# Introducción a MATLAB

# Control Automático I Profesor A.Spina

Autora: Virginia Mazzone

# Índice General

1	Introducción	2
2	Conversión de una función transferencia	2
3	Raíces de un polinomio	4
4	Desarrollo en fracciones simples	5
5	Función transferencia a lazo cerrado	7
6	Respuesta al impulso	8
7	Respuesta al escalón	10
8	Gráficos	<b>12</b>

## 1 Introducción

Este apunte es una introducción elemental a MATLAB, destinado a conocer y practicar algunas de las operaciones básicas con funciones de transferencia. Los comandos que utilizaremos son los que figuran en la Tabla 1. Para mayor información sobre un comando en particular puede ejecutarse help topic o simplemente help 'comando', desde la ventana de comando de MATLAB.

Comando	Breve explicación
exp	Exponencial.
sin	Seno.
cos	Coseno.
sinh	Seno Hiperbólico.
cosh	Coseno Hiperbólico.
impulse	Respuesta al Impulso.
clf	Elimina la figura actual.
plot	Para graficar.
subplot	Crea distintos gráficos en la misma figura.
hold	Para mantener el mismo gráfico.
title	Título del gráfico.
xlabel	Nombre del eje-X.
ylabel	Nombre del eje-Y.
text	Agrega texto al gráfico.
print	Imprime el gráfico o lo guarda en un archivo
figure	Crea figuras (ventana para gráficos).
step	Respuesta al escalón unitario.
ss2tf	Conversión de espacios de estados a función de transferencia.
length	Número de componentes de un vector.
tf2zp	Conversión de función de transferencia a polos y ceros.
ss2zp	Conversión de espacios de estados a polos y ceros.
zp2tf	Conversión de polos y ceros a función de transferencia.
tf2ss	Conversión de función de transferencia a espacios de estados.
zp2ss	Conversión de polos y ceros a espacio de estados.
zpk	Crea un modelo de cero-polo-ganancia.

Tabla 1: Comandos que utilizaremos

## 2 Conversión de una función transferencia

Una función transferencia puede describirse en MATLAB utilizando dos vectores filas: uno para los coeficientes del numerador y otro para los coefi-

cientes del denominador. A menudo se requiere para analizar o diseñar un sistema conocer la ubicación de sus polos y ceros; dicha información está contenida en la función transferencia del sistema. Cuando la función de transferencia está especificada como razón de polinomios, podemos conocer sus polos, ceros y ganancia, o viceversa. Los comandos que nos permiten ésto son: tf2zp, que de un cociente de polinomios nos devuelve los ceros, polos y una ganancia y zp2tf, que de conocer los polos, ceros y la ganancia de un sistema nos da el numerador y denominador de su función de transferencia.

Ejemplo 1. Supongamos que tenemos la siguiente función transferencia:

$$G(s) = \frac{5s + 20}{s^2 + 4s + 20}$$

Ahora podemos:

- sacar el 5 factor común del numerador.
- factorizar el denominador utilizando sus raíces.

Una vez hechos estos pasos la función transferencia queda de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{5(s+4)}{(s+2-4j)(s+2+4j)}$$

Para llevar a cabo lo mismo con MATLAB, debemos ingresar los polinomios numerador y denominador, en forma de vectores de la siguiente manera:

Observemos que para definir el vector lo hacemos colocando entre corchetes los coeficientes de cada término, ordenados de mayor orden al menor. Para separar las columnas del vector lo hacemos con un espacio, o también podríamos utilizar coma. El punto y coma final es para que el resultado de lo ejecutado por MATLAB no salga por pantalla.

Si ahora ingresamos:

Obtenemos:

Dado que toda función transferencia dada por un cociente de polinomios se puede escribir de la forma

$$G(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)} \quad \text{con} \quad m \le n,$$

podemos armar fácilmente nuestra función transferencia, haciendo

$$G(s) = \frac{5(s+4)}{(s+2+4j)(s+2-4j)}.$$

Si queremos realizar el procedimiento inverso, necesitamos ingresar las variables k, z y p. Con la instrucción:

obtenemos el numerador y denominador de la función transferencia:

El hecho de tener el numerador y el denominador de la función de transferencia en dos variables, no significa que MATLAB lo identifique como tal. Para ello se utiliza el comando tf, que describe en una sola variable la transferencia dada por su numerador y al denominador. Lo utilizamos de la siguiente forma:

Si queremos que MATLAB arme la función transferencia como cociente de productos de los ceros y los polos, para ello utilizamos zpk, de la siguiente forma:

$$G=zpk(z,p,k);$$

# 3 Raíces de un polinomio

En el Ejemplo 1 vimos que el polinomio denominador de la función transferencia venía dado por:  $s^2 + 4s + 20$ , y pudimos hallar sus raíces dado que se trata de una ecuación de segundo orden.

En polinomios de orden superior, la tarea de encontrar sus raíces no siempre es tan fácil. Con la función de MATLAB roots podemos calcular las raíces de cualquier polinomio. Para ejecutar dicha función tenemos que ingresar el polinomio, como vector, recordando que los polinomios se ingresan en la primer componente el término de mayor orden y luego en forma descendente separados por coma o un espacio.

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente polinomio:

$$P = s^4 + 4s^3 + 4s^2 + s + 20$$

Ingresamos el polinomio p=[1 4 4 1 20] y luego:

En lugar de hacer la operación en dos pasos, podemos hacerlo solo en uno; si tipeamos r=roots([1 4 4 1 20]) obtenemos el mismo resultado Las cuatro raíces del polinomio anterior que surgen de MATLAB son:  $-2.6445 \pm 1.2595j$  y  $0.6545 \pm 1.3742j$ .

Si el caso es al revés, es decir, tengo las raíces y quiero conocer el polinomio, el comando poly es el que se utilizaremos. Siguiendo con el mismo ejemplo, supongamos que lo que tenemos son las raíces  $p_{1,2}=-2.6445\pm1.2595j$  y  $p_{3,4}=0.6545\pm1.3742j$ . Entonces el polinomio al que le corresponden esas raíces es:

Notemos que el polinomio P que obtuvimos es m'onico; si quisiéramos cualquier otro, deberíamos multiplicar a P por el coeficiente principal. Otra cosa a tener en cuenta es que siempre que pongamos una raíz compleja debemos poner su conjugada.

# 4 Desarrollo en fracciones simples

Cuando analizamos un sistema de control, por lo general disponemos de su función transferencia a lazo cerrado M(s), donde  $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ . Con lo que podemos escribir la salida en función de la transferencia y la entrada:  $C(s) = M(s) \times R(s)$ .

Si deseáramos conocer la respuesta temporal c(t) del sistema cuando lo excitamos con una señal de entrada r(t), debemos calcular la transformada inversa de Laplace, es decir  $c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{M(s) \times R(s)\}$ . Como sabemos, es más sencillo de antitransformar cuando se trata de un cociente de polinomios, dado que si lo expresamos en fracciones simples podemos utilizar una tabla de transformadas de Laplace.

Ejemplo 3. Supongamos que tenemos la siguiente función transferencia:

$$M(s) = \frac{16s + 16}{(s+2)(s+4)}$$
 y que  $R(s) = \frac{1}{s}$ 

Como las raíces del denominador sor reales y distintas, el método de desarrollo en fracciones simples nos permite escribir a  $M(s) \times R(s)$  de la siguiente manera:

$$\frac{16s+16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

Ahora podemos calcular c(t) se la siguiente forma:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s+2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C}{s+4} \right\}$$

$$= A + Be^{-2t} + Ce^{-4t}$$

Para calcular los valores de A, B yC lo hacemos mediante la fórmula de residuos, dado que en este ejemplo los polos son de primer orden, resulta que

$$Res\{p\} = \lim_{s \to p} (s-p)F(s)$$

donde p es el polo para el cual se está calculado el residuo. Veamos como sería en este ejemplo:

$$A = \lim_{s \to 0} (s) \frac{16s + 16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{16(0) + 16}{(0+2)(0+4)} = 2$$

$$B = \lim_{s \to -2} (s+2) \frac{16s + 16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{16(-2) + 16}{(-2)(-2+4)} = 4$$

$$C = \lim_{s \to -4} (s+4) \frac{16s + 16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{16(-4) + 16}{(-4)(-4+2)} = -6$$

Con estos residuos, queda determinada la salida como:  $c(t) = 2 + 4e^{-2t} - 6e^{-4t}$ 

En general, estos cálculos pueden tornarse muy complicados de realizar 'a mano'. Veamos como se simplifican utilizando la función MATLAB residue. Ingresemos nuevamente los polinomios numerador y denominador de la misma forma como lo venimos haciendo hasta ahora. Ingresemos ahora la sentencia:

#### [res,p]=residue(num,den);

Esta función nos devuelve dos parámetros vectoriales: en la variable res aparecen los residuos correspondientes a los polos que figuran en la variable p, es decir, el primer residuo corresponde al primer polo y así sucesivamente.

Si la función transferencia resulta ser propia, es decir que el grado del numerador es igual al del denominador, podemos añadir una parámetro más al argumento del lado izquierdo, que lo podemos llamar k. Veamos como sería esto mediante otro ejemplo:

Ejemplo 4. Supongamos que queremos hallar f(t) siendo:

$$F(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\$$

Si aplicamos el comando:

[res,p,k]=residue(num,den);

y si armamos, como lo hicimos anteriormente, la función desarrollada en fracciones simples, el término independiente es el que aparece el la variable k. Por lo tanto  $F(s) = \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$  De donde ahora calcular la f(t) resulta muy sencillo.

Si ahora nuestro interés es el inverso, es decir que tenemos una función escrita en fracciones simples y quisiéramos obtener la función como cociente de polinomios, analíticamente deberíamos sacar común denominador y hacer todas las cuentas correspondientes. Esto resulta inmediato con el comando de MATLAB:

[num,den]=residue(res,p,k);

#### 5 Función transferencia a lazo cerrado

Ejemplo 5. Supongamos que disponemos del sistema de la Figura 1 donde  $G_1(s)=0.4;\ G_2(s)=\frac{100}{s(s+2)};\ H_2(s)=\frac{s}{s+20}$  y  $H_1(s)=1;$ y pretendemos hallar la función transferencia a lazo cerrado  $M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$ . Si aplicamos

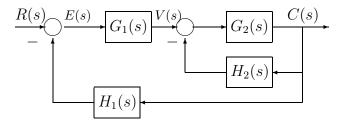


Figura 1: Diagrama de bloques

reducción de bloques, o resolviendo el diagrama de flujo y aplicando Mason, obtenemos:

$$M(s) = \frac{40s + 800}{s^3 + 22s^2 + 180s + 800}$$

En MATLAB la función transferencia a lazo cerrado se puede calcular de dos formas:

• Utilizando SIMULINK (lo veremos más adelante).

• Utilizando las funciones de MATLAB series, parallel, feedback y cloop.

Para calcular la función transferencia a lazo cerrado M(s) sigamos los siguientes pasos:

1. Definamos los numeradores y denominadores de las funciones transferencia de cada bloque de la siguiente forma:

```
numg1=0.4; deng1=1;
numg2=100; deng2=[1 2 0];
numh2=[1 0]; denh2=[1 20];
```

2. Calculemos la función transferencia de V(s) a C(s):

```
[numvc,denvc]=feedback(numg2,deng2,numh2,denh2,-1);
```

3. Ahora calculemos la función transferencia de E(s) a C(s) con:

```
[numec,denec] = series(numg1,deng1,numvc,denvc);
```

4. Por último calculemos el lazo cerrado:

```
[num, den]=cloop(numec,denec,-1);
```

Lo que obtuvimos son los vectores numerador y denominador por separado. Recordemos que para ingresarla como función de transferencia a MATLAB, debemos utilizar tf.

# 6 Respuesta al impulso

Ahora que ya sabemos como pasar de la respuesta temporal a Laplace, verifiquemos que la respuesta al impulso de la transformada de Laplace coincide con la respuesta temporal. Para ello utilizaremos el comando de MATLAB impulse.

Ejemplo 6. Supongamos que tenemos una función transferencia de la siguiente forma:

$$C(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)};$$
 donde  $a = 1, b = 2$ 

Si calculamos ahora la antitransformada, desarrollando en fracciones simples como en la sección 4, resulta que  $c(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ . Ingresemos los vectores numerador y denominador y luego ejecutemos el comando:

#### impulse(num,den);

Veremos que este comando devuelve el gráfico de la Figura 2 Como podemos

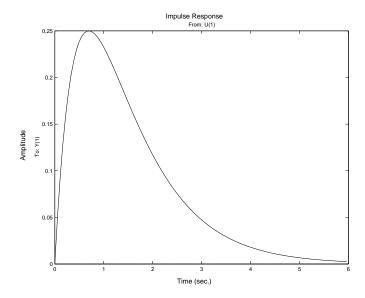


Figura 2: Respuesta al impulso

ver, solo nos muestra los primeros 6 segundos de la respuesta. Si quisiéramos que nos mostrara 12 segundos, debemos definir un vector de tiempo. Para ello ingresemos:

t=0:0.1:12;

El vector t tendrá como primer elemento el 0 y como último al 12. Cada elemento estará a una distancia de 0.1 de su consecutivo. Si ahora introducimos este parámetro en el comando impulse, de la siguiente forma: impulse(num,den,t), el gráfico mostrará los primeros 12 segundos de la respuesta al impulso.

Notemos que este comando no fue asignado a ninguna variable, podríamos asignarle un vector, es decir y=impulse(num,den,t), y así tendríamos los valores de la salida de la respuesta al impulso en dicho vector. Podríamos también graficar este vector con el comando plot(t,y), comando que veremos en la sección 8.

Dado que la función transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo se define como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso cuando todas las condiciones iniciales son nulas, comparemos el resultado obtenido con el que resultaría si calculáramos la respuesta temporal. Para ello utilizaremos el mismo vector temporal t, y la instrucción  $f=\exp(-t)+\exp(-2*t)$ . Ahora podemos comparar los valores obtenidos desde la respuesta al impulso con los obtenidos desde la respuesta temporal (por ejemplo, restándolos).

# 7 Respuesta al escalón

De la misma forma que en la sección anterior, podríamos querer graficar la respuesta al escalón unitario. MATLAB posee un comando, llamado step, para calcular la salida temporal cuando la entrada se trata de un escalón unitario. Lo único que necesita este comando es el numerador y el denominador de la función transferencia.

```
step(num,den);
y=step(num,den);
```

Si utilizamos el comando sin asignarle la salida a ninguna variable, MAT-LAB abre una ventana gráfica mostrando el gráfico de la salida a la excitación escalón unitario, de la misma forma que antes. Sin embargo, al igual que vimos en el comando **impulse**, cuando éste es asignado a una variable, los valores obtenidos se guardan en el vector y.

Ejemplo 7. Calculemos la respuesta al escalón unitario de la función transferencia:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 0.8s + 4}$$

Si ingresamos el comando step(num,den), veremos un gráfico similar al que podemos observar en la Figura 3.

Si ahora queremos la respuesta a una entrada rampa unitaria, MATLAB no posee ningún comando que lo resuelva. Por lo que veremos cómo con el comando step podemos obtener una rampa. Si seguimos con el ejemplo anterior y excitamos al sistema con r(t) = t, es decir que  $R(s) = \frac{1}{s^2}$ , tenemos lo siguiente:

$$C(s) = \left(\frac{4}{s^2 + 0.8s + 4}\right) \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \left(\frac{4}{s^3 + 0.8S^2 + 4s}\right) \frac{1}{s}$$

Por lo que utilizando como denominador de la función transferencia al polinomio  $s^3 + 0.8s^2 + 4s$ , es decir den=[1 0.8 4 0], y calculando la respuesta al escalón unitario con step(num, den), obtenemos la respuesta a la rampa unitaria que se muestra en la Figura 4.

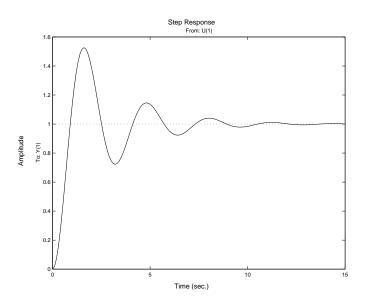


Figura 3: Respuesta al escalón unitario

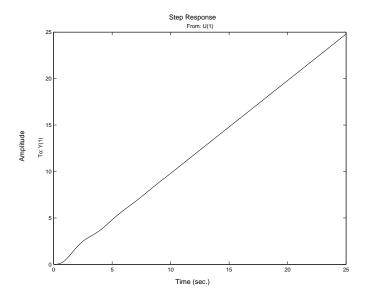


Figura 4: Respuesta a la rampa unitaria

#### 8 Gráficos

Como vimos en secciones anteriores los comandos step e impulse grafican las respuestas al escalón y al impulso respectivamente, pero ahora vamos a introducir algo más general. Para graficar cualquier función en general utilizaremos el comando plot, que solo necesita definir el vector a graficar y escribiendo:

#### plot(vector);

Con esta sentencia, MATLAB realiza un gráfico donde el eje de abscisas será la posición del elemento del vector y la ordenada el valor que tiene el vector en dicha posición. En el ejemplo 6, guardamos en el vector y los valores de la salida de la respuesta al impulso. Si ahora ingresamos plot(y), en lugar de tener segundos en el eje de abscisas tendremos la cantidad de elementos de ese vector. Si ingresamos plot(t,y), ahora en el eje de abscisas corresponderá al vector temporal ya definido e irá desde t=0 a t=12, que es como lo teníamos definido. Grafiquemos entonces los valores guardados en el vector f. Estos valores corresponden a la respuesta temporal, por lo que el gráfico deberá ser el mismo. Si ingresamos plot(t,f), obtendremos el gráfico de la Figura 5

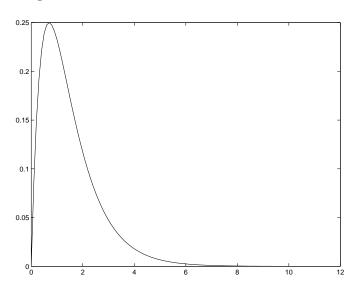


Figura 5: Respuesta temporal del ejemplo 6

Como podemos ver, no hay casi diferencias con la figura 2, excepto por el título y los nombres de los ejes que el comando impulse(num,den) pone automáticamente. Veamos que no es difícil si se lo queremos agregar a un gráfico, para ello utilizaremos las sentencias title, xlabel y ylabel.

Estos comandos se utilizan luego de ingresar el comando plot, ya que tanto el título, como los nombres de los ejes, se escribirán el la figura que se encuentre abierta:

```
title('Respuesta al Impulso');
xlabel('Tiempo(seg.)');
ylabel('Salida c(t)');
```

Notemos que el texto que queremos que aparezca está escrito entre comillas simples. Los comandos anteriores, pueden ser también utilizados con step y impulse, aunque cuando son utilizados en estos comandos, el título y el nombre de los ejes que trae la función por defecto también aparecen. Otros comandos que pueden ser útiles a la hora de trabajar con gráficos son grid y text, que se utilizan para agregar una grilla y agregar texto respectivamente. El comando text se utiliza de la misma forma que que title, es decir, el texto que aparecerá será el que se encuentra escrito entre las comillas simples , pero antes debemos ingresar las coordenadas (x,y) donde queremos que aparezca el texto. El comando grid, se usa sin parámetros. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8. Supongamos que tenemos la función transferencia de la Figura 1, que ya la calculamos con MATLAB en el Ejemplo 5. Abramos un archivo nuevo e ingresemos lo siguiente:

```
num=[40 800];
den[1 22 180 800];
t=0:0.01:2;
y=step(num,den,t);
plot(t,y);
title('Respuesta al escalon unitario');
xlabel('Tiempo (seg.)');
ylabel('Salida del sistema');
text(0.5,1.1,'maximo valor');
grid;
```

Si ejecutamos el programa vamos a obtener el gráfico de la Figura 6.

Supongamos ahora que queremos graficar en la misma figura dos o más gráficos para poder compararlas. Esto es posible utilizando el comando hold on - hold off, que mantiene la figura y grafica el siguiente gráfico sobre la misma figura, de la siguiente manera:

Ejemplo 9. Supongamos que queremos graficar tres sinusoides con frecuencias diferentes, ingresemos en un archivo nuevo:

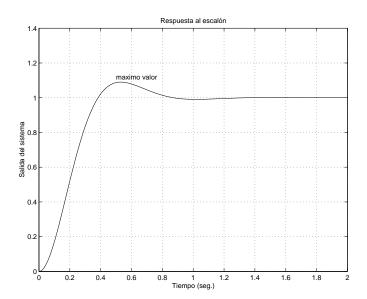


Figura 6: Respuesta al escalón del ejemplo

```
t=0:pi/20:2*pi;
y1=sin(t);
y2=sin(t-pi/2);
y3=sin(t-pi);
plot(t,y1);
hold on;
plot(t,y2);
plot(t,y3);
hold off;
```

Luego de ejecutar estas líneas veremos que en la figura que resulta, aparecen 3 gráficas en el mismo color, e imposible de identificar cual corresponde a cada una porque ambas se encuentran graficadas con el mismo tipo de linea y el mismo color. Para ello veamos un parámetro del tipo *string* que podemos agregar al comando plot para especificaciones del estilo del gráfico. Los parámetros que figuran en la Tabla 2 son para elegir el color de la línea, los que se encuentran en la Tabla 3 son para elegir el estilo de la línea y los que se encuentran el la Tabla 4 son para elegir el tipo de marca que aparecerá sobre los puntos del vector graficado.

Ahora especifiquemos cada uno de los plot con un estilo diferente, por ejemplo, en lugar del comando plot(t,y) escribamos:

```
plot(t,y1,'-.rx');
plot(t,y2,'--mo');
plot(t,y3,':bs');
```

Espec.	Color
r	rojo
b	azul (por defecto)
w	blanco
g	verde
c	cian
m	magneto
у	amarillos
k	negro

Tabla 2: Especificadores de color

Espec.	Estilo de linea
-	linea sólida (por defecto)
_	linea rayada
:	linea punteada
	linea punto-raya

Tabla 3: Especificadores de linea

Espec.	Estilo de marca
+	signo màs
О	círculo
	punto
*	asterisco
s	cuadrado
d	diamante
X	cruz
p	estrella de 5 puntas
h	estrella de 6 puntas

Tabla 4: Especificadores de marca

Si corremos nuevamente el archivo veremos que hay diferencia entre una función y la otra, pero seguimos sin saber cuál corresponde a qué función. Para ello utilicemos el comando legend, que pone la leyenda que queramos a cada gráfico. Es decir, escribamos como última linea:

```
legend('sin(t)', 'sin(t-pi/2)', 'sin(t-pi)');
```

Ahora si observamos el gráfico debería ser como el de la Figura 7.

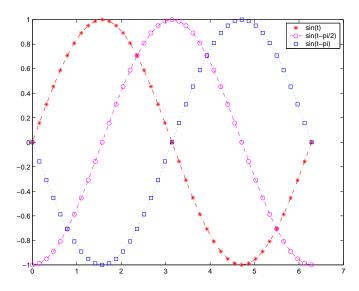


Figura 7: Tres gráficos en una misma figura

También podríamos querer cada gráfico en una figura diferente. Para ello debemos ejecutar el comando figure(2) antes de graficar por segunda vez y figure(3) antes del último gráfico. Estas sentencias se usan sin el comando de hold on - hold off y lo que hacen es abrir una nueva figura para cada gráfico. Otra opción válida para MATLAB, por ejemplo, es que las tres funciones aparezcan en una sola figura pero las tres graficadas en forma independiente. Para ello utilicemos subplot(m,n,p), que dividirá a la figura en m filas y n columnas, pero crea una figura en la posición p. Ingresemos lo siguiente para ver como funciona:

```
clf; %borra el grafico actual
subplot(3,1,1);
plot(t,y1,'.-r');
title('sin(t)');
subplot(3,1,2);
plot(t,y2,'--m');
title('sin(t-pi/2)');
subplot(3,1,3);
```

```
plot(t,y3,':b');
title('sin(t-pi)');
```

Notemos que con el símbolo %, comentamos texto dentro del archivo. Si ejecutamos nuevamente el programa, obtenemos lo que se observa en la Figura 8

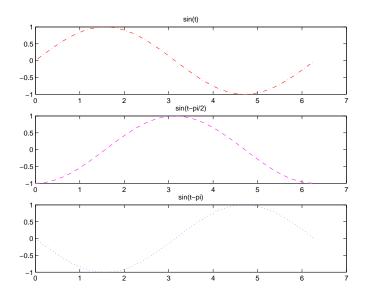


Figura 8: Tres gráficos diferentes en la misma figura

Con respecto a gráficos, MATLAB posee muchas otras opciones, como graficar en escala logarítmica, con loglog, semilogx y semilogy, gráficos en tres dimensiones, plot3, gráficos de barras, bar, etc. También permite con el comando print, guardar el gráfico en un archivo de extensión, por ejemplo postscript o .jpg, o también lo podemos imprimir con el mismo comando indicando el nombre de la impresora.

No nos olvidemos que MATLAB cuenta con una ayuda a la cual podemos recurrir en caso de no recordar como se utiliza un comando. Si investigamos un poco el help, podemos encontrar funciones que resuelven muchas otras cosas interesantes. Invito a que se metan a conocerlas, como así también conozcan las distintas demostraciones que pueden encontrar si tipean: demo.