Lección B

Operaciones con matrices

B.1. Introducción y operaciones de matrices numéricas

Comenzamos limpiando nuestra área de trabajo

```
clear, clc, echo off,
```

`A=[1 2 3;4 0 3;9 3 2]`	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz 3×3
`A(2,1)=-3`	**Ahora** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
`b=[0.34 1+2 2^(-5)]`	$b = (0.34, 3, 1/32)$ es un vector
`C=[i 2+1 1/3;` `4*5 1+i 1;2^(1/2) 9 1]`	Otra matriz 3×3
`d=1:0.5:3`	$d = (1; 1.5; 2; 2.5; 3)$, construimos el vector d a partir de 1 hasta 3 incrementando 0.5
`size(d), size(A)`	Calcula el orden de las matrices d y A.
`e=1:3`	Cuando no hay incremento se entiende que es 1
`ee=1:-0.5:-4`	El incremento puede ser negativo.
`A.'`	Matriz traspuesta
`C'`	Matriz traspuesta conjugada
`A+C, A-C, A*C`	Matriz suma, diferencia y producto de A y C
`A+2, A-3+i`	Matriz obtenida de A sumando a cada elemento 2 y $-3+i$
`A*b.'`	Producto de A por el traspuesto de b
`A*i`	Multiplicamos por i cada elemento de A
`A.*C`	Multiplicamos **elemento a elemento** las matrices A y C
`A^2`	`A*A`
`C.^(A-6)`	Matriz que resulta de elevar cada coeficiente de C al correspondiente coeficiente de $A-6$
`2.^A`	Matriz cuyo coeficiente es 2 elevado al correspondiente

	coeficiente de A
`inv(A)`	Matriz inversa de A
`X=A\C`	X es la solución del sistema de ecuaciones $A \cdot X = C$ Si A es invertible 'coincide' con `inv(A)*C`
`Y=A/C`	Y es la solución del sistema $Y \cdot C = A$. En realidad, Matlab define `A/C=(A.'\C.')'`
`A./C, A.\C`	Matriz que resulta de dividir cada coeficiente de A (resp. de C) por el correspondiente de C (resp. de A)

B.2. Submatrices numéricas

`h=[2,1], k=[2,3]`	Dos vectores
`A(h,k)`	Submatriz obtenida de A quedándonos con las filas dadas por h y las columnas dadas por k
`A(2,1:2)`	Vector que tiene las dos primeras componentes de la segunda fila de A
`A(2,:), C(:,1)`	Segunda fila de A y primera columna de C
`[A;b]`	Añadiendo la fila b a la matriz A
`[A,b.']`	Añadiendo la columna b^t a la matriz A

B.3. Introducción y operaciones de matrices simbólicas

`A=sym('[1,3;t,s]')`	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ t & s \end{pmatrix}$ es una matriz simbólica
`b=sym('[1 2]')`	Definición de un vector simbólico
`c=[1 3;4/5 7/8], C=sym(c)`	Definición de otra matriz simbólica
`D='[1,2;e,f]'`	**Nota:** D es una cadena de caracteres y no una matriz simbólica
`A+C, A*C`	Suma y producto de A y C
`A*C^(-1)`	División de A y C
`C^3`	C^3
`A(1,2)`	Obteniendo el elemento a_{12} de la matriz A
`A(1,2)=18`	Haciendo que a_{12} valga 18
`[A;b]`	Añadiendo la fila b a la matriz A

B.4. Funciones matriciales

Damos aquí las funciones más importantes de construcción de matrices y de funciones definidas sobre las matrices.

FUNCIÓN	DESCRIPCIÓN
`eye(n)`	Matriz identidad $n \times n$
`zeros(m,n)`	Matriz cero de orden $m \times n$
`ones(m,n)`	Matriz de unos
`diag(x)`	Si x es un vector, el resultado es una
	matriz con el vector x como diagonal principal
	Si x es una matriz cuadrada, el resultado es el vector
	diagonal de la matriz x
`triu(A)`	Parte triangular superior de la matriz A
`tril(A)`	Parte triangular inferior de la matriz A
`hilb(m,n)`	Matriz de Hilbert de orden $m \times n$
`magic(m,n)`	Matriz mágica de orden $m \times n$
`rand(m,n)`	Matriz $m \times n$ aleatoria
`vander(x)`	Matriz de Vandermonde construida a partir de x
`sym(A)`	Convierte una matriz numérica en **simbólica**
`numeric(A)`	Convierte una matriz **simbólica** en numérica
`det(A)`	Determinante de la matriz A
`determ(A)`	Determinante **'simbólico'**
`inv(A)`	Inversa de la matriz A
`inverse(A)`	Inversa **'simbólica'**
`rank(A)`	Rango de A. Es también una orden **simbólica**
`size(A)`	Orden o tamaño de la matriz A
`length(A)`	Máximo entre el número de filas y columnas
`[V,D]=eig(A)`	Vectores propios y valores propios. $V^{-1}AV = D$
`[V,D]=eigensys(A)`	Vectores y valores propios, versión **simbólica**
`trace(A)`	Traza de A
`poly(A)`	Coeficientes del polinomio característico en orden
	decreciente que es como los trata normalmente
`charpoly(A)`	Versión **simbólica** de la anterior
`orth(A)`	Base ortogonal de la imagen de A
`null(A)`	Base del núcleo de A, $\operatorname{Ker} A$
`nullspace(A)`	Versión numérica de la anterior
`[V,J]=jordan(A)`	$J =$ Forma canónica de Jordan de A y $V =$ Matriz de paso,
	es decir $V^{-1}AV = J$. Es también una orden **simbólica**

Nota: Se puede aplicar una orden simbólica a una matriz numérica. Pero, en dicho caso la matriz se transforma en simbólica.

B.5. Bibliografía de la lección

Esta lección ha sido elaborada teniendo en cuenta los apuntes [2].

B.6. Ejercicios

Práctica p Dar las ordenes necesarias para definir:

1. Una matriz 7×2 con todos sus elementos nulos.
2. La matriz identidad 4×4.
3. Una matriz 5×5 con todos sus elementos iguales a -2, excepto el elemento (3,2) que valga 9/4.
4. Una matriz 3×3 con todos sus elementos nulos, excepto los de la diagonal principal que valgan $1/3$, $5^{-0.1}$ y $\sqrt{7}$.

Práctica q Dadas la siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 1 & 1/3 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3+2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Se pide determinar:

1) $A + i \cdot A$, $2B$ y $(A/5)^{-1}$.

2) la matriz cuyo coeficiente (i, j) es el correspondiente al de C dividido por el coeficiente (i, j) de D más 1.

3) la matriz cuyo coeficiente (i, j) es el correspondiente a elevar el numero 5 al coeficiente (i, j) de D.

Práctica r Dados los siguientes vectores $a = (1, 1, 16)$, $b = (1, 2, 3)$, $c = (0, 1, 1)$ y $d = (0, 0, 6)$. Se pide calcular: 1) $a - 9 \cdot b$, 2) el producto escalar de c y d, el vector cuyo coeficiente i es el correspondiente a hacer las siguientes operaciones: 3) elevar cada coeficiente de d a 3, y 4) elevar 4 a cada coeficiente de a.

Práctica s Dadas las siguientes matrices y vectores

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad c = (9, 1, 4); \quad d = (3, -5, 1)$$

Se pide las ordenes necesarias para:

1. Generar la matriz que resulta de sustituir en A el valor del elemento $(3, 1)$ por 18.
2. Generar la matriz triangular superior de B.
3. generar la submatriz 2×2 con los coeficientes (1,1), (1,2), (2,1) y (2,2) de $A + 2B$.

4. Generar la matriz que resulta de ampliar A con una nueva fila que contenga los elementos de c.
5. Generar la matriz que resulta de ampliar B^t con una nueva columna que contenga los elementos de d.

Práctica t 1) Determinar los valores y vectores propios de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -8 \end{pmatrix};$$

2) Comprobar que el resultado es correcto. 3) Calcular además las trazas de A, B y C y 4) sus polinomios característicos.

Práctica u Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -20 & -11 & -24 & 14 \\ 32 & 17 & 42 & -25 \\ -29 & -15 & -43 & 26 \\ -53 & -28 & -75 & 45 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -63 & 10 & -152 & 108 \\ 44 & -33 & 151 & -113 \\ 64 & 60 & 33 & -8 \\ 48 & 94 & -60 & 65 \end{pmatrix};$$

Se pide: 1) calcular numéricamente su polinomio característico y su forma canónica de Jordan, 2) hacer lo mismo simbólicamente, y 3) describe las diferencias entre 1) y 2).

Práctica v Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$2) \begin{array}{rcr} 3x+y+z & = & 5 \\ x+3y-z & = & 3 \\ 3x+y-5z & = & -1 \end{array}; \quad 3) \begin{array}{rcr} 3x+y+z & = & 5 \\ 3x+y-5z & = & -1 \\ x+3y-z & = & 1 \end{array}$$