Matemáticas Avanzadas

CURSO 2009-10

Clase Práctica No. 8

ECUACIONES DIFERENCIALES

Métodos de solución

de ecuaciones de primer orden

UNIVERSIDADE
DE VIGO

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

EJERCICIO RESUELTO. Resolver la ecuación diferencial

$$(x^2 - y^2)dx + xydy = 0.$$

Es claro que es una ecuación diferencial homogénea pues

$$P(x, y) = x^2 - y^2$$

y

$$Q(x, y) = xy$$

son funciones (polinomios) homogéneas del mismo grado 2.
Se sabe entonces que el cambio de variable $z = y/x$ la transforma en una ecuación diferencial en variables separadas.
Para resolverla se escribe la ecuación diferencial en la forma $y' + (x^2 - y^2)/(xy) = 0$ y se siguen los pasos siguientes:

Solución MATLAB

Hacemos el cambio de variable.

```
>> syms x y z
>> y=x*z
>> y=subs(y, 'z(x) ', 'z')
   y =x*z(x)
>> subs(diff(y,x)+(x^2-y^2)/(x*y),y,'y')
ans =z(x)+x*diff(z(x),x)+
         (x^2-x^2*z(x)^2)/x^2/z(x)
```

Nota: La respuesta obtenida `ans=0` es una ecuación diferencial que podemos resolver usando el comando DSOLVE, o con la ayuda del MATLAB, mediante el procedimiento de separar las variables e integrar por separado.

$$\boldsymbol{xz' + \frac{1}{z} = 0}$$

Aplicando DSOLVE

```
>>z=dsolve('z+x*Dz+(x^2-x^2*z^2)/x^2/z=0','x')
 z =[  (-2*log(x)+C1)^(1/2)]
    [ -(-2*log(x)+C1)^(1/2)]
```

Finalmente se deshace el cambio y se obtiene la solución

$$(y/x)^2 = -2\log(x) + C1.$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas utilizando MATLAB.

$$a)\ xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

$$b)\ (x^3 + y^2x)dx - 3x^2y\,dy = 0$$

$$c)\ x^2y' = y^2 - x^2$$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Sea

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Si P y Q tienen derivadas parciales primeras continuas en un abierto simplemente conexo D, entonces equivalen:

i) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ es exacta.

ii) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Recordemos que una ecuación diferencial es exacta cuando existe el potencial $F(x, y)$ tal que $dF = Pdx + Qdy$. En tal caso, la solución general es

$$F(x, y) = C.$$

Para la obtención de F se procede según se indica en la siguiente diapositiva.

Cálculo del potencial

Integrando P respecto a x obtenemos

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y).$$

Para determinar $f(y)$ se deriva lo anterior con respecto a y y se iguala a Q

$$Q = \frac{\partial(\int P(x,y)dx)}{\partial y} + f'(y).$$

Luego, de

$$f'(y) = Q - \frac{\partial(\int P(x,y)dx)}{\partial y}.$$

obtenemos $f(y)$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$F(x,y) = C.$$

Ejercicio resuelto

Comprobar que es exacta la ecuación diferencial

$$(2x + y)dx + (x - 3y)dy = 0$$

Resolver dicha ecuación diferencial y representar las soluciones.

```
>>P='2*x+y'; Q='x-3*y';
>>test=diff(P,'y')-diff(Q,'x')
test =0
>>F1=int(P,'x')
F1 =x^2+y*x
>>derf=sym(Q)-diff(F1,'y')
derf =-3*y
>>f=int(derf,'y')
f =-3/2*y^2
>>F=F1+f
F =x^2+y*x-3/2*y^2
>>[x,y]=meshgrid(0:0.1:3);
>>z=x.^2+y.*x-3/2*y.^2;
>>contour(x,y,z,15)
```

Ejercicios

Comprobar que las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas.
Resolverlas y representar las soluciones.

$$a)\ y' = \frac{x^2}{y^2}$$

$$b)\ e^y dx + x e^y dy = 0$$

$$c)\ (2x + 3y^3)dx + (9xy^2 + 4)dy = 0$$

$$d)\ \cos(y)dx - x\sin(y)dy = 0$$

$$e)\ e^x dx + dy = 0$$

Tomar como referencia el ejercicio resuelto anterior.