Grafs III

Algorísmica Avançada | Enginyeria Informàtica

Santi Seguí | 2019-2020

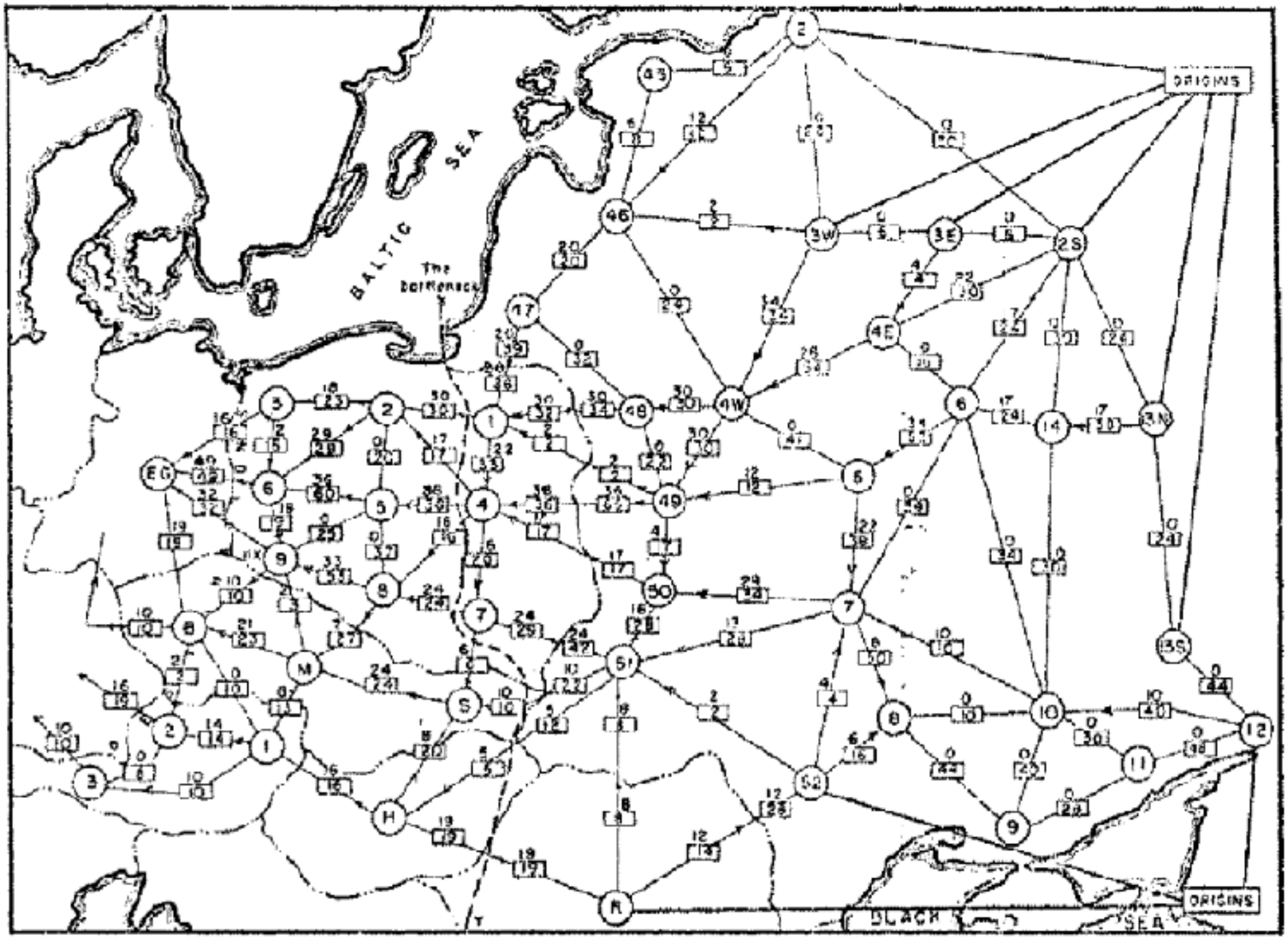
Flux màxim (**max-flow**)

- Imaginem algun flux de dades que va des d’un lloc **s ,** on aquest és produït, fins a un lloc **t** on aquest es consumit amb la mateixa taxa de producció.

- Intuïtivament, el flux en qualsevol punt de la xarxa és la taxa a la qual es mou el material.

- Usos: modelat de flux en canonades, línies d'acoblament, corrents elèctrics, informació en xarxes de comunicació (enrutaments), optimització sobre dades matricials, etc.

- Intuïtivament modelable amb grafs.



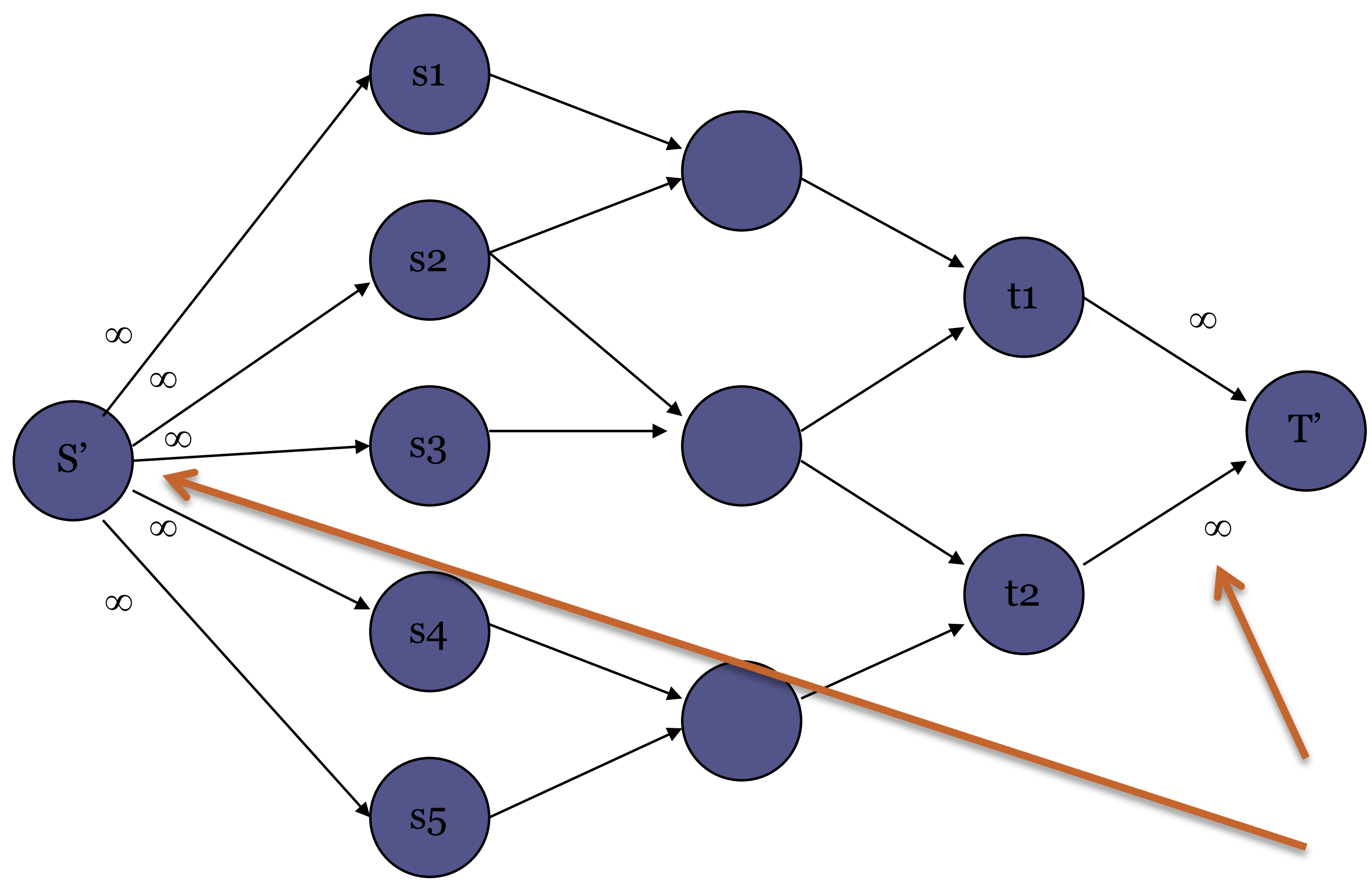
Source: *On the history of the transportation and maximum flow problems.*
Alexander Schrijver in Math Programming, 91: 3, 2002.

Flux màxim (max-flow)

- Cada aresta dirigida pot ser vista com un conducte per on passa el material, segons les següents restriccions:
  - Cada un dels conductes té una capacitat màxima finita (>=0).
  - És compleix la conservació del flux. $\sum f_{input} = \sum f_{output}$ (per node).

- Problema del flux màxim?
  - Quina és la millor taxa a la que podem portar el flux sense violar cap restricció?

Flux màxim (**max-flow**)



Quan podem enviar?

Flux màxim (**max-flow**)

- El mètode iteratiu depèn de tres idees importants:
  - La xarxa residual.
  - Augment de camins.
  - Talls.
- Per tal de resoldre el problema utilitzarem el teorema:
  - **max-flow/min-cut** que caracteritza el flux màxim en termes de talls de la xarxa.

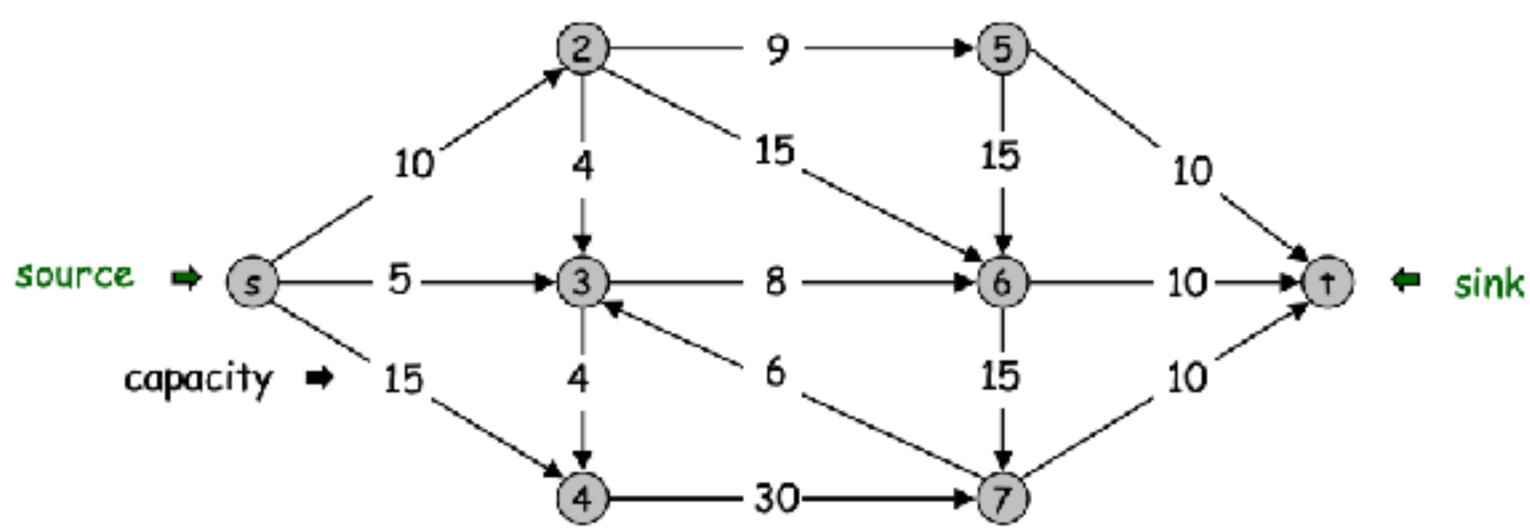
Teorema **max-flow min-cut**

- **Teorema**: El màxim valor d'entre tots els fluxos que arriben a **t** en una xarxa és igual a la capacitat mínima d'entre tots els talls que divideixen la xarxa.

- **Objectiu**: Saturar la xarxa per satisfer el teorema !!!

Xarxa Max-Flow

- Xarxa Max-Flow: G = (V, E,s, t, u)
  - (V,E) = graf dirigit sense arcs
  - Node inicial **s**, i node destí **t**
  - u(e) = capacitat de l'aresta e

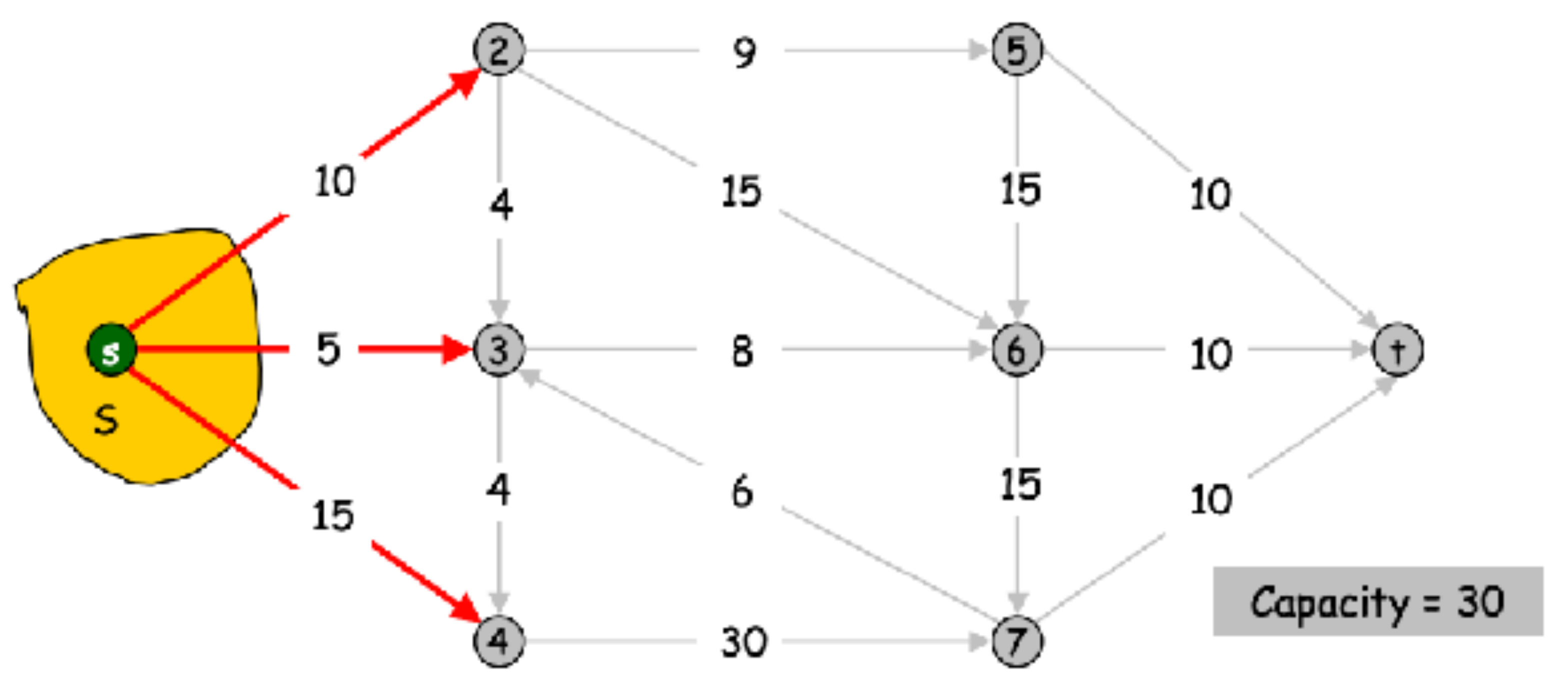


Problema Min-Cut

Un tall és una partició dels nodes (S, T), tal que **s** està dins **S** i **t** està dins **T**.

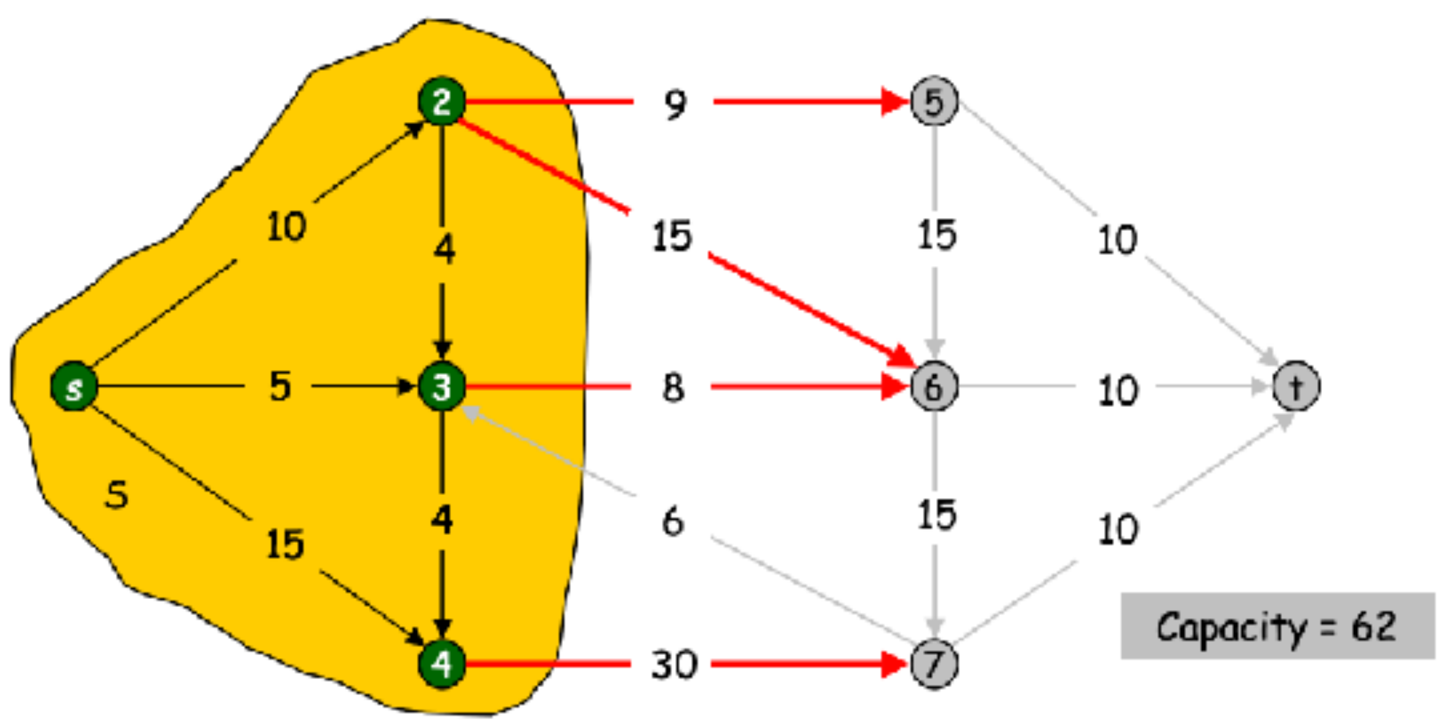
capacitat(S, T) = suma dels pesos que surten de S

$$\sum_{e \text{ out of } S} u(e) \quad := \sum_{\substack{(v,w) \in E \\ v \in S,\ w \in T}} u(v,w).$$



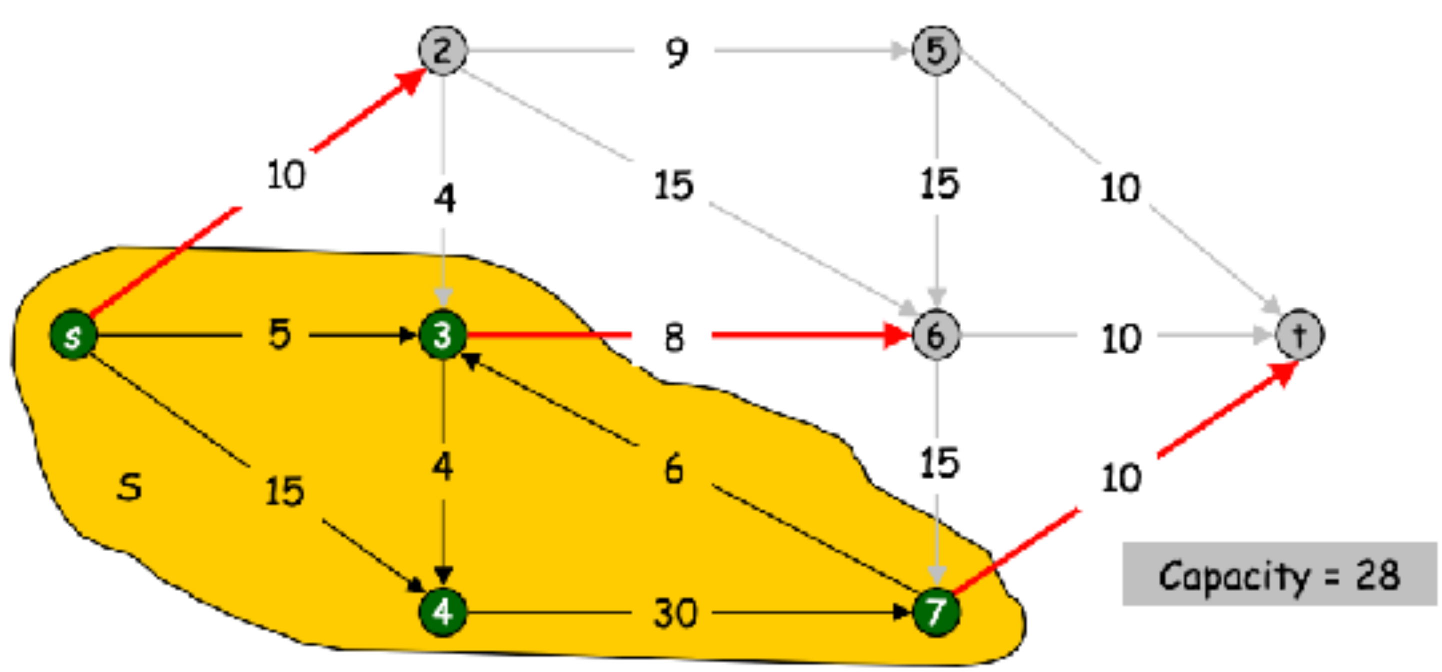
Un tall és una partició dels nodes (S, T), tal que **s** està dins **S** i **t** està dins **T**.

capacitat(S, T) = suma dels pesos que surten de S



Un tall és una partició dels nodes (S, T), tal que **s** està dins **S** i **t** està dins **T**.

capacitat(S, T) = suma dels pesos que surten de S

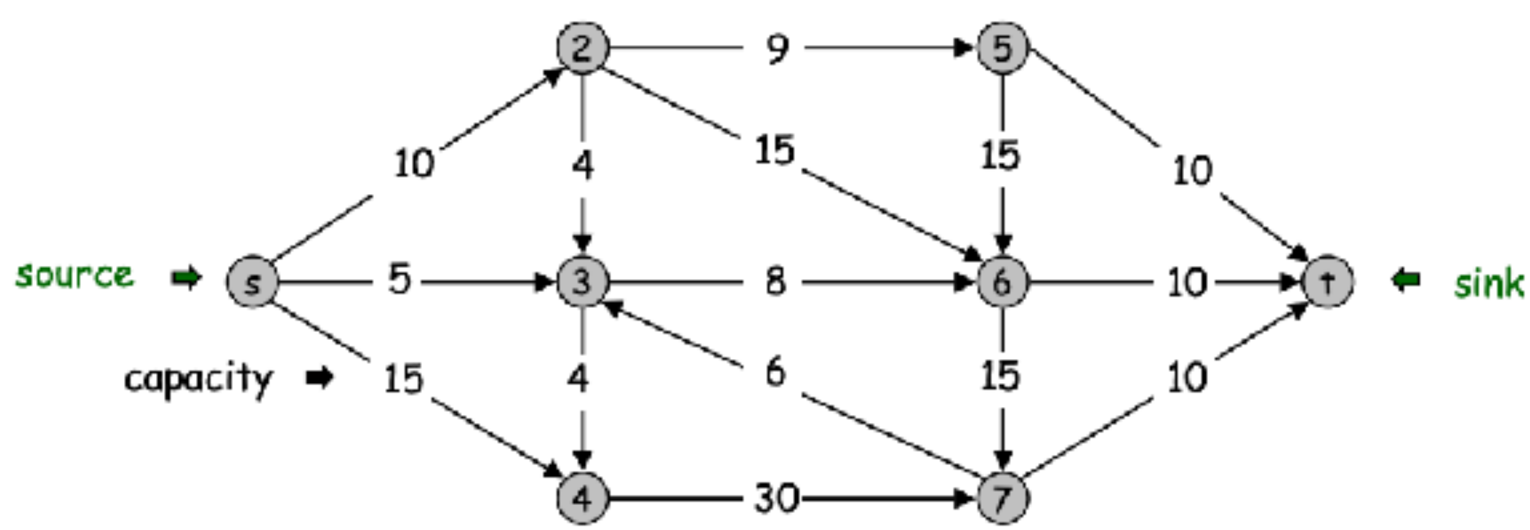


Problema Min-cut. Trobar el tall s-t amb capacitat mínima.

Problema Max-Flow

Problema de **flux màxim**. Assigna el flux a les arestes de la següent forma:

- Igualem el flux d'entrada i de sortida de tots els nodes intermedis
- Maximitzar el flux enviat de s a t

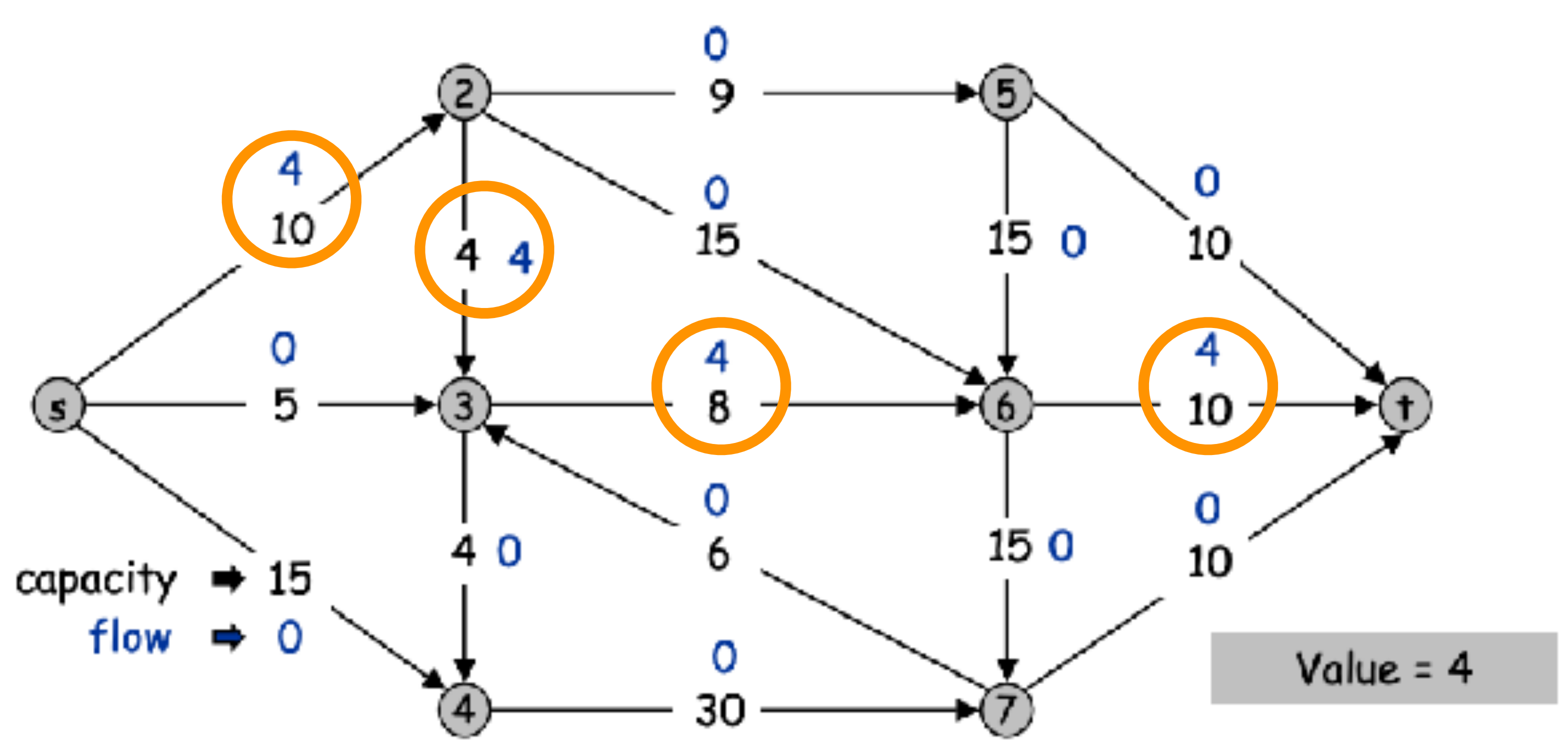


Problema Max-Flow

Un flux **f** és una assignació de pesos a les arestes de manera que:

- Capacitat: $0 \leq f(e) \leq u(e)$
- Conservació del flux: Flux d'entrada a v = Flux de sortida a v

Excepte a **s** i **t**



Ford-Fulkerson Max Flow

Algorithm Ford–Fulkerson

Inputs Given a Network $G = (V, E)$ with flow capacity c, a source node s, and a sink node t

Output Compute a flow f from s to t of maximum value

1. $f(u, v) \leftarrow 0$ for all edges (u, v)
2. While there is a path p from s to t in G_f, such that $c_f(u, v) > 0$ for all edges $(u, v) \in p$:
    1. Find $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
    2. For each edge $(u, v) \in p$
        1. $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$ (*Send flow along the path*)
        2. $f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(p)$ (*The flow might be "returned" later*)

- "←" denotes assignment. For instance, "*largest* ← *item*" means that the value of *largest* changes to the value of *item*.
- "**return**" terminates the algorithm and outputs the following value.

Xarxa residual

- La xarxa residual consisteix en arcs que admeten més flux. Donada una xarxa flux G = (V, E) amb inici **s** i destinació **t**. Sigui **f** el flux en **G**, i consideri un parell de vèrtexs $u, v \in V$, la quantitat de flux addicional que es pot abocar sobre u, v és la capacitat residual.

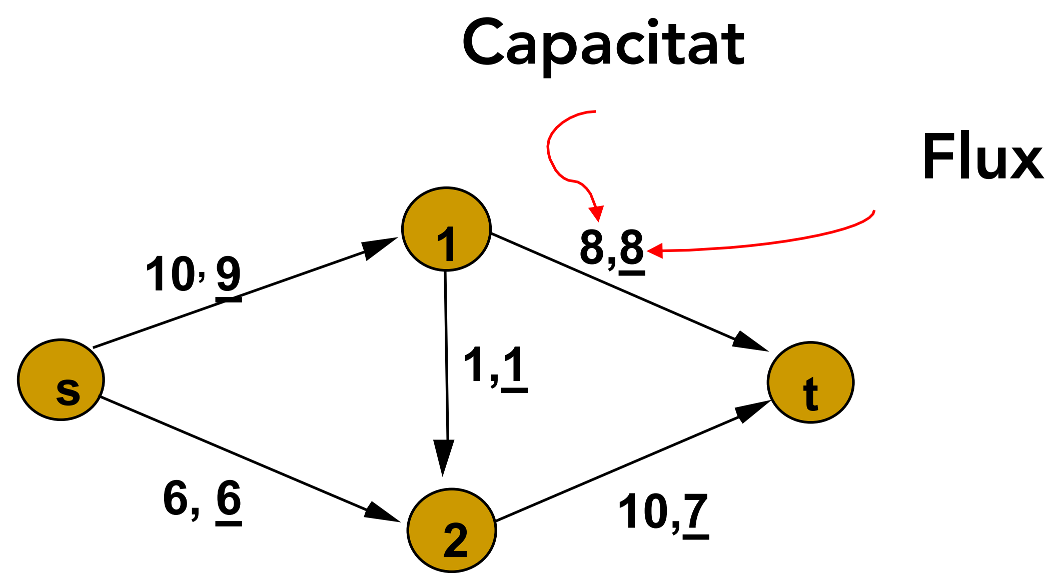
$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$

Exemple:

$c(u,v)=16$, $f(u,v)=10$ —> $c_f(u,v)=6$

Capacitat residual connexió (u,v) en el pas 1

Capacitat residual connexió (u,v) en el pas 2



Taula il·lustrant fluxos i capacitat a través de diferents vores del gràfic anterior

$f_{s,1} = 9$, $c_{s,1} = 10$ (Valid flow since $10 > 9$)

$f_{s,2} = 6$, $c_{s,2} = 6$ (Valid flow since $6 \geq 6$)

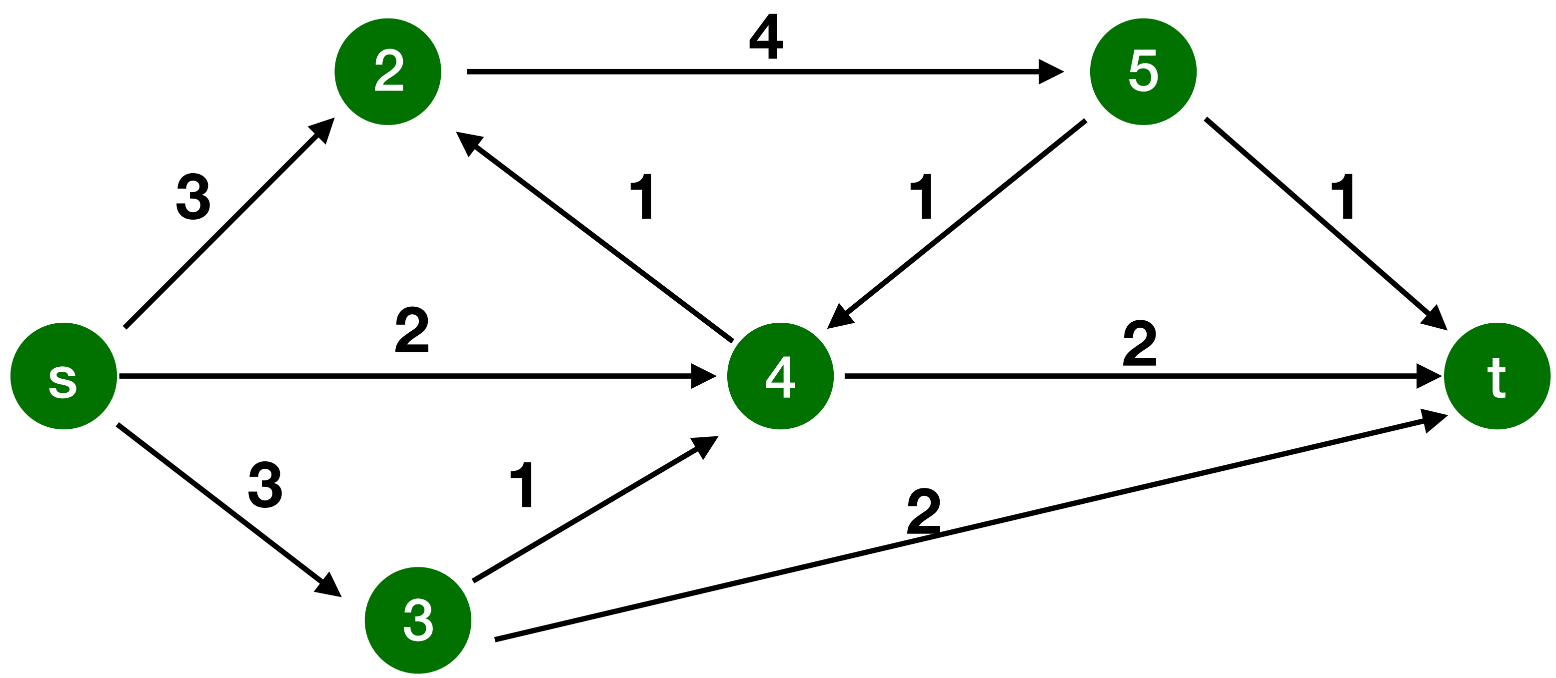
$f_{1,2} = 1$, $c_{1,2} = 1$ (Valid flow since $1 \geq 1$)

$f_{1,t} = 8$, $c_{1,t} = 8$ (Valid flow since $8 \geq 8$)

$f_{2,t} = 7$, $c_{2,t} = 10$ (Valid flow since $10 > 7$)

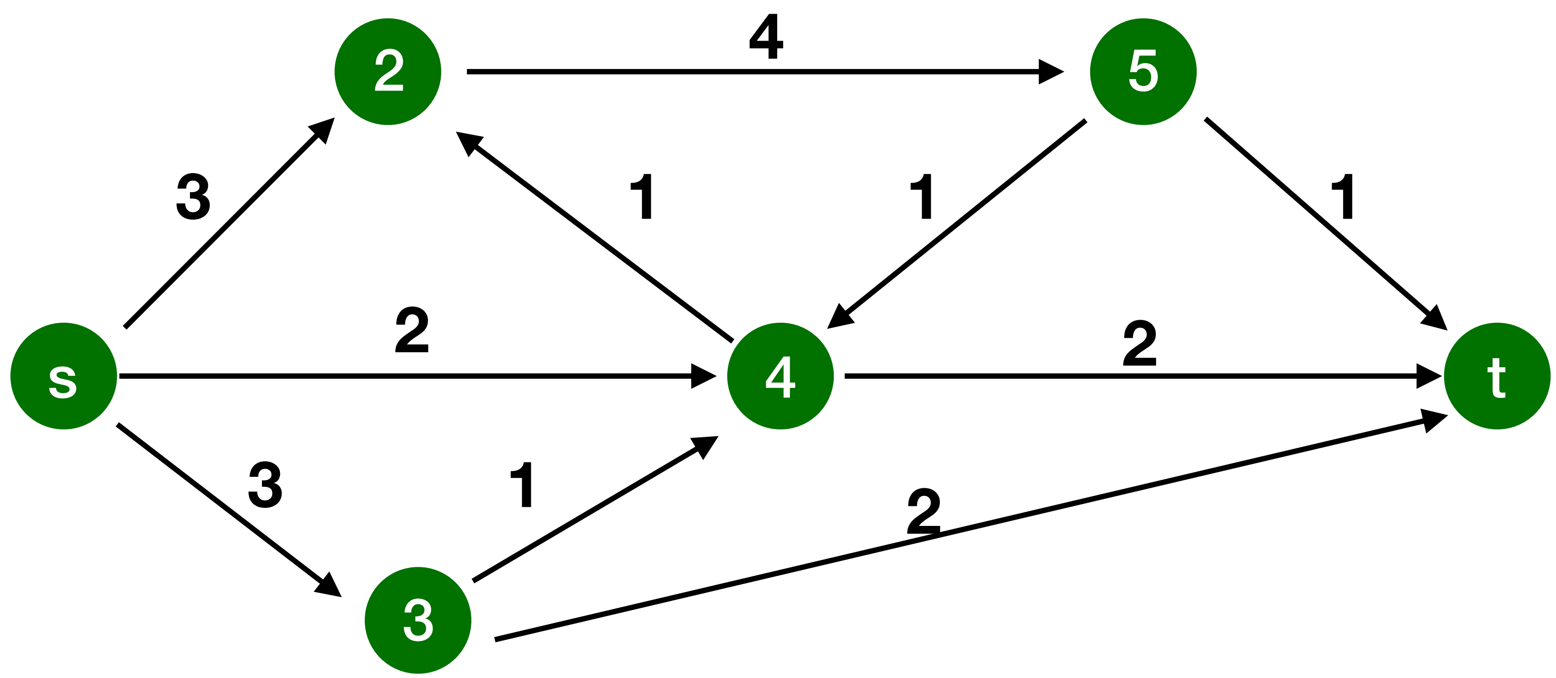
El flux a través dels nodes 1 i 2 també es conserva quan flueixen cap a ells = **flow out**.

Ford-Fulkerson



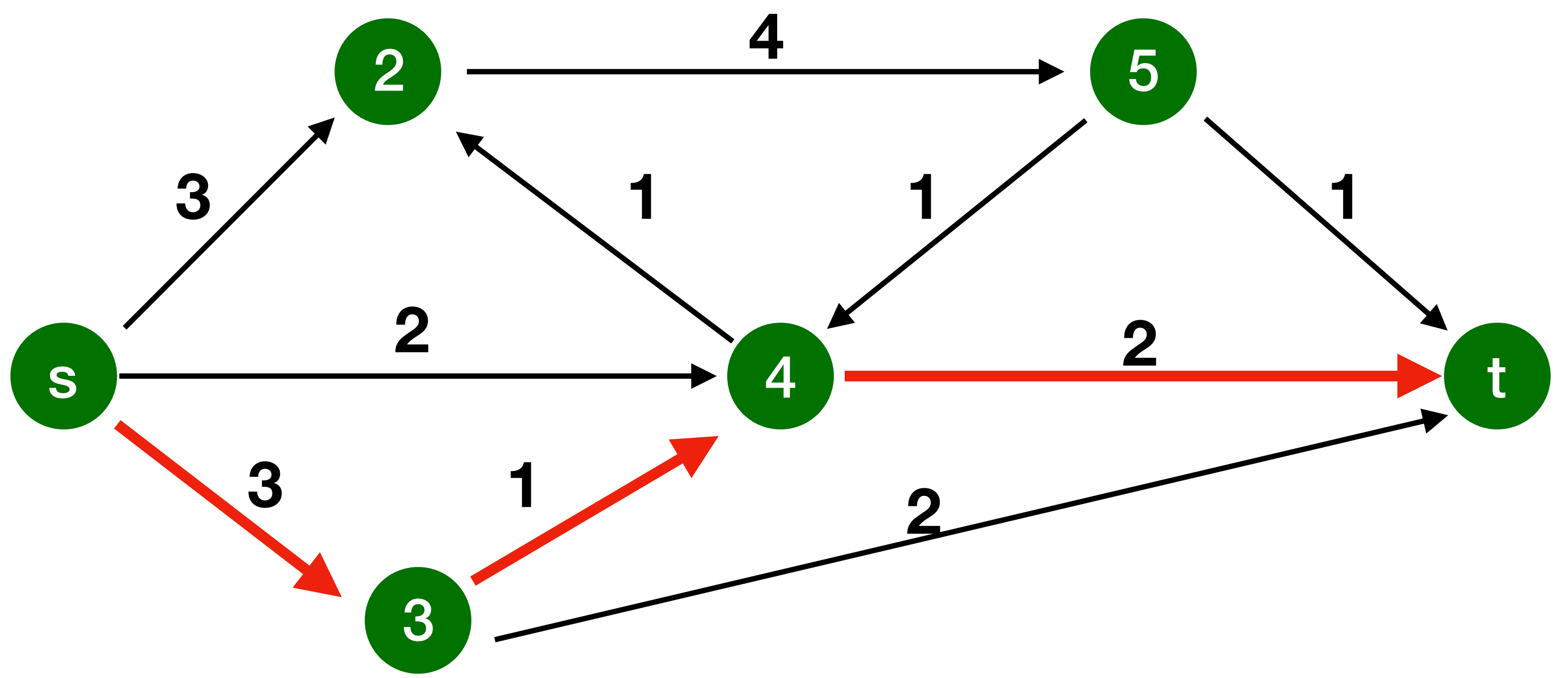
Graf original, i la xarxa residual original

Ford-Fulkerson



Trobar qualsevol camí s-t al graf G(x)

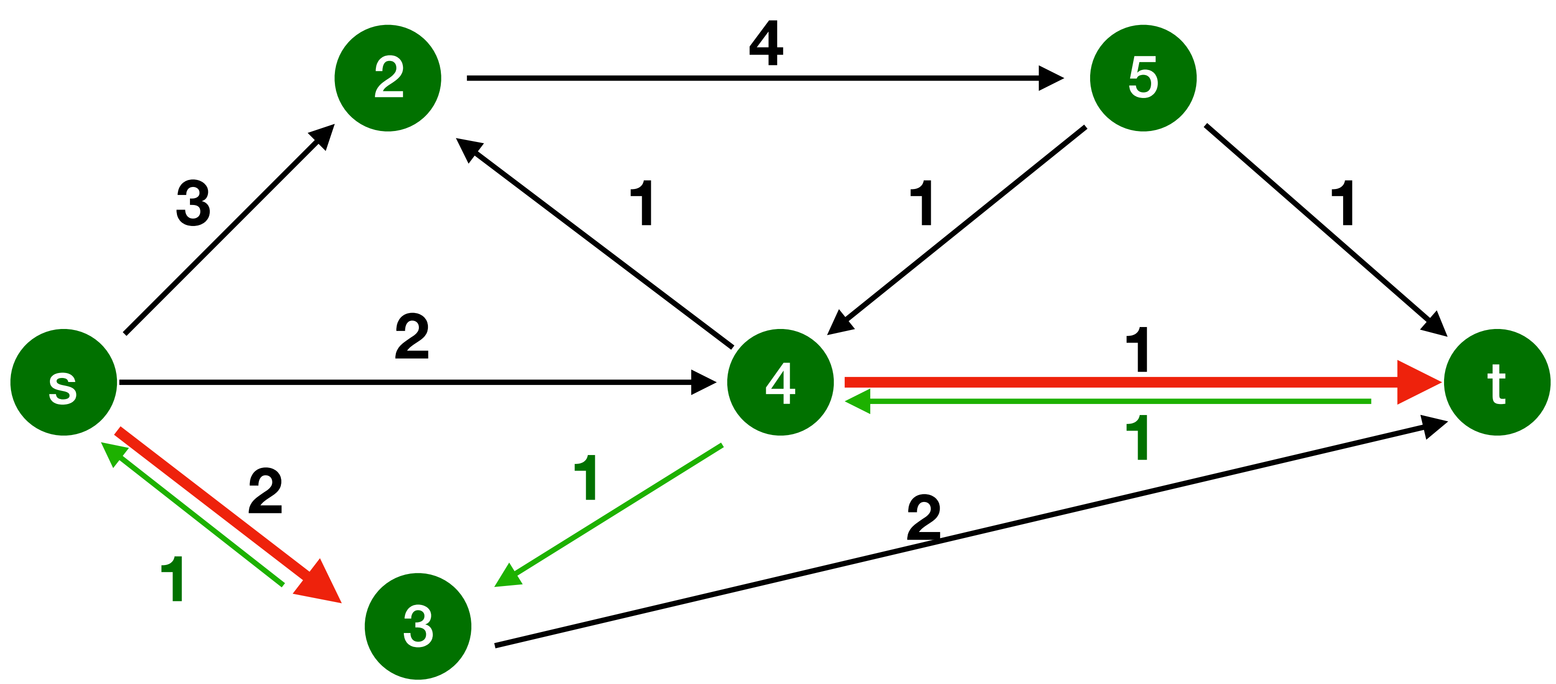
Ford-Fulkerson



Determinar la capacitat Δ del camí

Enviar Δ unitats de flux al camí (mínim capacitat de totes les arestes).

Ford-Fulkerson

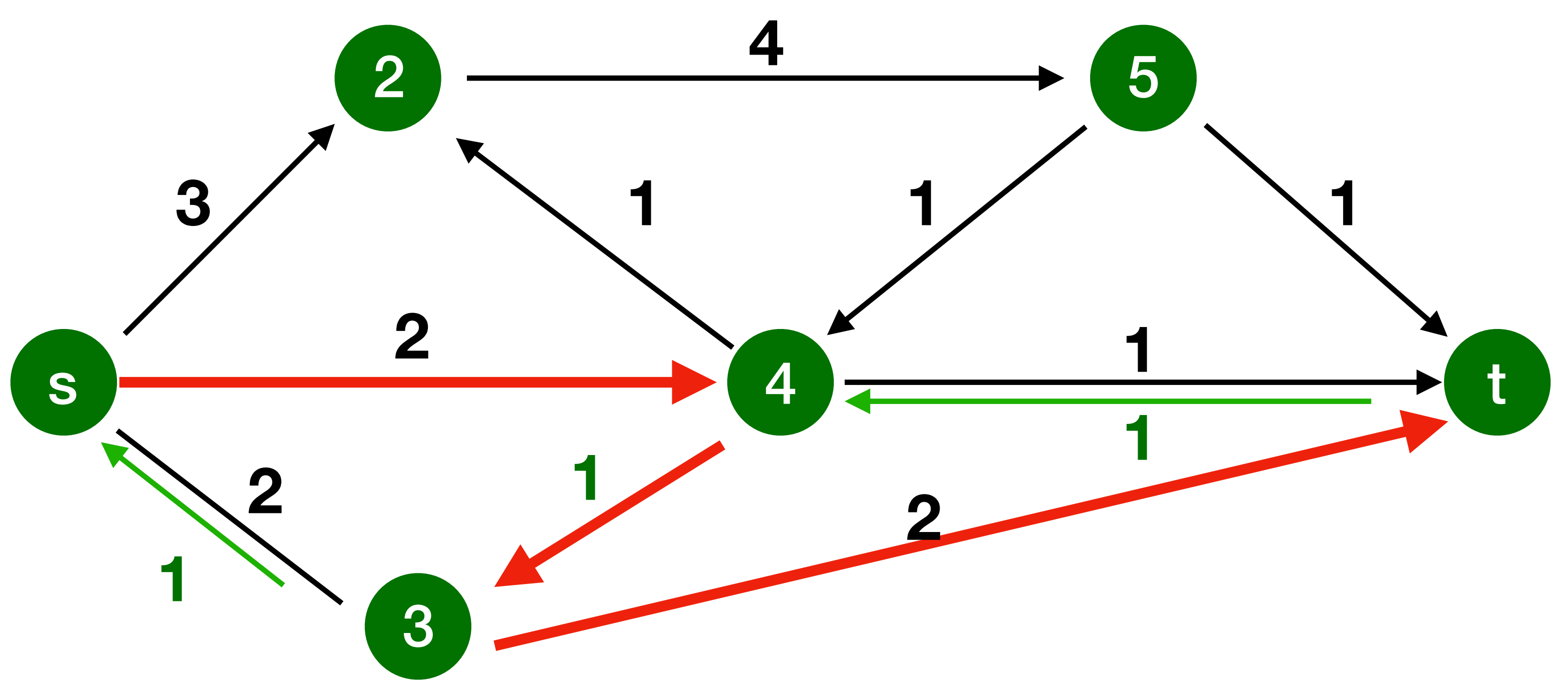


Determinar la capacitat Δ del camí

Enviar Δ unitats de flux al camí.

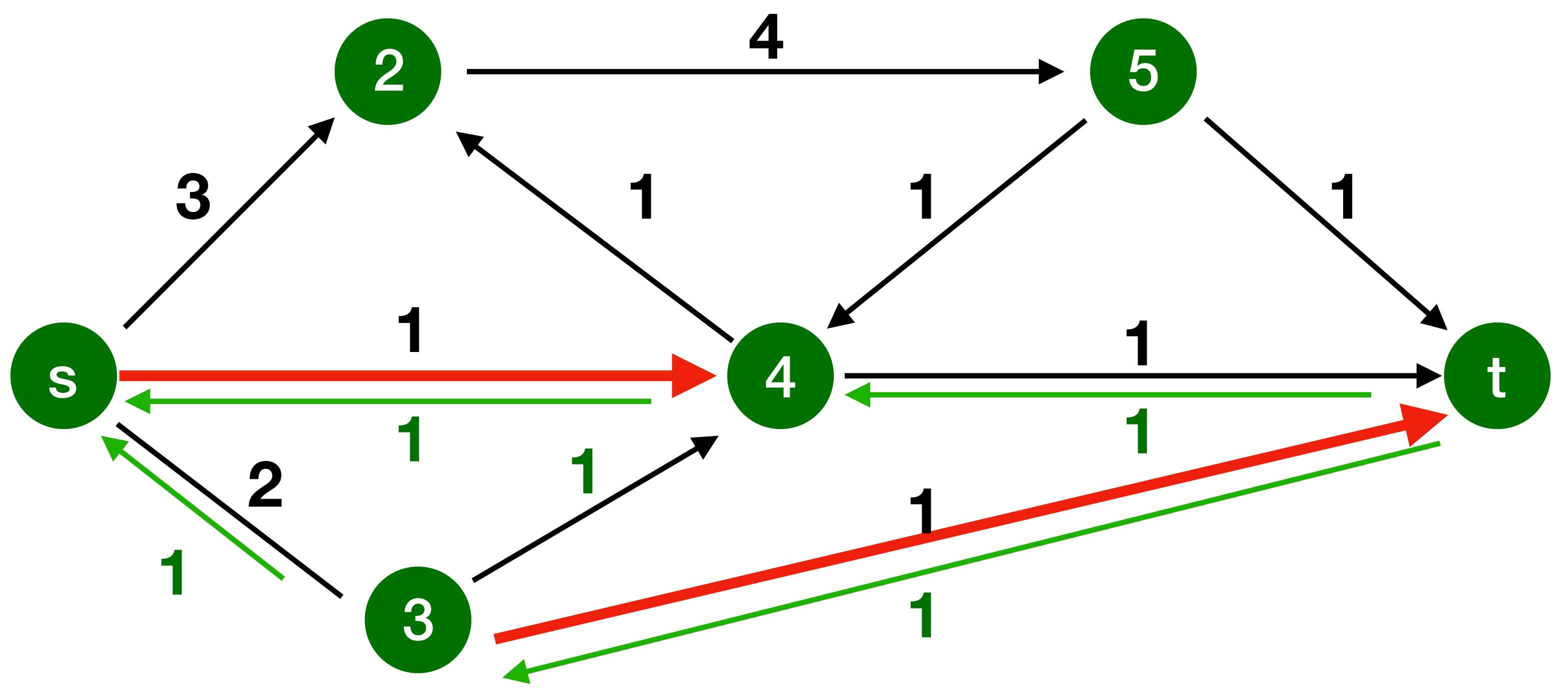
Actualitzar la capacitat residual.

Ford-Fulkerson



Troba algun camí entre s i t

Ford-Fulkerson



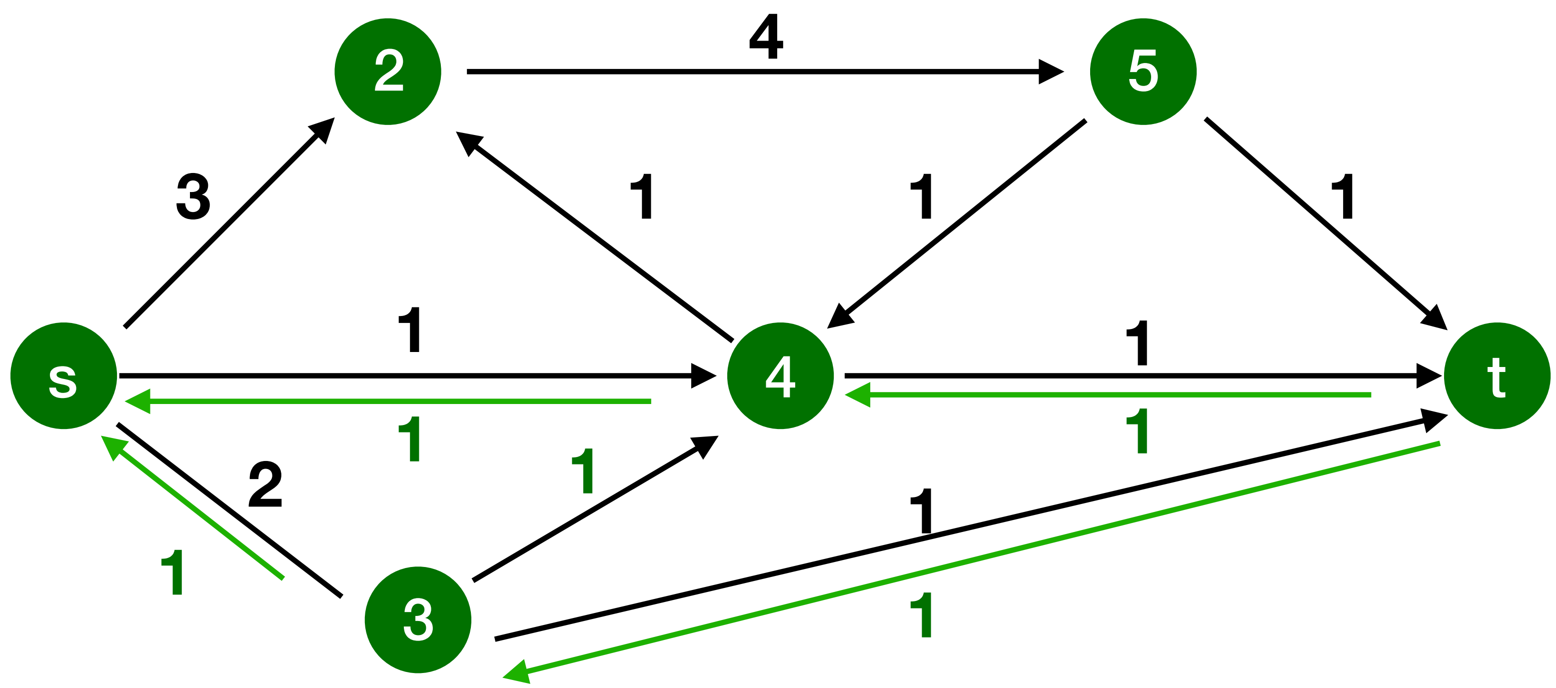
Troba algun camí entre s i t

Determinar la capacitat Δ del camí

Enviar Δ unitats de flux al camí.

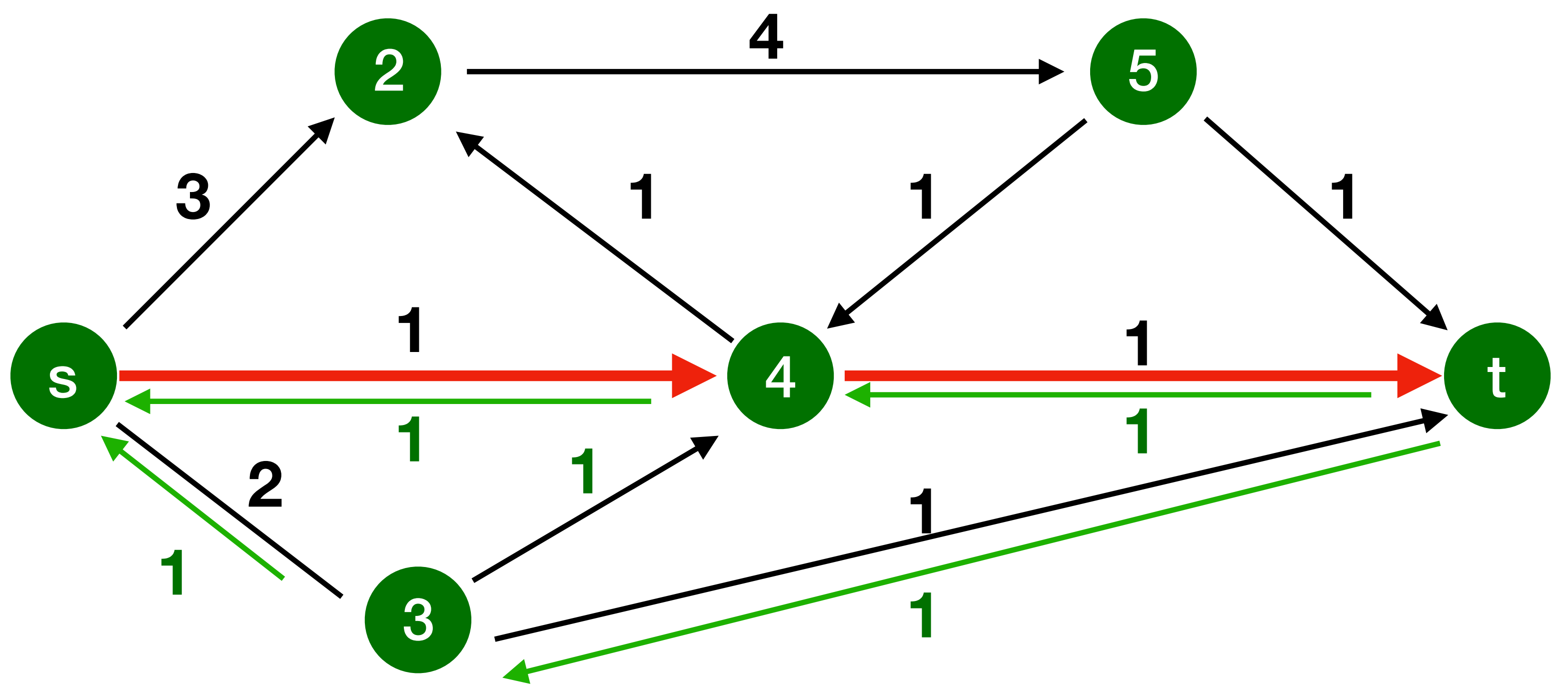
Actualitzar la capacitat residual.

Ford-Fulkerson



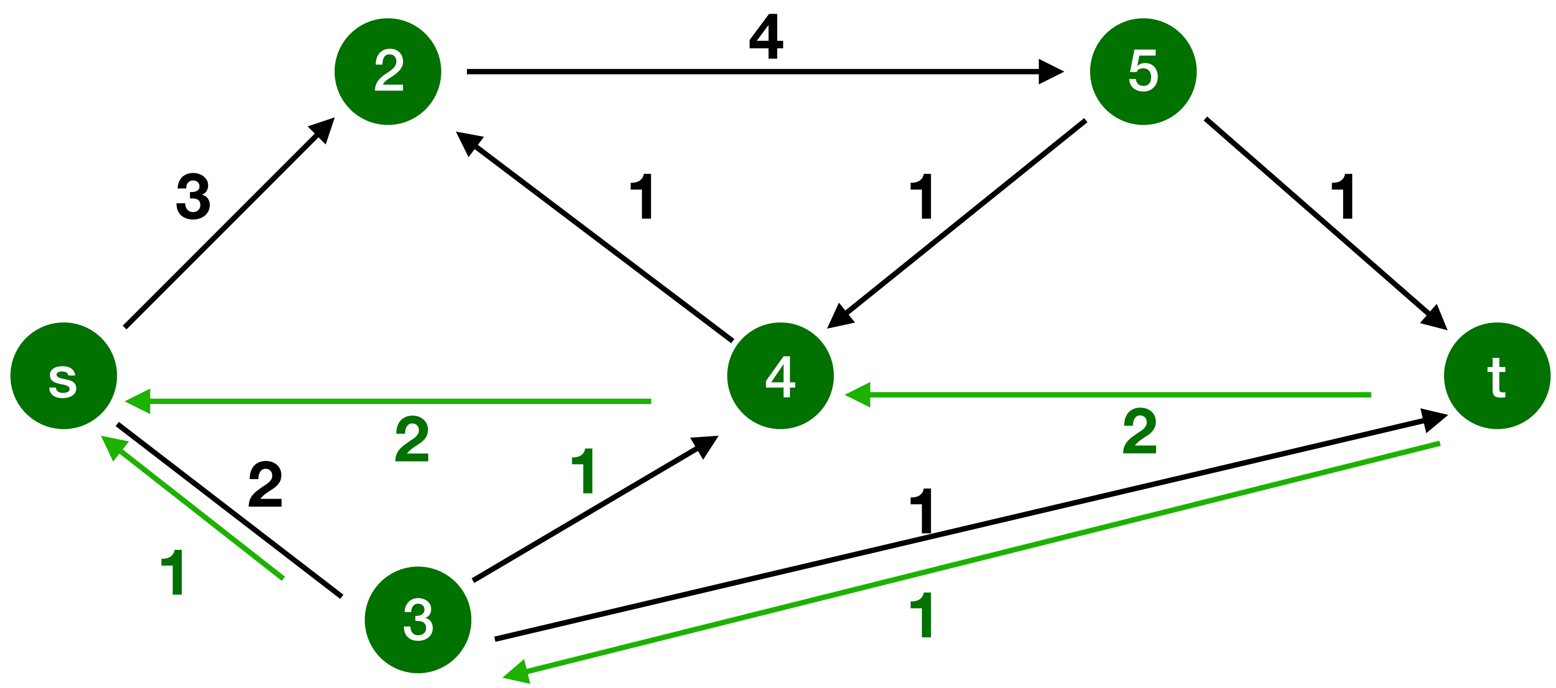
Troba algun camí entre s i t

Ford-Fulkerson



Troba algun camí entre s i t

Ford-Fulkerson



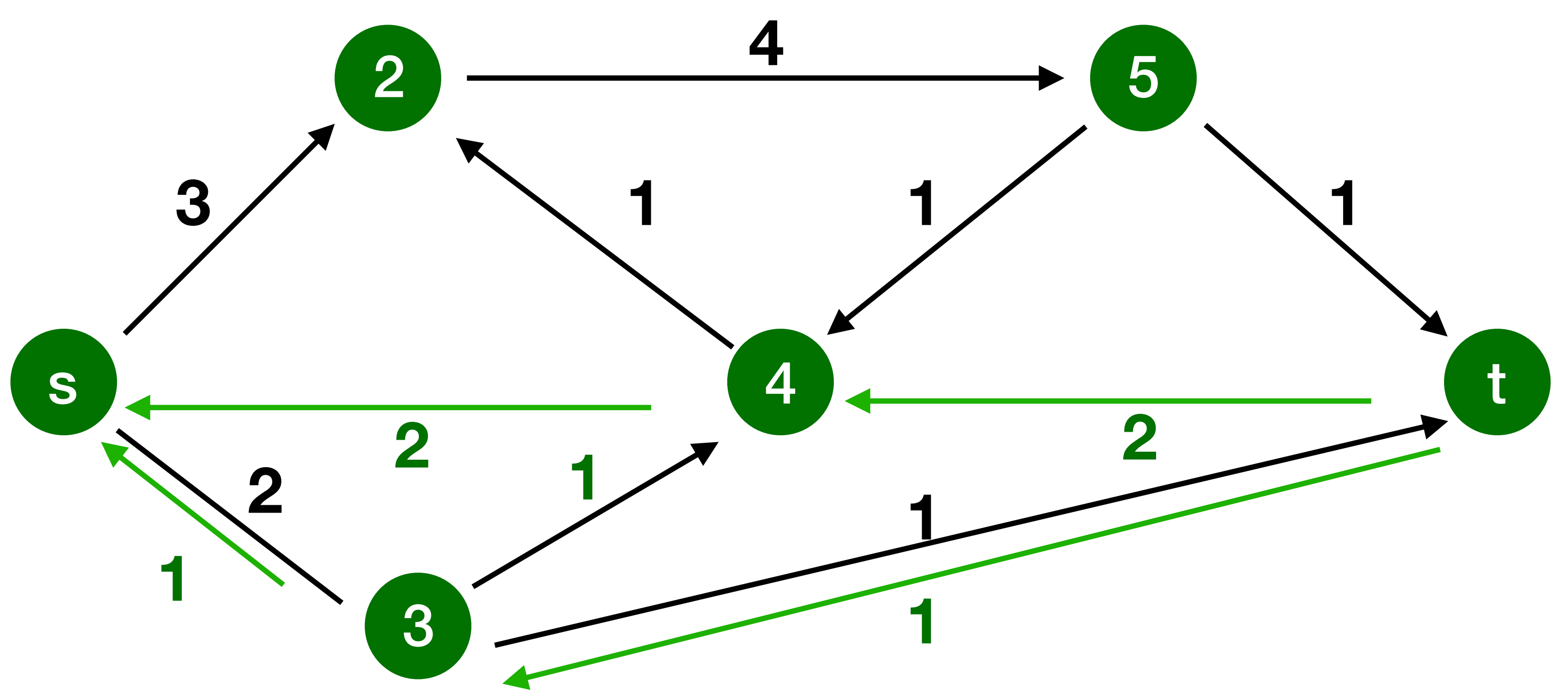
Troba algun camí entre s i t

Determinar la capacitat Δ del camí

Enviar Δ unitats de flux al camí.

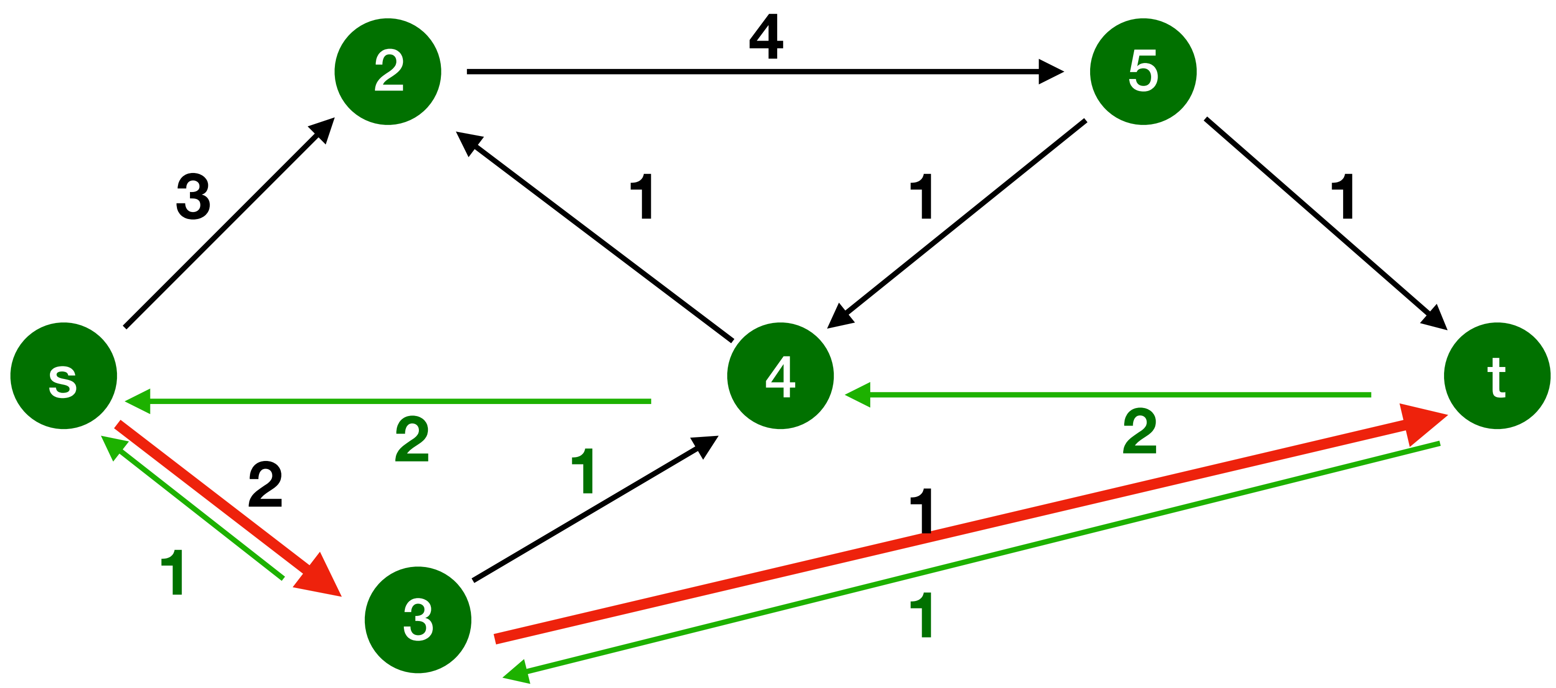
Actualitzar la capacitat residual.

Ford-Fulkerson



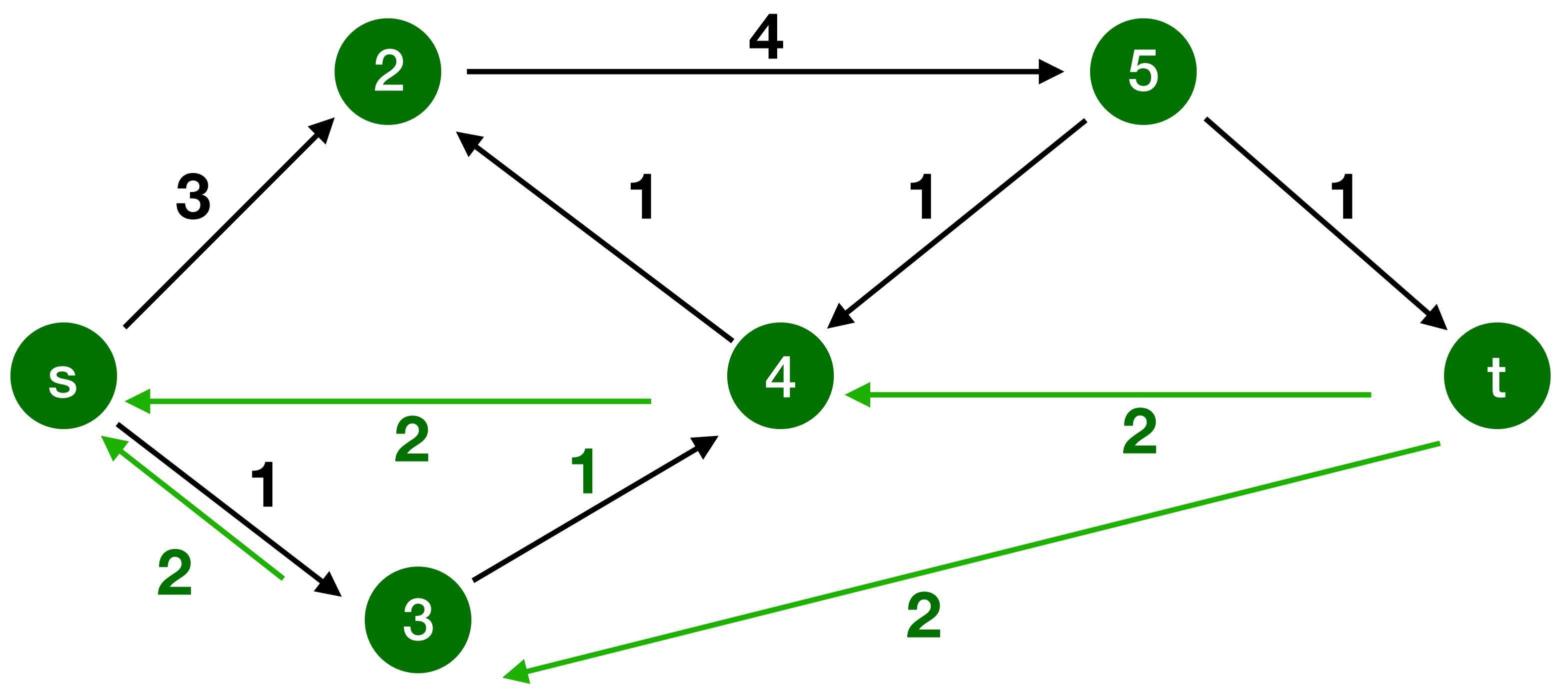
Troba algun camí entre s i t

Ford-Fulkerson



Troba algun camí entre s i t

Ford-Fulkerson



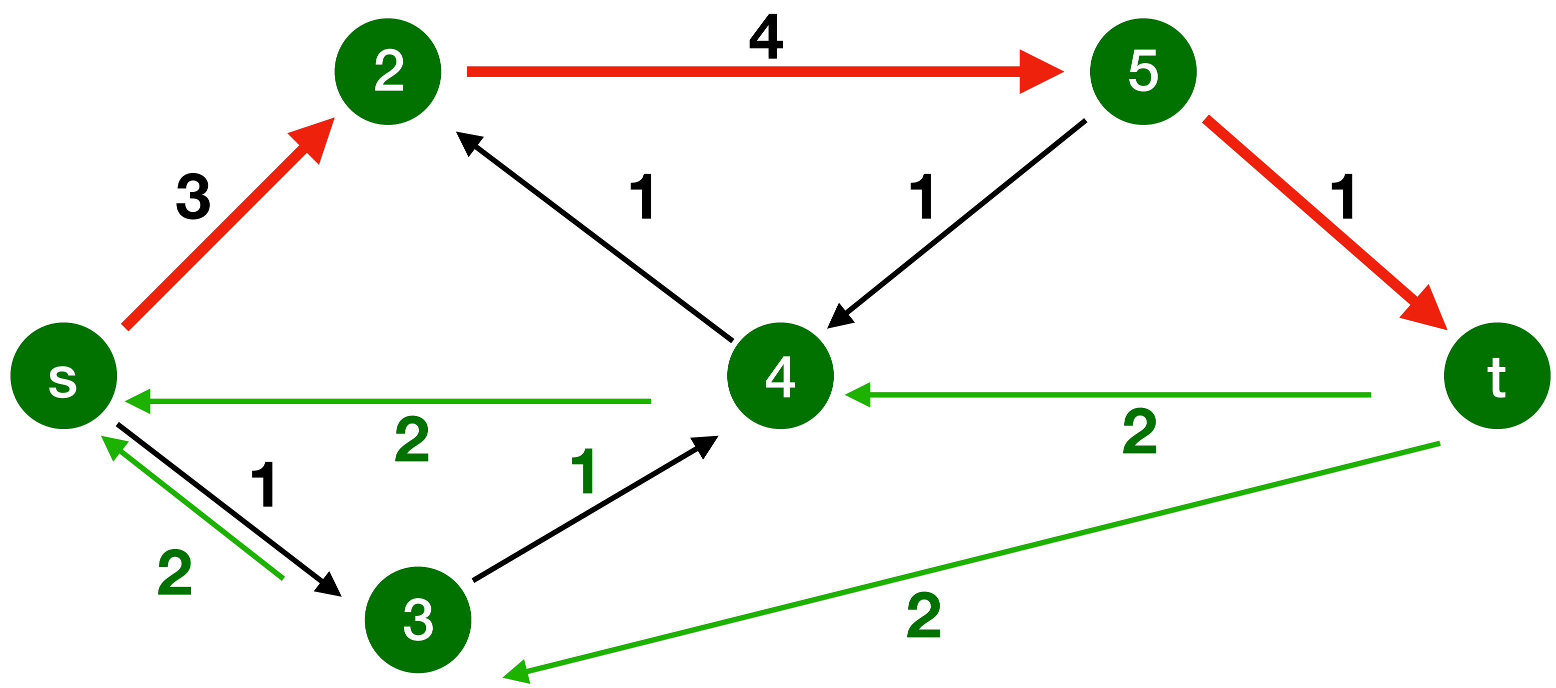
Troba algun camí entre s i t

Determinar la capacitat Δ del camí

Enviar Δ unitats de flux al camí.

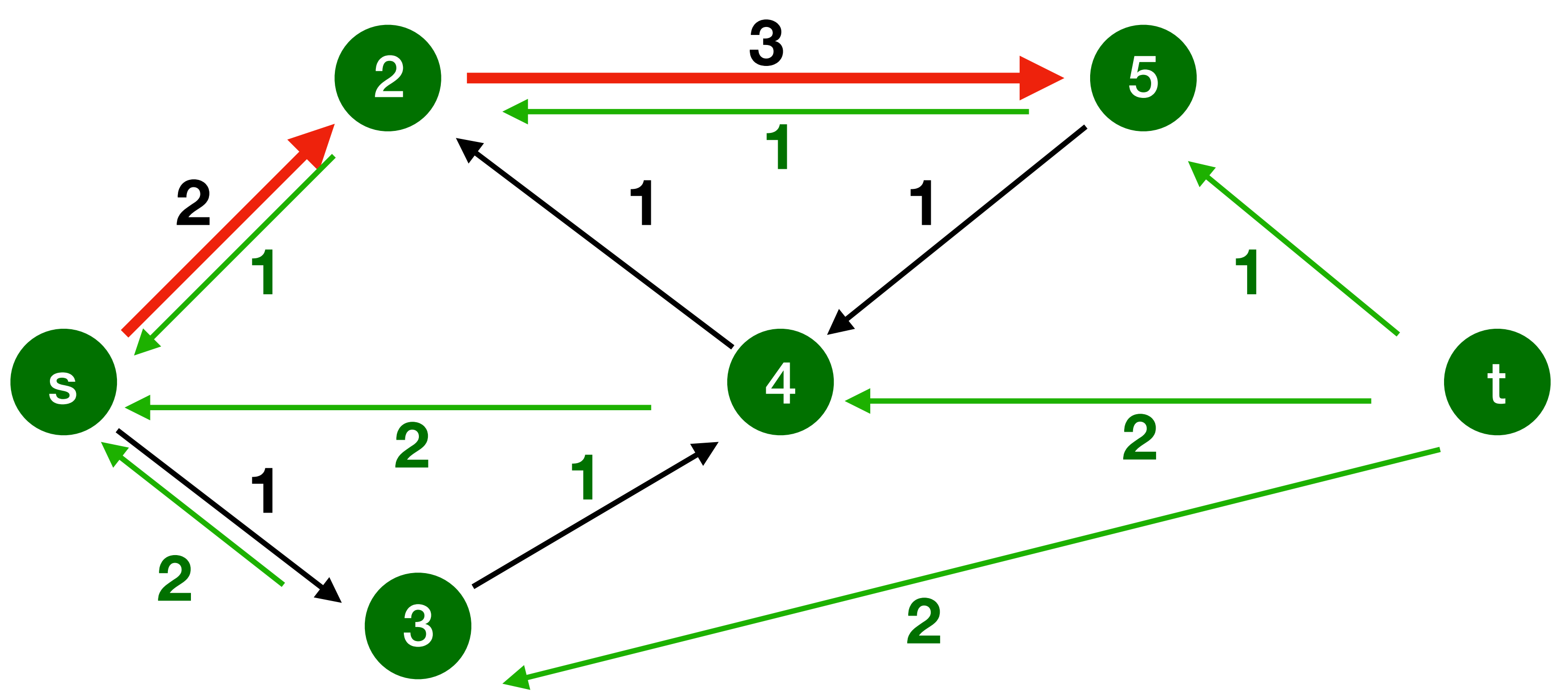
Actualitzar la capacitat residual.

Ford-Fulkerson



Troba algun camí entre s i t

Ford-Fulkerson



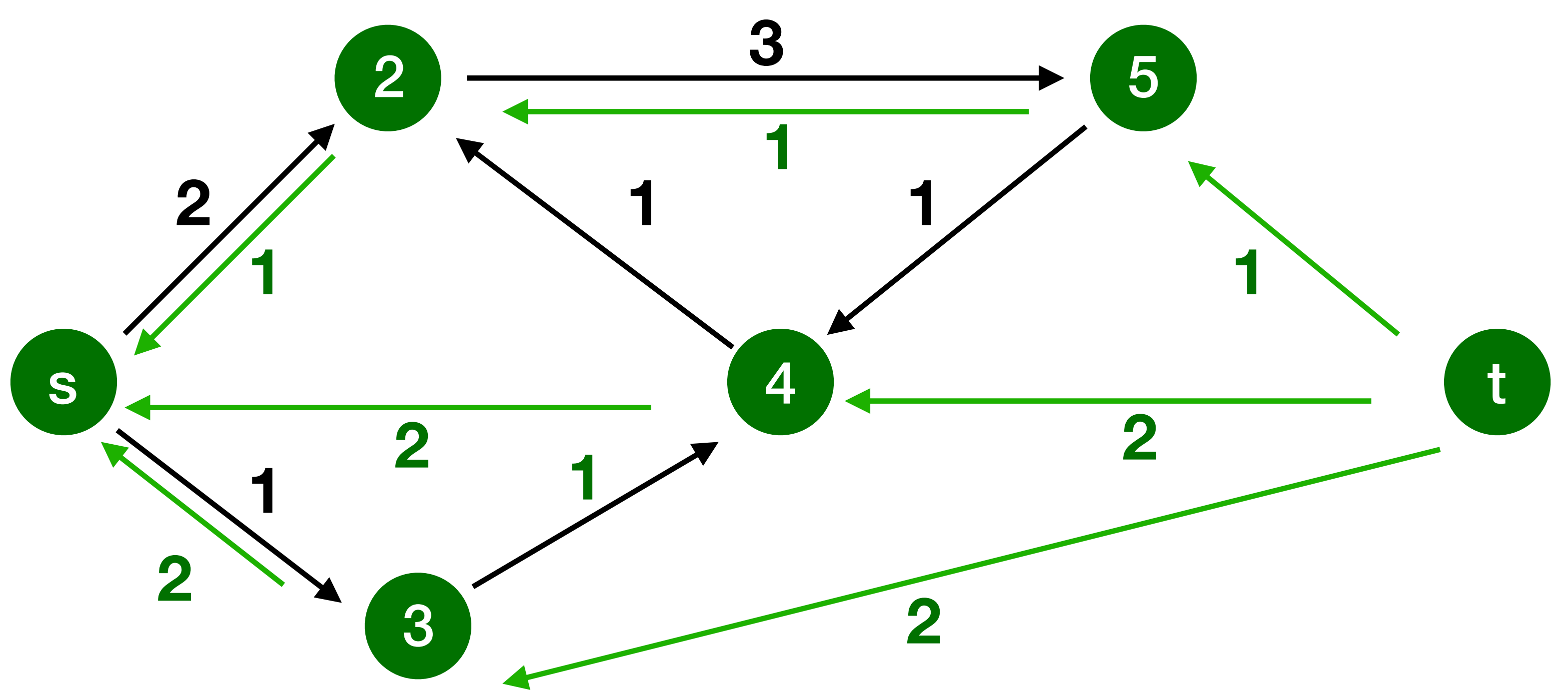
Troba algun camí entre s i t

Determinar la capacitat Δ del camí

Enviar Δ unitats de flux al camí.

Actualitzar la capacitat residual.

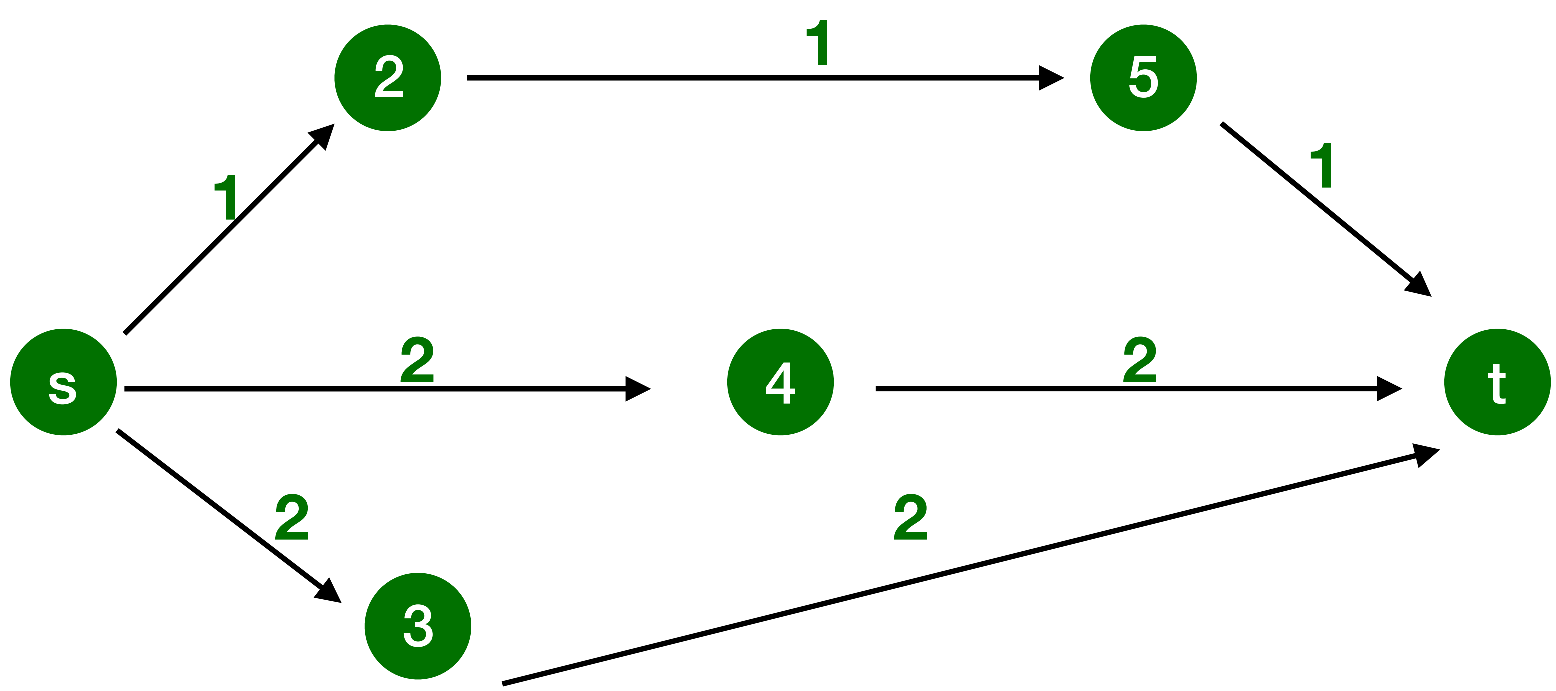
Ford-Fulkerson



Troba algun camí entre s i t

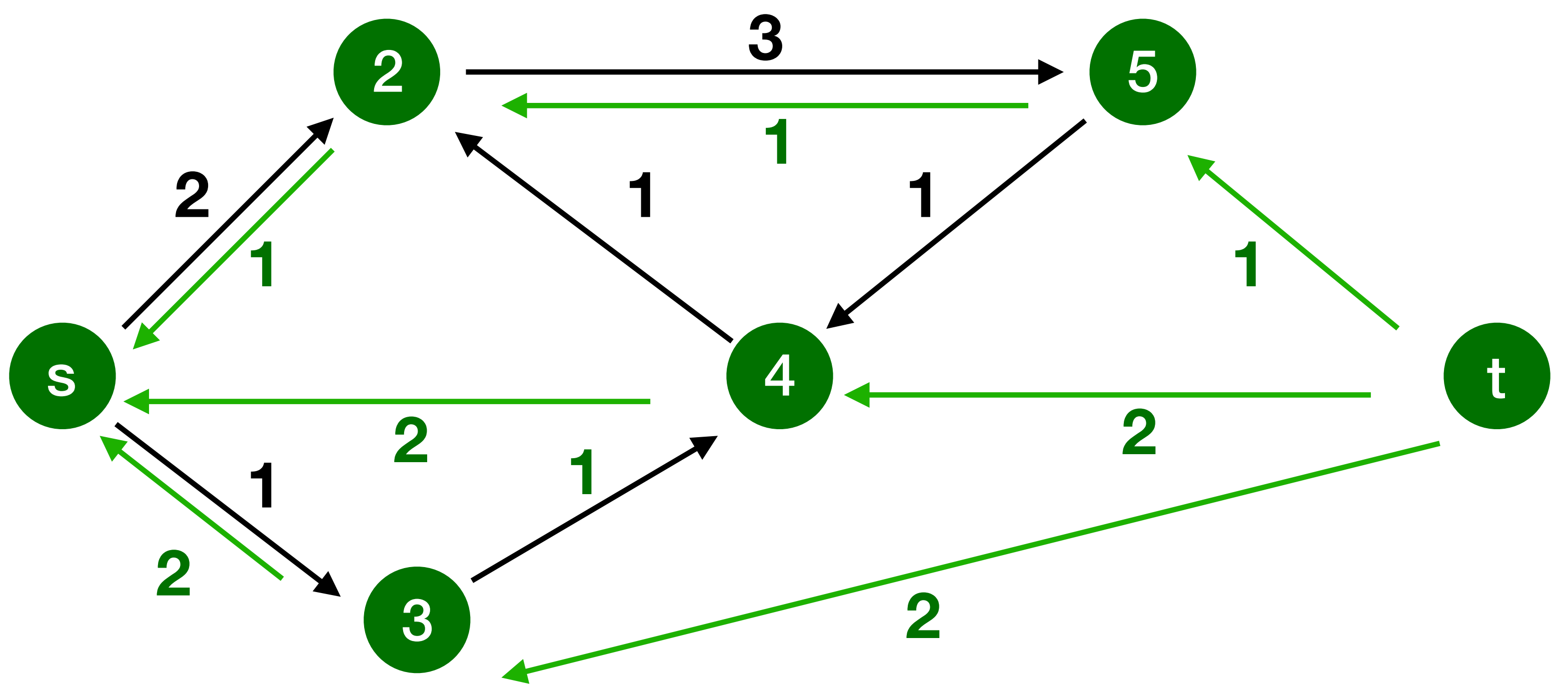
No hi ha cap camí entre s i t. S'ha trobat el flux òptim

Ford-Fulkerson



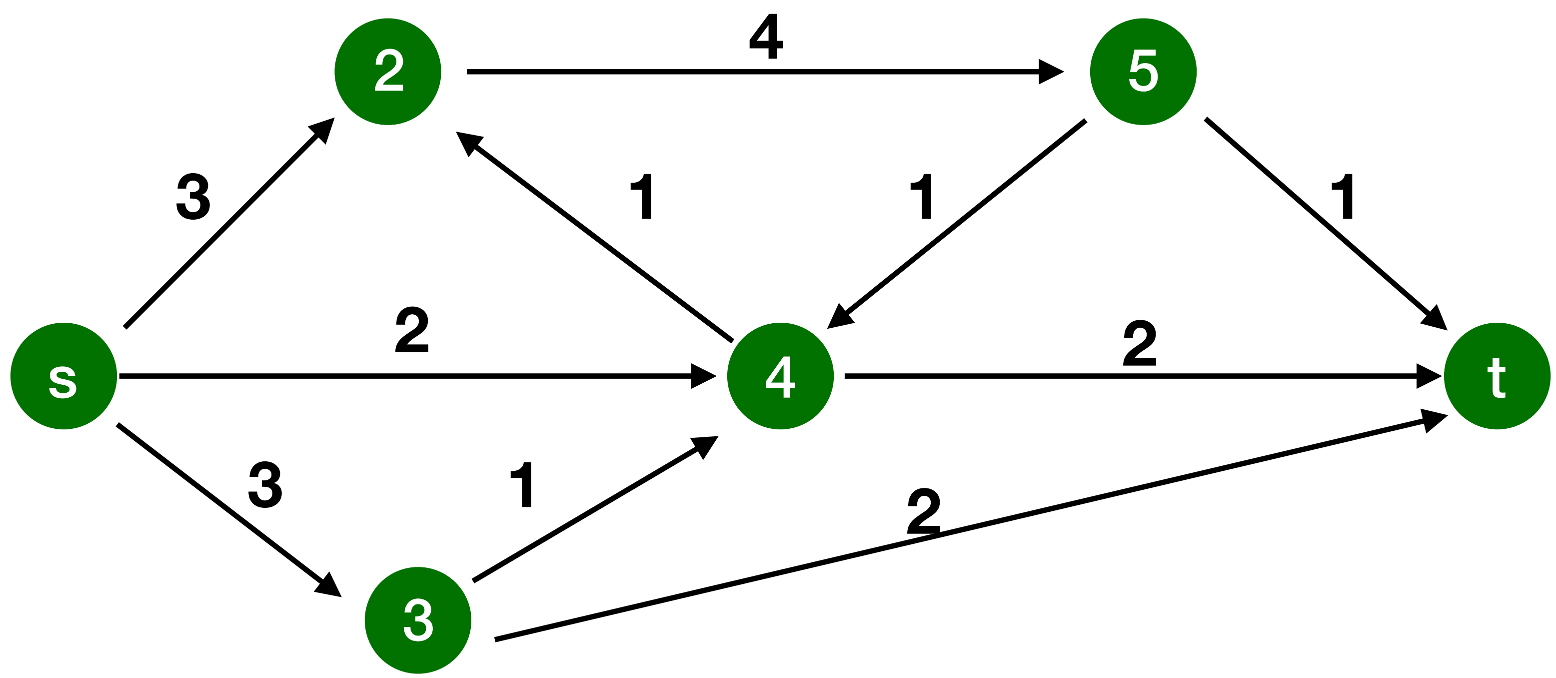
Flux òptim

Quin és min-cut?



Quan no es trobin més rutes al pas 2, no podreu arribar a la t a la xarxa residual.
S és el conjunt de nodes accessibles per s a la xarxa residual, V és la resta de nodes.

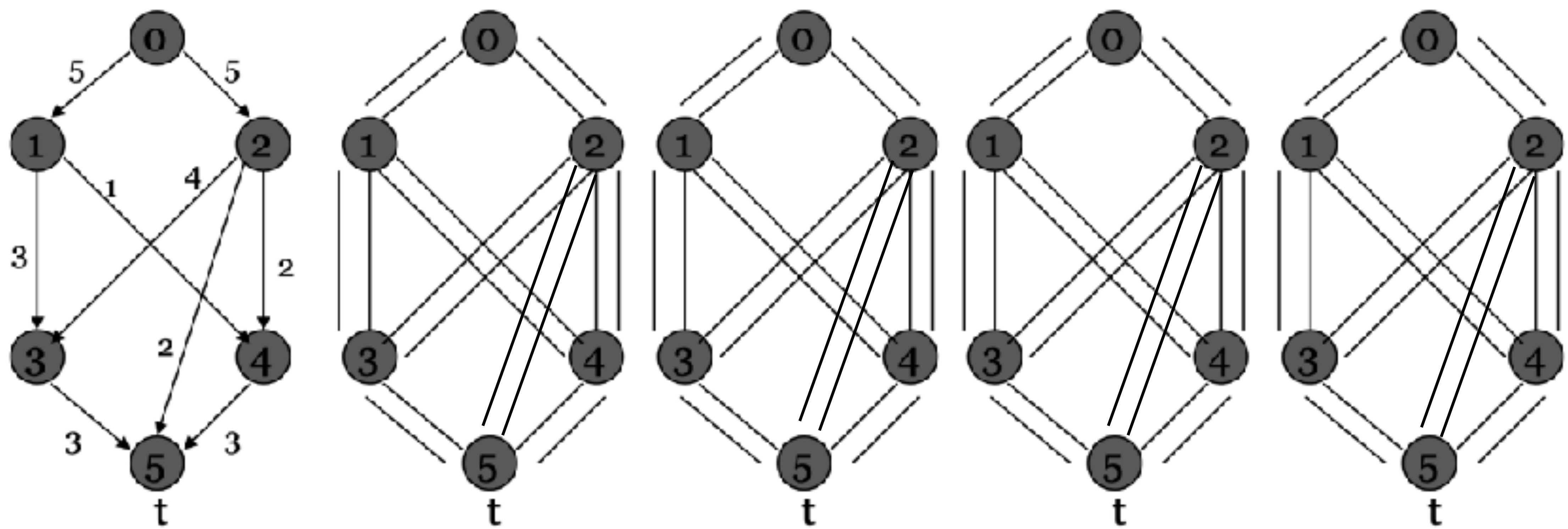
Ford-Fulkerson



Graf original, i la xarxa residual original

Exercici: Min-Cut Max-Flow

- Aplica Ford-Fulkerson: identifica **min-cut** y **max-flow**



min-cut:

Max-flow: