

## Lección H

# Diferenciación e integración numérica

### H.1. Diferenciación numérica

Se nos plantea ahora el problema de calcular la derivada de una función de la que sólo conocemos un número finito de datos. Dos métodos son los más usuales a la hora de resolver tal problema:

- Derivar un polinomio de interpolación construido mediante alguno de los métodos estudiados en el capítulo anterior. La función `h_deriv` definida en el libro [7], pág. 249, permite el cálculo de las sucesivas derivadas en un punto dado del polinomio interpolante asociado a nuestros datos.
- Calcular directamente la derivada utilizando para ello aproximaciones de la función mediante los polinomios de Taylor. Las fórmulas obtenidas de esta manera reciben el nombre de *fórmulas de diferencias finitas*.

**Práctica a** Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  el conjunto de datos dados debajo. Queremos estimar las sucesivas derivadas en el punto  $a = 0.3$  utilizando la función `h_deriv` citada anteriormente, lo que significa calcular las sucesivas derivadas del polinomio interpolador asociado a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ; para ello, ejecutamos:

```
x=[0      0.2    0.4    0.6    0.8    1      ]; y=[0.3927  
0.5672 0.6982 0.7941 0.8614 0.9053]; a=0.3;  
derivadas=h_deriv(x,y,a)
```

El resultado, en orden de derivada creciente y empezando por  $f^{(1)}(0.3)$ , es  
0.6533 -0.9710 1.0406 -1.3750 1.8750

**Práctica b** La definición de derivada de una función  $f$  viene dada por la expresión

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{H.1})$$

con lo cual podemos decir que  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  es una aproximación de  $f'$  con tal de que  $h$  sea suficientemente pequeño. De hecho usando el desarrollo de Taylor para la función  $f$  en el punto  $x$  podemos poner

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + O(h) \quad (\text{H.2})$$

lo que significa que el error cometido al aproximar  $f'(x)$  por el valor  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  es de orden 1 respecto de  $h$ .

Utilizando Taylor también podíamos haber puesto

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + O(h^3) \quad (\text{H.3})$$

y, por tanto,  $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^3)$ . Y procediendo de forma análoga se puede obtener las siguientes fórmulas para las derivadas primera y segunda:

DERIVADA PRIMERA DE $f$ EN $x_0$	DERIVADA SEGUNDA DE $f$ EN $x_0$
$\frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$	$\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h^2)$
$\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$	$\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$
$\frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} + O(h^2)$	$\frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + O(h^2)$
$\frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^2)$	$\frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^2)$

(H.4)

Vamos a aplicar alguna de estas fórmulas en el cálculo de la derivada de  $f(x) = \arctan x$  en  $x = \sqrt{2}$  y con paso  $h = 0.1$ . Ejecutamos el listado

```
x=sqrt(3); h=0.01; ex=-0.5; %ex= valor exacto de la derivada de f en x
at=atanh(x); ath=atanh(x+h); at2h=atanh(x+2*h); at3h=atanh(x+3*h);
atmh=atanh(x-h); atm2h=atanh(x-2*h);
f2pa=(ath-at)/h; er2pa=abs(f2pa-ex);
f3pc=(ath-atmh)/(2*h); er3pc=abs(f3pc-ex);
f3pa=(-at2h+4*ath-3*at)/(2*h); er3pa=abs(f3pa-ex);
f4pc=(-at2h+8*ath-8*atmh+atm2h)/(12*h); er4pc=abs(f4pc-ex);
resultados=[f2pa,f3pc,f3pa,f4pc];
errores=[er2pa,er3pc,er3pa,er4pc];
fprintf('\t 2p. adel.\t 2p. centr.\t 3p. adel.\t 4p. centr. \n')
fprintf('f''(x)\t %e\t %e\t %e\t %e\n',resultados.')
fprintf('error:\t %e\t %e\t %e\t %e\n',errores)
```

En los resultados podemos comprobar que son más exactas las fórmulas centradas y con mayor número de puntos que sus análogas.

## H.2. Integración numérica

Los métodos de integración numérica nos permiten integrar funciones que están definidas analíticamente o de las que sólo conocemos su tabla en un número finito de puntos.

Consideremos el caso en que tenemos un conjunto de puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  equiespaciados y que queremos calcular la integral de determinada función  $f$  definida sobre el intervalo  $[a, b]$ . Podemos entonces considerar el polinomio interpolador de  $f$  respecto a los nodos  $x_i$ , ver (G.11) y su integral con la esperanza de así obtener una aproximación a la integral de  $f$ . De hecho, tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left( f_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta f_0 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n!h^n} \Delta^n f_0 \right) dx + \int_a^b E_n(x) dx \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

donde  $E_n$  es el error cometido al aproximar la función  $f$  por su polinomio interpolador y cuya expresión (ver [10], pág. 37, ó [3], pág. 291) es:

$$E_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(z_x)}{(n+1)!}, \quad x_0 < z_x < x_n \quad (\text{H.6})$$

de esto último y utilizando el teorema de la media integral se deduce

$$\int E_n(x) dx = \frac{f^{(n+1)}(z'_x)}{(n+1)!} \int (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) dx, \quad x_0 < z'_x < x_n \quad (\text{H.7})$$

En particular, si aproximamos  $f$  en  $[a, b]$  fragmentariamente mediante polinomios de grado uno entonces el polinomio interpolante en el fragmento  $[x_0, x_1]$  tiene la forma

$$P(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta f_0 \quad (\text{H.8})$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left[ f_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta f_0 \right] dx + \int_{x_0}^{x_1} E(x) dx \\ &= hf_0 + \frac{h}{2}(f_1 - f_0) - \frac{f''(\xi_{0,1})}{12}h^3 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{f''(\xi_{0,1})}{12}h^3 \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Ahora teniendo en cuenta que  $\int_a^b = \int_{x_0}^{x_1} + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n}$  y que  $h(f''(\xi_{0,1})) = \int_{x_0}^{x_1} f''(x) dx + o(h)$  concluimos que

$$\int_a^b f = \frac{h}{2}[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \dots + (f_{n-1} + f_n)] - \frac{h^2}{12} \left[ \int_a^b f''(x) dx + o(h) \right] \quad (\text{H.10})$$

$$= \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) + c_T h^2 + o(h^2) \quad (\text{H.11})$$

La regla que aproxima  $\int_a^b f$  mediante el número  $T(f, h) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$  se denomina *regla de los trapecios* y a la expresión  $c_T h^2 = \frac{-h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx$  se la denomina *parte principal del error* al aproximar la integral de  $f$  por la regla de los trapecios  $T(f, h)$ .

**Nota:** Para que todas las expresiones anteriores sean correctas es necesario exigir que  $f \in \mathcal{C}^3[a, b]$ , es decir, que  $f$  posea derivada de orden 3 continua.

Si en lugar de fragmentar el intervalo  $[a, b]$  en los subintervalos  $[x_i, x_{i+1}]$  utilizando aproximaciones lineales en cada uno de ellos hubiéramos fragmentado en los subintervalos  $[x_0, x_2], \dots, [x_{2k-2}, x_{2k=n}]$

y en cada uno de estos fragmentos hubiésemos utilizado un polinomio interpolador de orden dos respecto a los datos  $(x_i, f_i)$  entonces

$$P_{0,2}(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} \Delta^2 f_0 \quad (\text{H.12})$$

sería el polinomio interpolador en el primer fragmento y tendríamos

$$\int_{x_0}^{x_2} f = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(z_x) \quad (\text{H.13})$$

$$\int_a^b f = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_n) + c_S h^4 + o(h^4) \quad (\text{H.14})$$

La regla que nos aproxima  $\int_a^b f$  mediante el número  $S(f, h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{2k-1} + f_n)$  recibe el nombre de *regla de Simpson* y a la expresión  $c_S h^4 = h^4 \frac{-1}{90} \int_a^b f^{(4)}(x) dx$  se la denomina *parte principal del error* al aproximar la integral de  $f$  por la regla de Simpson  $S(f, h)$ .

**Nota:** Análogamente a la nota anterior, las fórmulas relacionadas con la regla de Simpson son ciertas a condición de que  $f \in C^5[a, b]$ , es decir, de que  $f$  posea derivada de orden 5 continua.

Es importante ahora observar que el error cometido al aproximar  $I = \int_a^b f$  por el número  $I_h = S(f, h)$  es fácilmente computable ya que de las relaciones

$$I = I_h + c_S h^4 + o(h^4); \quad I = I_{h/2} + \frac{1}{16} c_S h^4 + o(h^4) \quad (\text{H.15})$$

se obtiene, restando,

$$I_{h/2} - I_h = 15c_S(h/2)^4 + o(h^4), \quad \text{y también} \quad c_S(h/2)^4 = \frac{I_{h/2} - I_h}{15} + o(h^4) \quad (\text{H.16})$$

lo que nos permite concluir

$$I - I_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{15} + o(h^4) \quad (\text{H.17})$$

Esta fórmula, junto con su análoga para el caso de los trapecios (ver (H.20)), nos permite controlar el error cometido, siempre que  $c \neq 0$ , al aplicar la regla de Simpson y de los trapecios en el cálculo de la integral definida  $\int_a^b f$ . En la práctica dichas fórmulas se emplean para adaptar el paso de integración  $h$  de modo que el error en el fragmento donde estamos integrando sea menor que la tolerancia por nosotros admitida. De este modo surgen los métodos *adaptativos* de integración que si están basados en la regla de los trapecios será denominado *método adaptativo de los trapecios* y si está basado en la regla de Simpson será denominado *método adaptativo de Simpson*.

Se denomina *regla de Runge* el cálculo de la estimación aproximada del error según (H.17) al cumplirse la condición (H.15), ver [10] pág. 123. En general, si

$$z = z_h + ch^k + o(h^k) \quad (\text{H.18})$$

es la relación que verifica el valor exacto  $z$  en función de su aproximación  $z_h$ ; entonces, la regla de Runge nos dice que

$$z - z_{h/2} = \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} + o(h^k) \quad (\text{H.19})$$

deduciéndose, como caso particular, que el error de la regla de los trapecios viene dado por la relación

$$I - T(f, h/2) = \frac{T(f, h/2) - T(f, h)}{3} + o(h^2) \quad (\text{H.20})$$

Para realizar la cuadratura o integral definida de una función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  por un método adaptativo, Matlab cuenta con el comando `quad`. Su sintaxis es:

`quad('nombre_f', a, b, tol, traza)`

donde `tol` es la tolerancia global en la cuadratura y `traza` es un parámetro opcional, al igual que `tol`, que por omisión toman los valores `tol = 1e-6` y `traza = 0`. Si `traza ≠ 0` entonces el programa nos informa de las iteraciones y de la naturaleza de la convergencia del algoritmo.

**Práctica c** Matlab cuenta con la función `trapz(x,y)` que realiza la integración de una función  $f$  dada como tabla de datos mediante la regla de los trapecios. Como ejemplo consideramos la función  $f$  que en el intervalo  $[0, 1]$  tiene la siguiente tabla

<b>x</b>	0	0.15	0.35	0.45	0.60	0.90	1.00
<b>y = f(x)</b>	0	0.1494	0.3429	0.4350	0.5646	0.7833	0.8415

(H.21)

para calcular su integral en  $[0, 1]$  ejecutamos el listado

```
x=[0    0.1500    0.3500    0.4500    0.6000    0.9000    1.0000];
y=[0    0.1494    0.3429    0.4350    0.5646    0.7833    0.8415];
Integral=trapz(x,y)
```

Es también fácil obtener una función propia, `I=h_trapz('nombre_f', a, b, h)` que nos calcule la cuadratura de una función  $f$  de nombre `nombre_f` en un intervalo  $[a, b]$  por la regla de los trapecios y a partir de un paso de integración igual a  $h$ .

```
function I=h_trapz('nombre_f',a,b,h)
n=floor((b-a)/h); hh=(b-a)/n;
x=a+(0:n)*hh; y=feval(nombre_f,x);
I=trapz(y)*hh;
```

**Práctica d** Ejecutando el comando `doc quad` se nos explica la cuadratura de una función por el método adaptativo de Simpson empleado por Matlab para el cálculo numérico de integrales definidas.

Comprobar que con el comando `quad('sin',0,pi,1e-8)` obtenemos la integral de la función seno en  $[0, \pi]$  con una tolerancia de  $1e-8$ .

Por último, utilizar el comando `quad` para el cálculo de las integrales en el intervalo  $[0, 1]$  de las funciones `h10` y `h15` siguientes:

```
function f=h10(x)                function f=h15(x)
f=sqrt(x);                       f=(x.^(0.7)).*cos(x);
```

**Práctica e** Las funciones propias definidas en el libro de Nakamura, [7] pág. 217–8, con los nombres `I=h_simpsv(y,h)` y `I=h_simpsn('nombre_f',a,b,n)` permiten el cálculo de la integral definida de una función  $y = f(x)$  por la regla de Simpson en sus dos posibles formas: `h_simpsv` lo hace cuando tenemos la función como una tabulación de valores equiespaciados a distancia  $h$  y `h_simpsn` lo hace a partir del nombre de  $f$  y del número de nodos  $n + 1$  en que fragmentamos el intervalo  $[a, b]$ . Como ejemplo, consideramos la función tangente en el intervalo  $[0, \pi/4]$ , su tabulación con paso  $h = \pi/24$  es

<b>x</b>	0	0.1309	0.2618	0.3927	0.5236	0.6545	0.7854
<b>f(x)</b>	0	0.1317	0.2679	0.4142	0.5774	0.7673	1.0000

(H.22)

de modo que podemos obtener una aproximación al valor  $\int_0^{\pi/4} \text{tg}(x) dx$  ejecutando `Int=h_simpsn('tan',0,pi/4,6)` o equivalentemente ejecutando el listado

```
y=[0    0.1317    0.2679    0.4142    0.5774    0.7673    1.0000];
Int=h_simpsv(y,pi/24)
```

### H.3. Integración numérica con límites infinitos o singulares

En este apartado seguimos lo expuesto en la sección 5.4 de [7].

Una función es integrable en un dominio infinito,  $[-\infty, \infty]$  o semiinfinito,  $[a, \infty]$ ,  $[-\infty, b]$ , sólo si es significativamente distinta de cero en un dominio acotado  $[-K, K]$  y se aproxima a cero conforme la variable se aproxima a  $-\infty$  y  $\infty$ . En definitiva, el primer paso para evaluar

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (\text{H.23})$$

consiste en sustituir los límite infinitos por límites finitos:

$$I = \int_{-K}^K f(x) dx \quad (\text{H.24})$$

donde  $K$  es un valor tan grande que la contribución para los valores de la  $x$  que verifican  $x \notin [-K, K]$  es menor que la tolerancia por nosotros fijada.

Emplearemos como método más eficiente en el cálculo de la ecuación (H.24) el método de los trapecios. Un ejemplo lo hacemos en la práctica siguiente

**Práctica f** Consideramos la función  $h20(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$  y su integral infinita  $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . Primeramente hacemos una representación gráfica de  $f$  para hacernos una idea de su comportamiento, digamos en el intervalo  $[-30, 30]$ , lo que hacemos con el listado

```
x=-30:0.1:30; y=(1/sqrt(pi))*exp(-x.^2); plot(x,y), grid
```

De su gráfica observamos que  $f$  toma valores prácticamente cero para  $x \notin [-4, 4]$ . Evaluamos la integral (H.24) con  $K = 4$  y una magnitud de paso discreta,  $h = 0.5$ , para no hacer excesivamente largos los cálculos y vamos incrementando  $K$  en un factor de 1.5 siguiendo la sucesión  $K = 4, 6, 9, 13.5, \dots$  para ver si un incremento en el intervalo de integración significa un crecimiento del valor integral (H.24), si este valor permanece sensiblemente estable entonces

disminuimos la magnitud  $h$  hasta un número que estimemos conveniente para la tolerancia con que estemos trabajando y, finalmente, si el valor obtenido ahora es semejante al que ya teníamos concluimos que el valor de la integral infinita de  $f$  es igual al valor estable obtenido. Aunque este proceso puede parecer laborioso en la práctica no requiere más de diez pruebas. En el caso que nos ocupa ejecutamos

```
K=4; I(1)=h_trapz('h20',-K,K,0.5); KK(1)=K; for k=2:5
    KK(k)=KK(k-1)*1.5; K=KK(k);
    I(k)=h_trapz('h20',-K,K,0.5);
end;

fprintf('K\t %f\t %f\t %f\t %f\t %f\t %f\n', KK.')
fprintf('Integ.\t %f\t %f\t %f\t %f\t %f\t %f\n', I.')
II=h_trapz('h20',-K,K,0.1)
fprintf('Si converge la integral vale %f\n',II)
```

Como resultado del listado anterior obtenemos

$K$	4.000000	6.000000	9.000000	13.500000	20.250000
$Integ.$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Si existe la integral vale 1

deduciéndose que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  al menos con una tolerancia de  $1e - 5$ .

El listado de la función  $f=h20$  es el expresado a continuación

```
function f=h20(x) f=(1/(sqrt(pi))).*exp(-x.^2);
```

### H.3.1. Integración numérica con límites singulares

Hasta ahora sólo hemos considerado integrales de funciones en dominios infinitos. En el caso de tener como dominio de integración el intervalo  $(a, b)$  y que alguno de los extremos sea singular para la función  $f$  entonces lo que hacemos es utilizar una transformación de coordenadas  $x = x(z)$  de modo que el intervalo  $(-\infty, \infty)$  se transforme en  $(a, b)$  con el fin de convertir nuestra integral singular  $\int_a^b f(x) dx$  en la integral infinita

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x(z)) \frac{dx}{dz} dz \quad (\text{H.25})$$

de la que ya podemos calcular su integral utilizando el método expresado anteriormente.

Un ejemplo de transformación de coordenadas que convierte el intervalo  $(-\infty, \infty)$  en  $(-1, 1)$  es la dada por la ecuación

$$x = \text{th}\left(\frac{\pi}{2} \text{sh}(z)\right), \quad x \in (-1, 1) \text{ cuando } z \in (-\infty, \infty) \quad (\text{H.26})$$

de donde se deduce que

$$x = \frac{a + b + (b - a) \text{th}\left(\frac{\pi}{2} \text{sh}(z)\right)}{2} \quad (\text{H.27})$$

es una transformación que convierte el intervalo  $(-\infty, \infty)$  en  $(a, b)$ . Tal transformación recibirá el nombre de *doble exponencial*

**Práctica g** Para hacernos un idea de la transformación doble exponencial (H.26) proponemos ejecutar el siguiente listado con el fin de obtener su representación gráfica

```
z=-2:0.001:2; x=tanh((pi/2)*sinh(z));
figure(1); plot(z,x);
xlabel('z');ylabel('x')
axis equal
figure(2),plot(x,z),
xlabel('x'); ylabel('z'),
title('trans. inversa'),
axis equal
```

Es fácil obtener el valor de la expresión  $\frac{dx}{dz}$  cuando  $x = x(z)$  viene dado por (H.26), resultando

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\pi (b-a) \operatorname{ch}(z)}{4 \operatorname{ch}^2(\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z))} \quad (\text{H.28})$$

y llevando esta expresión a (H.25) tenemos que mediante la transformación doble exponencial la integral  $\int_a^b f(x) dx$  se transforma en

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_f(z) dz, \quad \text{donde} \quad T_f(z) = \frac{\pi}{4} f(x(z)) \frac{(b-a) \operatorname{ch}(z)}{\operatorname{ch}^2(\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z))} \quad (\text{H.29})$$

Afortunadamente la anterior conversión y cálculo de la integral infinita está implementada en el fichero `h_dblexp` (ver [7], pág. 219). La sintaxis del citado comando es

```
h_dblexp(nombre_f,a,b,K,h,pintar)
```

donde `pintar` es un parámetro opcional que si es activado, es decir si `pintar` es distinto del vacío, entonces se nos representan las funciones  $f$  y  $T_f$ . Además,  $h$  corresponde al paso de integración y  $[-K, K]$  al intervalo de integración donde calculamos la integral transformada por la regla de los trapecios. Como ejemplo sirva la siguiente práctica

**Práctica h** Consideramos la función  $f(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in [0, 1]$ , de ella queremos realizar su integral. Para ello ejecutamos un listado semejante al de la práctica HF

```
K=0.8; I(1)=h_dblexp('h40',0,1,K,0.2); KK(1)=K;
for k=2:6
    KK(k)=KK(k-1)*1.5; K=KK(k);
    I(k)=h_dblexp('h40',0,1,K,0.2);
end;

fprintf('K\t %f\t %f\t %f\t %f\t %f\t %f\n', KK.')
fprintf('Integ.\t %f\t %f\t %f\t %f\t %f\t %f\n', I.')
II=h_dblexp('h40',0,1,K,0.02)
fprintf('Si converge, la integral vale %f\n',II)
```

donde `h40` es la función dada por el guión



```
function f=h40(x)
f=(exp(-x.^2))/sqrt(1-x.^2);
```

Como resultado del listado anterior obtenemos

<i>K</i>	0.800	1.200	1.800	2.700	4.050	6.075
<i>Integ.</i>	0.820894	0.954171	1.007650	1.013213	1.013219	1.013219

Si converge, la integral vale 1.013219

deduciéndose de todo ello que la integral impropia  $\int_0^1 \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$  toma el valor 1.01321 con una tolerancia de  $1e-4$ .

Si además queremos tener una representación gráfica de la función  $f(x)$  y de  $T_f(z)$ , ejecutamos el comando `h_dblexp('h40',0,1,1.3,0.2,0)`

**Nota:** Si nos damos cuenta en el listado anterior el valor máximo de  $K$  para el que para el que aproximamos  $\int_{-\infty}^{\infty} T_f(z) dz$  mediante  $\int_{-K}^K f(z) dz$  es para  $K = 6.075$  la razón de esto es que para valores un poco mayores el ordenador se ‘desborda’ ya que la transformación doble exponencial obliga al ordenador a trabajar con números más grandes de lo que está preparado el propio programa.

**Práctica i** Repetimos la práctica anterior con la función  $h25(x) = 1/x$ , si  $x \neq 0$  y  $h25(x) = 1$ , si  $x = 0$ . Ejecutamos, por tanto el mismo listado que en la práctica anterior con la salvedad de que sustituimos `h25` por `h40` y obtenemos como resultado

<i>K</i>	0.800	1.200	1.800	2.700	4.050	6.075
<i>Integ.</i>	2.799361	4.757909	9.273903	23.344968	90.440137	685.388927

Si converge, la integral vale 683.079195

de ello concluimos que  $\int_0^1 h25(x) dx$  no converge, por lo menos, hasta donde nosotros somos capaces de decidir. De hecho, la anterior integral es divergente.

El listado de la función `h25` es el expresado a continuación

```
function f=h25(x)
[m,n]=size(x); H=ones(m,n);
R=(x==1); CR=1-R;
xx=(x.*CR)+H.*R;
f=1./xx;
```

## H.4. Integración numérica en un dominio bidimensional

El comando de Matlab `dblquad` permite calcular la integral doble de una función  $f(x, y)$  definida sobre un rectángulo acotado  $[a, b] \times [c, d]$  simplemente escribiendo

```
dblquad(@nombre_f,a,b,c,d, tol)
```

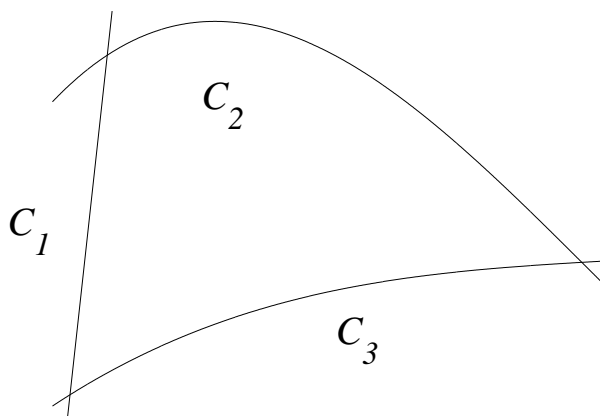
Si  $\Omega$  es un recinto de  $\mathbb{R}^2$  contenido en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$  y  $\chi_\Omega$  denota la función característica de  $\Omega$ :

$$\chi_\Omega(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

entonces, la igualdad

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} \chi_\Omega(x, y) \cdot f(x, y) \, dx \, dy$$

nos permitirá el cálculo de integrales dobles en dominios  $\Omega$  acotados y limitados por curvas de las que se conoce o se puede calcular, al menos aproximadamente, sus expresiones implícitas cartesianas



la única precaución será incluir en el fichero m que define la función a integrar las condiciones que definen el recinto  $\Omega$ . Como ejemplo realizamos las siguientes prácticas

**Práctica j** Calcular la integral

$$I = \iint_{\Omega} \sin(x + y) \, dy \, dx \quad (\text{H.30})$$

para  $\Omega$  el recinto de  $\mathbb{R}^2$  limitado por las curvas

$$C_1 : x = 1; \quad C_2 : x = 3; \quad C_3 : y = 3 + e^{x/5}; \quad C_4 : y = \ln x$$

Para ello, sencillamente ejecutamos

```
I=dblquad(@(x,y) sin(x+y).*(y-log(x)>=0).*(y-3-exp(x/5)<=0),1,3,0,10)
```

obteniendo I= -2.6119.

**Práctica k** El área de un círculo unitario es  $\pi$ . La exactitud de un método numérico para la doble integración puede probarse con el cálculo de la integral :

$$\text{Área}(\Omega) = \iint_{\Omega} dx \, dy$$

donde  $\Omega$  es el dominio definido por los puntos  $(x, y)$  que verifican  $x^2 + y^2 \leq 2x$ , región que es un círculo unitario de centro el punto  $(1, 0)$ . Realizar la evaluación numérica de la doble integral anterior ejecutando

```
I=dblquad(@(x,y) (x.^2+y.^2-2*x<=0),0,2,-1,1,tol)
```

y observar la exactitud del resultado para diferentes tolerancias `tol`.

**Práctica 1** Calcular el volumen del solido situado en semiespacio  $z \geq 0$  y limitado por los cilindros  $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ ,  $C_2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$  y la superficie  $z = xy$ .

Ejecutamos

```
triplequad(@(x,y,z) (x.^2+y.^2<=1).*((x-1).^2+(y-1).^2<=1).*(z<=x.*y),0,1,0,1,0,1)
```

lo que da como respuesta `ans=0.117884` lo que supone cometer un error superior a 8 diezmilésimas, lo que es esperable en el computo numérico de una integral triple.

## H.5. Derivación e integración simbólica

**Práctica m** Realizamos en la ventana de comandos las siguientes operaciones

```
f='3*x^3+4x^2-x-33'      %creación de una función simbólica
df=diff('f')              %derivada de f
d2f=diff('f',2)           %derivada segunda de f
int_f=int('f')             %integral de f
int_def_f=int('f',0,2)     %integral definida de f en [0,2]
```

## H.6. Ejercicios

**Práctica puntuable p** (0.2 puntos) Evaluar las siguientes integrales con una tolerancia menor a la milésima

1.  $-\int_0^1 \frac{dx}{1 + (230x - 30)^2}$
2.  $-\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$
3.  $-\int_0^1 \frac{1}{2+x} dx$
4.  $-\int_0^5 (2x \cos(2x) - (x-2)^2) dx$
5.  $-\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos(x)}$
6.  $-\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$
7.  $-\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin^2(x)}$
8.  $-\int_0^1 x \exp(2x) dx$
9.  $-\int_0^1 x^{-x} dx$
10.  $-\int_0^{2\pi} \exp(2x) \sin^2(x) dx$
11.  $-\int_0^1 x^{0.001} dx$
12.  $-\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x) dx$
13.  $-\int_1^{1.5} x^2 \ln(x) dx$
14.  $-\int_1^3 \frac{100}{x^2} \sin(10/x^2) dx$
15.  $-\int_1^{1.6} \frac{2}{x^2 - 4} dx$
16.  $-\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} dx$
17.  $-\int_0^1 \exp(x) dx$
18.  $-\int_0^{\pi} \cos(x^2) dx$
19.  $-\int_0^4 x^2(x-1)^2(x-3)^2(x-4)^2 dx$
20.  $-\int_1^3 e^{2x} \sin(3x) dx$

**Práctica puntuable q** (0.2 puntos) Calcular las siguientes integrales impropias con una tolerancia menor a la milésima

$$\begin{array}{lll}
 1. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{1+x^2} dx & 2. - \int_0^1 \frac{\operatorname{tg}(x)}{x^{0.7}} dx & 3. - \int_0^1 \frac{\exp(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 4. - \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx & 5. - \int_0^{\infty} \ln(1+e^{-x}) dx & 6. - \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} \\
 7. - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx & 8. - \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} & 9. - \int_0^1 x^{-3/2} \operatorname{sen}(1/x) dx \\
 10. - \int_0^1 x^{-1/4} \operatorname{sen} x dx & 11. - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}} dx & 12. - \int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x-1}} dx \\
 13. - \int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}} dx & 14. - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} dx & 15. - \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx \\
 16. - \int_0^1 \frac{xe^x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx & 17. - \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+9} & 18. - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx
 \end{array}$$

**Práctica r** De las funciones  $f$  y  $g$  conocemos sus expresiones tabulares en los puntos que se detallan más abajo. Se pide, calcular de la forma que se estime mejor, las integrales

$$\int_0^{0.8} f(x) dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 g(x) dx$$

a partir de los datos

<b>x</b>	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
<b>f(x)</b>	0	2.1220	3.0244	3.2568	3.1399	2.8579	2.5140	2.1639	1.8358

<b>x</b>	0	0.25	0.50	0.75	1.0
<b>g(x)</b>	0.9162	0.8109	0.6931	0.5596	0.4055

**Práctica puntuable s** (0.1 puntos) Calcular, cometiendo un error menor a la diezmilésima, las siguientes integrales bidimensionales

$$\begin{array}{ll}
 1. - \int_0^2 dx \int_0^1 \operatorname{sen}(x+y) dy & 2. - \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x+y} dy \\
 3. - \int_0^{\pi} dx \int_0^{\operatorname{sen} x} \exp(-x^2 - y^2) dy & 4. - \int_1^2 dx \int_0^{2-0.5x} \sqrt{x+y} dy
 \end{array}$$

**Práctica puntuable t** (0.2 puntos) Se llama polinomio de *Legendre* de orden  $n$  al polinomio  $P_n$  definido por la igualdad

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (\text{H.31})$$

Una relación importante que verifican los polinomios de Legendre es la fórmula en recurrencia siguiente

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x) \quad (\text{H.32})$$

1. Deducir de ella y de las igualdades  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ , la definición de una función propia de Matlab,  $P_n(x) = \mathbf{h\_legend}(n)$ , que nos calcule el polinomio  $P_n(x)$  a partir del dato  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Realizar una representación gráfica, en el intervalo  $[-1, 1]$ , de las funciones polinomiales  $P_n(x)$ ,  $n = 3, 5, 7, 10$ , y de sus ceros constatando que todas ellas poseen todos sus ceros en el citado intervalo.
3. Se llaman *nodos de Legendre* de orden  $n$  del intervalo  $[-1, 1]$  a los  $n$  puntos  $\{p_1 < p_2 < \dots < p_n\}$  caracterizados por ser las  $n$  raíces del polinomio de Legendre de orden  $n$ ,  $P_n(x)$ . Se pide calcular los nodos de Legendre de  $[-1, 1]$  para los ordenes  $n = 3, 5, 7, 10$ . En general se llaman nodos de Legendre del intervalo  $[a, b]$  a los obtenidos por la fórmula

$$\bar{p}_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{H.33})$$

**Práctica u** 1) Considerar la función  $f(x) = 3x^5 + 7x^2 - 28x + 3$  en el intervalo  $[1, 3]$ ; los nodos de Legendre de orden 3 de dicho intervalo,  $p_1 < p_2 < p_3$ ; y el polinomio interpolador de grado 3 asociado a los datos  $(p_i, f(p_i))$ . Comprobar que, al menos con una tolerancia de  $1e-7$ , se verifica la igualdad

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 P_f(x) dx \quad (\text{H.34})$$

La igualdad anterior es un hecho general, de hecho se verifica que *la integral de un polinomio de grado  $\leq 2n-1$  coincide con la integral de su polinomio interpolador de grado  $n$  obtenido respecto a los nodos de Legendre de orden  $n$ .*

2) (apartado puntuable con 0.3 puntos) Se denomina *método de integración de Gauss–Legendre* con  $n$  puntos a aquel que realiza los siguientes pasos con el fin de obtener una aproximación de  $\int_a^b f(x) dx$ :

- Calcula los  $n$  puntos de Legendre  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$  del intervalo  $[a, b]$ .
- Calcula el polinomio interpolador  $P_f(x)$  de grado  $n$  asociado a los datos  $(p_i, f(p_i))$ .
- Aproxima  $\int_a^b f(x) dx$  por el valor  $\int_a^b P_f(x) dx$ .

Pues bien, se pide definir una función propia,  $\mathbf{I=h\_gauss('nombre\_f',a,b,n)}$  que permita calcular la aproximación con  $n$  puntos de la integral  $\int_a^b \mathbf{nombre\_f}(x) dx$  por el método de Gauss–Legendre.

3) (apartado puntuable con 0.15 puntos) Utilizar la función propia definida anteriormente para calcular las aproximaciones con 4, 8, y 16 puntos de las integrales 1–10 de la práctica HP. Observar la exactitud obtenida con pocos puntos.

4) (apartado puntuable con 0.15 puntos) Como habremos observado una de las grandes ventajas del método de Gauss–Legendre es su exactitud con pocos puntos y otra ventaja es que se puede aplicar también sobre integrales singulares. En este apartado pedimos utilizar la función propia definida en el punto 2 para el cálculo aproximado de las integrales singulares 1–5 de la práctica HQ con 10 puntos observando si la exactitud obtenida es suficiente.

**Práctica puntuable v** (0.3 puntos) Definir una función propia,

`I=h_dblgau('nombre_f','nombre_c','nombre_d',a,b,m,n)`

que permita aproximar la integral bidimensional  $\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$  por el método de Gauss-Legendre a partir de un mallado de  $m \times n$  puntos de Legendre. Utilizar la función propia definida para calcular las integrales 1–2 de la práctica HS.