x\ge x^2$, לכן:

$$S=\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

נפח גוף סיבוב (שיטת הדיסקים). סיבוב השטח מתחת ל־$y=f(x)$ סביב ציר x:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה. נפח כדור ברדיוס R.
מסובבים את $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (חצי מעגל) סביב ציר x:

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)=\pi\cdot\frac{2R^3}{3}+\pi\cdot\frac{2R^3}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}$$

אורך קשת. לעקומה $y=f(x)$ עם f' רציפה:

$$\boxed{L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה. אורך הקשת $y=\frac{x^{3/2}}{3}$ ב־$[0,4]$.
פתרון:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x},\quad 1+[f'(x)]^2=1+\frac{x}{4}=\frac{4+x}{4}$$

$$L=\int_0^4\sqrt{\frac{4+x}{4}}\,\mathrm{d}x=\int_0^4\frac{\sqrt{4+x}}{2}\,\mathrm{d}x$$

נציב $u=4+x$:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}[(4+x)^{3/2}]_0^4=\frac{1}{3}(8^{3/2}-4^{3/2})=\frac{1}{3}(16\sqrt{2}-8)=\frac{8(2\sqrt{2}-1)}{3}$$

שטח פנים של גוף סיבוב. סיבוב הקשת $y=f(x)$ סביב ציר x:

$$\boxed{A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}$$

5.10 תרגילים

תרגיל 1. קבעו התכנסות:

1. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_1^{+\infty}\frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x$

תרגיל 2. חשבו את נפח הגוף הנוצר מסיבוב $y=e^{-x}$ סביב ציר x ב־$[0,+\infty)$.

תרגיל 3. תהי $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ אי־שלילית ואינטגרבילית מקומית. הוכיחו כי אם $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס וגם קיים $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, אז הגבול שווה 0.

תרגיל 4. תהי $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ אי־שלילית, יורדת ואינטגרבילית מקומית. הגדירו:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

הוכיחו כי $\{a_n\}$ מתכנסת.

הערה: זו הדרך להגדיר את **קבוע אוילר־מסקרוני** $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\approx 0.5772$.

תרגיל 5. הוכיחו כי:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

רמז: זהו האינטגרל הגאוסיאני. ההוכחה המלאה משתמשת באינטגרל כפול.