Lección J

Relación de Ejercicios

J.1. Ejercicios de la lección A

Práctica p Realizar las siguientes operaciones numéricamente:

1. Sumar: A) 21, 34, y 45; B) 23/8, 1/6 y 45/2; C) $2+3i$, $4.3-2i$ y $3.75+i$.
2. Restar: A) 456.54 de 1987; B) 3/5 de 2; C) $2-3.6i$ de $7.35-4i$.
3. Multiplicar: A) 2.345, 5320.34 y 10^5; B) 7/2, 145/8 y 0.25; C) $6-i$, $1/4+9i$ y $0.5+i$.

Práctica q Realizar las siguientes operaciones simbólicamente:

1. Dividir: A) 12.34 por 4.5; B) 3/7 por 5/2; C) $2-3.6i$ por $7.35-4i$
2. Elevar: A) 2.45 a 5.457; B) 7/3 a 3; C) $2+i$ a $-5+4i$

Práctica r Decidir el orden de precedencia con que Matlab realiza las operaciones elementales, en ausencia de paréntesis, a través de los siguientes ejemplos: 1) $3-2+7$; 2) $3+4/5$; 3) $3+4*5$, 4) $4/3/2$; 5) 3/4^5; 6) $1-2*5/6$^$4-2+4$.

Práctica s Realizar las siguientes operaciones: 1)-1^2; 2) (-1)^2; 3) -1^(1/2); (-1)^(1/2); 4) -1^(1/3) y 5) (-1)^(1/3). Explicar si el resultado obtenido era el esperado

Práctica t Factorizar los siguientes números: 1) 1277, 9555; 2) 10897, 11021; 3) 3200399, 24681023; 4) 314527217063 y 5) 210733237.

Práctica u Calcular el resto de las siguientes divisiones: 1) 436/4; 2) 320/3; 3) 7482/651 y 4) 28378/4374.

Práctica v Con el formato **format long** calcular, a través de variables, el área de los círculos cuyos radios valen: 1) 1.1; 2) 2; 3) 5/3 y 4) $\sqrt{6}$.

Práctica w Con el formato **format short e** calcular el volumen de las esferas cuyos radios valen: 1) 1; 2) 2.12; 3) 3/4 y 4) $\sqrt[5]{7}$.

Práctica x Comprobar las posibilidades de Matlab para operar numéricamente con infinitos realizando las operaciones siguientes: 1) $1/0+3$; 2) $-2/0+5/(7-7)$; 3) $2^{3/0}$; 4) $(1+1/0)^0$ y 5) $(1+1/\infty)^\infty$.

Práctica y 1) Determinar el dígito que aparece en la 41^a cifra decimal de $\sqrt{5}$. 2) Idem para la cifra 18^a de $\sqrt[5]{5}$.

J.2. Ejercicios de la lección B

Práctica p Dar las ordenes necesarias para definir:

1. Una matriz 7×2 con todos sus elementos nulos.
2. La matriz identidad 4×4.
3. Una matriz 5×5 con todos sus elementos iguales a -2, excepto el elemento (3,2) que valga 9/4.
4. Una matriz 3×3 con todos sus elementos nulos, excepto los de la diagonal principal que valgan $1/3$, $5^{-0.1}$ y $\sqrt{7}$.

Práctica q Dadas la siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 1 & 1/3 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3+2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Se pide determinar:

1) $A + i \cdot A$, $2B$ y $(A/5)^{-1}$.

2) la matriz cuyo coeficiente (i, j) es el correspondiente al de C dividido por el coeficiente (i, j) de D más 1.

3) la matriz cuyo coeficiente (i, j) es el correspondiente a elevar el numero 5 al coeficiente (i, j) de D.

Práctica r Dados los siguientes vectores $a = (1, 1, 16)$, $b = (1, 2, 3)$, $c = (0, 1, 1)$ y $d = (0, 0, 6)$. Se pide calcular: 1) $a - 9 \cdot b$, 2) el producto escalar de c y d, el vector cuyo coeficiente i es el correspondiente a hacer las siguientes operaciones: 3) elevar cada coeficiente de d a 3, y 4) elevar 4 a cada coeficiente de a.

Práctica s Dadas las siguientes matrices y vectores

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad c = (9, 1, 4); \quad d = (3, -5, 1)$$

Se pide las ordenes necesarias para:

1. Generar la matriz que resulta de sustituir en A el valor del elemento $(3, 1)$ por 18.
2. Generar la matriz triangular superior de B.
3. generar la submatriz 2×2 con los coeficientes (1,1), (1,2), (2,1) y (2,2) de $A + 2B$.
4. Generar la matriz que resulta de ampliar A con una nueva fila que contenga los elementos de c.
5. Generar la matriz que resulta de ampliar B^t con una nueva columna que contenga los elementos de d.

Práctica t 1) Determinar los valores y vectores propios de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -8 \end{pmatrix};$$

2) Comprobar que el resultado es correcto. 3) Calcular además las trazas de A, B y C y 4) sus polinomios característicos.

Práctica u Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -20 & -11 & -24 & 14 \\ 32 & 17 & 42 & -25 \\ -29 & -15 & -43 & 26 \\ -53 & -28 & -75 & 45 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -63 & 10 & -152 & 108 \\ 44 & -33 & 151 & -113 \\ 64 & 60 & 33 & -8 \\ 48 & 94 & -60 & 65 \end{pmatrix};$$

Se pide: 1) calcular numéricamente su polinomio característico y su forma canónica de Jordan, 2) hacer lo mismo simbólicamente, y 3) describe las diferencias entre 1) y 2).

Práctica v Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$1) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$2) \begin{array}{rcr} 3x + y + z & = & 5 \\ x + 3y - z & = & 3 \\ 3x + y - 5z & = & -1 \end{array}; \quad 3) \begin{array}{rcr} 3x + y + z & = & 5 \\ 3x + y - 5z & = & -1 \\ x + 3y - z & = & 1 \end{array}$$

J.3. Ejercicios de la lección C

Práctica p Ejecutar los dos listados siguientes:

```
x=-10:.05:2.2;
y=exp(x).*(x.^3-(4*x.^2)+7*x-6);
plot(x,y), grid
```

```
x=-10:.05:4;
y=exp(x).*(x.^3-(4*x.^2)+7*x-6);
plot(x,y), grid
```

Podrías explicar las razones de por qué se 'ven' tan diferentes las representaciones gráficas obtenidas con los listados anteriores cuando ambas representaciones son las de una misma función $f(x) = e^x(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$.

Práctica q Escribir el listado necesario para representar las curva cuyas ecuaciones polares son las siguientes:

1. $\rho(\theta) = \mathrm{sen}(2\theta)\cos(2\theta)$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.
2. $\rho(\theta) = 3\theta$ para $\theta \in [0, 6\pi]$.

3. $\rho(\theta) = 2\,\mathrm{sen}^3(\theta/3)$ para $\theta \in [0, 3\pi]$.
4. $\rho(\theta) = 2(1 + \cos(\theta))$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.

Práctica r Escribir el listado necesario para representar las curvas paramétricas siguientes:

$$1)\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2(t - \mathrm{sen}\,t) \\ y & = & 2(1 - \cos t) \\ t & \in & [0, 12] \end{array}\right. \quad 2)\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3\cos^3 t \\ y & = & 3\,\mathrm{sen}^3 t \\ t & \in & [0, 4\pi] \end{array}\right. \quad 3)\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 + \cos t \\ y & = & \mathrm{sen}\,t \\ z & = & 2\,\mathrm{sen}(t/2) \\ t & \in & [-2\pi, 2\pi] \end{array}\right.$$

La tercera curva recibe el nombre de *curva de Viviani*, la cual coincide con la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Para probar esto se pide: 4) (apartado puntuable con 0.3 puntos) Hacer un listados que representen a la curva sobre la esfera, sobre el cilindro y sobre la intersección de la esfera y el cilindro anteriores.

Práctica s Escribir el listado necesario para representar los 30 puntos p_i' obtenidos al girar 45^o los 30 puntos p_i de la práctica CH. Como indicación tener en cuenta que la matriz de un giro α tiene matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Práctica t 1) Escribir el listado necesario para representar la superficie de ecuación $z = x^2 - y^2$, $x, y \in [-2, 2]$. El resultado tiene que ser una silla de montar. Considerar también las siguientes vistas: `view([0,5,0])`, `view([1,1,0])`, `view([1,1,5])` y `view([1,1,1])`.

2) Repetir la práctica anterior para el sombrero mejicano $z = \dfrac{\mathrm{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y para la región $[-10, 10] \times [-10, 10]$.

Práctica puntuable u (0.3 puntos) Escribir el listado necesario para representar las superficies de ecuaciones siguientes y en las que $x, y \in [-10, 10]$. Nos será útil saber que $|x|$=`abs(x)` y que $\mathrm{arctg}(x)$=`atan(x)`.

1. $z = \sqrt{|xy|}$.
2. $z = e^{-x/9}(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(y))$ (Ola del surfista).
3. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 9}$ (Una montaña).
4. $z = \dfrac{-y}{x^2 + y^2 + 9}$ (Una montaña con cráter).
5. $z = \dfrac{1}{x^2 + (y - 8)^2 + 9} + \dfrac{1}{x^2 + (y + 8)^2 + 9}$ (Dos montañas).
6. $z = -\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$ (Tejado de pagoda).

Práctica v Escribir el listado necesario para representar las curvas de nivel ± 0.1; ± 0.09; ± 0.08; $\ldots$; ± 0.01; 0 de la quinta función anterior.

Práctica w Utilizar la función `contour` para representar la curva de ecuación implícita $f(x, y) = 0$ donde

$$f(x, y) = y^2 - 3xe^{-0.1y} - \operatorname{sen}(x/3), \quad -6 \leq x, y \leq 6$$

Obtener, además, de forma aproximada todos los puntos (x, y) de la curva anterior que verifican $y = 2$.

J.4. Ejercicios de la lección D

Práctica p 1) Para $r = 10, 50, 100, 250, 600,$ y 800 calcular la sumas

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^k}{3^k}; \quad \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}; \quad \sum_{k=1}^{r} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

2) ¿Es posible encontrar números reales r_1, y r_2, y r_3 con una tolerancia de 10^{-6} de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = r_1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = r_2 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = r_3 \ ?$$

Práctica q Se define la matriz de Hilbert $H_n = (h_{ij})$ de orden n como la matriz caracterizada por ser $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$. Elaborar guiones que nos definan la matriz de Hilbert H_n para los casos $n = 4, 5, 6$.

Práctica r Definir una función propia, `dr2grado(a,b,c)`, que nos calcule las dos soluciones x_1, x_2 de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con sólo ejecutar el comando `dr2grado(a,b,c)`.

Práctica s Definir una función propia, `dsseno(a,b,c)`, que nos calcule la media ponderada de la función seno en tres puntos a, b, c por la fórmula:

$$\texttt{dsseno(a,b,c)} = \frac{\operatorname{sen} a + 2 \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c}{4}$$

Comprobar el correcto funcionamiento de la función definida para las ternas $(0, \pi, 2\pi)$, $(1, 2, 3)$ y $(0, \pi/2, \pi)$.

Práctica t 1) Crear una función propia, `dtex(x)`, que calcule la siguiente función:

$$f(x) = 0.5e^{x/3} - x^2 \operatorname{sen} x$$

La función debe aceptar tanto un escalar como un vector. Probar la función definida ejecutando `dtex(3)` y `dtex([1 2 3])`

2) Hacer lo mismo para la función:

$$g(x) = \operatorname{sen} x \log(1 + x) - x^2, \quad x > 0$$

Práctica u Consideramos la función $y(x)$ que para $x, y \in [-1, 5]$ está definida por la ecuación implícita

$$y^3 + e^x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

Se pide, calcular los ceros de $y(x)$, $x \in [-1, 5]$.

(`duimplic`)

Práctica puntuable v (0.3 puntos) El señor Hernández tiene tres hijos cuyos nombres y datos son los siguientes

Nombre	Fecha de Nacimiento
Fernando	17/2/1990
Pablo	4/4/1991
Javier	20/4/1998

Este señor ha ido tomando las alturas de sus tres hijos y con los datos ha confeccionado el fichero `dvaltur_x.dat` donde aparecen: en las tres primeras columnas las fechas en que midió a sus hijos, siendo la primera columna el año, la segunda el mes y la tercera el día; en la cuarta quinta y sexta columna introdujo las alturas (en centímetros) que en las citadas fechas tenían sus hijos Fernando, Pablo y Javier, respectivamente.

Se pide, representar en un mismo dibujo y con diferentes colores las tres gráficas de las alturas de los tres hijos en relación a sus edades.

Práctica puntuable w (0.3 puntos) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con una tolerancia de 10^{-5} y para valores de las variables comprendidos entre -10 y 10

$$1)\ \left\{\begin{array}{lcl} x_1^2 + x_2^2 & = & 1 \\ x_1^2 - x_2 & = & 0 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{lcl} -3x_1(x_1+1)(x_1-1) & = & x_2^2 \\ x_2^2 - 5x_1^2 x_2 - x_1^3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$3)\ \left\{\begin{array}{lcl} (x_2-1)^2 + 4x_1(x_1^2-4) & = & 0 \\ (x_1 + x_2^2/5)\cdot \ln|x_2/2+8| & = & 3 \end{array}\right. \qquad 4)\ \left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{sen}^2 x_1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x_2 & = & 0 \\ x_1^2 + x_2 & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Práctica puntuable x (0.3 puntos) Considérese el sistema de ecuaciones no lineales siguiente:

$$\left\{\begin{array}{lcll} x_1 & = & 1 - x_2 & \\ x_i^2 & = & \frac{\sqrt{i-1}}{(2i-1)}(1 - x_{i+1} - x_{i-1}) & \quad i = 2, \ldots, n \\ x_{n+1} & = & -x_n & \end{array}\right.$$

Resolverlo para $n = 5$ en las proximidades del origen, y para $n = 10$ en las proximidades de $b_0 = (1, \ldots, \sqrt{i-1}/(2i-1), \ldots, 0)$, $i = 2, \ldots, n$.

(`dxnolnV_x` y `dxnolnX_x`)

Práctica puntuable y (0.4 puntos) Determinado señor desea comprarse un todo-terreno que tiene una altura de 177 cm y una distancia entre ejes de 270 cm. Antes de comprarlo quiere saber si dicho automóvil va a poder entrar en el garaje situado en el sótano de su vivienda. Sabiendo que la puerta de su garaje es de 200 cm de altura y que la pendiente de la rampa de acceso a su garaje es del 15 % se nos pide:

1. Determinar si dicho automóvil entrará en el garaje.
2. Determinar si es posible además colocarle una baca que sobresale 14 cm por encima del techo del citado todo-terreno.

(`dyterra`)

J.5. Ejercicios de la lección E

Práctica p Sean los números complejos $p = 4 + 1.5i$, $q = -2 - 0.5i$, $r = 6 + 2i$ y $s = 8 + 2.5i$. Se pide resolver el sistema

$$\begin{aligned} px_1 + qx_2 &= 5 \\ qx_1 + rx_2 + qx_3 &= 0 \\ qx_2 + rx_3 + qx_4 &= 0 \\ qx_3 + sx_4 &= 0 \end{aligned}$$

Práctica q Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$1)\ \left\{\begin{aligned} (-1+i)z_1 + (2-2i)z_2 + 4z_3 &= 1 \\ (2-2i)z_1 + 3z_2 + iz_3 &= 4 \\ 3z_1 + (1-5i)z_2 + (1+2i)z_3 &= -1 \end{aligned}\right. \ ; \quad 2)\ \left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right. \ ;$$

$$3)\ \left\{\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \ ; \quad 4)\ \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 &= -3 \end{aligned}\right. \ ;$$

Práctica r Resolver el sistema tridiagonal

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & -3 \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & & & = & 2 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Práctica s Considerar el siguiente sistema

$$\left\{\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ x_3 - x_5 &= 3 \\ x_4 + x_5 &= -1 \\ -5x_1 + x_6 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Se pide resolverlo como sistema hueco y pleno comparando en cada caso el número de operaciones

Práctica puntuable t (0.3 puntos) Consideramos el sistema de orden n definido por la igualdad

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. Comprobar que el vector $x = \frac{1}{n+1}(1, 2, \dots, n)$ es la única solución del sistema anterior.
2. Resolver el sistema anterior para los casos $n = 10$, $n = 20$ y $n = 30$ utilizando el comando '\', el comando `sparse` y la función `e_trid`. Además, se pide comparar la eficacia entre ambos métodos obteniendo para ello una tabla donde se refleje la distancia de la solución exacta y el número de operaciones necesarias para obtener la solución en cada caso y para cada uno de los métodos.
3. Resolver el sistema anterior para los casos $n = 400$, $n = 600$ y $n = 800$ utilizando la función `e_trid`. Además, se pide calcular la distancia con la solución exacta y el número de operaciones necesarias para obtener la solución.

Práctica u Sea H_{10} la matriz de Hilber de orden 10; se pide encontrar valores para b y c de modo que los sistemas $H_{10}x = b$ y $H_{10}y = c$ verifiquen:

1. $\|b - c\| < 0.05$.
2. $\frac{\|x-y\|}{\|x\|} = \text{cond}(H_{10}) \cdot \frac{\|b-c\|}{\|b\|}$

Práctica v Para $n = 3$ hasta $n = 20$ se pide calcular el número de condición de la matriz de Hilbert H_n de orden n y representar en una gráfica el resultado obtenido.

Práctica w Para $n = 3, 7, 11, 15, 19, 23$ resolver el sistema de ecuaciones $H_n x = b$ para $b = H_n(1, 1, \dots, 1)$ y H_n la matriz de Hilbert. La solución debe ser el vector cuyas componentes son todas iguales a 1; sin embargo, comprobar cómo para valores pequeños de n la solución en exacta y como se va perdiendo precisión para dimensiones más grandes.

(Apartado puntuable con 0.2 puntos) Obtener una gráfica que represente para cada $n = 1, \dots, 20$ la distancia con la solución exacta.

Práctica puntuable x (0.4 puntos) Demostrar que una matriz tridiagonal con diagonal dominante (ver la práctica FU) puede escribirse como el producto de dos matrices del tipo (factorización de Crout):

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix} ; \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & 0 \\ 0 & & u_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

J.6. Ejercicios de la lección F

Práctica p Resolver los siguientes sistemas con una tolerancia menor a 10^{-5} empleando los siguientes métodos: de Jacobi, de Gauss-Siedel y de Gauss-Siedel con ponderación $\omega = 1.2$. Reflejar en una tabla las iteraciones necesarias para cada uno de los métodos citados y cada uno de los sistemas.

$$1) \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 - x_2 - x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 & = & 3 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{lcl} 10x_1 - x_2 & = & 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 & = & 7 \\ -2x_2 + 10x_3 & = & 6 \end{array} \right.$$

$$3) \left\{ \begin{array}{lcr} 10x_1 + 5x_2 & = & 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 & = & 25 \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 & = & -11 \\ -x_3 + 5x_4 & = & -11 \end{array} \right. \qquad 4) \left\{ \begin{array}{lcr} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 & = & -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$5) \left\{ \begin{array}{lcr} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = & 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 & = & 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 & = & 6 \end{array} \right. \qquad 6) \left\{ \begin{array}{lcr} 4x_1 - x_2 - x_4 & = & 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 & = & 5 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 & = & 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 & = & 6 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 & = & -2 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 & = & 6 \end{array} \right.$$

Práctica q Considérese el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -0.1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. ¿Qué ocurre al intentar resolverlo por el método de Jacobi?.
2. ¿Puedes dar una explicación de este hecho?.
3. ¿Es posible resolverlo por el método de Gauss-Siedel?. En dicho caso determinar el valor de la solución.

Práctica r ([6], p. 216) Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Queremos alcanzar la solución con una tolerancia en el error relativo del orden de ± 0.001 y empezando a iterar a partir del vector $(0, 0, 0, 0)$.

1. ¿Cuántas iteraciones de Jacobi hacen falta para alcanzar la solución ?
2. ¿Cuántas iteraciones de Gauss-Siedel hacen falta para alcanzar la solución?

Práctica s Resolver con una tolerancia menor a la milésima y por el método de Gauss-Siedel el sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

Práctica t Resolver con un error relativo inferior al 1 % el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 12x_2 + 2x_3 &= -33 \\ x_1 - 14x_2 + 10x_3 &= -103 \end{aligned}$$

usando 1) el comando '\', 2) el método de Jacobi y 3) el método de Gauss-Siedel. Contabilizar el número de operaciones necesarias en cada caso.

Práctica puntuable u (0.4 puntos) Sea

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & & & \\ & A_3 & B_3 & C_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & A_i & B_i & C_i & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

un sistema tridiagonal con predominio diagonal, es decir, que verifica $|B_i| > |A_i| + |C_i|$, $i = 1, \dots, n$. Se pide:

1. Probar que la sucesión de Jacobi $\{x^{(k)}\}$ definida con valor inicial $x^{(0)} = (0, \dots, 0)$ es convergente.

2. Definir una función Matlab, `[x,k]=futrijac(A,B,C,d,tol)`, que admita como parámetros de entrada los elementos diagonales, `B`, los supradiagonales, `C`, los infradiagonales, `A`, los independientes, `d`, y una tolerancia, `tol`, y que dé como resultado la única solución `x` del sistema con una tolerancia prefijada y el número de iteraciones `k` necesarias.
3. Probar la función definida para calcular la solución del sistema definido en la práctica ET para $n = 400, 600$ y 800. ¿Cuántas iteraciones y operaciones son precisas para resolver los citados sistemas con una tolerancia de $1e-4$?.

Práctica puntuable v 1) Escribir una función Matlab, `xk1=f_gs(A,B,xk)`, que realice una iteración de Gauss-Siedel sobre el sistema de ecuaciones $Ax = B$ a partir de la aproximación `xk` (0.1 puntos).

2) Escribir una función Matlab, `[x,k]=f_mgs(A,B,x0,tolerancia)`, que admita como parámetros de entrada la matriz del sistema, `A`, el vector columna de los términos independientes, `B`, una aproximación inicial a la solución, `x0`, y una `tolerancia`; y devuelva como parámetros de salida, `x`, la solución del sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss-Seidel y, `k`, el número de iteraciones preciso para obtener la solución. (0.2 puntos).

J.7. Ejercicios de la lección G

Práctica p Decidir si es posible encontrar una función $f(x)$ que pase por los datos

```
x=[0   0.4    0.8    1.2]
y=[1   1.491  2.225  3.32]
```

y que además verifique $f^{4)}(0.6) = 1.8222$ y $f(0.2) = 50$. Misma pregunta con las mismas condiciones salvo $f(0.2) = 100$.

Práctica q Consideramos la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0.2]$. Se pide:

1. Calcular el polinomio interpolador de f con seis puntos equiespaciados y representar la función error de la interpolación, es decir la función diferencia entre f y su polinomio interpolador.
2. Repetir lo anterior con 12 puntos equiespaciados.
3. Repetir el punto 1 para el trazador cúbico extrapolado.

Práctica r De una función f se tiene la siguiente información

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	-0.232343	1.234934
1	0.730456	
2	2.224353	-0.93245

Con dichos datos se pide calcular la interpolación que se considere más conveniente.

Práctica s Considérese el siguiente conjunto de datos

x	$f(x)$
0.1	0.6029196177260
0.2	0.6598675103186
0.3	0.7283500958774
0.4	0.7861317056154
0.5	0.8514267017599
0.6	0.9174968894121
0.7	0.9811441017109
0.8	0.1040720867913

1. Construir la aproximación lineal por mínimos cuadrados y dibujarla frente al conjunto de datos.
2. Construir las aproximaciones por mínimos cuadrados mediante polinomios de segundo y de tercer grado. Representar gráficamente las curvas y compararlas con el conjunto de puntos.

Práctica puntuable t (0.3 puntos) Encontrar, con una tolerancia de $1e-5$, todas las soluciones positivas de las siguientes ecuaciones empleando para ello los comandos `fzero`, `g_newton` y `g_brent`:

(1) $\operatorname{tg}(x) - x + 1 = 0,\ 0 < x < 3\pi$	(2) $\operatorname{sen}(x) - 0.3e^x = 0,\ x > 0$
(3) $0.1x^3 - 5x^2 - x + 4 + e^{-x} = 0$	(4) $\log(x) - 0.2x^2 + 1 = 0$
(5) $x + x^2 + 3x^{-1} - 40 = 0$	(6) $0.5\exp(x/3) - \operatorname{sen}(x) = 0$
(7) $\log(1+x) - x^2 = 0,\ x \in [0;2]$	(8) $\exp(x) - 5x^2,\ x \in [0;5]$
(9) $x^3 + 2x - 1 = 0$	(10) $\sqrt{x+2} - x = 0$
(11) $e^x - \frac{1}{\operatorname{sen} x},\ x \in [0.1, 3.2]$	(12) $x^{1.4} - \sqrt{x} + 1/x - 100 = 0, \quad x > 0$

Práctica puntuable u (0.3 puntos) La función definida por la igualdad

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N} \tag{J.1}$$

recibe el nombre de *polinomio de Chebychev* de orden n. Se pide:

1. De la igualdad general $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ deducir la siguiente ecuación en recurrencia que verifican las funciones de Chebychev

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \tag{J.2}$$

   deduciéndose de ello que $T_n(x)$ es una función polinómica para todo $n \in \mathbb{N}$ cuyo primer coeficiente es 2^{n-1} y que $T_0 = 1$, $T_1(x) = x - 1$, $T_2(x) = 2x^2 - 1, \ldots$.
   (Indicación: En la fórmula inicial tomar $a = n \arccos x$ y $b = \arccos x$)
2. Definir una función propia, `Tn=g_cheby(n)`, de modo que calcule para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio de Chebychev de orden n.

3. Todas las raíces de $T_n(x)$ son reales, pertenecen al intervalo $[-1,1]$ y además coinciden con

$$r_k = \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \tag{J.3}$$

Los puntos $\{r_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, reciben el nombre de *nodos de Chebychev* del intervalo $[-1,1]$ y por semejanza obtenemos los puntos:

$$\overline{r}_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \tag{J.4}$$

que son los nodos de Chebychev en el intervalo $[a,b]$.

4. Denotemos por $L_n = \prod_{i=1}^{n}(x - s_i)$ donde $s_k = -1 + \frac{2}{n-1}k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, son n puntos equiespaciados en el intervalo $[-1,1]$. Se pide representar conjuntamente en $[-1,1]$ las funciones polinomiales $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ y L_n para $n = 5, 7, 10$.

5. De las representaciones anteriores comprobar que $\text{máx}|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)| \leq \text{máx}|L_n(x)|$, $x \in [-1,1]$, para $n = 5, 7, 10$. De hecho se verifica que el polinomio mónico $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ está caracterizado por ser el que menor máximo tiene en $[-1,1]$ de entre todos los polinomios mónicos de orden n. Esto tiene como consecuencia (ver [6], sección 7.2.7) que la interpolación de una función f mediante un polinomio interpolador de grado n sea óptima precisamente cuando tomamos como nodos los nodos de Chebychev.

Práctica puntuable v (0.3 puntos) Realizar la implementación del método de la regula falsi para el cálculo de ceros de una función tal y como se describe en el apartado G.7.

J.8. Ejercicios de la lección H

Práctica puntuable p (0.2 puntos) Evaluar las siguientes integrales con una tolerancia menor a la milésima

1. – $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+(230x-30)^2}$	2. – $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x)\,dx$	3. – $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x}\,dx$
4. – $\displaystyle\int_0^5 (2x\cos(2x) - (x-2)^2)\,dx$	5. – $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos(x)}$	6. – $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$
7. – $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\text{sen}^2(x)}$	8. – $\displaystyle\int_0^1 x\exp(2x)\,dx$	9. – $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx$
10. – $\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(2x)\,\text{sen}^2(x)\,dx$	11. – $\displaystyle\int_0^1 x^{0.001}\,dx$	12. – $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \text{tg}(x)\,dx$
13. – $\displaystyle\int_1^{1.5} x^2\ln(x)\,dx$	14. – $\displaystyle\int_1^3 \frac{100}{x^2}\,\text{sen}(10/x^2)\,dx$	15. – $\displaystyle\int_1^{1.6} \frac{2}{x^2-4}\,dx$
16. – $\displaystyle\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\,dx$	17. – $\displaystyle\int_0^1 \exp(x)\,dx$	18. – $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x^2)\,dx$

19. – $\displaystyle\int_0^4 x^2(x-1)^2(x-3)^2(x-4)^2\,dx$ 20. – $\displaystyle\int_1^3 e^{2x}\,\text{sen}(3x)\,dx$

Práctica puntuable q (0.2 puntos) Calcular las siguientes integrales impropias con una tolerancia menor a la milésima

$$1.-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-x^2)}{1+x^2}\,dx \quad 2.-\int_0^1\frac{\mathrm{tg}(x)}{x^{0.7}}\,dx \quad 3.-\int_0^1\frac{\exp(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4.-\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx \quad 5.-\int_0^{\infty}\ln(1+e^{-x})\,dx \quad 6.-\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$7.-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx \quad 8.-\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} \quad 9.-\int_0^1 x^{-3/2}\,\mathrm{sen}(1/x)\,dx$$

$$10.-\int_0^1 x^{-1/4}\,\mathrm{sen}\,x\,dx \quad 11.-\int_0^1\frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx \quad 12.-\int_1^2\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x-1}}\,dx$$

$$13.-\int_0^1\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}}\,dx \quad 14.-\int_0^1\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx \quad 15.-\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

$$16.-\int_0^1\frac{xe^x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx \quad 17.-\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+9} \quad 18.-\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^3}$$

Práctica r De las funciones f y g conocemos sus expresiones tabulares en los puntos que se detallan más abajo. Se pide, calcular de la forma que se estime mejor, las integrales

$$\int_0^{0.8} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 g(x)\,dx$$

a partir de los datos

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
f(x)	0	2.1220	3.0244	3.2568	3.1399	2.8579	2.5140	2.1639	1.8358

x	0	0.25	0.50	0.75	1.0
g(x)	0.9162	0.8109	0.6931	0.5596	0.4055

Práctica puntuable s (0.1 puntos) Calcular, cometiendo un error menor a la diezmilésima, las siguientes integrales bidimensionales

$$1.-\int_0^2 dx\int_0^1 \mathrm{sen}(x+y)\,dy \qquad 2.-\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{x+y}\,dy$$

$$3.-\int_0^{\pi} dx\int_0^{\mathrm{sen}\,x} \exp(-x^2-y^2)\,dy \quad 4.-\int_1^2 dx\int_0^{2-0.5x} \sqrt{x+y}\,dy$$

Práctica puntuable t (0.2 puntos) Se llama polinomio de *Legendre* de orden n al polinomio P_n definido por la igualdad

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \tag{J.5}$$

Una relación importante que verifican los polinomios de Legendre es la fórmula en recurrencia siguiente

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \tag{J.6}$$

1. Deducir de ella y de las igualdades $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, la definición de una función propia de Matlab, $P_n(x) =$`h_legend(n)`, que nos calcule el polinomio $P_n(x)$ a partir del dato $n \in \mathbb{N}$.
2. Realizar una representación gráfica, en el intervalo $[-1, 1]$, de las funciones polinomiales $P_n(x)$, $n = 3, 5, 7, 10$, y de sus ceros constatando que todas ellas poseen todos sus ceros en el citado intervalo.
3. Se llaman *nodos de Legendre* de orden n del intervalo $[-1, 1]$ a los n puntos $\{p_1 < p_2 < \ldots < p_n\}$ caracterizados por ser las n raíces del polinomio de Legendre de orden n, $P_n(x)$. Se pide calcular los nodos de Legendre de $[-1, 1]$ para los ordenes $n = 3, 5, 7, 10$.

   En general se llaman nodos de Legendre del intervalo $[a, b]$ a los obtenidos por la fórmula

$$\overline{p}_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{J.7}$$

Práctica u 1) Considerar la función $f(x) = 3x^5 + 7x^2 - 28x + 3$ en el intervalo $[1, 3]$; los nodos de Legendre de orden 3 de dicho intervalo, $p_1 < p_2 < p_3$; y el polinomio interpolador de grado 3 asociado a los datos $(p_i, f(p_i))$. Comprobar que, al menos con una tolerancia de $1e-7$, se verifica la igualdad

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 P_f(x)\,dx \tag{J.8}$$

La igualdad anterior es un hecho general, de hecho se verifica que *la integral de un polinomio de grado $\leq 2n-1$ coincide con la integral de su polinomio interpolador de grado n obtenido respecto a los nodos de Legendre de orden n.*

2) (apartado puntuable con 0.3 puntos) Se denomina *método de integración de Gauss–Legendre* con n puntos a aquel que realiza los siguientes pasos con el fin de obtener una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$:

- Calcula los n puntos de Legendre $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ del intervalo $[a, b]$.
- Calcula el polinomio interpolador $P_f(x)$ de grado n asociado a los datos $(p_i, f(p_i))$.
- Aproxima $\int_a^b f(x)\,dx$ por el valor $\int_a^b P_f(x)\,dx$.

Pues bien, se pide definir una función propia, `I=h_gauss('nombre_f',a,b,n)` que permita calcular la aproximación con n puntos de la integral $\int_a^b$ `nombre_f`$(x)\,dx$ por el método de Gauss–Legendre.

3) (apartado puntuable con 0.15 puntos) Utilizar la función propia definida anteriormente para calcular las aproximaciones con 4,8, y 16 puntos de las integrales 1–10 de la práctica HP. Observar la exactitud obtenida con pocos puntos.

4) (apartado puntuable con 0.15 puntos) Como habremos observado una de las grandes ventajas del método de Gauss–Legendre es su exactitud con pocos puntos y otra ventaja es que se puede aplicar también sobre integrales singulares. En este apartado pedimos utilizar la función propia definida en el punto 2 para el cálculo aproximado de las integrales singulares 1–5 de la práctica HQ con 10 puntos observando si la exactitud obtenida es suficiente.

Práctica puntuable v (0.3 puntos) Definir una función propia,

```
I=h_dblgau('nombre_f','nombre_c','nombre_d',a,b,m,n)
```

que permita aproximar la integral bidimensional $\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx$ por el método de Gauss–Legendre a partir de un mallado de $m \times n$ puntos de Legendre. Utilizar la función propia definida para calcular las integrales 1–2 de la práctica HS.

J.9. Ejercicios de la lección I

Práctica p Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en el intervalo $[0,1]$ comparando, siempre que sea posible, con la solución exacta. Tener en cuenta que utilizamos la notación $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ y' = -y, \quad y(0) = 2 & (2)\ y' = 2y, \quad y(0) = 1/2 \\
(3)\ y' = y - x - 1, \quad y(0) = 1 & (4)\ y' = (1+y^2)/4, \quad y(0) = 1
\end{array}
$$

Práctica q Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales comparando, cuando sea posible, con la solución exacta y teniendo en cuenta la notación $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ y' = y - 2, y(0) = 1; \quad x \in [0,1] & (2)\ y' = \operatorname{sen} x + \cos y, y(0) = 0; \quad x \in [0,1] \\
(3)\ y' = x^2 + y^2, y(0) = 0; \quad x \in [0,1] & (4)\ y' = x + \sqrt[3]{y}, y(0) = 1; \quad x \in [0,2] \\
(5)\ yy' = 2x^3, y(1) = 3; \quad x \in [1,2] & (6)\ y' = x/(1+y^2), y(-1) = 1; \quad x \in [-1,1]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(7)\ y'' - 2y' + y = xe^x - x, y(0) = y'(0) = 0; \quad x \in [0,1] \\
(8)\ x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x, y(1) = 1, y'(1) = 0; \quad x \in [1,2]
\end{array}
$$

Práctica puntuable r (0.2 puntos) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales para $t \in [0,1]$ comparando, cuando sea posible, con la solución exacta y teniendo en cuenta las notaciones $x' = \dfrac{dx}{dt}, y' = \dfrac{dy}{dt}$.

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& 3x+4y, \quad x(0)=1, \\ y' &=& 3x+2y, \quad y(0)=1, \end{array}\right. & (2) & \left\{\begin{array}{rcl} x'' &=& x+y, \quad x(0)=1, x'(0)=1, \\ y' &=& x-y, \quad y(0)=1, \end{array}\right. \\
(3) & \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x+2y, \quad x(0)=0, \\ y' &=& x+e^{-t}, \quad y(0)=0, \end{array}\right. & (4) & \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& -x+y-(1+t^3)e^{-t}, \quad x(0)=0, \\ y' &=& -x-y-(t-3t^2)e^{-t}, \quad y(0)=1, \end{array}\right.
\end{array}
$$

$$
(5) \quad \left\{\begin{array}{rcl} x''+2x+4y &=& e^t, \quad x(0)=x'(0)=0 \\ y'-x-3y &=& -t, \quad y(0)=1 \end{array}\right.
$$

Práctica puntuable s (0.2 puntos) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de contorno comparando, cuando sea posible, con la solución exacta, $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

(1) $y'' = 4(y - x), \quad y(0) = 0, y(1) = 2;$ usar 11 nodos

(2) $y'' = y' + 2y + \cos x, \quad y(0) = -0.3, y(\pi/2) = -0.1;$ usar 11 nodos

(3) $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, \quad y(0) = 2, y(1) = 1;$ usar 11 nodos

(4) $y'' = \dfrac{-4}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y - \dfrac{2}{x^2}\ln x, \quad y(1) = -1/2, y(2) = \ln 2;$ usar 31 nodos

(5) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{3y}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x} - 1, \quad y(1) = y(2) = 0;$ usar 11 nodos

Práctica puntuable t (0.3 puntos) Utilizando como base el listado de la función `i_contor` definir una nueva función propia

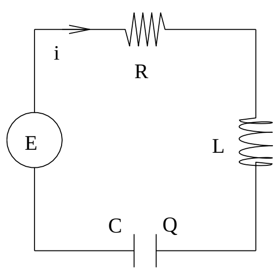
```
[t,x]=i_conto2('nombre_f','nombre_a0','nombre_a1',a,b,tol)
```

de modo que la solución obtenida $\chi =$ `x(t)` sea la única solución de la ecuación diferencial (I.23) con una tolerancia menor que `tol`. Todo esto, claro está, en el supuesto de que nuestra ecuación diferencial de contorno verifique las condiciones (I.25).

Indicación: La función a definir necesita controlar el paso de integración h de modo que el error cometido sea siempre menor que la tolerancia, `tol`, para ello, será preciso tener en cuenta la fórmula (I.30).

Práctica puntuable u (0.4 puntos) El eje y y la recta $x = 200$ son las orillas de un rio cuya corriente tiene una velocidad uniforme de $2m/s$, en la dirección negativa de la y. Una barca entra en el rio en el punto $(200, 0)$ y va directamente hacia el origen con una velocidad de $4m/s$ en relación al agua. (1) ¿Cuál es la trayectoria de la barca?. (2) ¿En qué punto atracará?.

Práctica puntuable v (0.5 puntos) Consideramos un circuito cerrado que contenga una resistencia de R ohmnios, un condensador de capacitancia C faradios, una inductancia de L henries y una fuente de voltaje de $E(t)$ voltios:



La ley de Kirchhoff establece que la suma de todos los cambios instantáneos de voltaje alrededor de dicho circuito cerrado es cero. Esta ley implica que la intensidad de la corriente $i(t)$ verifica la ecuación (ver [9], pág. 75):

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t) \tag{J.9}$$

para $Q(t)$ la carga acumulada en el condensador. Ahora, teniendo en cuenta que la intensidad de la corriente es la rapidez del flujo de la carga, $i = \dfrac{dQ}{dt}$, podemos escribir $Q(t) = \displaystyle\int_0^t i(s)ds + Q(0)$ y también:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{J.10}$$

ecuación sumamente parecida a la que describe el movimiento armónico de una partícula (ver (I.34)) a condición de establecer las siguientes analogías:

$$\begin{gathered}\text{Masa } m \Longleftrightarrow \text{inductancia } L \\ \text{viscosidad } \lambda \Longleftrightarrow \text{resistencia } R \\ \text{rigidez del resorte } k \Longleftrightarrow \text{recíproca de la capacitancia } \frac{1}{C} \\ \text{desplazamiento } x \Longleftrightarrow \text{carga } Q \text{ en el capacitador}\end{gathered} \tag{J.11}$$

En estas circunstancias, consideramos un circuito cerrado con $R = 50$ ohmnios, $L = 0.1$ henries y $C = 5 \cdot 10^{-4}$ faradios que para $t = 0$ verifica $i(0) = Q(0) = 0$ y que es conectado a una fuente alimentadora de corriente alterna a 60 herzios y 110 voltios, lo cual significa que $E(t) = 110\cos(2\pi \cdot 60t)$. Se pide representar gráficamente la variación de la intensidad del circuito para $t \in [0, 1]$.

Práctica puntuable w (0.5 puntos) Ver ([5], práctica 7.H). En este problema utilizamos las mismas notaciones y unidades del apartado I.3.2 salvo para el tiempo, que para conseguir una mayor simplificación, usamos $ut' = \frac{1}{2\pi}$ ⟦ut⟧. Con estas nuevas unidades $\boxed{G = 1}$.

Estamos interesados en obtener las óórbitas de recuperación de un vehículo espacial situado en los alrededores de la Luna. Con ese fin consideramos como sistema de referencia cartesiano (x, y) aquel que está centrado en el centro de masas Tierra–Luna y cuyo eje x es la línea Tierra–Luna, con ello, nuestro sistema de referencia se encuentra sometido a un movimiento de rotación de velocidad angular constante e igual a 1 ⟦rad/ut'⟧. Si denotamos por $m_L = 0.012277471$ ⟦um⟧ el valor de la masa de la Luna en las unidades um; entonces, podemos poner que las coordenadas de la Tierra son $P_T = (-\mu, 0)$ y la de la Luna $P_L = (1 - \mu, 0)$ para $\mu = \dfrac{m_L}{m_T + m_L} = m_L = 0.012277471$ ⟦ud⟧. Análogamente, a lo obtenido en (I.41) se verifica que las ecuaciones que describen el movimiento de un vehículo espacial sometido a las fuerzas de atracción de la Tierra y de la Luna son

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{[(x+\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{[(x - 1 + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} \\ y'' &= y - 2x' - \frac{(1-\mu)\,y}{[(x+\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu\, y}{[(x - 1 + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} \end{aligned} \tag{J.12}$$

donde los dos primeros sumandos de los términos derechos de las dos igualdades anteriores resultan al considerar las aceleraciones centrípeta y de Coriolis a las que se encuentra sometido el sistema de referencia como consecuencia de su movimiento angular.

En esta práctica, se pide representar las trayectorias del vehículo espacial en las primeras 12 unidades de tiempo ut' para las condiciones iniciales siguientes:

$$(A)\colon p_0 = (0.994, 0)\,[\![\text{ud}]\!], \quad v_0 = (0, -2.031732629557)\,[\![\text{ud/ut'}]\!]$$

$$(B)\colon p_0 = (0.994, 0)\,[\![\text{ud}]\!], \quad v_0 = (0, -2.001585106379)\,[\![\text{ud/ut'}]\!]$$

.