A "Stiff" Beam (1) **(Hairer, Wanner II, p. 8)**

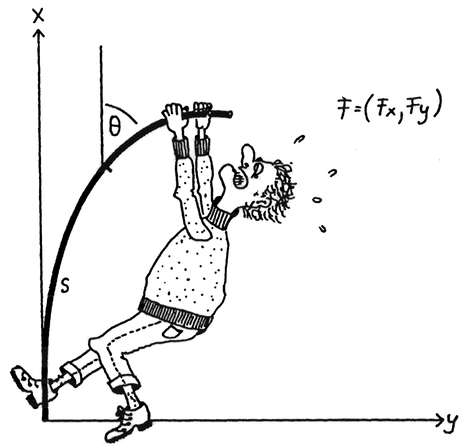
Wir betrachten die Schwingung eines Stabes der Länge $l = 1$ unter der Einwirkung einer äußeren Kraft

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1.5\sin^2(t) & \text{für} \quad 0 \le t \le \pi, \\ 0 & \text{für} \quad t \ge \pi \end{cases}$$

am Stabende $s = 1$.



(Drawing by K. Wanner)

Für die Koordinaten gilt in Abhängigkeit vom Winkel $\theta = \theta(s,t)$

$$x(s,t) = \int_0^s \cos\theta(\sigma,t)d\sigma, \qquad \text{und} \qquad y(s,t) = \int_0^s \sin\theta(\sigma,t)d\sigma.$$

A "Stiff" Beam (2) **(Hairer, Wanner II, p. 8)**

Sei T die kinetische Energie und U die potenzielle Energie des Systems, dann erhält man mittels der Lagrange–Funktion $L = T - U$ eine Differenzialgleichung für $\theta(s,t)$, welche Ableitungen zweiter Ordnung nach s und t beinhaltet. Integration bezüglich der Ortsvariablen s liefert mit der Ortsdiskretisierung

$$\int_0^1 f\left(\theta(\sigma,t)\right)d\sigma = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{S} f(\theta_k) \qquad \text{mit} \qquad \theta_k = \theta\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{S}, t\right)$$

für $k = 1,\ldots,S$. Das liefert ein System von S gewöhnlichen Differenzialgleichungen zu

$$\sum_{k=1}^{S} a_{lk}\ddot{\theta}_k = S^4\left(\theta_{l-1} - 2\theta_l + \theta_{l+1}\right) + S^2\left(\cos\theta_l F_y - \sin\theta_l F_x\right) - \sum_{k=1}^{S} g_{lk}\sin\left(\theta_l - \theta_k\right)\dot{\theta}_k^2$$

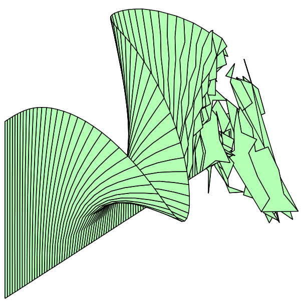
für $k = 1,\ldots,S$ mit $\theta_0 = -\theta_1$, $\theta_{S+1} = \theta_S$ und den Koeffizienten

$$a_{lk} = g_lk\cos\left(\theta_l - \theta_k\right) \qquad \text{mit} \qquad g_{lk} = S + \frac{1}{2} - \max(l,k).$$

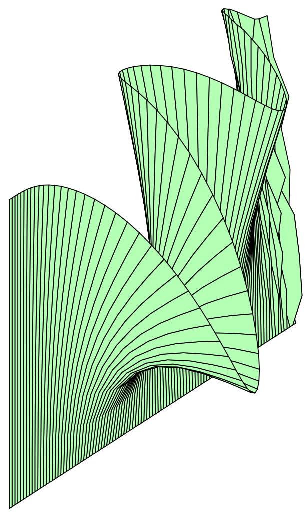
A "Stiff" Beam (3)

Explizites Eulerverfahren, Ortsdiskretisierung $S = 8,\ T = 5$

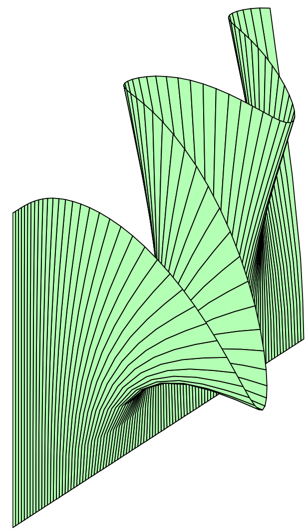
30000 Zeitschritte



40000 Zeitschritte



50000 Zeitschritte

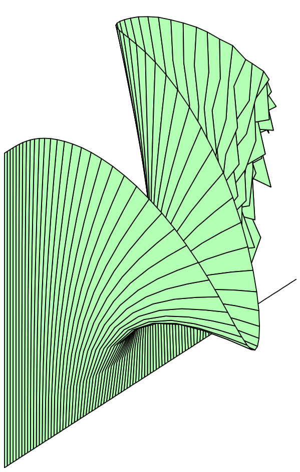


Beobachtung: Sehr viele Zeitschritte werden benötigt

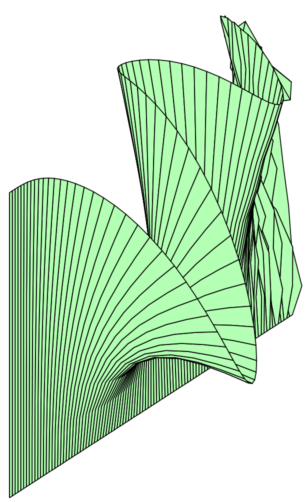
A "Stiff" Beam (4)

Modifiziertes Eulerverfahren, Ortsdiskretisierung $S = 8,\ T = 5$

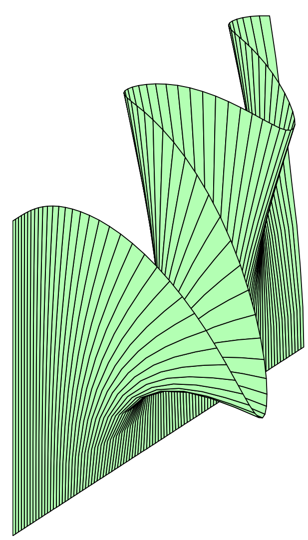
2200 Zeitschritte



2400 Zeitschritte



2600 Zeitschritte

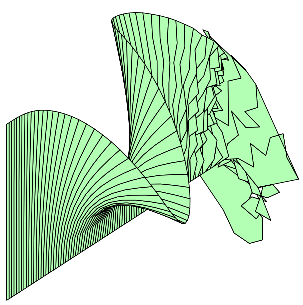


Beobachtung: Deutlich weniger Zeitschritte werden benötigt

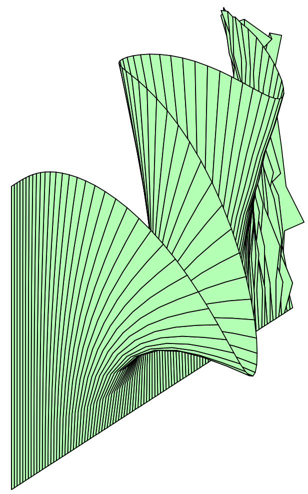
A "Stiff" Beam (5)

Verfahren von Heun, Ortsdiskretisierung $S = 8,\ T = 5$

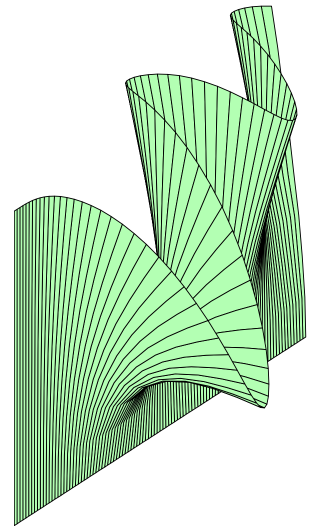
2200 Zeitschritte



2400 Zeitschritte



2600 Zeitschritte

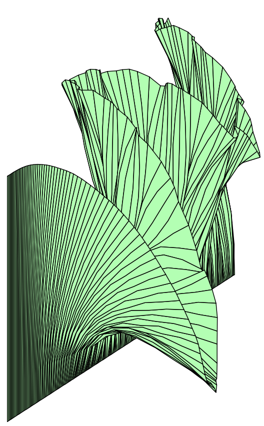


Beobachtung: Qualitativ und quantitativ wie mod. Euler

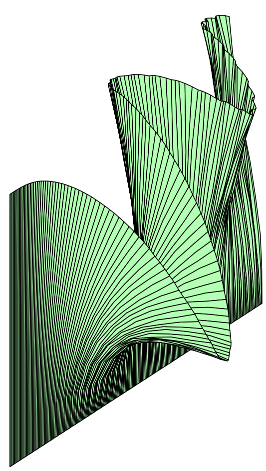
A "Stiff" Beam (6)

Klassisches RK4–Verfahren, Ortsdiskretisierung $S = 8,\ T = 5$

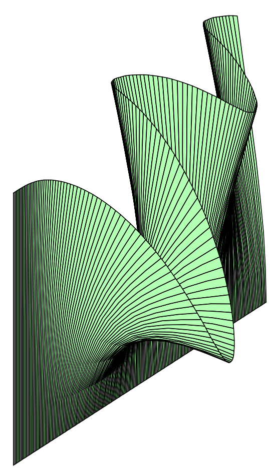
421 Zeitschritte



425 Zeitschritte



430 Zeitschritte

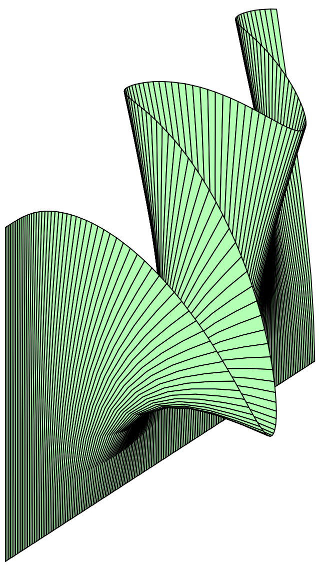


Beobachtung: Quantitativ hängt die Qualität stark von der Ordnung ab
Aber: Qualitativ haben all diese expliziten Verfahren Stabilitätsprobleme
Ausweg: Implizite Verfahren

A "Stiff" Beam (7)

Implizites RK4 (Hammer & Hollingsworth), Innere Iteration, $S = 8,\ T = 5$

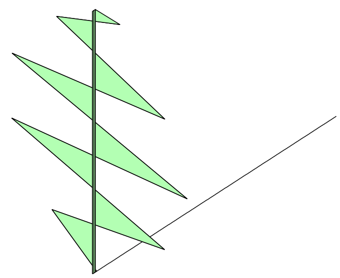
360 Zeitschritte



Maximale Anzahl der inneren Iterationen: 500.

In jedem Schritt werden tatsächlich 500 Iterationen durchgeführt.

Beobachtung: Implizite Verfahren in Kombination mit einer inneren Iteration haben wie explizite Verfahren Stabilitätsprobleme.

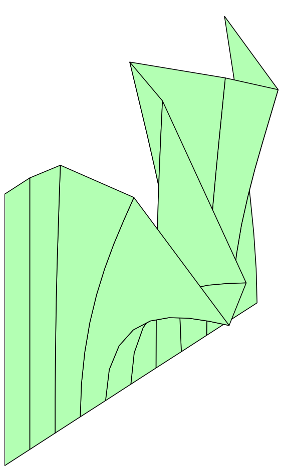


356 Zeitschritte

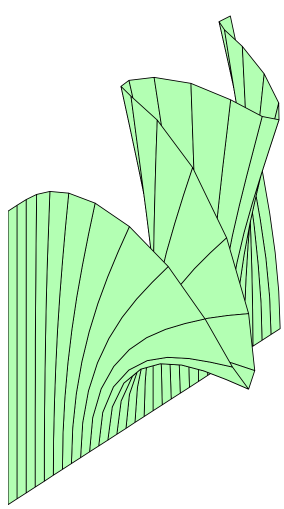
A "Stiff" Beam (8)

Implizites RK4 (Hammer & Hollingsworth), Newton Iteration, $S = 8,\ T = 5$

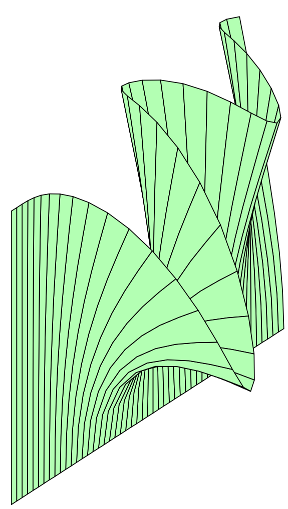
10 Zeitschritte



30 Zeitschritte



50 Zeitschritte

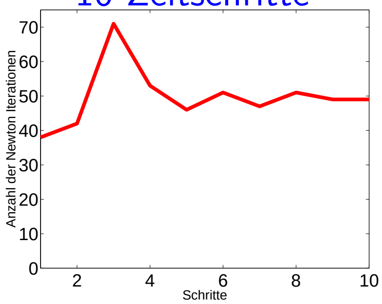


Bemerkung: Bei steifen Problemen müssen implizite Verfahren in Kombination mit der Newton–Iteration verwendet werden

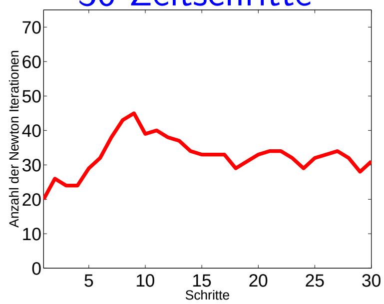
A "Stiff" Beam (9)

Implizites RK4 (Hammer & Hollingsworth), Newton Iteration, $S = 8,\ T = 5$

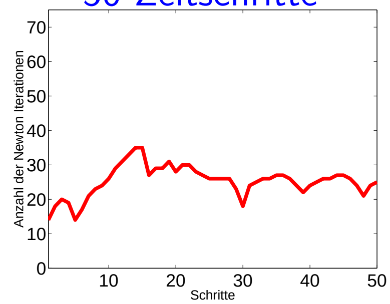
10 Zeitschritte



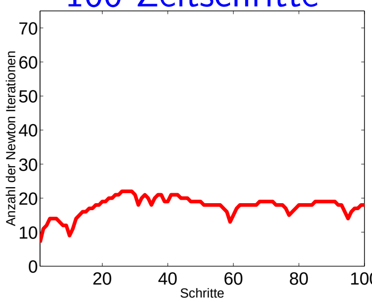
30 Zeitschritte



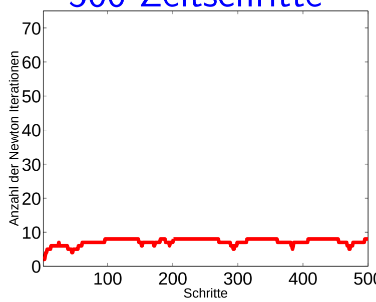
50 Zeitschritte



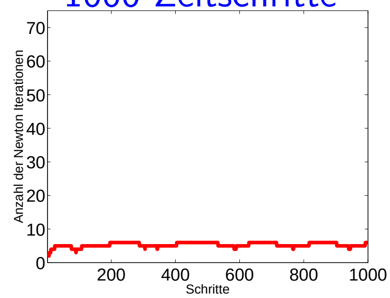
100 Zeitschritte



500 Zeitschritte



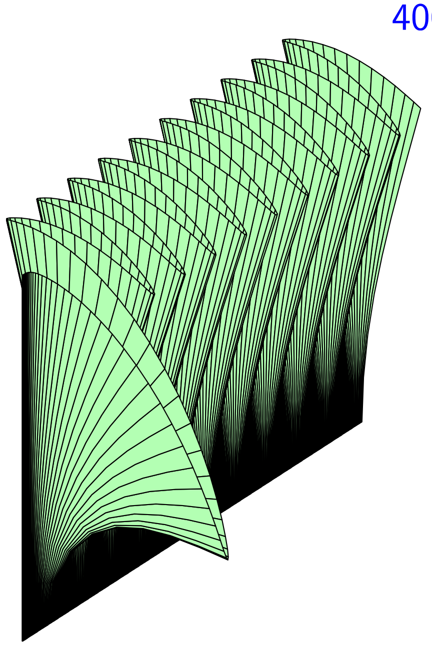
1000 Zeitschritte

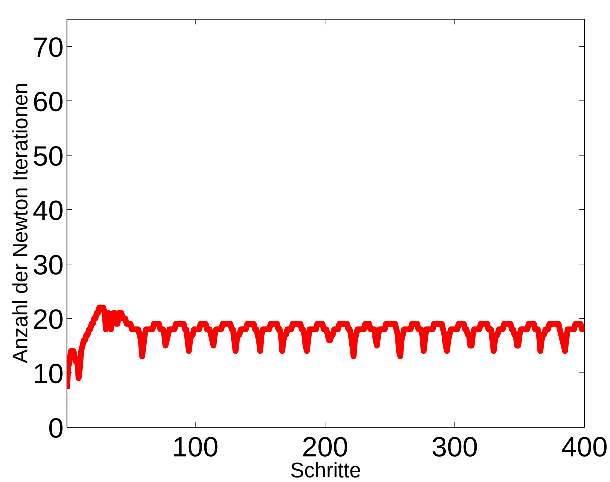


A "Stiff" Beam: Langzeitverhalten (10)

Implizites RK4, Newton Iteration, Ortsdiskretisierung $S = 8,\ T = 20$

400 Zeitschritte



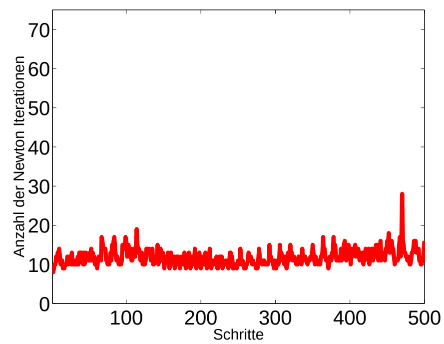


"Stiff" Beam: Sensitivität der Anfangsbedingungen (11)

Implizites RK4, Newton Iteration, Ortsdiskretisierung $S = 8,\ T = 5$

500 Zeitschritte

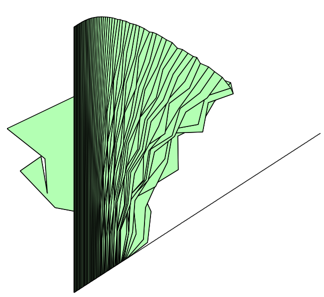
Bereits für kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen $\theta_{S+1}(0) = 0.4$ treten Oszillationen auf, wobei die Ursache nicht am Lösungsverfahren, sondern in der Differenzialgleichung selbst zu suchen ist.



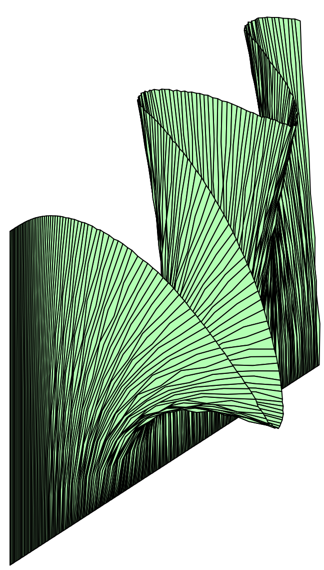
A "Stiff" Beam (12)

Adams–Bashforth Verfahren (explizit), Ordnung 4, $S = 8,\ T = 5$

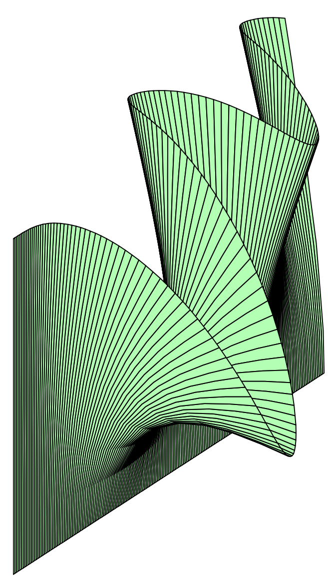
2620 Zeitschritte



2650 Zeitschritte



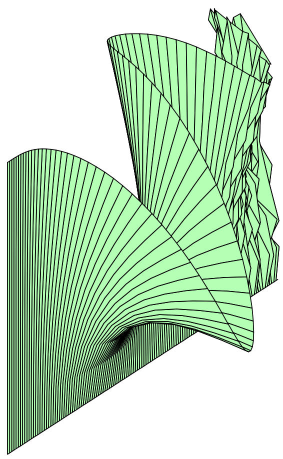
2850 Zeitschritte



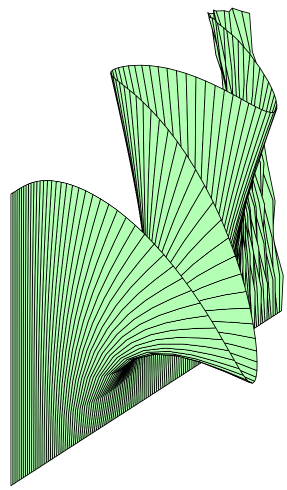
A "Stiff" Beam (13)

Adams–Moulton Verfahren (implizit), Ordnung 4, innere Iterationen, $S = 8$, $T = 5$

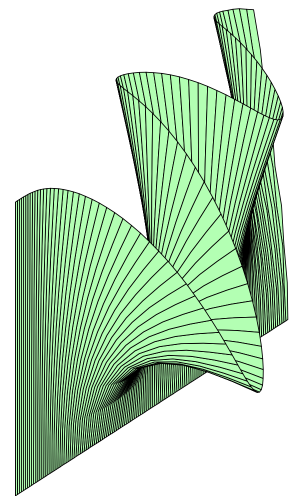
1250 Zeitschritte



1300 Zeitschritte



1350 Zeitschritte

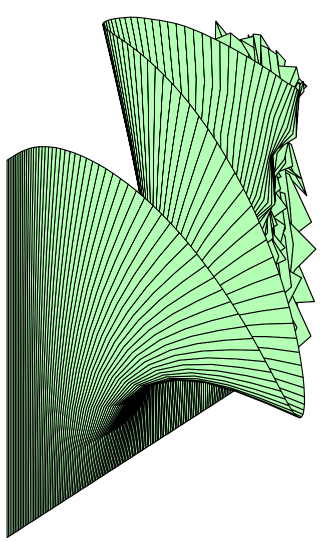


Bemerkung: Verbesserte Stabilitätseigenschaften als AB–Verfahren

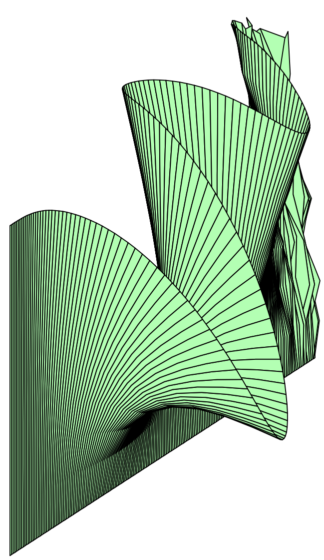
A "Stiff" Beam (14)

BDF Verfahren, Ordnung 4, innere Iterationen, $S = 8$, $T = 5$

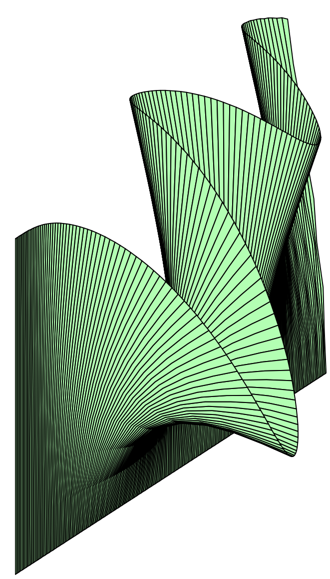
2100 Zeitschritte



2200 Zeitschritte



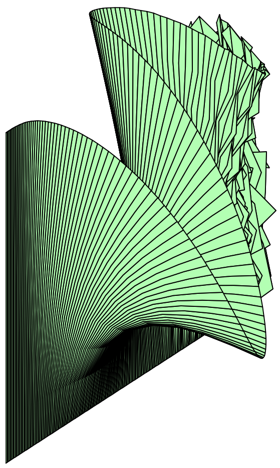
2300 Zeitschritte



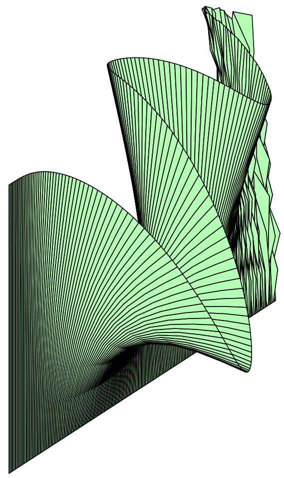
A "Stiff" Beam (15)

BDF Verfahren, Ordnung 4, Newton–Iterationen, $S = 8$, $T = 5$

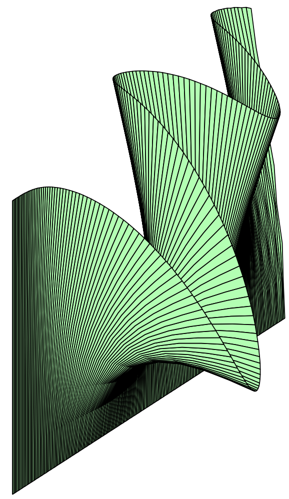
2100 Zeitschritte



2200 Zeitschritte



2300 Zeitschritte

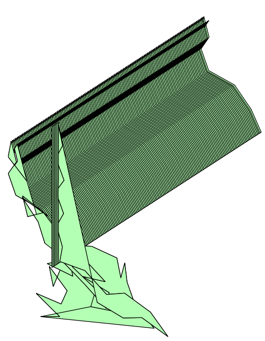


Bemerkung: Auftreten der Oszillation bedingt durch Stabilitätsgebiet und nicht durch den nichtlinearen Löser

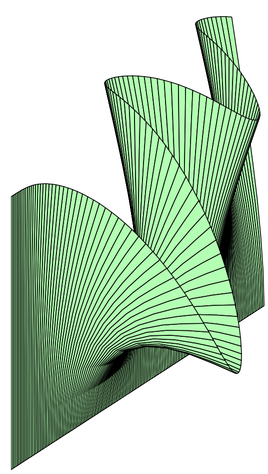
A "Stiff" Beam (16)

BDF Verfahren, Ordnung 2, innere Iterationen, $S = 8$, $T = 5$

824 Zeitschritte



825 Zeitschritte

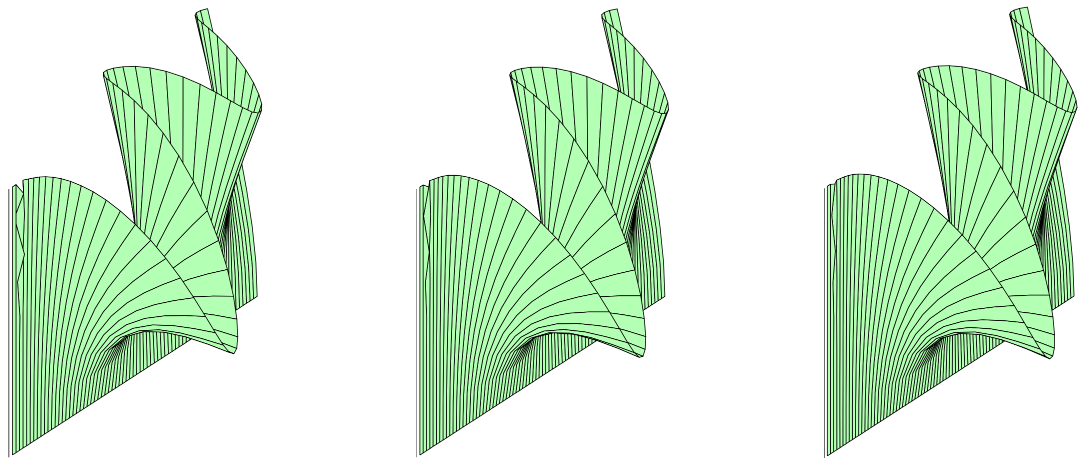


Bemerkung: BDF–Verfahren der Ordnung 2 hat größeres Stabilitätsgebiet als BDF–Verfahren der Ordnung 4

A "Stiff" Beam (17)

BDF Verfahren, Ordnung 2, Newton–Iterationen, $S = 8$, $T = 5$

70 Zeitschritte   75 Zeitschritte   80 Zeitschritte



Bemerkung: BDF–Verfahren der Ordnung 2 ist fast stabil;
In Kombination mit Newton keine Stabilitätsprobleme