UNIDAD IV: INTEGRACION DE FUNCIONES

INTEGRALES INDEFINIDAS

ANTIDIFERENCIACION: Es la operación inversa a la diferenciación.

DEFINICION: Una función *F* se llama antiderivada de una función *f* , en un intervalo I, si $F`(x) = f(x)$, para todo valor en I.

EJEMPLO: Sea

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$$
$$f(x) = 12x^2 + 2x$$

Luego *f* es la derivada de *F* y *F* es una antiderivada de *f.*

Si $G(x) = 4x^3 + x^2 - 12$ también es una antiderivada de *f*

TEOREMA: Si f y g son dos funciones tales que $f`(x) = g`(x)$, para todos los valores de x en algún intervalo I, entonces existe una constante k tal que: $f(x) = g(x) + k$

TEOREMA: Si *F* es una antiderivada particular de *f,* entonces toda antiderivada de *f* esta dada por: $F(x) + C$

donde *c* es una constante arbitraria y cualquier antiderivada de f, se puede obtener a partir de $F(x) + C$ asignando valores particulares a *C.*

La antidiferenciación es el proceso de determinar todas las antiderivadas de una función dada.

El símbolo $\int$ denota la operación de antidiferenciación y se escribe:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad donde \quad F`(x) = f(x)}$$

EJEMPLOS:

1.- $\int 2x\,dx = x^2 + C \quad porque \quad \left(x^2 + C\right)' = 2x$

2.- $\int 3x^2\,dx = x^2 + C \quad porque \quad \left(x^3 + C\right)' = 3x^2$

3.- $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C \quad porque \quad (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$

FORMULAS FUNDAMENTALES DE INTEGRACION

1.- $\int dx = x + C$

2.- $\int af(x)\,dx = a\int f(x)dx, \quad a\ constante$

3.- $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \ + \ \int g(x)\,dx$

4.- Si n es un número racional $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

5.- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

6.- $\int e^x dx = e^x + C$

EJEMPLOS:

1.- $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ pues $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3$

2.- $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C$

3.- $\int (3x+2)dx = \int 3xdx + \int 2dx = 3\frac{x^2}{2} + 2x + C$

4.- $\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

5.- $\int 4x^5\,dx = 4\int x^5\,dx = 4\frac{x^6}{6} + C = \frac{2x^6}{3} + C$

6.- $\int x^{\frac{-3}{7}}\, dx = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4} x^{\frac{4}{7}} + C$

7.- $\int \frac{3}{x}\, dx = 3 \int \frac{1}{x}\, dx = 3 \ln|x| + C$

8.- $\int \left(\frac{1}{2} e^x - \frac{3}{4} x \right) dx = \frac{1}{2} \int e^x dx - \int \frac{3}{4} x dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{3}{8} x^2 + C$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $\int \sqrt{x}\, dx$ **2.-** $\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\, dx$ **3.-** $\int x\left(2 + x^2\right)^2 dx$

4.- $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ **5.-** $\int \frac{5t^4 - 2t^3 + t - 1}{t^3} dt$ **6.-** $\int \sqrt{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$

7.- $\int \frac{3x^5 + 2x - 5}{x^3} dx$ **8.-** $\int \left(3\sqrt{y} - \frac{2}{y^3} + \frac{1}{y} \right) dy$ **9.-** $\int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x} \right) dx$

10.- $\int \left(x^3 - 2x^2\right)\left(\frac{1}{x} - 5 \right) dx$ **11.-** $\int \sqrt{t}\left(t^2 - 1\right) dt$ **12.-** $\int \left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\right) dx$

13.- $\int \frac{3x+4}{\sqrt[5]{x}}\, dx$ **14.-** $\int \left(\frac{-5\, dx}{\sqrt[5]{x}} \right)$ **15.-** $\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\, dx$

ANTIDERIVADAS CON CONDICION INICIAL

En algunas aplicaciones se desea hallar una antiderivada que satisfaga ciertas condiciones llamadas condiciones iniciales. Al sustituir las condiciones en la antiderivada se obtiene un valor particular para la constante C**.**

EJEMPLO: Hallar la antiderivada de $\frac{dy}{dx} = 2x$ tal que *y = 6* cuando *x = 2*

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow dy = 2xdx \Leftrightarrow \int dy = \int (2x)dx$$

$$y = \int (2x)dx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} + C$$

$$y = x^2 + C$$

Sustituyendo tenemos: 6 = 4 + C entonces C = 2 así $y = x^2 + 2$

EJERCICIO: Hallar la antiderivada de $\frac{dy}{dx} = 3x^4 - 2x$ tal que *y = 2* cuando *x = 1*

METODO DE INTEGRACION POR SUSTITUCION

Consideremos $\int f\left[g(x)\right] g'(x)dx$

Sea $u = g(x) \quad du = g'(x)dx$

Así $\int f(u)du = F(u) + C$ donde $F'(u) = f(u)$

Como $u = g(x)$ tenemos:

$$\int f\left[g(x)\right] g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F\left[g(x)\right] + C$$

Justificación: Usando regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} F\left[g(x)\right] = F'\left[g(x)\right] g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

EJEMPLOS: Integrar

1.- $\int e^{3x}dx =$

Sea:

$$u = 3x$$
$$du = 3dx$$
$$\frac{1}{3}du = dx$$

Entonces: $\int e^{3x}dx = \int e^{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$

2.- $\int (2x+1)^{5}\ dx =$

Sea:

$$u = 2x+1$$
$$du = 2dx$$
$$\frac{1}{2}du = dx$$

Entonces: $\int u^{5}\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{6}}{6} + C = \frac{1}{12}(2x+1)^{6} + C$

3.- $\int \frac{5x}{\sqrt{3x^{2}+4}}\ dx =$

Sea

$$u = 3x^{2}+4$$
$$du = 6xdx$$
$$\frac{1}{6}du = xdx$$

Entonces: $\int \frac{5x}{\sqrt{3x^{2}+4}}dx = 5\int \frac{du}{6\sqrt{u}} = 5\int u^{-1/2}du = \frac{5}{6}\frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{5}{3}\sqrt{3x^{2}+4} + C$

4.- $\int (2+y)(4y+y^2+5)^{\frac{1}{3}}\,dy$

Sea

$$u = 4y + y^2 + 5$$
$$du = (4+2y)\,dy$$
$$du = 2(2+y)dy$$
$$\frac{du}{2} = (2+y)dy$$

Entonces:

$$\int (2+y)(4y+y^2+5)^{1/3}\,dy = \int \frac{du}{2} u^{1/3} = \frac{1}{2}\frac{u^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{u^4} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(4y+y^2+5)^4} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $\int (4x-1)^5\,dx$ **2.-** $\int \sqrt{3+4x}\,dx$ **3.-** $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$

4.- $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x^2}} =$ **5.-** $\int \frac{4}{x+3}\,dx$ **6.-** $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/4}}{\sqrt{x}}\,dx$

7.- $\int 5u^2(3+2u^3)^{\frac{2}{3}}\,du$ **8.-** $\int \frac{7(1+5x)}{\sqrt[3]{2x+5x^2+4}}\,dx$ 9.**-** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

GUIA EJERCICIOS: INTEGRALES INDEFINIDAS

I.- Obtener las siguientes integrales:

1) $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$	2) $\int (\sqrt[4]{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t^3})dt$	3) $\int \frac{2u^4-3u^2+2u-7}{u^5}du$
4) $\int \left(4\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x^5}\right)dx$	5) $\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$	6) $\int \frac{3x+4}{\sqrt[5]{x}}\,dx$
7) $\int 5u^2\left(3+2u^3\right)^{\frac{2}{3}}\,du$	8) $\int x^5\left(3x^2+4\right)dx$	9) $\int e^x\left(2+3e^x\right)dx$
10) $\int x^2\sqrt[3]{x+4}\,dx$	11) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$	12) $\int \frac{x}{\sqrt{3x+4}}\,dx$
13) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-2x}}$	14) $\int \frac{7\left(1+5x\right)}{\sqrt[3]{2x+5x^2+4}}\,dx$	15) $\int \frac{4x}{e^{5x^2}}\,dx$
16) $\int \frac{x^3}{x+1}dx$	17) $\int 5e^{ax}dx$	18) $\int \frac{\left(3+\ln x\right)}{x}\,dx$
19) $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-6\,e^x}}\,dx$	20) $\int \frac{5y^2+6y}{10y+3}\,dy$	21) $\int x\left(2+x\right)^{\frac{2}{3}}dx$
28) $\int \frac{x^2-3x}{x+2}dx$	29) $\int \frac{x^3+x}{2x+1}dx$	30) $\int \frac{3x^2+x}{x-5}dx$

APLICACIONES INTEGRAL INDEFINIDA

1) La función de costo marginal está dada por $C'(x)=3x^2+8x+4$ y los costos fijos son 6 u.m. (unidades monetarias).

a) Obtenga la función de costo total.
b) ¿Cuál es el costo total de producir 10 unidades?

2.- El costo de una cierta pieza de maquinaria agrícola es de 700 dólares y su valor se reduce con el tiempo de acuerdo con la fórmula $\frac{dV}{dt}=-500(t+1)^{-2}$, donde ***V*** dólares es su valor **t** años después de su compra.

a) Encuentre la función que describe el valor de la maquinaria.
b) ¿Cuál será su valor 3 años después de su compra?

3.- La función de costo marginal esta definida *C´(x) =6x*, donde *C(x)* es el número de cientos de u.m. del costo total de *x* cientos de unidades de cierto artículo. Si el costo de 200 unidades es 2.000 u.m.

a) Obtenga la función de costo total
b) Obtener el costo total de producir 200 unidades.

4.- La función de ingreso marginal de cierto artículo es *R´(x) =12-3x* . Si la demanda es de ***x*** unidades cuando el precio por unidad es ***p*** u.m.

a) Obtenga la función de ingreso total
b) Una ecuación en términos de ***p*** y ***x*** (la ecuación de la demanda).

5.- La función de costo marginal de cierto artículo está dada por $C'(x) = 3\sqrt{2x+4}$. Si los costos fijos son cero, obtenga la función de costo total y el costo total de producir 10 unidades.

6.- Suponga que la función de costo marginal mensual de cierto producto es C`(x)=3x+50, donde x es el número de unidades y el costo se da en dólares. Si los costos fijos relacionados con la cantidad de productos asciende a $100 por mes, encuentre la función de costo total para el mes.

7.- Suponga que los registros mensuales muestran que la razón de cambio del costo (es decir, el costo marginal) de un producto es $C'(x) = 3(2x+25)^{1/2}$, donde x es el número de unidades y el costo esta en dólares. Si los costos fijos para el mes son de $11.125¿Cuál será el costo total de producir 300 artículos?

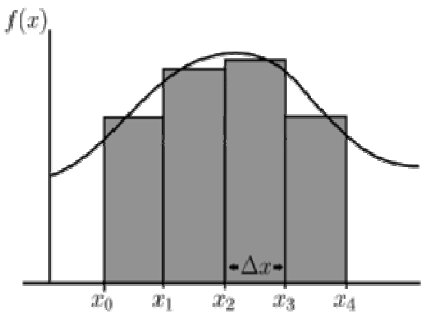
8.- La producción de cierto articulo tiene una función de costo marginal de *C`(x)=50-2x* y de ingreso marginal de *I`(x) = 200 - 4x*; si el costo por producir 10 artículos es de $700 dólares, ¿En qué nivel debe mantenerse la producción de la empresa con el fin de maximizar las ganancias? (Sugerencia: La ganancia generalmente se maximiza cuando *C'(x) = I`(x)*)

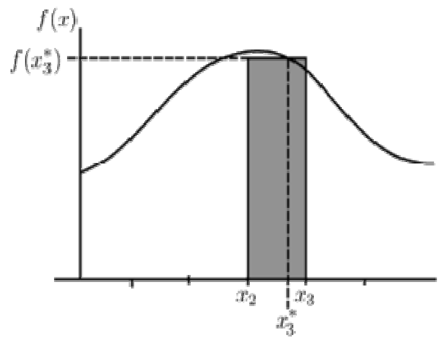
9.- La eficiencia de un operario de manufacturas se expresa como porcentaje. Por ejemplo, si la eficiencia del operario en un momento dado es de 70%, ello quiere decir que se está desempeñando a un 70% de su potencial máximo. Supóngase que la eficiencia de un operario es de **E%** a las **t** horas de haber iniciado sus labores y que E varía a razón de *(35-8t)%* por hora. Si la eficiencia del operario es de 81% después de trabajar 3 horas, evalúe su eficiencia después de haber trabajado 4 horas u 8 horas.

10.- En la fabricación de un producto, los costos fijos por semana son $4000. Si la función de costos marginales es $dc/dq = 0{,}000001(0{,}002q^2 - 25q) + 0{,}2$ en donde c es el costo total (en dólares) de fabricar q libras de un producto por semana, calcular el costo de fabricar 10000 libras en una semana.

LA INTEGRAL DEFINIDA

El área bajo la curva entre *a* y *b* la podemos aproximar inscribiendo rectángulos y luego sumando sus áreas



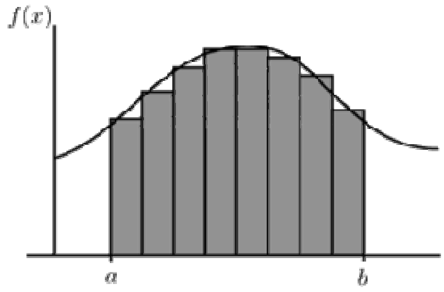


Dividamos el intervalo a, b en n partes iguales de amplitud Δx_i,

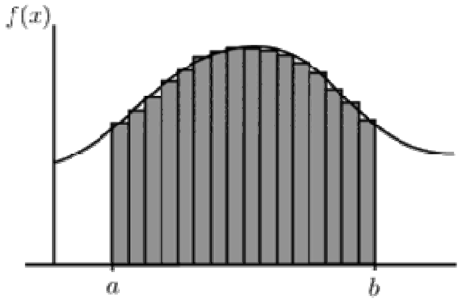
Sea x_i^* el punto medio de cada intervalo. Entonces $f(x_i^*)$ es la altura del rectángulo

El área de cada rectángulo = $\Delta x_i \; f(x_i^*)$

Así el área bajo la curva es aproximadamente $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f(x_i^*)$



Si la amplitud es cada vez más pequeña la suma del área de los rectángulos se aproximará cada vez más al área bajo la curva.



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\, f(x_i^*)$$

Se define la integral definida por: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\, f(x_i^*)$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

Si *f(x)* y *g(x)* son continuas en el intervalo de integración $a \le x \le b$:

1.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2.- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3.- $\int_a^b c\, f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ siendo c una constante.

4.- $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5.- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, cuando $a < c < b$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL

El teorema fundamental del cálculo establece que el valor numérico de la integral definida de una función continua *f(x)* sobre el intervalo $[a,b]$ esta dado por la antiderivada *F(x) + C* evaluada en el límite superior de integración b, menos la misma antiderivada *F(x) + C* evaluada en el límite inferior de integración *a,* con C común a ambos la constante de integración se elimina en la sustracción.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

EJEMPLOS:

1.- $\int_1^5 4xdx = 4\int_1^5 xdx = 4\frac{x^2}{2}\Big|_1^5 = 2x^2\Big|_1^5 = 2\left(5^2 - 1^2\right) = 48$

2.- $\int_0^3 2e^x dx = 2\int_0^3 e^x dx = 2e^x\Big|_0^3 = 2\left(e^3 - e^0\right) = 2\left(e^3 - 1\right)$

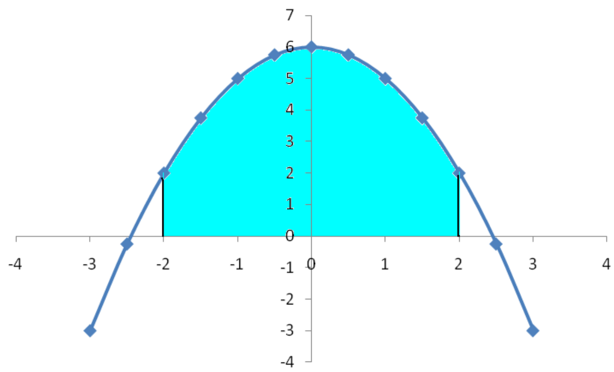
AREA BAJO LA CURVA

El área bajo la curva de la función $y = f(x)$ desde *x = a* hasta *x = b*, está dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

EJEMPLO: Calcular el área bajo la curva $y = -x^2 + 6$ entre *x = -2* y *x = 2*

Graficar $y = -x^2 + 6$



El área bajo la curva entre -2 y 2 es:

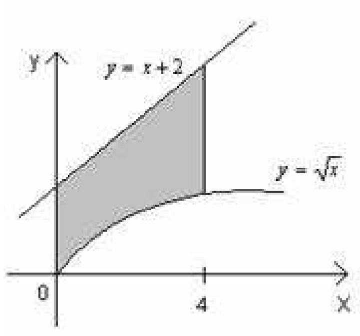
$$A=\int_{-2}^{2}(-x^2+6)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+6x\right]_{-2}^{2}=\left[\left(-\frac{2^3}{3}+12\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}-12\right)\right]=\frac{56}{3}u^2$$

AREA ENTRE DOS CURVAS

Supongamos que tenemos $y=f(x)$ e $y=g(x)$ funciones con puntos de intersección en x = a y x = b y la primera curva situada por encima de la segunda en el intervalo $[a,b]$. El área entre las curvas esta dada por:

$$\boxed{A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx}$$

EJEMPLO 1: Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $y=x+2$; $y=\sqrt{x}$; $0\le x\le 4$



$$A=\int_0^4\left(x+2-\sqrt{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4=8+8-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}u^2$$

EJEMPLO 2: Calcular el área de la región acotada por las graficas de $y=6-x^2$ y $y+2x-3=0$

Solución: Despejar y de ambas funciones: $y=6-x^2$ $y=3-2x$

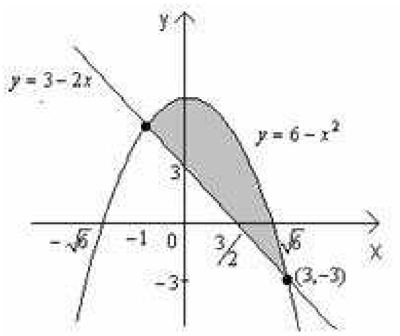
Buscamos intersecciones con los ejes de cada función para graficar:

$$3-2x=0 \qquad -x^2+6=0$$
$$x=\frac{3}{2} \qquad x=\pm\sqrt{6}$$

Igualamos las dos funciones para encontrar puntos de intersección:

$$6-x^2=3-2x$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
$$\therefore \boxed{x=-1} \;\; y \;\; \boxed{x=3}$$

Los límites de integración son *a* = -1 y *b* = 3.



$$A=\int_{-1}^{3}\left[\left(6-x^2\right)-\left(3-2x\right)\right]dx$$
$$A=\int_{-1}^{3}\left[3-x^2+2x\right]dx$$
$$A=\left[3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{3}=\left(9-\frac{27}{3}+9\right)-\left(-3-\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)=\frac{32}{3}u^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$

2.- Encuentre el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$

3.- Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$, $y = -x + 4$.

4.- Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 2 \;, & 2 < x \le a \end{cases}$.

¿Qué valor debe tener ***a*** para que el área encerrada por la curva *y=f(x), y=2* y el eje vertical sea igual al área encerrada por la curva *y = f(x), x =a* y el eje horizontal? Respuesta: *a* = $\frac{8}{3}$

5.- Representar la curva $y = 2x + x^2 - x^3$ y hallar el área que encierra la misma con el *eje x* y las rectas *x = -1 y x = 1. (Ayuda: Las intersecciones de la curva con el eje x son: x = -1, x = 0 y x = 1).*

6.- Las rectas $y_1 = x + 1$; $y_2 = -2x + 10$ *e*; $y_3 = -x - 1$ determinan un triángulo. Halla el área del mismo y realiza su grafica.

GUIA EJERCICIOS: INTEGRALES DEFINIDAS

I.- Evaluar las siguientes integrales:

1) $\int_0^1 (x^2-2x+3)dx$	2) $\int_{-1}^1 (v+1)^2 dv$	3) $\int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx$
4) $\int_{-3}^{-2} t(t+1)^2 dt$	5) $\int_2^5 (x^2+\frac{1}{x^2})dx$	6) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6t+1}} dt$
7) $\int_1^8 (u^{1/3}-u^{-1/3})du$	8) $\int_0^a (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx$	9) $\int_0^1 e^{1/2} dt$
10) $\int_0^1 12e^{-4t} dt$	11) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$	12) $\int_1^3 \frac{1}{x^2+10x+25} dx$

II.- Evalúe el área limitada por la gráfica de la función dada y el eje x en el intervalo dado.

1)	$f(x)=4, \quad [2,5]$	2)	$y=x^2-1, \quad [-1,1]$
3)	$f(x)=x, \quad [0,6]$	4)	$y=-(x+1)^2, \quad [-1,0]$
5)	$f(x)=2x+1, \quad [1,5]$	6)	$y=\frac{x^2-1}{x^2}, \quad \left[\frac{1}{2},3\right]$
7)	$f(x)=x^3, \quad [0,1]$	8)	$y=\sqrt{x}-1, \quad [0,4]$
9)	$f(x)=x^2+2x, \quad [1,2]$	10)	$f(x)=(x-1)^2, \quad [0,2]$

III.- Halle el área de la región limitada por las gráficas de las funciones dadas:

1) $y=x,\ y=-2x, \quad desde\ x=0\ \ hasta\ x=3$

2) $y=x^2,\ y=4$

3) $y=x^2,\ y=x$

4) $y=4(1-x^2),\ y=1-x^2$

5) $y=8-x^2,\ y=1\ \ desde\ x=-2\ hasta\ x=2$

6) $y=x+1,\ y=10-x\ \ desde\ x=0\ hasta\ x=6$

7) $y=x^2,\ y=x^2-4x+10\ \ desde\ x=-2\ hasta\ x=1$

8) Calcule el área limitada por las curvas $y=\sqrt{x}$ e $y=x^2$ en $[0,1]$

9) Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y=x^2$, $y=3x-x^2$ y la recta $x=3$.

10) Encuentre el área acotada por la parábola $x=8+2y-y^2$, el eje *y* y las líneas $y=-1$, $y=3$.

11) Determine el área acotada por la parábola $y=6x-x^2$ *e* $y=x^2-2x$

12) Halle el área comprendida por $y=4-x^2$ *e* $y=4-4x$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA A LA ADMINISTRACIÓN Y LA ECONOMÍA

1.- La ganancia marginal de un fabricante es $B'(x)=-3x^2+80x+140$. Halle *B(x)* lograda por el aumento de la producción de dos a cuatro unidades.

Solución:

$$B(4)-B(2)=\int_2^4\left(-3x^2+80x+140\right)dx=\left.\left(-x^3+40x^2+140x\right)\right|_2^4=704$$

Respuesta: La ganancia al aumentar la producción de dos a cuatro unidades es de $ 704

2.- Cuando tiene "*x*" años, una cierta maquinaria industrial genera ingresos a un ritmo de $R`(x) = 5000 - 20x^2$ dólares por año y da por resultado unos costos que se acumulan a un ritmo de $C`(x) = 2000 + 10x^2$.

a) ¿Cuántos años es provechoso el uso de la maquinaria?
b) ¿Cuáles son las ganancias netas totales generadas por la maquinaria durante el período de tiempo de la pregunta a)?

Solución

a) El uso de la maquinaria será provechoso en tanto que el ritmo al que se genera ingresos es superior al ritmo al que acumula el costo, esto es, hasta que

$R`(x) \geq C`(x)$

$5000 - 20x^2 \geq 2000 + 10x^2$

$-30x^2 \geq -3000 \quad / (-1)$

$30x^2 \leq 3000$

$x^2 \leq 100$

$0 \leq x \leq 10$

Respuesta: Se puede concluir que el uso de la maquinaria será provechoso hasta que tenga

10 años.

b) Las funciones *R(x) y C(x)* representan los ritmos de cambio del ingreso y costo total, respectivamente, y por tanto, su diferencia *R(x) - C(x)* representa el ritmo de cambio de las ganancias netas totales generadas por la maquinaria.

Las ganancias netas totales para el período entre *x=0 y x=10* es la integral definida.

$$\int_0^{10} R`(x) \ - \ C`(x) \ dx \ = \int_0^{10} 3000 \text{ - } 30 \ x^2 dx \ = \ 3000x \ - \ 10 \ x^3 \Big|_0^{10} = 20000.$$

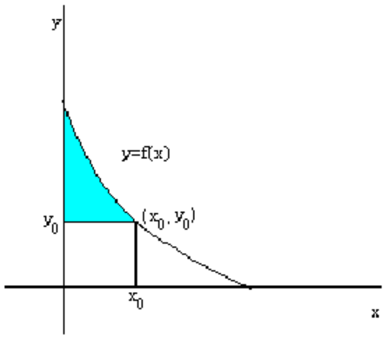
Respuesta: La ganancia neta es $20.000

EXCEDENTE DEL PRODUCTOR Y DEL CONSUMIDOR

Excedente (o Superávit) del Consumidor

Una función de demanda representa las cantidades de un artículo que podrían comprarse a diversos precios. Si el precio en el mercado es y_0 y la correspondiente cantidad demandada es x_0, entonces aquellos consumidores que estuviesen dispuestos a pagar un precio mayor que el del mercado, se benefician por el hecho de que el precio es solamente y_0. Según ciertas hipótesis económicas, la ganancia total del consumidor esta representada por el área bajo la línea de demanda y sobre la recta *y* = y_0 y se conoce como excedente del consumidor.

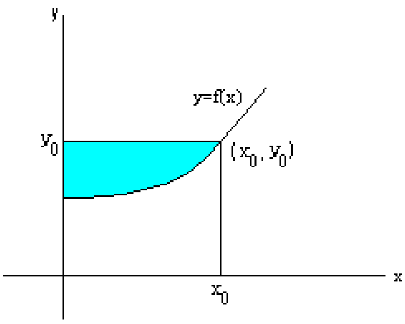
Excedente del Consumidor = $\boxed{\int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 y_0}$, en donde $y = f(x)$ es la función de demanda.



Excedente (o superávit) del productor :

Una función de oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que se ofrecen en el mercado a diversos precios. Si el precio en el mercado es y_0 y la correspondiente cantidad ofrecida en el mercado es x_0, entonces aquellos productores que estuviesen dispuestos a vender el artículo a un precio inferior al del mercado, se beneficiarían por el hecho de que el precio es y_0. La ganancia total del productor está representada por el área sobre la línea de oferta y bajo la recta *y* = y_0 denominándose esta área excedente (o superávit) del productor.

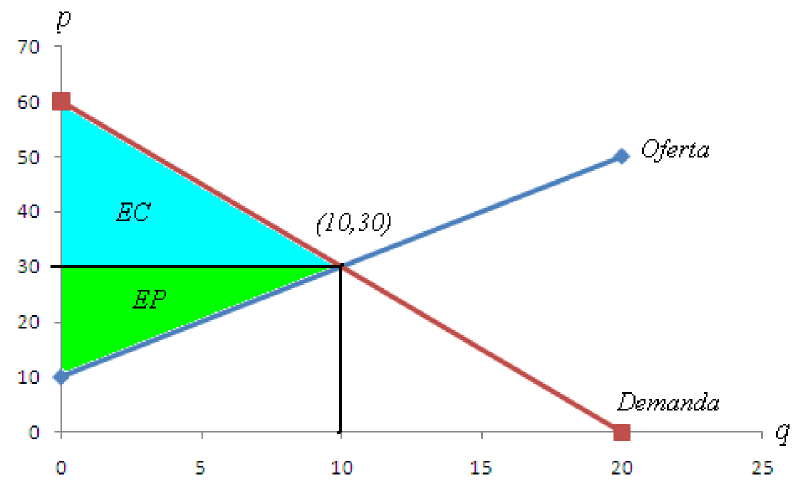
Excedente del Productor = $\boxed{x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx}$, en donde $y = f(x)$ es la función de oferta.



2.- Calcule el superávit de los consumidores y el superávit de los productores para las curvas de demanda y oferta dadas. Función de demanda: $p_1 = -3q + 60$. Función de oferta: $p_2 = 2q + 10$

Solución

El exceso de oferta y el de demanda están representados por las áreas que muestra la gráfica:



Determinamos el punto de intersección, $(q_0; p_0)$, entre la oferta y la demanda, igualando ambas funciones :

$$\begin{aligned} p_1(q) = p_2(q) &\Rightarrow -3q+60 = 2q+10 \\ &\Rightarrow -3q+60-(2q+10)=0 \\ &\Rightarrow -3q+60-2q-10=0 \\ &\Rightarrow -5q+50=0 \Rightarrow \boxed{q=\frac{-50}{-5}=10} \end{aligned}$$

Luego, hallamos el valor de imagen para $q=10$, reemplazando en una de las dos funciones:

$$\begin{aligned} p_1(10) &= -3(10)+60 = -30+60 = 30 \\ p_2(10) &= 2(10)+10 = 20+10 = 30 \end{aligned}$$

Como los valores de las abscisas corresponde a número de artículos ofrecidos o demandados, $q_0 = 10$ y, por lo tanto, $p_0 = 30$.

Así, el punto de equilibrio, es: $(q_0 \ ; \ p_0) = (10; 30)$

$$EC=\left[\int_0^{10}(-3q+60)\,dq\right]-300=\left(\frac{-3q^2}{2}+60q\right)\Bigg|_0^{10}-300=$$
$$=\left[\left(\frac{-3(10)^2}{2}+60(10)\right)-\left(\frac{-3(0)^2}{2}+60(0)\right)\right]-300=-150+600-300=150$$

Respuesta: El excedente de demanda asciende a $ 150

El excedente de oferta es la región comprendida entre las rectas p=30 y $p_2=2q+10$ entre 0 y 10, o sea:

$$EP=300-\int_0^{10}(2q+10)\,dq=300-\left(\frac{2q^2}{2}+10q\right)\Bigg|_0^{10}=$$
$$=300-\left(q^2+10q\right)\Big|_0^{10}=300-(100+100)=300-200=100$$

Respuesta: El superávit de oferta alcanza $ 100.

APLICACIONES AL CALCULO DE PROBABILIDADES

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidades f(x), la probabilidad de que X tome valores entre a y b es:

$$P(a\le x\le b)=\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo: La compañía de Electricidad de Santiago sabe que la demanda semanal de energía eléctrica, en millones de Kw, tiene un comportamiento aleatorio según el siguiente modelo:

$$f(x)=\frac{3}{8}(4x-2x^2)\quad 0\le x\le 2$$

a) Calcular la probabilidad de que la demanda semanal de energía eléctrica esté entre 0,5 y 1,5 millones de kw.

b) Calcular la probabilidad de que la demanda semanal de energía eléctrica sea superior a 1 millón de kw.

GUIA EJERCICIOS: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1.- El costo marginal de un productor es $C'(x)=\frac{1}{12}x^2-x+180$. ¿Cuál es el costo total $C(x)$ de fabricar cinco unidades adicionales si se van a producir tres unidades corrientemente?

2.- En una ciudad se realiza un estudio de mercado sobre el comportamiento de la oferta y la demanda de un determinado artículo, los resultados obtenidos quedaron caracterizados por las siguientes funciones: $p_1=50-q^2 \quad y \quad p_2=23q$, en las que "q" representa las cantidades demandadas y ofertadas y $p_1 \ y \ p_2$, el precio de los artículos, respectivamente. Calcule el superávit de los consumidores y el superávit de los productores.

3.- Si la función de demanda es $y=32-4x-x^2$, determinar el excedente del consumidor.

a) Si $x_0=3$
b) Si $y_0=27$

4.- Si la función de demanda es $y=\sqrt{9-x}$ y $x_0=5$. Evaluar el excedente del consumidor.

5.- Si la función de oferta es $y=(x+2)^2$ y el precio se fija en $y_0=25$. Obtener el excedente del productor.

6.- La cantidad demandada y el precio de equilibrio en un mercado de competencia libre, están determinados por las funciones de demanda y de oferta, $y=16-x^2$ y $y=4+x$, respectivamente. Obtener el correspondiente excedente del productor y del consumidor.

7.- La cantidad demandada y el precio de equilibrio en un mercado de libre competencia, están determinados por las funciones de demanda y de oferta, $y=36-x^2$ y $y=6+\frac{x^2}{4}$, respectivamente. Determinar los correspondientes excedentes del consumidor y del productor.

8.- Para un producto la ecuación de demanda es $p=100-q^2$ y su ecuación de oferta es $p=2(q+10)$. Determinar el excedente de los consumidores y de los fabricantes cuando el mercado está en equilibrio.

9.- La función de ingreso marginal de un fabricante es $\frac{dr}{dq}=\frac{1000}{\sqrt{100q}}$. Si r está en dólares, obtenga el cambio que se produce en los ingresos totales del fabricante si se aumenta la producción de 400 a 900 unidades.

10.- La función de ingreso marginal del producto de una firma es $I'(x) = -0.02x + 10$, donde x es el número de unidades vendidas.

a) Determine el ingreso total conseguido con la venta de 300 unidades del producto.

b) ¿Cuál es el ingreso agregado que se logra con un incremento de 200 a 300 unidades en la venta?

11.- Una compañía que esta especializándose en las ventas por correo emprende una campaña promocional. Los gastos de publicidad costarán $5440 por día. Los especialistas en marketing estiman que la tasa a que se generarán las utilidades (sin contar los costos en publicidad) con la campaña promocional disminuye con la duración de esta última, la tasa *r(t)* de esta campaña se estima por medio de la función $r(t) = -40t^2 + 8000$, donde t representa el día de la campaña y *r(t)* se mide en dólares por día. Con el objeto de maximizar la utilidad neta, la empresa debería realizar la campaña mientras *r(t)* sea mayor que el costo diario de la publicidad.

a) Grafique la función r(t) y la función c(t)=5440, que describe la tasa a que se hacen los gastos de publicidad.

b) ¿Cuánto tiempo debería durar la campaña?

c) ¿Cuáles se espera que sean los costos totales de la campaña?

d) ¿Cuál se espera que sea la utilidad neta?

12.- Una pequeña empresa está estudiando la compra de un instrumento de ahorro de energía que reducirá el consumo de combustible. El aparato costará $75.000. El departamento de ingeniería estima que los ahorros logrados con el se realizarán a la tasa de s(t) dólares por año, donde $s(t) = 40000e^{-0.5t}$ y t denota el tiempo medido en años. Determine cuánto tardará la empresa en recuperar el costo del aparato (es decir, cuando los ahorros acumulados de combustible equivaldrán al costo de compra).

13.- Un mercado competitivo se encuentra determinado por las siguientes funciones de demanda y oferta inversas: $P = -\frac{3}{2}q^2 + 1200$ y $P = 200 + q^2$, respectivamente. Determine el excedente del consumidor y productor. Grafique.

14.- Una compañía petrolera considera el bombeo continuo de petróleo de un pozo como un flujo de ingreso continuo con su tasa de flujo anual en el tiempo *t* dada por: $f(t) = 600e^{-0,2t}$ En miles de dólares al año. Encuentre un estimado del ingreso total por este pozo durante los próximos 10 años.

15.- La función de demanda de un producto es $p = \sqrt{49 - 6x}$ y su función de oferta es $p = x + 1$, donde p se da en dólares y x es el número de unidades. Encuentre el punto de equilibrio y el superávit del consumidor.

16.- Suponga que un monopolio tiene dado su costo total (en dólares) para un producto por $C(x)=60+2x^2$. Suponga también que la demanda está dada $p=30-x$, donde p está en dólares y x es el número de unidades. Encuentre el superávit del consumidor en el punto donde el monopolio tiene su ganancia máxima.

17.- Un monopolio tiene una función de costo total $C=1000+120x+6x^2$ para su producto, el cual tiene una función de demanda de $p=360-3x-2x^2$. Encuentre el superávit del consumidor en el punto donde el monopolio tiene una ganancia máxima.