

Lección I

Ecuaciones diferenciales

I.1. Ecuaciones diferenciales. El problema de Cauchy

Una *ecuación diferencial ordinaria* de orden $n \in \mathbb{N}$ y con condiciones iniciales en el punto $a \in \mathbb{R}$ es toda expresión

$$y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}); \quad y(a) = y_a, y^{(1)}(a) = y_a^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_a^{(n-1)} \quad (\text{I.1})$$

y donde el problema de su resolución es encontrar todas las funciones $y = y(t)$, $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, que hacen de la anterior expresión una igualdad y que además verifican que $y^{(i)}(a) = y_a^{(i)} \in \mathbb{R}$.

La primera observación importante es que toda ecuación diferencial de orden n se puede entender como una ecuación diferencial de orden 1 a cambio de hacer lo siguiente: Llamando $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y^{(1)}(t), \dots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$, la primera ecuación de (I.1) es equivalente al sistema

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= y^{(n)}(t) = f(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.2})$$

de donde (I.1) es equivalente a la expresión

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(a) = x_a \quad (\text{I.3})$$

donde $F(t, x) = (x_2, \dots, x_n, f(t, x_2, \dots, x_n))$ y $x_a = (y_a, y_a^{(1)}, \dots, y_a^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ y donde el problema de resolverlo es el problema de determinar las funciones $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que hacen de lo anterior una igualdad. Hay que decir que si F y $\partial F / \partial x$ son funciones continuas en un entorno que contenga al punto (a, x_a) , entonces el problema del *valor inicial*, también llamado *problema de Cauchy* admite una única solución, $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, en un entorno de (a, x_a) , la cual habrá de verificar la relación

$$x(t) = x_a + \int_a^t F(u, x(u)) du \quad (\text{I.4})$$

y también

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x(t)) dt \quad (\text{I.5})$$

para $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una discretización h -espaciada, $h = \frac{a-b}{n}$, del intervalo $[a, b]$ y $x_i = x(t_i)$.

Definición: De la ecuación diferencial $x'(t) = F(t, x(t))$ diremos que una *ecuación diferencial autónoma* si F es independiente del parámetro fundamental, es decir, $F(t, x) = F(x)$, en cuyo caso la ecuación diferencial toma la expresión

$$x' = F(x) \quad (\text{I.6})$$

y diremos que no es *autónoma* si F depende del parámetro fundamental t .

I.1.1. Método de Euler

Para aproximar la solución podemos realizar diferenciación numérica en el término $x'(t)$. Realizando la aproximación más elemental, la que corresponde a sustituir $x'(t)$ por $x(t+h) - x(t)/h$, obtendremos de (I.3) las dos expresiones equivalentes siguientes

$$F(t, x) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad \text{y} \quad x(t+h) \approx x(t) + hF(t, x) \quad (\text{I.7})$$

pudiendo, entonces, construir una aproximación $\{\chi_i\}$, $\chi_i \approx x(t_i)$, de la solución $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ en el intervalo $[a, b]$ como sigue:

$$\left. \begin{array}{ll} t_0 = a, & \chi_0 = x_a \\ t_1 = t_0 + h, & \chi_1 = \chi_0 + hF(t_0, \chi_0) \\ \dots & \dots \\ t_{i+1} = t_i + h, & \chi_{i+1} = \chi_i + hF(t_i, \chi_i) \\ & 0 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\} \quad (\text{I.8})$$

n es el número de pasos de la discretización y h el tamaño del paso. El número de puntos de discretización es igual a $n+1$.

La relación dada en (I.8) constituye el método de Euler para la resolución del problema de Cauchy (I.3). Si F es de clase 1; es decir, si todas sus primeras derivadas parciales son continuas, entonces, el error global de la aproximación depende de las primeras derivadas parciales de F y es del orden de h . Claramente, si F es constante el error es nulo pues la solución es lineal.

I.1.2. Método de Runge–Kutta de segundo orden

Para incrementar el orden de exactitud en el cálculo de χ_{i+1} a partir de χ_i mediante la igualdad

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt \quad (\text{I.9})$$

podemos proceder incrementando el orden de exactitud en el método de integración utilizado para el cálculo de la integral

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt \quad (\text{I.10})$$

Si utilizamos la regla de los trapecios, resulta

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x) dt \approx T(F, h) = \frac{h}{2} [F(t_i, x_i) + F(t_{i+1}, x_{i+1})] \quad (\text{I.11})$$

En la anterior ecuación se desconoce x_{i+1} , así que se aproxima por la estimación $x_{i+1} = x_i + hF(t_i, x_i)$ calculada a partir del método de Euler. El esquema que se deduce de esta forma se denomina *método de Runge–Kutta de segundo orden* y se escribe

$$\left. \begin{array}{ll} t_0 = a, & \chi_0 = x_a \\ t_1 = t_0 + h, & \chi_1 = \chi_0 + \frac{1}{2}(k_{01} + k_{02}) \\ \dots & \dots \\ t_{i+1} = t_i + h, & \chi_{i+1} = \chi_i + \frac{1}{2}(k_{i1} + k_{i2}) \\ & 0 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\} \quad (\text{I.12})$$

donde

$$\left. \begin{array}{ll} k_{i1} &= hF(t_i, \chi_i) \\ k_{i2} &= hF(t_{i+1}, \chi_i + k_{i1}) \end{array} \right\} \quad (\text{I.13})$$

De las relaciones $\chi_{i+1} = \chi_i + T(F, h)$ y $x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x(t)) dt$ se deducen, restando y teniendo en cuenta (H.11), las igualdades

$$\epsilon_0 = 0, \dots, \epsilon_{i+1} = \epsilon_i + c_{i+1}h^2 + o(h^3), \dots \quad (\text{I.14})$$

para $\epsilon_i = x_i - \chi_i$ la diferencia entre la solución exacta y la numérica. De lo anterior, se deduce que si denotamos χ^h a la aproximación $\{\chi_i\}$ de x asociada a la discretización $\{a + ih\}$, $i = 0, \dots, n$, mediante el método de Runge–Kutta de segundo orden; entonces, se verifica

$$x = \chi^h + \nu h^2 + o(h^2) \quad (\text{I.15})$$

para $\nu = \nu(t)$ una función que no depende de h . Aplicando ahora la regla de Runge, (H.19), se tiene

$$x - \chi^{h/2} = \frac{\chi^{h/2} - \chi^h}{3} + o(h^2) \quad (\text{I.16})$$

fórmula que nos dice que es posible controlar el error cometido al aproximar $x(t)$ por $\chi^{h/2}$ o, pensándolo de otro modo, que es posible adaptar el tamaño del paso h para que el error cometido no supere una tolerancia prefijada.

La igualdad (I.15) nos dice que el método de Runge–Kutta de segundo orden posee orden dos como orden global de aproximación.

Nota: Las anteriores relaciones son ciertas a condición de que $x(t)$ sea de clase 3 y para ello basta con que F sea de clase 2; es decir, que sean continuas todas las derivadas parciales de orden dos.

I.1.3. Método de Runge–Kutta de cuarto orden

La aproximación de la integral (I.10) también la podemos realizar mediante la regla de Simpson, según la fórmula

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{3}(F(t_i, x_i) + 4F(t_{i+1/2}, \bar{x}_{i+1/2}) + F(t_{i+1}, \bar{x}_{i+1})) \quad (\text{I.17})$$

donde $\bar{x}_{i+1/2}$ y \bar{x}_{i+1} son estimaciones porque no se conocen ni $x_{i+1/2}$ ni x_{i+1} . Procediendo de forma análoga al anterior párrafo, aunque los detalles son muchos más complejos (ver [7], pág. 357), obtenemos el siguiente esquema para la resolución del problema de Cauchy que es denominado *método de Runge–Kutta de cuarto orden*

$$\left. \begin{array}{ll} t_0 = a, & \chi_0 = x_a \\ t_1 = t_0 + h, & \chi_1 = \chi_0 + \frac{1}{6}(f_{01} + 2f_{02} + 2f_{03} + f_{04}) \\ \dots & \dots \\ t_{i+1} = t_i + h, & \chi_{i+1} = \chi_i + \frac{1}{6}(f_{i1} + 2f_{i2} + 2f_{i3} + f_{i4}) \\ & 0 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\} \quad (\text{I.18})$$

y donde

$$\left. \begin{array}{l} f_{i1} = hF(t_i, \chi_i) \\ f_{i2} = hF(t_{i+1/2}, \chi_i + \frac{1}{2}f_{i1}) \\ f_{i3} = hF(t_{i+1/2}, \chi_i + \frac{1}{2}f_{i2}) \\ f_{i4} = hF(t_{i+1}, \chi_i + f_{i3}) \end{array} \right\} \quad (\text{I.19})$$

El método definido en el anterior esquema posee cuarto orden de aproximación global. De hecho, a condición de que F sea de clase 4 se verifica una relación análoga a (I.15) pero sustituyendo h^2 por h^5 . De esta última relación se deduce

$$x - \chi^{h/2} = \frac{\chi^{h/2} - \chi^h}{15} + o(h^5) \quad (\text{I.20})$$

I.1.4. Métodos implementados en Matlab

Matlab cuenta con dos comandos para la resolución numérica de una ecuación diferencial que son `ode23` y `ode45`. El primero de ellos combina los métodos de Runge–Kutta de segundo y tercer orden y el segundo comando combina los métodos de Runge–Kutta de cuarto y quinto orden. Su sintaxis es:

```
ode23('nombre_F',[a b],condiciones iniciales)
ode45('nombre_F',[ab],condiciones iniciales)
```

Además, Matlab cuenta con el comando `dsolve` el cual resuelve una ecuación diferencial de forma simbólica o exacta. Veamos con ejemplos todos los comando citados últimamente

Práctica a La ecuación diferencial de segundo orden siguiente, que es un ejemplo particular de la conocida ecuación de Van der Pol:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + (y^2 - 1)y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{I.21})$$

se puede expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden a condición de hacer $x_1 = y, x_2 = y'$, en cuyo caso quedaría:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= (1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 1 \end{matrix} \quad (\text{I.22})$$

Ahora, para resolver numéricamente esta ecuación en Matlab procedemos como sigue:

- Definimos la función F , para ello realizamos el listado siguiente que llamaremos `i10`

```
function F=i10(t,x)
F=[x(2)
    (1-x(1).^2).*x(2)-x(1)];
```

Es importante observar que la función `ode23` exige que la función F tenga dos argumentos de entrada t, x a pesar de que F no depende de t , es decir, a pesar de ser un sistema autónomo.

- Resolvemos numéricamente la ecuación diferencial con el listado

```
t0=0, tf=25          %intervalo de integración
xa=[1 ;1]           %Condiciones iniciales en t0=0

[t,x]=ode23('i10',[t0,tf],xa)
x1=x(:,1); x2=x(:,2);
plot(t,x1,'r',t,x2,'b*')
```

Con el último comando obtenemos la representación gráfica de la solución $y(t) = x_1(t)$ en azul y de las velocidades $y'(t) = x_2(t)$ en rojo.

Práctica b Resolvemos ahora de forma exacta la ecuación diferencial

$$y^{(2)} - y^{(1)} - 2y = 0, \quad y(0) = 3/2, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{I.23})$$

para ello ejecutamos el listado

```
E='D2y-Dy-2*y=0' y=dsolve(E,'y(0)=3/2, Dy(0)=0')
solucion_general=dsolve(E)
```

Si además queremos una representación gráfica de la única solución y en el intervalo $[0, 2]$ ejecutamos

```
ezplot(y,[0 2])
```

Como ejercicio complementario pedimos resolver simbólicamente la ecuación diferencial planteada en la práctica anterior. Observaremos que no la resuelve pues le resulta imposible por métodos exactos.

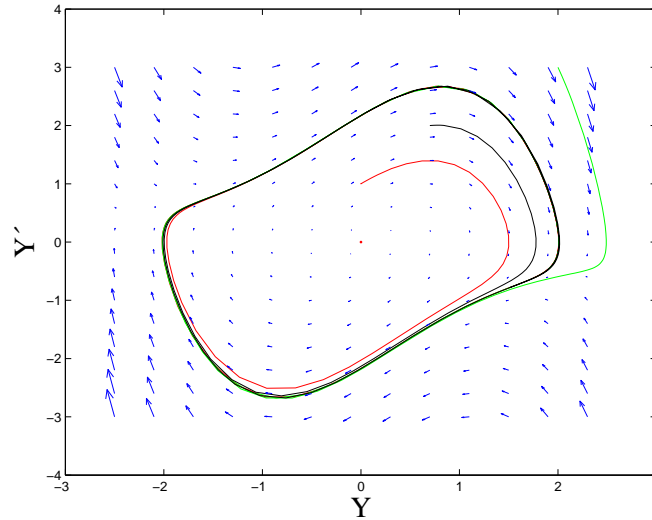


Figura I.1: Espacio de flujo de la ecuación $y'' + (y^2 - 1)y' + y = 0$.

I.2. Espacio de fases y de flujo

I.2.1. Caso autónomo

Consideramos una ecuación autónoma de orden menor que tres, su expresión general es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\}$$

En ciertas ocasiones es importante realizar un estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación diferencial comprobando cuál es el distinto comportamiento que éstas tienen ante diferentes condiciones iniciales $x_a = (x_1^a, x_2^a, x_3^a)$. Para ello se suele hacer la representación de varias soluciones en el espacio (X_1, X_2, X_3) , al que denominamos *espacio de fases*. Si además queremos tener una mayor idea del comportamiento, podemos realizar una representación del *espacio de flujo*, lo que conseguimos representando el campo X que define la ecuación diferencial:

$$X = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

utilizando para ello los comandos

```
quiver(x1,x2,f1,f2)
quiver3(x1,x2,x3,f1,f2,f3)
```

dependiendo de si la ecuación diferencial es de orden 2 ó 3. Con ello conseguimos representar en cada punto de coordenadas $x = (x_1, x_2, x_3)$ el vector de coordenadas $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, claro está, convenientemente escalado para una correcta visualización. Como ejemplo realizamos la siguiente

Práctica c Ejecutando el siguiente listado obtenemos la figura (I.1) correspondiente al espacio de flujo de la ecuación diferencial de la práctica 1A:

```

[t,x0]=ode45('i10',[0 15],[0 1]');
[t,x1]=ode45('i10',[0 15],[2 3]');
[t,x2]=ode45('i10',[0 15],[0.7 2]');
[t,x3]=ode45('i10',[0 15],[0 0]');

plot(x0(:,1),x0(:,2),'r')
hold on
plot(x1(:,1),x1(:,2),'g')
plot(x2(:,1),x2(:,2),'k')
plot(x3(:,1),x3(:,2),'r')

xm1=-2.5:0.4:2.5; xm2=-3:0.4:3;
[X1,X2]=meshgrid(xm1,xm2);
quiver(X1,X2,X2,(1-X1.^2).*X2-X1)

hold off

```

De la figura (I.1) se puede observar:

1. La interpretación geométrica de lo que supone resolver la ecuación diferencial (I.21): Encontrar una curva $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ con la propiedad de que en cada punto $x(t)$ su vector tangente $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_2}$ coincide con el valor $X(x(t))$ del campo asociado a la ecuación diferencial en el punto $x(t)$.
2. La existencia de un ciclo límite al que convergen, por lo menos, las soluciones de condiciones iniciales $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(0.7, 2)$.
3. Que la curva solución que pasa por $p = (0, 0)$ sólo contiene a p . En estos casos se dice que p es un *punto fijo* de la ecuación diferencial o bien un *punto crítico* del campo X ya que la condición de que la curva solución sea un único punto equivale a la condición $X(p) = 0$.

Práctica d Queremos estudiar, en un entorno del punto $p = (1, 1, 2)$, el espacio de fases del sistema autónomo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_1(1 - x_2^2) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= (x_1 - 1)x_3 \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= x_2(x_3 - 2) \end{aligned} \right\}$$

Para ello ejecutamos y estudiamos el resultado del listado:

```

[x,y,z]=sphere(20);
X=0.5*x+1; Y=0.5*y+1; Z=0.5*z+2; % (X,Y,Z) son los puntos
% de una esfera de radio 0.5 y centro (1,1,2)
quiver3(X,Y,Z,X.*(1-Y.^2),(X-1).*Z,Y.*(Z-2))

```

y pronosticamos el posible comportamiento de las soluciones en las cercanías de p comprobando que está de acuerdo con lo obtenido por el listado:

```
[t,x0]=ode45('i15',[0 4],[1.3 1.1 1.9]');% en rojo
[t,x1]=ode45('i15',[0 5],[1.3 1.1 2.1]');% en verde
[t,x2]=ode45('i15',[0 4],[1.2 1.2 2.3]');% en negro
[t,x3]=ode45('i15',[0 5],[1 1 2.1]');% en magenta
[t,x4]=ode45('i15',[0 5],[1.4 1.4 2]');% en magenta

plot3(x0(:,1),x0(:,2),x0(:,3),'r')
hold on
plot3(x1(:,1),x1(:,2),x1(:,3),'g')
plot3(x2(:,1),x2(:,2),x2(:,3),'k')
plot3(x3(:,1),x3(:,2),x3(:,3),'m')
plot3(x4(:,1),x4(:,2),x4(:,3),'m')

hold off
xlabel('X1'), ylabel('X2')
```

donde la función `i15` es la dada por el listado:

```
function F=i15(t,x)

F=[ x(1).*(1-x(2).^2)
    (x(1)-1).*x(3)
    x(2).*(x(3)-2)];
```

I.2.2. Caso no autónomo

Una ecuación diferencial no autónoma de orden menor que 2 se puede entender como una ecuación autónoma de orden una unidad más, haciendo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{dt(t)}{dt} &= 1, \quad t(0) = 0 \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2) \end{aligned} \right\}$$

con lo cual, todo lo anterior es directamente aplicable al caso no autónomo. Como ejemplo, realizamos las siguientes prácticas:

Práctica e Obtener el espacio de flujo de la ecuación diferencial $x'(t) = \sin(tx)$ ejecutando el listado:

```
[t0,x0]=ode45(@(t,x) sin(x.*t),[0 20],0);
[t1,x1]=ode45(@(t,x) sin(x.*t),[0 20],3);
[t2,x2]=ode45(@(t,x) sin(x.*t),[0 20],5);
[t3,x3]=ode45(@(t,x) sin(x.*t),[0 20],7);
```



```

plot(t0,x0,'r',t1,x1,'g',t2,x2,'k', t3,x3,'b')
hold on
tm=0:1:20; xm=0:0.5:8;
[T,X]=meshgrid(tm,xm);
[m,n]=size(T);
quiver(T,X,ones(m,n),sin(X.*T),'c')
hold off
xlabel('T'), ylabel('X')

```

Práctica f Para $x(t)$ la única solución de la ecuación diferencial $x'(t) = \sin(tx)$, $x(0) = 5$. Se pide, cometiendo un error menor a 3 centésimas, resolver la ecuación $x(t) = 2$ y calcular el valor máximo de $x(t)$, $t \in [0, 20]$. Para ello ejecutamos:

```

CeroDe_x5=fzero(@(t) ifx5(t)-2,5,optimset('TolX',1e-7))

r=fzero(@ifx5Der,0.5,optimset('TolX',1e-7)),
ValorMaximo=ifx5(r)

```

donde `ifx5` es la función definida por:

```

function f=ifx5(t)

Op=odeset('AbsTol',1e-7);
[tTabla,xTabla]=ode45(@(t,x) sin(x.*t),[0 20],5,Op);
f=spline(tTabla,xTabla,t);

```

y `ifx5Der` la función definida por:

```

function f=ifx5Der(t)

Op=odeset('AbsTol',1e-7);
[tTabla,xTabla]=ode45(@(t,x) sin(x.*t),[0 20],5,Op);
x5Der=sin(tTabla.*xTabla);

f=spline(tTabla,x5Der,t);

```

I.3. Problemas de contorno. Diferencias finitas

Consideramos una ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$x'' = f(t) + a_0(t)x + a_1(t)x' \quad x(a) = x_a, x(b) = x_b \quad (\text{I.24})$$

donde el problema es obtener las funciones $u = u(t)$ que verifican la anterior ecuación y el *problema de contorno* $x(a) = x_a, x(b) = x_b$.

Aunque los datos del problema sean regulares, la existencia y unicidad de la solución del problema de contorno no está garantizada; por ejemplo, con la ecuación

$$x'' + x = 0 \quad (\text{I.25})$$

se verifica que la solución general se obtiene con el listado

```
solucion_general=dsolve('D2x+x=0')
```

de donde podemos deducir que si una de las condiciones de contorno es $x(0) = 2$ y la otra es una de las siguientes, entonces:

- con $x(\pi/2) = 0$ admite una única solución en $[0, \pi/2]$.
- con $x(\pi) = 0$ no admite solución en $[0, \pi]$.
- con $x(\pi) = -2$ admite infinitas soluciones en $[0, \pi]$.

Para garantizar la existencia y unicidad de la solución deben verificarse ciertas condiciones de compatibilidad entre los datos del problema; en particular, si la ecuación diferencial de contorno (I.24) verifica las condiciones (ver [10], pág. 205):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet a_0, a_1 \text{ y } f \text{ son funciones de clase 2 en } [a, b]. \\ \bullet a_0(x) \geq 0 \text{ en } [a, b]. \end{array} \right. \quad (\text{I.26})$$

entonces la solución existe y es única. Además, una aproximación $\{\chi_i\}$ de la única solución $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ asociada a la discretización $\{t_i = a + ih\}$ $i = 0, \dots, n+1$, se puede obtener de la siguiente manera:

Sustituyendo, en nuestra ecuación diferencial de contorno, x' y x'' por sus aproximaciones numéricas (ver (H.4)):

$$\begin{aligned} x''(t_i) &= \frac{\chi_{i-1} - 2\chi_i + \chi_{i+1}}{h^2} & \text{mód } O(h^2) \\ x'(t_i) &= \frac{\chi_{i+1} - \chi_{i-1}}{2h} & \text{mód } O(h^2) \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} h^{-2}(\chi_{i-1} - 2\chi_i + \chi_{i+1}) &= f(t_i) + a_0(t_i)\chi_i + \frac{1}{2}h^{-1}a_1(t_i)(\chi_{i+1} - \chi_{i-1}) \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

que tras las oportunas simplificaciones es equivalente al sistema tridiagonal

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_i & b_i & c_i \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \vdots \\ \chi_i \\ \vdots \\ \chi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 x_a \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n - c_n x_b \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

donde:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{a-b}{n+2} & b_i &= 2 + h^2 a_0(t_i) \\
\chi_i &\approx x(t_i) & c_i &= -1 + \frac{h}{2} a_1(t_i) \\
a_i &= -1 - \frac{h}{2} a_1(t_i) & d_i &= -h^2 f(t_i)
\end{aligned} \tag{I.30}$$

Es importante observar que si consideramos $n+2$ puntos de discretización del intervalo $[a, b]$ entonces el sistema a resolver es de orden n , pues se conocen la solución en los dos extremos, $\chi_0 = x_a$ y $\chi_{n+1} = x_b$.

En el libro [8], pág. 273, tenemos el listado de una función

```
[t,x]=i_contor('nombre_f','nombre_a0','nombre_a1',a,b,x_a,x_b,num_nodos)
```

que calcula la aproximación $\{\chi_i\}$ de una ecuación diferencial de contorno que verifica las condiciones suficientes citadas en esta sección, (I.26).

Análogamente a lo obtenido en (I.20) se verifica también la relación:

$$x - \chi^{h/2} = \frac{\chi^{h/2} - \chi^h}{3} + o(h^2) \tag{I.31}$$

donde χ^h denota a la aproximación $\{\chi_i\}$ de $x(t)$ asociada a la discretización $\{a + ih\}$.

Práctica g En esta práctica resolvemos, con 9 puntos de discretización, el problema de contorno:

$$x'' = -x, \quad x(0) = 3, x(\pi/2) = 7 \tag{I.32}$$

y representamos un diagrama de errores absolutos con la solución exacta que sabemos es $x(t) = 7 \sin x + 3 \cos x$ porque la hemos calculado simbólicamente. Todo ello, lo hacemos con el listado

```
sol_exacta=dsolve('D2x+x=0','x(0)=3, x(pi/2)=7');
%obtención de la solución numérica
[t,x_aprox]=i_contor('i20','i0','i1',0,pi/2,3,7,9);
x=7*sin(t)+3*cos(t);
error=abs(x-x_aprox); error_max=max(error);
errorbar(t,x,100*error)
title('Errores con diferencias finitas')
xlabel('t'), ylabel('x'),
gtext(['Error máximo =',num2str(error_max)])
```

De la gráfica obtenida se puede comprobar que el error es nulo en el contorno, claro, y que aumenta a medida que avanzamos hacia el centro del intervalo.

I.4. Aplicación de las ecuaciones diferenciales a la modelización

La modelización es la disciplina de la Matemática que se dedica a la elaboración de modelos matemáticos que expliquen determinados problemas. En esta sección vemos, con ejemplos concretos, como se aplican las técnicas resolución de ecuaciones diferenciales a la modelización de problemas.

I.4.1. Movimiento armónico

ENUNCIADO DEL PROBLEMA:

(Ver [5], práctica 4) Una partícula de masa 0.5 [kg] se mueve sobre el eje horizontal Ox en un medio resistente o viscoso (por ejemplo, un líquido o un gas) bajo la influencia de la fuerza elástica de dos resortes (ver figura inferior) que actúan según la ley de Hooke; esta ley establece que la fuerza elástica está dirigida hacia la posición de equilibrio y es proporcional a la desviación a partir de dicha posición de equilibrio. Supongamos que la posición de equilibrio equivale a $x = 0$ y que la fuerza elástica es $-kx \text{ [N]}$ ($k > 0$).



Además, la resistencia del medio es proporcional a la velocidad de la partícula e igual a $-\lambda \frac{dx}{dt}$ ($\lambda > 0$).

Sabiendo que la posición inicial de la partícula es la de reposo en $x = 4$, se pide determinar:

1. La ecuación diferencial que describe el movimiento.
2. La posición de la partícula en cualquier instante en los casos: A) $\lambda = 0$, $k = 2$; B) $\lambda = 0.5$, $k = 2.125$ y C) $\lambda = k = 2$.
3. ¿En qué instantes alcanza la posición de equilibrio en los casos A y B?
4. Suponer el caso $\lambda = 0$, $k = 9$ y que nuestra partícula se encuentra sometida a una fuerza exterior $E(t)$ de magnitud variable en función de t y cuya expresión es $E(t) = 40 \cdot \cos(5t)$. Se pide realizar la gráfica de la función que describe el movimiento de la partícula en función de $t \in [0, 20]$ y calcular la máxima amplitud del movimiento.
5. Con las notaciones anteriores, obtener la representación gráfica del movimiento de la partícula a través del tiempo $t \in [0, 20]$ y calcular la máxima amplitud del movimiento en el caso: $\lambda = 0$, $k = 2$ y $E(t) = 2 \cos 2t$.

SOLUCIÓN:

(1) Teniendo en cuenta que la fuerza a la que se ve sometida nuestra partícula coincide con el producto de su masa por su aceleración, i.e., $F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$, resulta que:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda \frac{dx}{dt} \quad (\text{I.33})$$

de lo que resulta que la ecuación diferencial que describe el desplazamiento, $x(t)$, de nuestra partícula en función del tiempo t tiene la forma

$$x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0, \quad \lambda \geq 0, k \geq 0 \quad (\text{I.34})$$

Esta ecuación se transforma en la más general

$$x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{E(t)}{m}, \quad \lambda \geq 0, k \geq 0 \quad (\text{I.35})$$

en aquellos casos en que además nuestra partícula se encuentra sometida a una fuerza exterior de $E(t) \text{ Nw}$.

(2) Con el listado:

```
xA=dsolve('D2x+4*x','x(0)=4, Dx(0)=0')
ezplot(xA,[0,10])
```

obtenemos la solución y representación gráfica en el intervalo $t \in [0, 10]$ del apartado 2.A. Análogamente, para obtener las soluciones de los apartados 2.B y 2.C ejecutamos:

```
>xB=dsolve('D2x+Dx+(425/100)*x','x(0)=4, Dx(0)=0')
ezplot(xB,[0,10])
>xC=dsolve('D2x+4*Dx+4*x','x(0)=4, Dx(0)=0')
ezplot(xC,[0,10])
```

Además, si ejecutamos `i_armac` y `i_arman` obtenemos las animaciones virtuales de la partícula cuando describe los movimientos 2.A, 2.B y 2.C.

(3) Allí donde la x se hace cero. Tal como hemos visto en el anterior apartado se verifica que las soluciones $x_A(t)$, $x_B(t)$ de los apartados A y B tienen, respectivamente, la expresión

$$x_A(t) = 4 \cos 2t; \quad x_B(t) = e^{-t/2}(4 \cos 2t + \sin 2t) \quad (\text{I.36})$$

teniendo en cuenta la igualdad $\sin(\alpha + 2t) = \sin \alpha \cos(2t) + \cos \alpha \sin(2t)$ podemos poner

$$\begin{aligned} 4 \cos 2t + \sin 2t &= \sqrt{17} \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2t + \frac{1}{\sqrt{17}} \sin 2t \right) \\ &= \sqrt{17} \sin(\alpha + 2t) \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

a condición de que $\alpha = \arctg(4) = 1.3258$, con lo cual

$$x_A(t) = 4 \cos 2t; \quad x_B(t) = \sqrt{17} e^{-t/2} (\sin(\alpha + 2t)) \quad (\text{I.38})$$

y ahora ya es fácil observar que las posiciones de equilibrio se consiguen, respectivamente, en los puntos

$$\begin{aligned} P_A &= \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \quad k \geq 0 \right\} = \{0.7854 + k\frac{\pi}{2}; \quad k \geq 0\} \\ P_B &= \left\{ \frac{k\pi - 1.3258}{2}; \quad k \geq 1 \right\} = \{0.9079 + k\frac{\pi}{2}; \quad k \geq 0\} \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

(4) y (5) constituyen una práctica puntuable con 0.2 puntos.

Nota: El movimiento descrito en el apartado 2.A) recibe el nombre de *movimiento armónico simple*, el descrito en 2.B) recibe el nombre de *movimiento armónico amortiguado*, el descrito en 4) recibe el nombre de *movimiento armónico forzado* y el descrito en 5) recibe el nombre de *movimiento armónico en resonancia*.

I.4.2. Órbitas de un vehículo espacial

ENUNCIADO DEL PROBLEMA:

(Ver [5], práctica 7.F) Queremos describir las órbitas de un satélite artificial alrededor de la Tierra y saber cuales son las variables que necesitamos saber para determinar su órbita.

PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA:

De acuerdo con la *ley de gravitación de Newton* un vehículo espacial de masa m se encuentra atraído hacia la Tierra con una fuerza F cuya magnitud es directamente proporcional al producto de las masas de la Tierra, m_T , y del vehículo espacial e inversamente proporcional cuadrado de la distancia entre ellos:

$$|F| = G \frac{m_T \cdot m}{r^2} \quad (\text{I.40})$$

donde G es la constante gravitacional, que por (G.23) tiene el valor $4\pi^2$ con las siguientes unidades de medida: Como unidad de masa, um , utilizamos la suma de la masa de la Tierra y de la Luna, $um = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}$; como unidad de distancia, ud , la distancia entre la Luna y la Tierra, $ud = 384400 \text{ [km]}$ y como unidad de tiempo, ut , el periodo de revolución de la Luna alrededor de la Tierra, $ut = 27.322$ días. Con estas unidades se verifica que la masa de la Luna, m_L , vale $m_L = 0.012277471 \text{ [um]}$.

Si nuestro vehículo espacial se encuentra en el punto $(x, y) = (x(t), y(t))$ y suponemos que la única fuerza F a la que se encuentra sometido es la de atracción hacia la Tierra entonces F tiene la misma dirección y sentido que el vector $-[(x, y) - (x_T, y_T)]$ para $(x_T, y_T) = (0, 0)$ las coordenadas de la Tierra, con lo cual

$$F = 4\pi^2 \cdot m \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = 4\pi^2 \cdot m \cdot \frac{m_T}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{(-x, -y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad (\text{I.41})$$

de modo que el movimiento de nuestro vehículo espacial está descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x'' &= (m_L - 1) \frac{4\pi^2 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ y'' &= (m_L - 1) \frac{4\pi^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

Como podemos observar se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 2, con lo cual, la órbita de un vehículo espacial quedará determinada sabiendo dos datos, a saber: la posición y la velocidad inicial. En concreto, nos proponemos describir la órbita de un vehículo cuya posición inicial es $p_0 = (0.1102098, 0) \text{ [ud]}$ y cuya velocidad inicial es $v_0 = (0, -18.8099327) \text{ [ud/ut]}$, para ello ejecutamos

```
in=[0.1102098, 0, 0, -18.8099327].'      %Condiciones iniciales
%in=[0.1102098, 0, 0, -20.8099327].'    %otras cond. ini.
[t,x]=ode45('i30',[0,1],in);
xp=x(:,1); yp=x(:,2);
plot(xp,yp,0,0,'.')
axis equal
```

y donde el listado de la función `i30` es el siguiente:

```
function F=i30(t,x)
mL=0.012277471;
C=(mL-1)*4*pi^2;
r=x(1).^2+x(2).^2;
R=r^(3/2);
F=[x(3); x(4); C*x(1)./R; C*x(2)./R];
```

I.4.3. Ecosistemas

ENUNCIADO Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

El estudio de los modelos matemáticos para predecir la dinámica demográfica de especies antagónicas nació con las obras independientes que, en la primera parte del siglo XX, publicaron A. J. Lotka y V. Volterra. Consideremos el problema de predecir la población de dos especies, una depredadora que para fijar ideas podemos considerar constituida por zorros, y cuya población en el tiempo t , t en años, es $y(t)$ y la otra presa, formada por conejos, cuya población es $x(t)$. Supondremos que los conejos tienen siempre suficiente comida, trébol, como para subsistir y que, por tanto, su natalidad es proporcional a la cantidad de conejos vivos en ese momento, i.e., la natalidad es ax . La mortalidad de la presa es proporcional al número de encuentros entre zorros y conejos que se producen y por tanto proporcional al producto de zorros y conejos, i.e., bxy . De este modo obtenemos que la variación de conejos respecto al tiempo, i.e., $x' = \frac{dx}{dt}$, verifica la relación $x' = ax - bxy$. Y, análogamente, aunque por las razones opuestas a las anteriores, se verifica $y' = -cy + dxy$. En definitiva, la población de conejos, x , y zorros, y , verifica el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy\end{aligned}\tag{I.43}$$

Ahora, se nos pide, como **práctica puntuable** con 0.3 puntos, contestar a las siguientes cuestiones:

1. Resolver numéricamente el sistema para $t \in [0, 7]$, suponiendo que la población inicial de conejos es de 1000, la de zorros de 500 y que las constantes son $a = 3$, $b = 0.002$, $c = 0.5$ y $d = 0.0006$.
2. Representar gráficamente, a lo largo del tiempo, el número de conejos y de zorros.
3. Representar en una misma gráfica y enfrentados el número de conejos y el de zorros para un mismo tiempo.
4. Contestar a la pregunta: ¿Observas algo destacado en la gráfica anterior?.

I.5. Ejercicios

Práctica p Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en el intervalo $[0, 1]$ comparando, siempre que sea posible, con la solución exacta. Tener en cuenta que utilizamos la notación $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned}(1) \quad y' &= -y, \quad y(0) = 2 & (2) \quad y' &= 2y, \quad y(0) = 1/2 \\ (3) \quad y' &= y - x - 1, \quad y(0) = 1 & (4) \quad y' &= (1 + y^2)/4, \quad y(0) = 1\end{aligned}$$

Práctica q Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales comparando, cuando sea posible, con la solución exacta y teniendo en cuenta la notación $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned}(1) \quad y' &= y - 2, y(0) = 1; \quad x \in [0, 1] & (2) \quad y' &= \sin x + \cos y, y(0) = 0; \quad x \in [0, 1] \\ (3) \quad y' &= x^2 + y^2, y(0) = 0; \quad x \in [0, 1] & (4) \quad y' &= x + \sqrt[3]{y}, y(0) = 1; \quad x \in [0, 2] \\ (5) \quad yy' &= 2x^3, y(1) = 3; \quad x \in [1, 2] & (6) \quad y' &= x/(1 + y^2), y(-1) = 1; \quad x \in [-1, 1]\end{aligned}$$

$$(7) \quad y'' - 2y' + y = xe^x - x, y(0) = y'(0) = 0; \quad x \in [0, 1]$$

$$(8) \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x, y(1) = 1, y'(1) = 0; \quad x \in [1, 2]$$

Práctica puntuable r (0.2 puntos) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales para $t \in [0, 1]$ comparando, cuando sea posible, con la solución exacta y teniendo en cuenta las notaciones $x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}$.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x' = 3x + 4y, & x(0) = 1, \\ y' = 3x + 2y, & y(0) = 1, \end{cases} & (2) \quad & \begin{cases} x'' = x + y, & x(0) = 1, x'(0) = 1, \\ y' = x - y, & y(0) = 1, \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} x' = x + 2y, & x(0) = 0, \\ y' = x + e^{-t}, & y(0) = 0, \end{cases} & (4) \quad & \begin{cases} x' = -x + y - (1 + t^3)e^{-t}, & x(0) = 0, \\ y' = -x - y - (t - 3t^2)e^{-t}, & y(0) = 1, \end{cases} \\ (5) \quad & \begin{cases} x'' + 2x + 4y = e^t, & x(0) = x'(0) = 0 \\ y' - x - 3y = -t, & y(0) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Práctica puntuable s (0.2 puntos) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de contorno comparando, cuando sea posible, con la solución exacta, $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} (1) \quad & y'' = 4(y - x), \quad y(0) = 0, y(1) = 2; \quad \text{usar 11 nodos} \\ (2) \quad & y'' = y' + 2y + \cos x, \quad y(0) = -0.3, y(\pi/2) = -0.1; \quad \text{usar 11 nodos} \\ (3) \quad & y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, \quad y(0) = 2, y(1) = 1; \quad \text{usar 11 nodos} \\ (4) \quad & y'' = \frac{-4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x^2}\ln x, \quad y(1) = -1/2, y(2) = \ln 2; \quad \text{usar 31 nodos} \\ (5) \quad & y'' = \frac{y'}{x} + \frac{3y}{x^2} + \frac{\ln x}{x} - 1, \quad y(1) = y(2) = 0; \quad \text{usar 11 nodos} \end{aligned}$$

Práctica puntuable t (0.3 puntos) Utilizando como base el listado de la función `i_contor` definir una nueva función propia

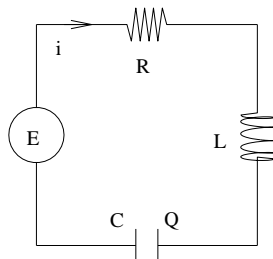
```
[t,x]=i_conto2('nombre_f','nombre_a0','nombre_a1',a,b,tol)
```

de modo que la solución obtenida $\chi = \mathbf{x}(\mathbf{t})$ sea la única solución de la ecuación diferencial (I.24) con una tolerancia menor que `tol`. Todo esto, claro está, en el supuesto de que nuestra ecuación diferencial de contorno verifique las condiciones (I.26).

Indicación: La función a definir necesita controlar el paso de integración h de modo que el error cometido sea siempre menor que la tolerancia, `tol`, para ello, será preciso tener en cuenta la fórmula (I.31).

Práctica puntuable u (0.4 puntos) El eje y y la recta $x = 200$ son las orillas de un río cuya corriente tiene una velocidad uniforme de $2 \llbracket \text{m/s} \rrbracket$, en la dirección negativa de la y . Una barca entra en el río en el punto $(200, 0)$ y va directamente hacia el origen con una velocidad de $4 \llbracket \text{m/s} \rrbracket$ en relación al agua. (1) ¿Cuál es la trayectoria de la barca?. (2) ¿En qué punto atracará?.

Práctica puntuable v (0.5 puntos) Consideramos un circuito cerrado que contenga una resistencia de R ohmios, un condensador de capacitancia C faradios, una inductancia de L henries y una fuente de voltaje de $E(t)$ voltios:



La ley de Kirchhoff establece que la suma de todos los cambios instantáneos de voltaje alrededor de dicho circuito cerrado es cero. Esta ley implica que la intensidad de la corriente $i(t)$ verifica la ecuación (ver [9], pág. 75):

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t) \quad (\text{I.44})$$

para $Q(t)$ la carga acumulada en el condensador. Ahora, teniendo en cuenta que la intensidad de la corriente es la rapidez del flujo de la carga, $i = \frac{dQ}{dt}$, podemos escribir $Q(t) = \int_0^t i(s)ds + Q(0)$ y también:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (\text{I.45})$$

ecuación sumamente parecida a la que describe el movimiento armónico de una partícula (ver (I.35)) a condición de establecer las siguientes analogías:

$$\begin{aligned} \text{Masa } m &\Longleftrightarrow \text{inductancia } L \\ \text{viscosidad } \lambda &\Longleftrightarrow \text{resistencia } R \\ \text{rigidez del resorte } k &\Longleftrightarrow \text{recíproca de la capacitancia } \frac{1}{C} \\ \text{desplazamiento } x &\Longleftrightarrow \text{carga } Q \text{ en el capacitador} \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

En estas circunstancias, consideramos un circuito cerrado con $R = 50$ ohmios, $L = 0.1$ henries y $C = 5 \cdot 10^{-4}$ faradios que para $t = 0$ verifica $i(0) = Q(0) = 0$ y que es conectado a una fuente alimentadora de corriente alterna a 60 hercios y 110 voltios, lo cual significa que $E(t) = 110 \cos(2\pi \cdot 60t)$. Se pide representar gráficamente la variación de la intensidad del circuito para $t \in [0, 1]$.

Práctica puntuable w (0.7 puntos) Ver ([5], práctica 7.H). En este problema utilizamos las mismas notaciones y unidades del apartado I.4.2 salvo para el tiempo, que para conseguir una mayor simplificación, usamos $ut' = \frac{1}{2\pi} [\text{ut}]$. Con estas nuevas unidades $G = 1$.

Estamos interesados en obtener las órbitas de recuperación de un vehículo espacial situado en los alrededores de la Luna. Con ese fin consideramos como sistema de referencia cartesiano (x, y) aquel que está centrado en el centro de masas Tierra-Luna y cuyo eje x es la línea

Tierra–Luna, con ello, nuestro sistema de referencia se encuentra sometido a un movimiento de rotación de velocidad angular constante e igual a 1 $\llbracket \text{rad/ut}' \rrbracket$. Si denotamos por $m_L = 0.012277471 \llbracket \text{um} \rrbracket$ el valor de la masa de la Luna en las unidades um ; entonces, podemos poner que las coordenadas de la Tierra son $P_T = (-\mu, 0)$ y la de la Luna $P_L = (1 - \mu, 0)$ para $\mu = \frac{m_L}{m_T + m_L} = m_L = 0.012277471 \llbracket \text{ud} \rrbracket$. Análogamente, a lo obtenido en (I.42) se verifica que las ecuaciones que describen el movimiento de un vehículo espacial sometido a las fuerzas de atracción de la Tierra y de la Luna son

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{[(x - 1 + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} \\ y'' &= y - 2x' - \frac{(1 - \mu)y}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu y}{[(x - 1 + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

donde los dos primeros sumandos de los términos derechos de las dos igualdades anteriores resultan al considerar las aceleraciones centrípeta y de Coriolis a las que se encuentra sometido el sistema de referencia como consecuencia de su movimiento angular.

En esta práctica, se pide representar las trayectorias del vehículo espacial en las primeras 12 unidades de tiempo ut' para las condiciones iniciales siguientes:

$$(A): p_0 = (0.994, 0) \llbracket \text{ud} \rrbracket, \quad v_0 = (0, -2.031732629557) \llbracket \text{ud/ut}' \rrbracket$$

$$(B): p_0 = (0.994, 0) \llbracket \text{ud} \rrbracket, \quad v_0 = (0, -2.001585106379) \llbracket \text{ud/ut}' \rrbracket$$

Práctica puntuable x (0.7 puntos) Sobre la superficie terrestre, se denominan *curvas loxodrómicas* de rumbo 60° a aquellas curvas sobre las que la navegación se realiza con rumbo constante igual a 60° . Se pide, calcular la ecuación diferencial que define tales curvas y representar su espacio de fases y flujo.

(ixLoxo)