MÉTODOS ITERATIVOS PARA ECUACIONES DE UNA VARIABLE

1.– Demostrar que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una única raíz en $[1, 2]$. Aproximar dicha raíz con un error menor que 10^{-5} utilizando el método de la bisección.

2.– Obtener la solución aproximada de la ecuación $e^x + x = 0$ con un error menor que $\frac{1}{30}$ por el método de la bisección.

3.– Mediante el método de *regula falsi* encontrar una solución aproximada c de la ecuación $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ tal que $\mid f(c) \mid < 10^{-2}$, realizando cálculos con con cinco dígitos decimales redondeados.

4.– Dada la ecuación:

$$x - \pi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0,$$

demostrar que tiene una única raíz en $[0, 2\pi]$, y encontrar una aproximación de dicha raíz con una exactitud de 10^{-2} por el método de iteración de punto fijo.

5.– Comprobar que se puede aplicar el Teorema del punto fijo a la función

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{8} + \frac{x^2}{4}$$

en el intervalo $[0, \pi/2]$.

6.– Se considera la ecuación $x^2 - 1 - \operatorname{sen} x = 0$.

a) Probar que que dicha ecuación tiene al menos una raíz positiva.

b) Encontrar un intervalo en el que la iteración $x_{n+1} = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x_n}$, con $n \in \mathbb{N}$, converja para cualquier valor inicial x_0 de dicho intervalo a una raíz positiva de la ecuación anterior.

7.– Determinar una función y un intervalo para poder aplicar el método del punto fijo a las siguientes ecuaciones:

a) $4 - x - \tan x = 0$

b) $x - \cos x = 0$

8.– Una medicina administrada a un paciente produce una concentración en la sangre dada por

$$c(t) = Ate^{-t/3}\ mg/ml,$$

t horas después de que se hayan administrado A unidades. La máxima concentración sin peligro es de $1\,mg/ml$, y esta cantidad se llama concentración de seguridad.

a) ¿Qué cantidad debe ser inyectada para alcanzar como máximo esta concentración de seguridad? ¿Cuándo se alcanza este máximo?

b) Una cantidad adicional se debe administrar al paciente cuando la concentración baja a $0{,}25\,mg/ml$. Determínese con un error de un minuto cuándo debe ponerse la segunda inyección.

9.– Utilizando el método de Newton, indicar un método de aproximar la raíz de un número $a > 0$, y usarlo para aproximar $\sqrt{7}$.

10.− Demostrar que la ecuación

$$2x + \mathrm{e}^x - 2\cos x = 0$$

tiene una única raíz. Determinar un intervalo y un valor inicial para los que el método de Newton converja a dicha raíz.

11.− La función:

$$f(x) = \frac{4x - 7}{x - 2}$$

tiene un cero en $\xi = 1{,}75$. Utilizar el método de Newton con las siguientes aproximaciones iniciales.

a) $\xi_0 = 1{,}625$ *b*) $\xi_0 = 1{,}875$ *c*) $\xi_0 = 1{,}5$

d) $\xi_0 = 1{,}95$ *e*) $\xi_0 = 3$ *f*) $\xi_0 = 7$

Dar una interpretación gráfica de los resultados. Aplicar ahora el método de la secante con las aproximaciones iniciales

a) $\xi_0 = 1{,}625$, $\xi_1 = 1{,}875$, *b*) $\xi_0 = 1{,}5$, $\xi_1 = 1{,}95$ *c*) $\xi_0 = 1{,}9$, $\xi_1 = 1{,}4$

d) $\xi_0 = 1{,}4$, $\xi_1 = 1{,}9$ *e*) $\xi_0 = 3$, $\xi_1 = 1{,}7$ *f*) $\xi_0 = 1{,}7$, $\xi_1 = 3$

12.− Consideremos la ecuación $\mathrm{e}^x \cos x = 1$. *a*) Estimar gráficamente las soluciones positivas más pequeñas. *b*) Utilizar el método de Newton y el de la secante para aproximar estas soluciones con una tolerancia de 10^{-6}. Comparar los resultados. *c*) Analizar la convergencia cuadrática del método de Newton para esta ecuación.