

## APROXIMACIÓN Y ERRORES

1.— El caso especial  $n = 1$  del Teorema de Taylor se conoce como *Teorema del valor medio*: sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  tal que existe  $f'$  en  $(a, b)$ , entonces hay un  $\xi$  en  $(a, b)$  con  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

a) Deducir a partir del Teorema de Taylor el Teorema del valor medio.

b) Encontrar el valor de  $\xi$  que se menciona en el Teorema del valor medio en el caso de la función

$$f(x) = 3 - 2x + x^2 \text{ y el intervalo } [a, b] = [1, 3].$$

2.— El  $n$ -ésimo polinomio de Taylor para una función  $f$  en  $x_0$  se conoce a veces como un polinomio de grado  $n$  a lo sumo, que *mejor* aproxima a  $f$  cerca de  $x_0$ .

a) Explique por qué es adecuada esta descripción.

b) Determina el polinomio cuadrático que mejor aproxima una función  $f$  cerca de  $x_0 = 1$  si la recta tangente en  $x_0 = 1$  tiene la ecuación  $y = 4x - 1$  y si  $f''(1) = 6$ .

3.— Si la serie de Taylor para  $f(x) = \ln x$  en  $x_0 = 1$  se corta en el término que comprende a  $(x - 1)^{100}$  y después se utiliza para aproximar  $\ln 2$ , ¿qué cota se puede imponer al error?

4.— Determine el segundo polinomio de Taylor  $P_2(x)$  para la función  $f(x) = e^x \cos x$  entorno a  $x_0 = 0$ .

a) Utilizar  $P_2(0.5)$  para aproximar  $f(0.5)$ .

b) Calcular una cota del error  $|f(x) - P_2(x)|$  al usar  $P_2(x)$  para aproximar  $f(x)$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

5.— Utilizando la serie de Taylor de  $e^x$ , ¿cuántos términos se necesitan para aproximar  $e^2$  con una precisión de cuatro cifras decimales (por redondeo)?

6.— Desarrollar la función  $\sqrt{x}$  en serie de potencias de  $(x-1)$  y aproximar  $\sqrt{0.9999999995}$  hasta el décimo lugar decimal.

7.— Calcular  $\cos 0.1$  con un error menor que  $10^{-7}$ .

8.— Obtener la expresión del polinomio de Taylor de grado  $n$  de la función

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ entorno al punto } x_0 = 1.$$

Tomando en particular  $n = 3$  y  $x = 0.8$  calcular el valor aproximado de  $\ln 3$ .

9.— Supongamos que medimos tres cantidades independientes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , obteniendo los valores  $x = 20 \pm 1$ ,  $y = 40$ ,  $z = 0$ . Aproxima el error absoluto y relativo que se comete al evaluar la función:

$$f(x, y, z) = \frac{(x + y)}{(x - z)}.$$

¿ Qué ocurriría si  $z = 19$ ?

10.— Se desea calcular la expresión

$$E = \frac{2\sqrt{2} + 4}{3\pi}$$

tomando como valores  $\pi = 3.1$  y  $\sqrt{2} = 1.4$ , que poseen todas sus cifras correctas. Calcular la aproximación, la cota del error absoluto propagado, así como las cifras correctas del resultado.