5. MINIMI QUADRATI

Esercizio 5.1

Considerare la matrice A di dimensione 3x3 ed il vettore colonna b di altezza 3:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textit{(dim.3x3)} \qquad \textit{[5.1]}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{(dim. 3x1)} \qquad \textit{[5.2]}$$

Si chiede di:

1) provare a risolvere il sistema lineare Ax=b;
2) calcolare la soluzione a norma minima mediante la decomposizione SVD;
3) calcolare la soluzione a norma minima usando la matrice pseudoinversa di A

---

1) Osserviamo che il determinante della matrice A è nullo. Questo significa che la matrice non è invertibile e dunque non si può calcolare la soluzione del sistema lineare con il metodo tradizionale $x=A^{-1}b$. Questo è supportato anche dal fatto che il rango di A è pari a 2, mentre il rango complessivo di (A,b) è pari a 3, dunque il teorema di Rouché-Capelli non è applicabile. E infatti, se proviamo ad inserire i dati in MATLAB per calcolare x=A\b, ci viene restituito un messaggio di errore.

2) Per trovare la soluzione ai minimi quadrati, il nostro scopo sarà ricercare:

$$\min_{x\in R^{3x1}} \|Ax-b\|_2 \qquad [5.3]$$

Usiamo la decomposizione SVD, in modo da scrivere A come $A=UDV^T$, dove U e V sono matrici ortogonali e D è una matrice diagonale quadrata che possiede i valori singolari σ_i sulla diagonale principale:

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \qquad [5.4]$$

Con tale decomposizione, la [5.3] può essere riscritta come:

$$\min_{x\in R^{3x1}} \|UDV^Tx-b\|_2 \qquad [5.5]$$

Osservando che $U^TU=I$ e $V^TV=I$, allora la [5.5] diventa:

$$\min_{x\in R^{3x1}} \|DV^Tx-U^Tb\|_2 \qquad [5.6]$$

Definendo $y=V^Tx$ e $\hat{b} = U^Tb$, il problema infine diventa:

$$\min_{x\in R^{3x1}} \left\|Dy-\hat{b}\right\|_2 \qquad [5.7]$$

Quest'ultima scrittura definisce un sistema lineare, molto semplice da risolvere. In MATLAB, la decomposizione SVD è fatta tramite una funzione già inclusa, la cui sintassi è:

```
>> [U,D,V]=svd(A)


U =

   -0.8594    0.2478   -0.4472

   -0.2770   -0.9609    0.0000

   -0.4297    0.1239    0.8944

D =

    8.7064         0         0

         0    0.4448         0

         0         0    0.0000

V =

   -0.5254    0.6250   -0.5774

   -0.2786   -0.7675   -0.5774

   -0.8040   -0.1425    0.5774
```

$\hat{b}$ può essere agevolmente scritto come

```
>> bc=U'*b;
```

Dall'osservazione della matrice D restituita da MATLAB, vediamo che il valore singolare in posizione D(3,3) è nullo, cioè il nostro problema è del tipo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix} \qquad [5.8]$$

Poiché gli y_i possono essere risolti come $y_i = \frac{\hat{b}_i}{\sigma_i}$, non è possibile calcolare $y_3 = \frac{\hat{b}_3}{0}$.

Ci si chiede dunque quale valore assegnare a y_3. Per nostra scelta e comodità, lo poniamo forzatamente uguale a zero: $y_3 = 0$. y_1 e y_2 vengono invece calcolati da MATLAB come:

```
>> y=D(1:2,1:2)\bc(1:2)

y =

   -0.1799

   -1.3245

>> y(3)=0;
```

La soluzione ai minimi quadrati può essere trovata come:

```
>> x=V*y

x =

   -0.7333

    1.0667

    0.3333
```

E la norma minimizzata è:

```
>> norm(A*x-b)

ans =

    0.4472
```

che giustamente è diversa da zero.

3) Con la decomposizione SVD $A=UDV^T$, se fosse possibile invertire A, sarebbe $A^{-1}=VD^{-1}UT$. La soluzione potrebbe essere calcolata semplicemente come $x=A^{-1}b= VD^{-1}U^Tb$. Ma l'inversa di A non esiste. Allora come procedere?

Si può definire una matrice A^+ tale per cui esiste una decomposizione $A^+=VD^+U^T$ con

$$D^+ = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} & se\ \sigma_i \neq 0 \\ 0 & se\ \sigma_i = 0 \end{cases} \qquad [5.9]$$

A questo punto è possibile calcolare x come $x=A^+b$. Per questo motivo, A^+ è chiamata *pseudoinversa* di A. Il comando MATLAB da utilizzare è `pinv(A)`. Se calcoliamo la soluzione ai minimi quadrati con questo metodo, troviamo:

```
>> x=pinv(A)*b

x =

   -0.7333

    1.0667

    0.3333
```

che come si vede è identica alla soluzione calcolata nel punto 2).

Esercizio 5.2
Dati i vettori

$x = [1,2,3,4,5,6,7]^T$ *[5.10]*

$y = [-31,21,22,-2,3,14,-17]^T$ *[5.11]*

si chiede di:

1) costruire la matrice $A = [x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5]$*;*
2) valutare il risultato del comando MATLAB z=A\y indicando come viene calcolato il vettore z

---

1) La matrice A può essere facilmente costruita in MATLAB con i seguenti comandi:

```
>> x=[1:7]'
>> y=[-31,21,22,-2,3,14,-17]';
>> A=[x.^0,x,x.^2,x.^3,x.^4,x.^5]

A =

           1           1           1           1           1           1
           1           2           4           8          16          32
           1           3           9          27          81         243
           1           4          16          64         256        1024
           1           5          25         125         625        3125
           1           6          36         216        1296        7776
           1           7          49         343        2401       16807
```

2) Poiché la matrice A è rettangolare, il comando MATLAB z=A\y fornisce la soluzione della seguente equazione normale che di fatto riconduce ad un sistema quadrato:

$$A^T A\bar{x} = A^T b \qquad [5.12]$$

Se $\det(A^T A) \neq 0$, allora si può calcolare una soluzione detta “normale” (o “di base”) come:

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \qquad [5.13]$$

Si può provare quanto detto calcolando con MATLAB la soluzione in entrambi i modi. Il risultato ottenuto è il medesimo, come mostra la seguente porzione di codice:

```
>> z=A\y

z =

 -161.5714
  166.1545
  -29.6667
   -8.8580
    2.9924
   -0.2208

>> det(A'*A)                  % Controllo che det(A^T A) ≠ 0
```

```
ans =

  1.1036e+012

>> z1=((A'*A)^-1)*A'*y

z1 =

 -161.5714
  166.1545
  -29.6667
   -8.8580
    2.9924
   -0.2208
```

La matrice dei coefficienti, in quest'ultimo caso, è costituita da A^TA. Il problema con questo tipo di approccio è che se A è mal condizionata, allora A^TA ha un condizionamento pari a $(cond(A))^2$, e dunque la situazione peggiora drasticamente! Si noti anche A^TA non ha rango massimo, dunque non è possibile calcolare la soluzione con il metodo di eliminazione di Gauss. Per questo motivo MATLAB, con il comando z=A\y, segue un approccio differente che passa attraverso la decomposizione AP=QR, con Q matrice ortogonale e R matrice triangolare superiore con lo stesso rango di A. Il condizionamento di una matrice ortogonale è pari 1, ecco spiegato perché questo approccio è migliore.

La decomposizione QR può essere fatta tramite il comando:

```
>> [Q,R,P]=qr(A);
```

Osserviamo che se AP=QR, allora $A=QRP^T$, e la soluzione ai minimi quadrati si trova risolvendo:

$$\min_z \|QRP^Tz - y\|_2 \Rightarrow \min_z \|RP^Tz - Q^Ty\|_2 \qquad [5.14]$$

Se valutiamo la R restituita da MATLAB usando un *format long*, notiamo che è una matrice a blocchi del tipo:

$$R = \begin{bmatrix} R_{6x6} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [5.15]$$

Indichiamo con $w=P^Tz$ e $b=Q^Ty$, il problema [5.14] diventa:

$$\min_z \|Rw - b\|_2 \qquad [5.16]$$

La soluzione è allora

$$z=Pw \qquad [5.17]$$

e se proviamo a valutarla in questo modo, MATLAB ci dà ancora dei valori identici a quelli forniti con i metodi precedenti. In effetti, questo tipo di decomposizione è il mezzo usato intrinsecamente da MATLAB per calcolare z=A\y.

```
>> b=Q'*y

b =

    8.6944
  -19.6725
```

```
   -6.3844
    1.8758
   42.9900
    1.5183
    5.1649

>> w=R(1:6,1:6)\b(1:6)

w =

   -0.2208
    2.9924
   -8.8580
  166.1545
 -161.5714
  -29.6667

>> z=P*w

z =

 -161.5714
  166.1545
  -29.6667
   -8.8580
    2.9924
   -0.2208
```

Si sarebbe potuto anche usare la decomposizione a valori singolari invece della AP=QR. In questo caso, il comando MATLAB che avremmo utilizzato sarebbe stato

```
>> pinv(A)*y
```

Per essere precisi, la soluzione "di base" e quella a norma minima trovata con la SVD e la pseudoinversa di A coincidono se e sole se la matrice A e la matrice R sono entrambe di rango massimo. Nel nostro esempio specifico, questa condizione è verificata.