.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

MÉTODOS NUMÉRICOS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS
2004

INSTRUCCIONES

1. El trabajo debe ser realizado **totalmente** en computador y deben aparecer claramente los procedimientos y resultados, en forma de tablas y gráficas, así como, al menos, las siguientes secciones:

    - Portada con nombre y carné.
    - Introducción
    - Enunciado y número del problema
    - Deducción del modelo (opcional)
    - Obtención de las fórmulas de avance para el problema en particular
    - Código de la programación
    - Tablas de resultados indicando las variables y sus unidades
    - Gráficos de resultados con títulos y leyendas
    - Análisis de resultados
    - Conclusiones y/o recomendaciones
    - Bibliografía.

2. Toda respuesta debe estar justificada y analizada.

3. Debido al alto número de cálculos involucrados, se deben realizar algoritmos que resuelvan su problema. Estos algoritmos pueden ser realizados en **cualquier lenguaje** de programación **(excepto DERIVE)** y se deben entregar junto con el trabajo. También harán parte de la evaluación. Se recomienda usar MATLAB, y para ello hay una guia de programación disponible tanto en la página del curso como en la fotocopiadora.

4. Tanto el trabajo como la programación, se deben entregar en un CD y **NO** impresos.

5. En la mayoría de los ejercicios, la primera pregunta pide demostrar que la ecuación diferencial dada modela el problema. Esta pregunta es **OPCIONAL**, y no hará parte de la evaluación del trabajo, sin embargo de acuerdo con el grado de dificultad de la demostración, se concederá una bonificación en la nota del segundo o tercer parcial.

6. El trabajo está dividido en dos partes. La primera parte corresponde al capítulo de solución numérica de ecuaciones diferenciales y la segunda al capítulo de interpolación. La primera parte del trabajo debe ser entregada a más tardar el viernes 25 de junio en horas de la mañana. La segunda parte del trabajo se debe entregar el viernes 9 de julio en horas de la mañana. **POR NINGÚN MOTIVO SE PERMITIRÁ LA ENTREGA EN FECHAS POSTERIORES A LAS AQUÍ INDICADAS.**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

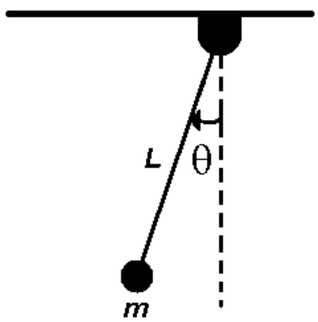
SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 1: (Ver hoja de instrucciones)

1. Considere la barra delgada de longitud L moviéndose en le plano x-y, como se muestra en la figura. La barra se fija de un extremo, con una masa en el otro extremo. Considere que $g = 9.81\frac{m}{s^2}$ y $L = 0.5m$.



   (a) Muestre que este sistema físico se resuelve usando la EDO

$$\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

   (b) Si $\theta(0) = \pi/3$ y $\theta'(0) = 0.5\frac{rad}{s}$, usando los métodos vectoriales de Taylor de tres términos y Runge-Kutta 4, resuelva este problema.

   (c) Grafique el ángulo contra el tiempo y la velocidad angular contra el tiempo.

   (d) Halle la solución exacta para valores pequeños de θ y grafique en un mismo plano, la solución exacta con cada una de las soluciones aproximadas.

   (e) Para las tablas $t\ vs\ \theta$ (para cada método numérico), tomando cinco puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas $t\ vs\ \left(\theta \text{ y } \theta'\right)$ (para cada método numérico), tomando cinco puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

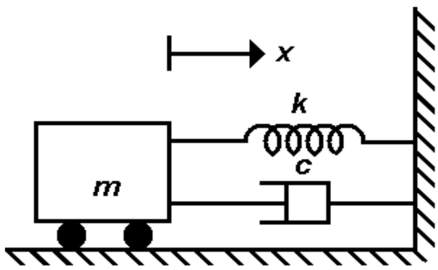
TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 2: (Ver hoja de instrucciones)

2. El movimiento de un sistema masa-resorte amortiguado se describe con la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

donde x = desplazamiento de la posición de equilibrio (m), t = tiempo (s), $m = 10kg$ de masa, y c = coeficiente de amortiguamiento ($N\frac{s}{m}$). El coeficiente de amortiguamiento toma tres valores: 5 (subamortiguado), 40 (amortiguamiento crítico) y 200 (sobreamortiguado). La constante del resorte, $k = 40\frac{N}{m}$. La velocidad inicial es cero y el desplazamiento inicial es $x = 1m$.



(a) Muestre que la ecuación diferencial dada, si describe este problema.

(b) Usando el método numérico de Runge-Kutta 4, resuelva esta ecuación en el periodo $0 \leq t \leq 15s$, tomando $h = 0.1$

(c) Grafique en la misma curva, para cada uno de los tres valores del coeficiente de amortiguamiento, desplazamiento contra tiempo, y velociadad contra tiempo.

(d) Halle la solución exacta y grafique en un mismo plano, la solución exacta con cada una de las soluciones aproximadas.

(e) Para las tablas $t\ vs\ x$ (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas $t\ vs\ (x \text{ y } x')$ (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 3: (Ver hoja de instrucciones)

3. (Química) Un balance de masa para una sustancia química en un reactor completamente mezclado se escribe como

$$V\frac{dc}{dt} = F - Qc - kVc^2$$

donde V= volumen ($20m^3$), c = concentración ($\frac{g}{m^2}$), F = velocidad de alimentación ($400\frac{g}{\min}$), Q = velocidad de flujo ($1.5\frac{m^3}{\min}$) y k = velocidad de reacción de segundo orden ($0.1m^2/g/\min$).

   (a) Muestre que la ecuación diferencial dada, si describe el proceso.

   (b) Si $c(0) = 0$, resuelva la EDO hasta que la concentración alcance un nivel estable. Tome h (tamaño del paso), tal que se obtengan al menos cien puntos.

   (c) Realice una gráfica de concentración contra tiempo, hasta el estado estable.

   (d) Halle la solución exacta y grafique en un mismo plano, la solución exacta con cada una de las soluciones aproximadas.

   (e) Para las tablas t vs c (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

   (f) Para las tablas t vs (c y c') (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 4: (Ver hoja de instrucciones)

4. (Química) Un cubito esférico de hielo (una "esfera de hielo"), de $5cm$ de diámetro, se saca de un congelador que está a $0°C$ y se coloca sobre una malla a temperatura ambiente, $T_a = 20°C$. El coeficiente de transferencia de calor h para una esfera que esta en un cuarto estable es de $3\frac{W}{m^2K}$, aproximadamente. El flujo de calor de la esfera de hielo al aire está dado por

$$flujo = \frac{q}{A} = h\,(T_a - T)$$

donde q = calor y A = área de la superficie de la esfera.

(a) Deduzca una ecuación diferencial que modele el proceso descrito.

(b) ¿ Cuál será el diámetro (d) del cubo de hielo como una función del tiempo, fuera del congelador (suponiendo que toda el agua que se a derretido gotea inmediatamente por la malla) ? Use los métodos numéricos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, para realizar sus cálculos, tomando h de modo que se obtengan al menos cien puntos.

(c) Realice una gráfica en la que se mueste el cambio del diámetro con respecto al tiempo.

(d) Halle la solución exacta y grafique en un mismo plano, la solución exacta con cada una de las soluciones aproximadas.

(e) Para las tablas $t\ vs\ d$ (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas t vs (d y d') (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 5: (Ver hoja de instrucciones)

5. (Química) El compuesto A se difunde a través de un tubo de 4 cm de largo, y reacciona conforme se difunde. La ecuación que rige la difusión con reacción es

$$D\frac{d^2A}{dx^2} - kA = 0.$$

En un extremo del tubo, hay una gran fuente de A a una concentración de $0.1M$. En el otro extremo del tubo, hay un material que absorbe rápidamente cualquier A, volviendo la concentración $0M$. Si $D = 1 \times 10^{-6}\frac{cm^2}{s}$ y $k = 4 * 10^{-6}s^{-1}$.

(a) Muestre que este PVF, modela el proceso descrito.

(b) Use los métodos del disparo (con Runge-Kutta 4) y diferencias finitas, para calcular la concentración de A como una función de la longitud del tubo. Tome un tamaño de paso $h = 0.032$ cm.

(c) Haga un gráfico en el que se muestre la concentración a lo largo del tubo.

(d) Halle la solución exacta y grafique en un mismo plano, la solución exacta con cada una de las soluciones aproximadas.

(e) Para las tablas x vs A (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas x vs (A y A') (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 6: (Ver hoja de instrucciones)

6. (Química) Durante la fase sistólica del latido del corazón, la sangre se bombea del corazón a un extremo de la aorta, cuyas paredes se expanden para recibir la sangre. Como el volumen V de la aorta aumenta por la presión P de la sangre, es razonable decir que V es una función lineal de P

$$V = V_0 + aP$$

donde V_0 es el volumen inicial y a es la constante de proporcionalidad. La conservación de la masa requiere que la razón de cambio del volumen, $\frac{dV}{dt}$, sea igual a la diferencia entre la velocidad a la cual la sangre sale de la aorta y entra al sistema circulatorio:

$$\frac{dV}{dt} = Q_i\left(t\right) - bP$$

donde $Q_i\left(t\right)$ es la velocidad a la que bombea sangre por la aorta y b es una constante. La combinación de las dos ecuaciones anteriores da:

$$a\frac{dP}{dt} + bP = Q_i\left(t\right) = \begin{cases} 0 & \textit{fase diastólica} \\ A\sin\left(\varpi t\right) & \textit{fase sistólica} \end{cases}$$

donde A es la amplitud velocidad del flujo sanguíneo y ϖ es la frecuencia. Sea $a = 1$, $b = 1$, $A = 1$ y $\varpi = 1$. Encuentre la presión de la sangre durante la fase sistólica. Grafique la presión contra el tiempo.

(a) Utilice los métodos numéricos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, para econtrar la presión de la sangre durante la fase sistólica en función del tiempo, para $0 \leq t \leq 2$. Tome un tamaño de paso $h = 0.02$.

(b) Haga un gráfico de la presión de la sangre, contra el tiempo, en la fase sistólica.

(c) Halle la solución exacta y grafique en un mismo plano, la solución exacta con cada una de las soluciones aproximadas.

(d) Para las tablas $t\ vs\ P$ (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas $t\ vs\ (P$ y $P')$ (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 7: (Ver hoja de instrucciones)

7. (Química) La reacción $A \to B$ tiene lugar en dos reactores en serie. Los reactores están bien mezclados pero no permanecen en estado estacionario. El balance de masa en estado no estacionario en cada reactor con agitación se muestra abajo, donde CA_0 es la concentración de A a la entrada del primer reactor. CA_1 es la concentración de A a la salida del primer reactor (y entrada del segundo reactor). CA_2 es la concentración de A a la salida del segundo reactor. CB_1 es la concentración de B a la salida del primer reactor (y entrada al segundo reactor). CB_2 es la concentración de B en el segundo reactor. τ es el tiempo de resistencia en cada reactor, y k es la velocidad constante de reacción de A para producir B.

$$\begin{aligned}
\frac{dCA_1}{dt} &= \frac{1}{\tau}(CA_0 - CA_1) - kCA_1 \\
\frac{dCB_1}{dt} &= -\frac{1}{\tau}CB_1 + kCA_1 \\
\frac{dCA_2}{dt} &= \frac{1}{\tau}(CA_1 - CA_2) - kCA_2 \\
\frac{dCB_2}{dt} &= \frac{1}{\tau}(CB_1 - CB_2) - kCB_2
\end{aligned}$$

condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
CA_1(0) &= 0 \\
CA_2(0) &= 0 \\
CB_1(0) &= 0 \\
CB_2(0) &= 0
\end{aligned}$$

(a) Si CA_0 es igual a 10, use los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, para hallar la concentración de A y B en ambos reactores, durante los primeros 10 minutos de operación. Use $k = 0.1/\min$ y $\tau = 5\,\text{min.}$, así como un tamaño de paso $h = 0.1$ minutos.

(b) Realice gráficos que ilustren el cambio de la concentración, con el tiempo, en cada reactor. ¿Puede concluir algo acerca de la concentración en estado estacionario, y cuando se alcanza?

(c) Para las tablas $t\ vs\ CA_1, t\ vs\ CA_2, t\ vs\ CB_1, t\ vs\ CB_2$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(d) Para las tablas $t\ vs\ CA_1, t\ vs\ CA_2, t\ vs\ CB_1, t\ vs\ CB_2$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos tres polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 8: (Ver hoja de instrucciones)

8. (Química) Un reactor batch no isotérmico se puede describir mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -\exp\left(-10/\left(T+273\right)\right)C \\ \frac{dT}{dt} &= 1000\exp\left(-10/\left(T+273\right)\right)C - 10\left(T-20\right) \end{aligned}$$

donde C es la concentración del reactivo y T es la temperatura del reactor. Inicialmente el reactor está a $25°C$ de temperatura y la concentración del reactivo C es de $1\frac{gmol}{L}$.

(a) Utilice los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, para encontrar la concentración y la temperatura del reactor en función del tiempo, para $0 \leq t \leq 2$ minutos, con un tamaño de paso $h = 0.02$ minutos.

(b) Grafique, la concentración y la temperatura del reactor en función del tiempo. ¿Qué se puede concluir?

(c) Para las tablas t vs C, t vs T (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(d) Para las tablas t vs C, t vs T (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos tres polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 9: (Ver hoja de instrucciones)

9. (Civil Ambiental)

La siguiente ecuación sirve para modelar la deflexión del mástil de un bote sujeto a la fuerza del viento:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{f}{2EI}(L-z)^2$$

donde f = fuerza del viento, E = módulo de elasticidad, L = longitud del mástil e I = momento de inercia.

(a) Muestre que la ecuación dada permite modelar la deflexión del mástil.

(b) Use los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, para calcular la deflexión si $y = 0$ y $\frac{dy}{dz} = 0$ en $z = 0$. Use los valores de los parámetros de $f = 50$, $L = 30$, $E = 1.2 \times 10^8$ e $I = 0.05$ para sus cálculos.

(c) Realice los mismos cálculos de (b), pero ahora, en lugar de usar una fuerza del viento constante, emplee una fuerza que varíe con la altura de acuerdo con

$$f(z) = \frac{200z}{5+z}\exp\left(\frac{-z^2}{30}\right).$$

(d) En ambos casos, muestre gráficamente la deflexión del mástil como una función de z (altura).

(e) Halle la solución exacta (para el caso f constante) y grafique en un mismo plano, la solución exacta con cada una de las soluciones aproximadas.

(f) Para las tablas z vs y (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(g) Para las tablas $z\ vs\ (y \text{ y } y')$ (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

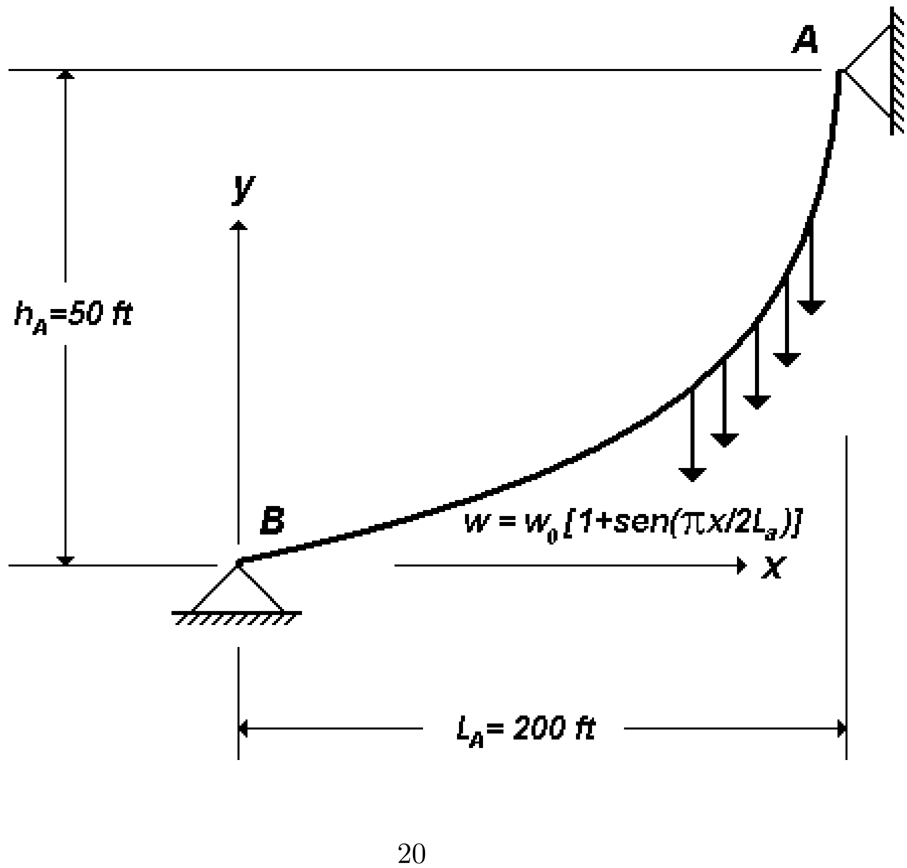
TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 10: (Ver hoja de instrucciones)

10. (Civil-Ambiental) Un cable cuelga de dos soportes A y B (ver figura). El cable esta con cargas distribuidas, cuyas magnitudes varían con x como:

$$w = w_0 \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2l_A}\right)\right]$$

donde $w_0 = 1000\frac{lb}{ft}$. La pendiente del cable $\frac{dy}{dx} = 0$ en $x = 0$, que es el punto mas bajo del cable. Éste también es el punto del cable donde la tensión tiene un mínimo, T_0.



(a) Muestre que la ecuación diferencial que modela el cable es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_0}{T_0}\left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2l_A}\right)\right].$$

(b) Resuelva esta ecuación usando los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, eligiendo h de modo que se obtengan 2401 puntos $(h = 1/12)$. Para sus tablas reporte sólo 101 puntos igualmente espaciados.

(c) Grafique la forma del cable (y contra x). En la solución numérica se desconoce el valor de T_0, de manera que la solución debe utilizar una técnica iterariva, similar a la del método del disparo, para converger hacia el valor correcto de h_A para diversos valores de T_0.

(d) Halle la solución exacta y grafique en un mismo plano, la solución exacta con cada una de las soluciones aproximadas.

(e) Para las tablas x vs y (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas x vs (y y y') (para la solución exacta y cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también la solución exacta. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

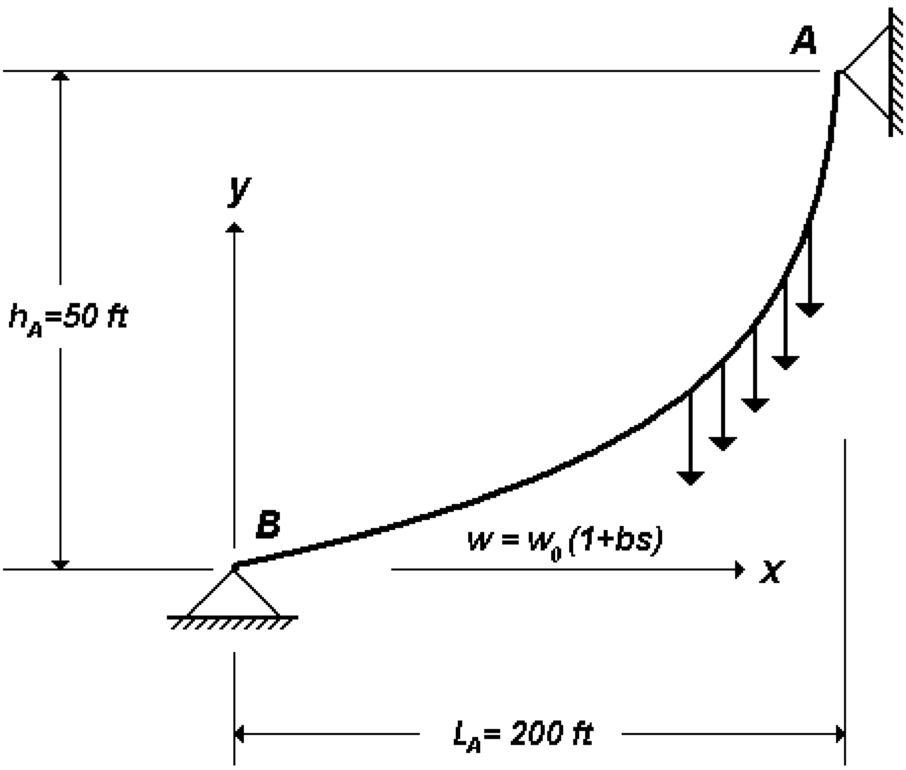
TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 11: (Ver hoja de instrucciones)

11. (Civil-Ambiental) Un cable cuelga de dos soportes en A y B, y soporta su propio peso, que está distribuido a todo lo largo. La magnitud de carga distribuida varía con la longitud del cable, s, como:

$$w = w_0\,(1 + bs)$$

donde $w_0 = 0.5\frac{lbs}{ft}$ y $b = 0.05ft^{-1}$. La pendiente del cable $\frac{dy}{dx} = 0$ en $x = 0$, que es el punto mas bajo del cable. Ëste también es el punto donde la tensión del cable tiene un mínimo de T_0.



(a) Muestre que la ecuación diferencial que modela el cable es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_0}{T_0}\left(1 + bs\right).$$

(b) Use los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, para resolver esta ecuación diferencial, eligiendo h de modo que se obtengan al menos cien puntos. Se necesita una expresión para la longitud del cable y esa relación es

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

En la solución numérica se desconoce el valor de T_0, de manera que la solución debe utilizar una técnica iterariva, similar a la del método del disparo, para converger hacia el valor correcto de h_A para diversos valores de T_0.

(c) Grafique la forma del cable (y contra x).

(d) Para las tablas x vs y (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas x vs (y y y') (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 12: (Ver hoja de instrucciones)

12. (Eléctrica)

(a) En un circuito simple RL, la ley del voltaje de Kirchhoff requiere que (si se cumple la ley de Ohm)

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0$$

donde i = corriente, L = inductancia y R = resistencia. Encuentre i si $L=1$, $R=2$ e $i\,(0)=0.6$. Resuelva este problema en forma analítica y con los métodos numéricos de Taylor de tres términos y Runge-Kutta 4, para $0\leq t\leq 4$ *segundos*, con un tamaño del paso $h=0.04$.

(b) A diferencia de la parte (a), los resistores reales no siempre obedecen la ley de Ohm. Por ejemplo, la caída de voltaje puede ser no lineal y el circuito dinámico se describe por una relación tal como

$$L\frac{di}{dt}+R\left[\frac{i}{I}-\left(\frac{i}{I}\right)^{3}\right]=0$$

donde los demás parámetros se definieron en la parte (a) e I es una corriente de referencia conocida igual a $i(0)$. Encuentre i en función del tiempo bajo las mismas condiciones especificadas en la parte (a).

(c) En ambos casos, realice un gráfico de corriente contra tiempo. Concluya.

(d) Para las tablas $t\ vs\ i$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas t vs (i y i') (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 13: (Ver hoja de instrucciones)

13. (Mecánica) La rapidez de flujo de calor (conducción) entre dos puntos sobre un cilindro calentado en un extremo, está dado por

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{dT}{dx}$$

donde λ = constante, A = el área de la sección transversal del cilindro, Q = flujo de calor, T = temperatura, t = tiempo y r = distancia desde el extremo calentado. Como la ecuación involucra dos derivadas, la simplificaremos haciendo

$$\frac{dT}{dx} = \frac{100\,(L-x)\,(20-t)}{100-xt}$$

donde L es la longitud del cilindro

(a) Deduzca las ecuaciones dadas.

(b) Combine las dos ecuaciones y calcule el flujo de calor desde $t = 0$ hasta $25s$, con un tamaño de paso $h = 0.25s$. Use los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4. La condición inicial es $Q(0) = 0$ y los parámetros son $\lambda = 0.4 cal.cm/s$, $A = 10cm^2$, $L = 20cm$ y $x = 2.5cm$.

(c) Grafique sus resultados.

(d) Para las tablas $t\ vs\ Q$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas t vs (Q y Q') (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 14: (Ver hoja de instrucciones)

14. (Mecánica) La siguiente ecuación diferencial ordinaria describe el movimiento de un sistema amortiguado masa resorte

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (a)\,sign\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + bx^3 = 0$$

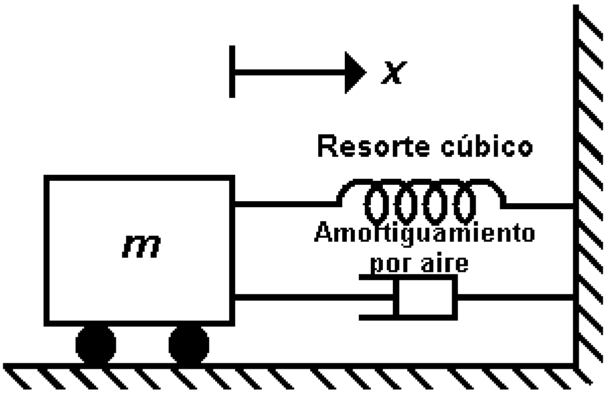
donde $x =$ desplazamiento desde la posición de equilibrio, $t =$ tiempo, $m = 1Kg$ de masa y $a = 5\frac{N}{(m/s)^2}$. El término de amortiguamiento es no lineal y representa amortiguamiento por aire. En este término de amortiguamiento, la función $sign\,()$ determina el signo de la velocidad, ya que el término de la velocidad al cuadrado es siempre positivo. Observe que otra representación del término de amortiguamiento por aire es

$$a\left|\frac{dx}{dt}\right|\frac{dx}{dt}.$$

El resorte es un resorte cúbico y es también no lineal con $b = 5\frac{N}{m^3}$. Las condiciones iniciales son

$Velocidad\ inicial = \frac{dx}{dt} = 0.5\frac{m}{s}$

$desplazamiento\ inicial = x = 1m$



(a) Deduzca la ecuación que modela este proceso.

(b) Resuelva esta ecuación en el periodo $0 \leq t \leq 8s$. Use los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, con un tamaño de paso $h = 0.08s$, para todos los siguientes casos:

i. Una ecuación lineal similar

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

ii. La ecuación no lineal con sólo un término de resorte no lineal

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + bx^3 = 0$$

iii. La ecuación no lineal con sólo un término de amortiguamiento no lineal

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (a)\, sign\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 5x = 0$$

iv. La ecuación no lineal completa, en la que tanto el amortiguamiento como el resorte son no lineales

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (a)\, sign\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + bx^3 = 0.$$

(c) Grafique el desplazamiento y la velocidad contra el tiempo y grafique la representación plano fase (velocidad contra desplazamiento) en todos los casos.

(d) Para las tablas $t\ vs\ x$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas $t\ vs$ (x y x') (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 15: (Ver hoja de instrucciones)

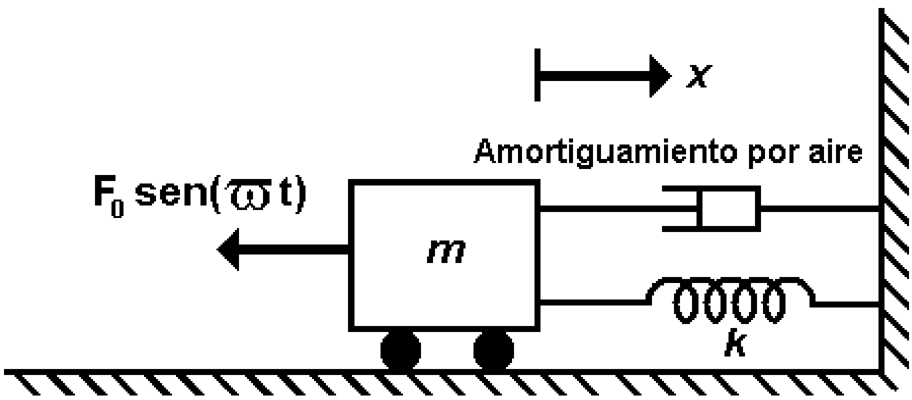
15. (Mecánica) Un sistema masa resorte amortiguado y forzado tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria de movimiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (a)\, sign\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + kx = F_0 \sin(\varpi t)$$

donde x = desplazamiento desde la posición de equilibrio, t = tiempo, $m = 2Kg$ de masa, $a = 5\frac{N}{(m/s)^2}$ y $k = 6\frac{N}{(m/s)^2}$. El término de amortiguamiento es no lineal y representa amortiguamiento por aire. En este término de amortiguamiento, la función $sign\,()$ determina el signo de la velocidad, ya que el término de la velocidad al cuadrado es siempre positivo. La función de fuerza $F_0 \sin(\varpi t)$ tiene valores $F_0 = 2N$ y $\varpi = 0.5\frac{rad}{s}$. Las condiciones iniciales son

$Velocidad\ inicial = \frac{dx}{dt} = 0\frac{m}{s}$

$desplazamiento\ inicial = x = 1m$



(a) Deduzca la ecuación que modela este proceso.

(b) Resuelva esta ecuación en el periodo $0 \leq t \leq 15s$. Use los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, con un tamaño de paso $h = 0.15s$.

(c) Grafique el desplazamiento y la velocidad contra el tiempo, y en la misma curva grafique también la función de fuerza.

(d) Para las tablas $t \ vs \ x$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas $t \ vs \ (x$ y $x')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 16: (Ver hoja de instrucciones)

16. La distribución de temperatura en un recipiente de enfriamiento cónico, está descrita mediante la siguiente ecuación diferencial, que ha sido adimensionalizada

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{du}{dx}pu\right) = 0$$

donde $u =$ temperatura $(0 \leq x \leq 1)$, $x =$ distancia axial $(0 \leq x \leq 1)$ y p es un parámetro adimensional que describe la transferencia de calor y la geometría

$$p = \frac{hL}{k}\sqrt{1 + \frac{4}{2m^2}}$$

donde $h =$ coeficiente de trasferencia de calor, $k =$ concuctividad térmica, $L =$ longitud o altura del cono y m es la pendiente de la pared del cono. La ecuación tiene las condiciones de frontera

$$u\,(x = 0) = 0 \qquad u\,(x = 1) = 1.$$

(a) Deduzca la ecuación diferencial que modela el proceso.

(b) Mediante esta ecuación obtenga la distribución de las temperaturas usando los métodos del disparo (con Runge-Kutta 4 y Taylor de orden dos). Tome un tamaño de paso $h = 0.008$. ¿Qué inconveniente tendría usar el método de las diferencias finitas?

(c) Grafique la temperatura contra distancia axial, para los siguientes valores de $p = 10, 20, 50$ y 100.

(d) Para las tablas $x\ vs\ u$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas x vs (u y u') (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 17: (Ver hoja de instrucciones)

17. En un libro titulado *Looking at History Through Mathematics,* se propone un modelo de un problema referente a la aparición de no conformistas de la sociedad. Suponga que una sociedad tiene una población de $x(t)$ individuos en el tiempo t, en años, y que todos los no conformistas que tienen relaciones sexuales con otros no conformistas engendran hijos que tambien son no conformistas, mientras que una porción fija r del resto de los hijos también son no conformistas.

    (a) Si se supone que las tasas de natalidad y mortalidad de todos los individuos son las constantes b y d, respectivamente, y si los conformistas y no conformistas tienen relaciones sexuales al azar, muestre que el problema se puede expresas mediante las ecuaciones diferenciales

    $$\frac{dx(t)}{dt} = (b-d)\,x(t) \qquad y \qquad \frac{dx_n(t)}{dt} = (b-d)\,x_n(t) + rb\,(x(t) - x_n(t)),$$

    donde $x_n(t)$ denota la cantidad de no conformistas de la población en el tiempo t. Además, si introducimos la variable $p(t) = x_n(t)/x(t)$ para representar la proporción de no conformistas de la sociedad en el tiempo t, demuestre que estas ecuaciones pueden combinarse y simplificarse en la ecuación diferencial individual

    $$\frac{dp(t)}{dt} = rb\,(1-p(t)).$$

    (b) Suponiendo que $p(0) = 0.01$, $b = 0.02$, $d = 0.015$ y $r = 0.1$, aproxime la solución $p(t)$ de $t = 0$ a $t = 50$ con el tamaño de paso $h = 1$ año. Use los métodos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4.

(c) Resuelva la ecuación diferencial para $p(t)$ exactamente y compare su resultado del inciso (b) cuando $t = 50$ con el valor exacto en ese tiempo.

(d) Muestre, es una misma gráfica, la solución numérica y la solución exacta.

(e) Para las tablas $t\ vs\ p$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas $t\ vs$ (x y x') (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 18: (Ver hoja de instrucciones)

18. En un circuito de voltaje impreso ε que tiene la resistencia R, la inductancia L y la capacitancia C en paralelo, la corriente i satisface la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{L}\varepsilon.$$

suponga que $C = 0.3$ faradios, $R = 1.4$ ohms, $L = 1.7$ henrios y que el voltaje está dado por

$$\varepsilon(t) = \exp(-0.06\pi t)\sin(2t - \pi).$$

(a) Deduzca la ecuación diferencial.

(b) Si $i(0) = 0$, calcule la corriente i con los valores $t = 0.1j$, donde $j = 0, 1, ..., 100$. Use los métodos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4.

(c) Realice un gráfico de i vs t.

(d) Para las tablas $t\ vs\ i$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas $t\ vs\ (i$ y $i')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 19: (Ver hoja de instrucciones)

19. Un proyectil de masa $m = 0.11\ Kg$ que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v(0) = 8\ \frac{m}{s}$, disminuye su velocidad por efecto de la fuerza de gravedad $F_g = -mg$ y por la resistencia del aire $F_r = kv\,|v|$, donde $g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$ y $k = 0.002\ \ \frac{kg}{m}$.

    (a) Muestre que la ecuación diferencial de la velocidad v está dada por

    $$mv' = -mg - kv\,|v|\,.$$

    (b) Calcule la velocidad después de $0.025, 0.05, ..., 1\ s$. Use tanto el método de Taylor de orden dos como el método de Runge-Kutta 4.

    (c) Determine, con una precisión de décimas de segundo, cuándo alcanzará el proyectil su altura máxima y cuándo empezará a caer.

    (d) Realice un gráfico de v vs t, que muestre el movimiento.

    (e) Para las tablas $t\ vs\ v$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

    (f) Para las tablas $t\ vs\ (v \text{ y } v')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 20: (Ver hoja de instrucciones)

20. Fluye agua de un tanque cónico invertido provisto de un orificio circular, con una velocidad

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2 \sqrt{2g} \frac{\sqrt{x}}{A(x)},$$

donde r es el radio del orificio, x es la altura del nivel del líquido medido desde el vértice del cono y $A(x)$ es el área de la sección transversal del tanque, a x unidades por arriba del orificio. Supongamos que $r = 0.1$ *pie*, $g = 32.1\ \frac{pies}{s^2}$, y que el tanque tiene un nivel inicial de agua de 8 *pies* y un volumen inicial de $512(\pi/3)$ $pies^3$.

(a) Muestre que la ecuación diferencial dada, modela el vaciado del tanque.

(b) Calcule el nivel del agua después de 10 min con $h = 6$ s. Use tanto el método de Taylor de orden dos como el método de Runge-Kutta 4.

(c) Determine, con una exactitud de 12 segundos, cuándo se vaciará el tanque.

(d) Realice un gráfico de x vs t, que muestre el proceso de vaciado del tanque.

(e) Para las tablas t vs x (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas t vs (x y x') (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 21: (Ver hoja de instrucciones)

21. La reacción química irreversible en la cual dos moléculas de dicromato de sólido de potasio $(K_2Cr_2O_7)$, dos moléculas de agua (H_2O) y tres átomos de azufre sólido (S) se combinan para producir tres moléculas de dióxido gaseoso de azufre (SO_2), cuatro moléculas de hidróxido sólido de potasio (KOH) y dos moléculas de óxido sólido de cromo (Cr_2O_3), puede representarse simbólicamente por la *ecuación estequiométrica:*

$$2K_2Cr_2O_7 + 2H_2O + 3S \rightarrow 4KOH + 2Cr_2O_3 + 3SO_2.$$

Originalmente se dispone de n_1 moléculas de $K_2Cr_2O_7$, n_2 moléculas de H_2O y n_3 moléculas de S.

(a) Muestre que la siguiente ecuación diferencial describe la cantidad $x(t)$ de KOH después del tiempo t :

$$\frac{dx}{dt} = k\left(n_1 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_2 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_3 - \frac{3x}{4}\right)^3,$$

donde k es la constante de velocidad de la reacción.

(b) Si $k = 6.22 \times 10^{-19}$, $n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$ y $n_3 = 3 \times 10^3$, ¿cuántas unidades de hidróxido de potasio se formarán después de 0.2 s? Use los métodos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4 para responder la pregunta, tomando un tamaño de paso $h = 0.002$ s.

(c) Realice un gráfico en el que se muestre la cantidad formada de hidróxido de potasio, como una función del tiempo.

(d) Halle la solución exacta, grafíquela y compare con los resultados numéricos.

(e) Para las tablas t vs x (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas t vs (x y x') (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 22: (Ver hoja de instrucciones)

22. En la teoría de la propagación de enfermedades contagiosas, podemos utilizar una ecuación diferencial relativamente elemental para predecir el número de individuos de la población infectados en un tiempo dado, siempre y cuando realicemos las suposiciones de simplificación adecuadas. En particular, supongamos que todos los individuos de una población fija tienen la misma probabilidad de infectarse y que, una vez infectados, permanecen en ese estado. Si con $x(t)$ denotamos en número de individuos vulnerables en el tiempo t y si $y(t)$ denotamos el número de los infectados, podemos suponer, razonablemente, que la rapidez con que el número de infectados cambia es proporcional al producto de $x(t)$ y $y(t)$, porque la rapidez depende del número de infectados y del número de individuos vulnerables que existen en ese tiempo. Si la población es lo suficientemente numerosa para suponer que $x(t)$ y $y(t)$ son variables continuas, podemos expresar el problema como

$$y'(t) = k\ x(t)\, y(t)\,,$$

donde k es una constante y $x(t) + y(t) = m$ es la población total. Podemos reescribir esta ecuación para que contenga sólo $y(t)$ como

$$y'(t) = k\,(m - y(t))\ \ y(t)\,.$$

(a) Suponiendo que $m = 100000$, $y(0) = 1000$, $k = 2 \times 10^{-6}$, y que el tiempo se mide en días, encuentre una aproximación al número de individuos infectados al cabo de 30 días. Use tanto el método de Taylor de orden dos como el método de Runge-Kutta 4, con un tamaño de paso $h = 0.3$ días.

(b) La ecuación diferencial del inciso (a) se llama *ecuación de Bernoulli* y puede transformarse en una ecuación diferencial lineal en $u(t) = (y(t))^{-1}$. Aplique este método para encontrar la solución exacta de la ecuación, bajo los mismos supuestos de inciso (a); después, compare el valor verdadero de $y(t)$ en la aproximación aquí dada. ¿Qué es $\lim_{t\to\infty} y(t)$?¿Concuerda esto con lo que usted intuye?

(c) En el modelo descrito todos los individuos infectados permanecieron en la población y propagaron la enfermedad. Una propuesta más realista consiste en introducir una tercera variable $z(t)$, que representa el número de las personas a quienes en un tiempo t se les separa de la población por aislamiento, recuperación y la subsecuente inmunidad o fallecimiento. Naturalmente eso viene a complicar el problema, pero podemos demostrar que se puede obtener una solución aproximada de la forma

$$x(t) = x(0)\exp\left(-\left(k_1/k_2\right)z(t)\right) \qquad y \qquad y(t) = m - x(t) - z(t),$$

donde k_1 es la rapidez de la infección, k_2 es la rapidez del aislamiento y $z(t)$ se obtiene de la ecuación diferencial

$$z'(t) = k_2\left(m - z(t) - x(0)\exp\left(-\left(k_1/k_2\right)z(t)\right)\right).$$

Obtenga una aproximación a $z(30)$, a $y(30)$ y $x(30)$, suponiendo que $m = 100000$, $x(0) = 99000$, $k_1 = 2\times10^{-6}$, y que $k_2 = 10^{-4}$. Use los mismos métodos numéricos indicados en (a).

(d) Realice un gráfico de x vs t y y vs t, para el primer modelo, y z vs t para el segundo modelo.

(e) Para las tablas t *vs* (x y y y z) (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas t *vs* (x y x'), t *vs* (y y y'), t *vs* (z y z') (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 23: (Ver hoja de instrucciones)

23. El estudio de los modelos matemáticos para predecir la dinámica demográfica de especies antagónicas nació con las obras independientes que, en la primera parte del siglo XX, publicaron A. J. Lotka y V. Volterra. Considere el problema de predecir la población de dos especies, una de las cuales es depredadora y cuya población en el tiempo t es $x_2(t)$ y la otra es la presa, cuya población es $x_1(t)$. Supondremos que la presa siempre dispone de suficiente comida y que su natalidad en cualquier momento es proporcional a la cantidad de presas vivas en ese tiempo; es decir, la natalidad (de la presa) es $k_1x_1(t)$. La mortalidad de la presa depende del número de presas y depredadores vivos en ese tiempo. Para simplificar los cálculos, supondremos que la mortalidad (de la presa) es $=k_2x_1(t)\,x_2(t)$. En cambio, la natalidad del depredador depende del suministro de comida $x_1(t)$ y también del número de depredadores que intervienen en el proceso de reproducción. Por tal razón supondremos que la natalidad (de los depredadores) es $k_3x_1(t)\,x_2(t)$. Supondremos que la mortalidad es proporcional a la cantidad de depredadores vivos en el tiempo; es decir, mortalidad (de los depredadores) $=k_4x_2(t)$.

    Dado que $x_1'(t)$ y $x_2'(t)$ representan, respectivamente, el cambio de las poblaciones de presas y depredadores en el tiempo, el problema se expresa mediante el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

$$x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)\,x_2(t) \qquad y \qquad x_2'(t) = k_3x_1(t)\,x_2(t) - k_4x_2(t)\,.$$

    (a) Resuelva este sistema para $0 \leq t \leq 4$, suponiendo que la población inicial de la presa es de 1000 y la de los depredadores es de 500, y que las constantes son $k_1 = 3$,

$k_2 = 0.002$, $k_3 = 0.0006$ y $k_4 = 0.5$. Use tanto el método de Taylor de orden dos como el método de Runge-Kutta 4, en forma vectorial, con un tamaño de paso $h = 0.04$..

(b) Dibuje una gráfica de las soluciones de este problema, graficando ambas poblaciones con el tiempo y describa los fenómenos físicos representados. ¿Tiene este modelo demográfico una solución estable? De ser así, ¿con que valores de x_1 y x_2 es estable la solución?.

(c) Para las tablas $t\ vs\ x_1$, $t\ vs\ x_2$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(d) Para las tablas $t\ vs\ (x_1 \text{ y } x_1')$, $t\ vs\ (x_2 \text{ y } x_2')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 24: (Ver hoja de instrucciones)

24. El estudio de los modelos matemáticos para predecir la dinámica demográfica de especies antagónicas nació con las obras independientes que, en la primera parte del siglo XX, publicaron A. J. Lotka y V. Volterra. Un problema típico es el de predecir la población por medio de un modelo de depredador-presa. Otro problema de este tipo se refiere a dos especies que compiten por la misma comida. Si con $x_1(t)$ y $x_2(t)$ denotamos los números de especies vivas en el tiempo t, a menudo se supone que, aunque la natalidad de cada especie es simplemente proporcional al número de animales vivos en ese tiempo, la mortalidad de cada especie depende de la población de ambas especies. Supondremos que la población de un par determinado de especies se describe mediante las ecuaciones:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)\left[4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t)\right]$$

y

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)\left[2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)\right].$$

(a) Si se sabe que la población inicial de cada especie es de 10000 encuentre la solución de este sistema cuando $0 \leq t \leq 4$. ¿Tiene este modelo demográfico una solución estable? De ser así, ¿con que valores de x_1 y x_2 es estable la solución?. Use tanto el método de Taylor de orden dos como el método de Runge-Kutta 4, en forma vectorial, con un tamaño de paso $h = 0.04$.

(b) Dibuje una gráfica de las soluciones de este problema, graficando ambas poblaciones con el tiempo y describa los fenómenos físicos representados. ¿Tiene este modelo demográfico una solución estable? De ser así, ¿con que valores de x_1 y x_2 es estable la solución?.

(c) Para las tablas $t\ vs\ x_1$, $t\ vs\ x_2$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(d) Para las tablas $t\ vs\ (x_1 \text{ y } x_1')$, $t\ vs\ (x_2 \text{ y } x_2')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 25: (Ver hoja de instrucciones)

25. Considere la ecuación diferencial ordinaria, que describe la distribución de la temperatura en una barra circular con fuente interna de calor S

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + S = 0$$

   (a) Deduzca la ecuación diferencial.

   (b) Resuelva la ecuación diferencial, usando tanto el método del disparo (con el método de Runge-Kutta 4) como el método de diferencias finitas de orden dos, en el intervalo $0 \leq r \leq 1$ con las condiciones de frontera

$$T\,(r=1) = 1 \qquad \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$$

   para $S = 1, 10$ y $20\ K/m^2$. Tome un tamaño de paso $h = 0.01$.

   (c) Grafique la temperatura contra el radio.

   (d) Para las tablas $r\ vs\ T$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

   (e) Para las tablas $r\ vs\ (T \text{ y } T')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

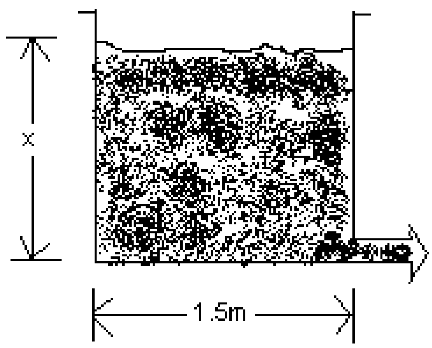
SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 26: (Ver hoja de instrucciones)

26. Un tanque cilíndrico de fondo plano con un diámetro de 1.5m, contiene un líquido de densidad $\rho = 1.5kg/L$ a una altura de 3m. Se desea saber la altura del líquido dentro del tanque, como una función del tiempo, después que se abre completamente la válvula de salida, la cual da un gasto de $0.6A\sqrt{2gx}m^3/s$, donde A es el área de la sección transversal del tubo de salida y es $78.5 \times 10^{-4}m^2$.



(a) Muestre que la ecuación diferencial que describe este proceso es (tenga en cuenta el manejo de las unidades):
$$\frac{dx}{dt} = -0.0026653\sqrt{2gx}$$

(b) Resuelva la ecuación diferencial empleando los métodos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, hasta que se vacie completamente el tanque, tomando un tamaño de paso h tal que se originen, al menos cien puntos. ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse completamente el tanque?

(c) Grafique la altura del líquido en el tanque como una función del tiempo.

(d) Halle la solución exacta, grafíquela y compare con los resultados numéricos.

(e) Para las tablas $t\ vs\ x$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas $t\ vs\ (x$ y $x')$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

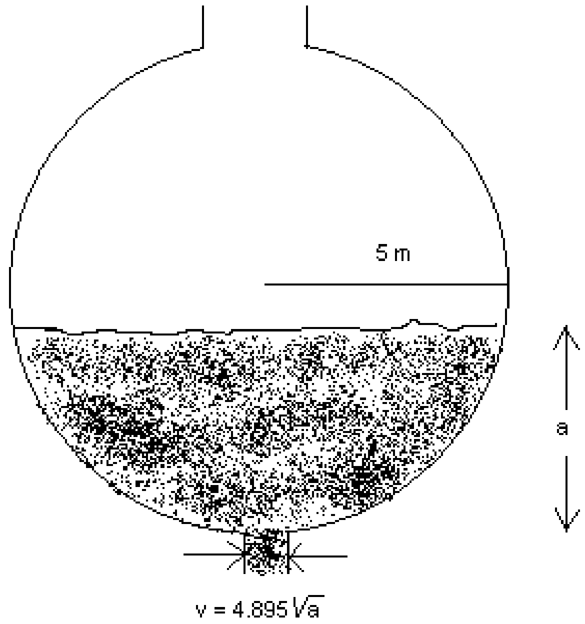
SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 27: (Ver hoja de instrucciones)

27. Considere el tanque esférico con radio $r = 5m$ mostrado en la figura. La velocidad de salida por el orificio del fondo es $v = 4.895\sqrt{a}m/s$ y el diámetro de dicho orificio es de 10cm.



(a) Muestre que la ecuación diferencial que describe este proceso es:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{0.122375\sqrt{a}}{(10a - a^2)}$$

(b) Resuelva la ecuación diferencial empleando los métodos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4 ,hasta que se vacie completamente el tanque, tomando un tamaño de paso h tal que se originen, al menos cien puntos. ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse completamente el tanque? ¿Cuanto tarda en pasar de $4m$ a $3m$, de profundidad? Suponga que inicialmente el tanque estaba lleno hasta las $3/4$ partes de su capacidad.

(c) Grafique la altura del líquido en el tanque como una función del tiempo.

(d) Halle la solución exacta, grafíquela y compare con los resultados numéricos.

(e) Para las tablas $t\ vs\ a$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas $t\ vs\ (a$ y $a')$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 28: (Ver hoja de instrucciones)

28. Se hacen reaccionar isotérmicamente 260g de acetato de etilo $(CH_3COOC_2H_5)$ con 175g de hidróxido de sodio $(NaOH)$ en solución acuosa (ajustando el volumen total a 5 litros) para dar acetato de sodio (CH_3COONa) y alcohol etílico (C_2H_5OH), de acuerdo con la siguiente ecuación estequiométrica

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH$$

(a) Si la constante de velocidad de reacción k está dada por:

$$k = 1.44 \times 10^{-2} \frac{L}{mol \ \text{min}}$$

demuestre que el cambio en la concentración de acetato de etilo, con el tiempo, está dado por:

$$\frac{dx}{dt} = 1.44 \times 10^{-2} \, (0.59 - x) \, (0.875 - x)$$

donde x denota el número de moles por litro de acetato de etilo que han reaccionado en el tiempo t.

(b) Determine la cantidad de acetato de sodio y alcohol etílico presentes para $0 \leq t \leq 30$ minutos después de iniciada la reacción, usando los métodos de Runge-Kutta 4 y Taylor de orden 2, tomando un tamaño de paso $h = 0.3$ minutos.

(c) Realice gráficos que muestren la cantidad de reactivos y productos, presentes en un tiempo t después de iniciarse la reacción.

(d) Halle la solución exacta, grafíquela y compare con los resultados numéricos.

(e) Para las tablas $t\ vs\ x$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas $t\ vs\ (x \text{ y } x')$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

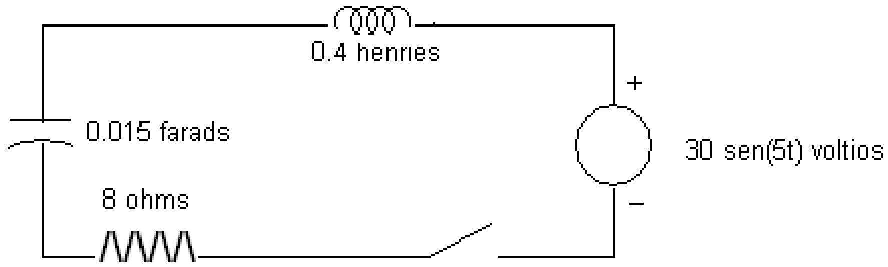
SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 29: (Ver hoja de instrucciones)

29. Se conecta un inductor de 0.4 henries en serie con una resistencia de 8 ohms, un capacitor de 0.015 farads y un generador de corriente alterna dada por la función $30 \sin 5t$ volts para $t \geq 0$.



(a) Establezca una ecuación diferencial para la carga instantánea en el capacitor.

$$\text{Respuesta:} \quad \begin{cases} \frac{d^2Q}{dt^2} + 20\frac{dQ}{dt} + 166.6666Q = 75 \sin 5t \\ Q = 0 \qquad I = \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{a} \qquad t = 0 \end{cases}$$

(b) Encuentre la carga para $0 \leq t \leq 10$ minutos, usando los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, con un tamaño de paso $h = 0.1$ minutos.

(c) Realice un gráfico de carga vs tiempo.

(d) Halle la solución exacta, grafíquela y compare con los resultados numéricos.

(e) Para las tablas t vs Q (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas t vs (Q y Q') (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

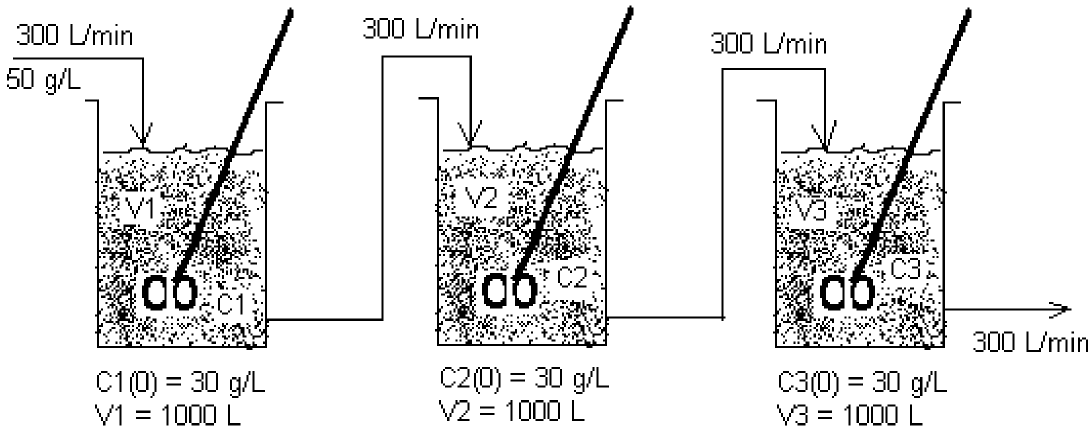
SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 30: (Ver hoja de instrucciones)

30. Se tienen tres tanques de 1000 litros de capacidad cada uno, perfectamente agitados (véase la figura). Los tres recipientes están completamente llenos con una solución cuya concentración es $30g/L$. A partir de cierto momento, se alimenta al primer tanque una solución que contiene $50g/L$ con un gasto de $300L/\min$ (hay un arreglo entre los tres recipientes tal que al haber un gasto al primero, la misma cantidad fluye de éste al segundo, del segundo al tercero y de éste afuera del sistema, con lo cual se mantiene constante el volumen en todos ellos).



(a) Muestre que el proceso está descrito por el sistema de ecauciones:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = 15 - 0.3C_1 \\ \frac{dC_2}{dt} = 0.3\,(C_1 - C_2) \\ \frac{dC_3}{dt} = 0.3\,(C_2 - C_3) \\ C_1(0) = C_2(0) = C_3(0) = 30 \end{cases}$$

(b) Calcule la concentración en cada tanque para $0 \leq t \leq 10$ minutos después de haber empezado a agregar solución al primero, usando los métodos vectoriales de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, con un tamaño de paso $h = 0.01$ minutos.

(c) Muestre gráficamente la concentración en cada tanque, como una función del tiempo.

(d) Para las tablas $t\ vs\ C_1$, $t\ vs\ C_2$, $t\ vs\ C_2$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas $t\ vs\ (C_1 \text{ y } C_1')$, $t\ vs\ (C_2 \text{ y } C_2')$, $t\ vs\ (C_3 \text{ y } C_3')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

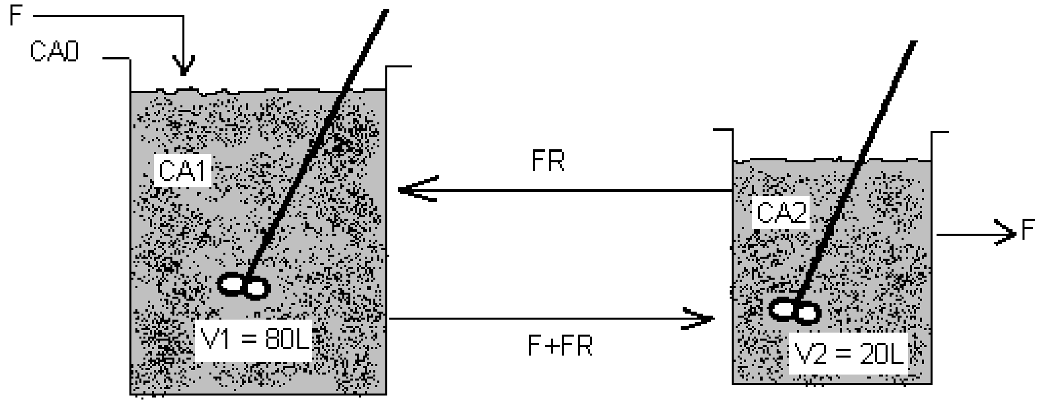
TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 31: (Ver hoja de instrucciones)

31. El mezclado imperfecto en un reactor continuo de tanque agitado se puede modelar como dos o más reactores con recirculación entre ellos, como se muestra en la figura. En este sistema se lleva a cabo una reacción isotérmica irreversible del tipo $A \longrightarrow B$ de orden 1.8 con respecto al reactante A.

    Datos:

$$\begin{aligned} F &= 25L/\min & \qquad C_{A0} &= 1mol/L \\ F_R &= 100L/\min & \qquad C_{A1}(0) &= 0.0mol/L \\ C_{A2}(0) &= 0.0mol/L & \qquad k &= 0.2\left(\frac{L}{mol}\right)^{0.8}\min^{-1} \end{aligned}$$



(a) Muestre que este proceso está descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dC_{A1}}{dt} = 1.25C_{A2} + \frac{25}{80} - \frac{125}{80}C_{A1} - 0.2C_{A1}^{1.8} \\ \frac{dC_{A2}}{dt} = \frac{125}{80}\left(C_{A1} - C_{A2}\right) - 0.2C_{A2}^{1.8} \\ C_{A1}(0) = C_{A2}(0) = 0 \end{cases}$$

(b) Con los datos que se dan, calcule la concentración del reactante A en los reactores (1) y (2) (C_{A1} y C_{A2}, respectivamente) durante el tiempo necesario para alcanzar el régimen permanente. Use los métodos vectoriales de Runge-Kutta 4 y Taylor de orden dos, tomando un tamaño de paso h, de tal manera que se obtengan al menos cien puntos.

(c) Muestre gráficamente, como cambia la concentración en cada tanque, como una función del tiempo, hasta alcanzar el estado estacionario.

(d) Para las tablas t vs C_{A1}, t vs C_{A2} (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas t vs $\left(C_{A1} \text{ y } C_{A1}^{\cdot}\right)$, t vs $\left(C_{A2} \text{ y } C_{A2}^{\cdot}\right)$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

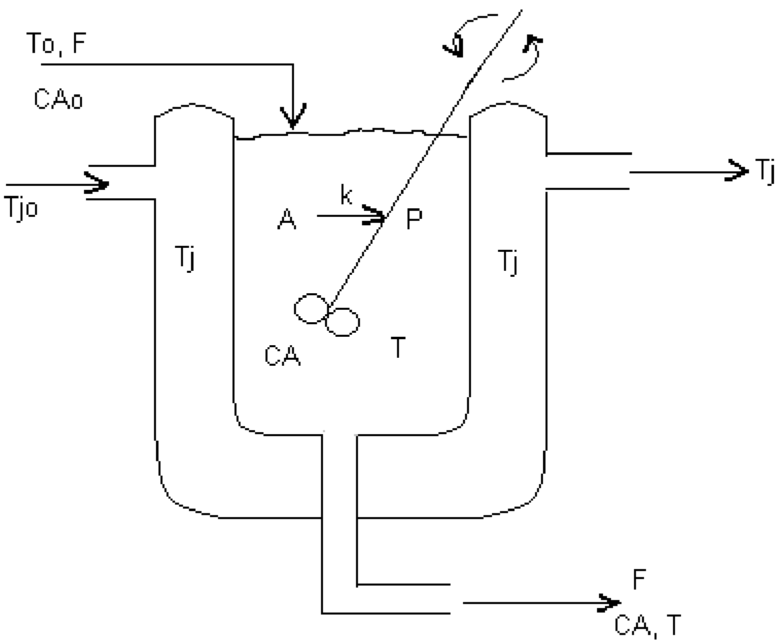
SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 32: (Ver hoja de instrucciones)

32. En un reactor de laboratorio continuo tipo tanque perfectamente agitado, se lleva a cabo una reacción química exotérmica cuya temperatura se controla por medio de un líquido que circula por una chaqueta que se mantiene a una temperatura uniforme T_j.



Aplique la siguiente información referida a la figura:

Condiciones iniciales: $C_A(0) = 5gmol/L$ y $T(0) = 300K$

F = Gasto de alimentación al reactor = 10 ml/s

V = Volumen del reactor = 2000 ml

C_{A0} = Concentración del reactante A en el flujo de alimentación = 5 gmol/L

T_0 =Temperatura del flujo de alimentación = 300K

ΔH = Calor de reacción = -10000 cal/gmol

U = Coeficiente global de transmisión de calor = $100 \frac{cal}{^\circ C \; s \; m^2}$

A =Área de transmisión de calor = 0.02 m^2

k = Constante de velocidad de reacción = $8 \times 10^{12} \exp(-22500/1,987T) s^{-1}$

T_j = Temperatura del líquido que circula por la chaqueta = 330 K

Cp = Calor específico de la masa reaccionante = 1 Kcal/kg$^\circ C$

ρ = Peso específico de la masa reaccionante = 1 kg/L

(a) Muestre que las ecuaciones diferenciales que describen este fenómeno son:

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{dt} = 0.005\,(5 - C_A) - 8 \times 10^{12} \exp(-22500/1,987T) C_A \\ \quad \frac{dT}{dt} = 0.005\,(300 - T) + 8 \times 10^{13} \exp(-22500/1,987T) C_A - 0.001\,(T - 330) \end{cases}$$

(b) Calcule la temperatura T y la concentración C_A de la corriente de salida, cuando el reactor trabaja a régimen transitorio y hasta alcanzar el régimen permanente para el caso de la reacción de primer orden. Use los métodos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, tomando un tamaño de paso h, de modo que se obtengan al menos ciento un puntos.

(c) Grafique T vs t y C_A vs t, hasta alcanzar el régimen permanente.

(d) Para las tablas t vs C_A, t vs T (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas t vs $\left(C_A \text{ y } C_A^{\prime}\right)$, t vs $(T \text{ y } T')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

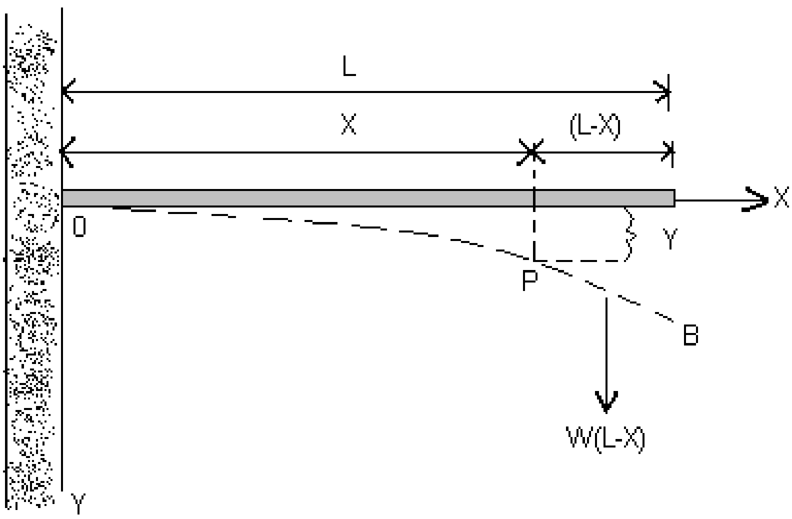
SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 33: (Ver hoja de instrucciones)

33. En Ingeniería Civil, se estudia que una viga uniforme con un extremo libre, como la que se muestra en la figura, puede sufrir un proceso de deflexión, originando la llamada "curva elástica". Considere que se tiene una viga de longitud $L = 5m$ y peso constante $w = 300kg$. Tome $EI = 150000$. (E = Módulo de elasticidad de Young, I = momento de inercia de la sección transversal de la viga).



(a) Muestre que la ecuación diferencial que modela el fenómeno es:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = w\,(L-x)^2\,/2$$

(b) Use los métodos de Runge-Kutta 4 y Taylor de orden dos vectorial, para encontrar la curva elástica de la viga y la deflexión del extremo libre, tomando un tamaño de paso $h = 5cm$. Tenga en cuenta que $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(c) Realice un gráfico en el que se muestre claramente la curva elástica de la viga $(y \text{ vs } x)$.

(d) Halle la solución exacta, grafíquela y compare con los resultados numéricos.

(e) Para las tablas $x\ vs\ y$ (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

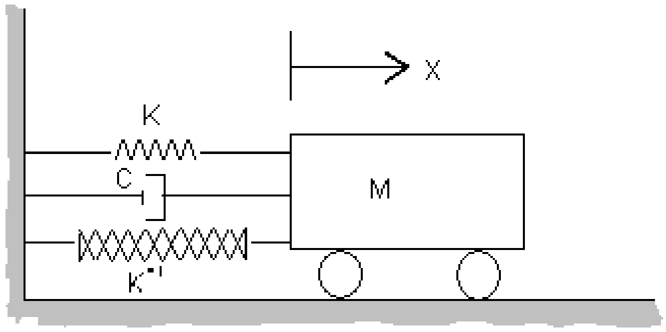
(f) Para las tablas $x\ vs$ (y y y') (para cada método numérico y la solución exacta), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLIN
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 34: (Ver hoja de instrucciones)

34. En la industria del transporte terrestre y aéreo surgen problemas de choque y vibración a partir de muy diferentes tipos de fuentes de excitación. La eliminación del choque y de la vibración es de importancia vital para aislar instrumentos y controles, y en la protección de los ocupantes de los vehículos. La solución usual a los problemas que involucran transmisión de vibraciones excesivas incluye el uso de soportes flexibles levemente amortiguados. Estos soportes suaves causan que la frecuencia natural de un sistema de suspensión quede por debajo de la frecuencia de disturbio. Esta solución es efectiva para aislar la vibración en estado estacionario; sin embargo, cuando estas suspensiones encuentran situaciones de choque, su suavidad a menudo lleva a deflexiones grandes y dañinas. Se ha señalado que estas características no deseables están ausentes en los sistemas de suspensión que utilizan resortes simétricamente no lineales que se rigidizan. Estos resortes son progresivamente más rígidos al sujetarse a deflexiones grandes a partir del "punto de operación". El dispositivo mostrado en la figura consiste de un objeto de masa m conectado a una pared por medio de un resorte lineal con coeficiente k, un amortiguador con coeficiente c, y un resorte no lineal que ejerce una fuerza de recuperación proporcional a una constante k' veces la tercera potencia del desplazamiento. Este resorte "cúbico" provee un comportamiento no lineal simétrico que satisface la necesidad

de aislar el choque y la vibración.



(a) Mueste que la ecución diferencial que describe el movimiento de este sistema es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx + k'x^3 = 0$$

(b) Debido a que la ecuación diferencial es no lineal, el desplazamiento de x en función del tiempo no puede encontrase con los métodos analíticos tradicionales. Por esta razón se usa una solución numérica a esta ecuación diferencial.

Si los parámetros físicos del sistema de suspensión son:

$k = 2.0\ N/cm$; $k' = 0.2\ N/cm^3$; $c = 0.15\ Ns/cm$; $m = 0.01\ kg$. y las condiciones iniciales son:

$x(0) = 10\ cm$ desplazamiento del objeto en la dirección positiva del eje x.

$x'(0) = 0\ cm/s$ velocidad inicial que se imprime al objeto.

Elabore y ejecute un programa que simule el movimiento de este sistema desde un tiempo cero hasta un segundo. Use para ello, los métodos vectoriales de Runge-Kutta 4 y Taylor de orden dos, tomando un tamaño de paso $h = 0.01$ segundos.

(c) Realice un gráfico que muestre el movimiento de este sistema (x vs t)

(d) Para las tablas $t\ vs\ x$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas $t\ vs$ (x y x') (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

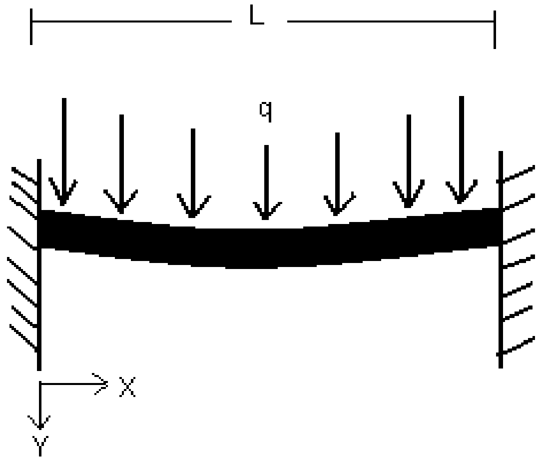
SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 35: (Ver hoja de instrucciones)

35. Un problema común en ingeniería civil es el cálculo de la deflexión de una viga rectangular sujeta a carga uniforme, cuando los extremos de la viga están fijos y, por tanto, no experimentan deflexión.



(a) Muestre que la ecuación diferencial que aproxima este fenómeno físico tiene la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{S}{EI}y + \frac{qx}{2EI}(x - L)$$

donde y es la deflexión de la viga a una distacia x, medida a partir del extremo izquierdo, L es la longitud, q es la intensidad de la carga uniforme, S el esfuerzo o tensión en los extremos, I es el momento de inercia que depende de la forma de la sección transversal de la viga y E el módulo de elasticidad.

(b) Dado que los extremos están fijos, se tiene que:

$$y\,(0) = y\,(L) = 0$$

Así que se está ante la presencia de un PVF. Halle la solución a esta ecuación diferencial, tanto por el método del disparo (con Runge-Kutta 4), como por diferencias finitas centradas de orden dos. Suponga que se tienen los siguientes datos: $L = 350$ cm, $q = 1$ kg/cm, $E = 2 \times 10^6$ kg/cm^2, $S = 400$ kg, $I = 2.5 \times 10^4$ cm^4. Encuentre la deflexión de la viga cada 3.5 cm.

(c) Realice un gráfico en el que se muestre la deflexión de la viga.

(d) Halle la solución exacta, grafíquela y compare con los resultados numéricos.

(e) Para las tablas x vs y (para cada método numérico y la solución exacta), tomando cinco puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(f) Para las tablas x vs (y y y') (para cada método numérico y la solución exacta), tomando cinco puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

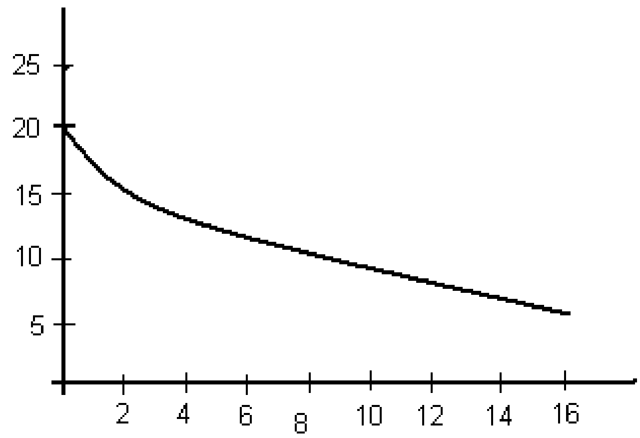
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 36: (Ver hoja de instrucciones)

36. Un muchacho que está en la esquina $A\,(0,0)$ de un embalse rectangular, tiene en la esquina adyacente $B\,(0,20)$ una barca atada al extremo de una cuerda de 20 m de longitud. El muchacho se desplaza hacia $C\,(30,0)$ caminando por el borde del embalse y manteniendo tensa la cuerda. El PVI que modela la posición $y(x)$ de la barca es

$$\begin{cases} y' = \frac{-y}{\sqrt{400-y^2}}, x > 0 \\ y(0) = 20 \end{cases}$$



TRACTRIZ

Calcular:

(a) Hacer la deducción analítica del PVI.

(b) La solución exacta del PVI (y_1).

(c) Para un punto $P(x, y)$, con $x > 0$, sobre la curva que describe la barca, calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria de la misma. Dar la fórmula para la posición del muchacho, en el eje x.

(d) Aproximaciones numéricas de la solución por medio de Euler (y_2) y Runge-Kutta 4 (y_3); tome $h = 0.1$, $0 \leq x \leq 10$.Graficar $x\ vs\ y_1$, $x\ vs\ y_2$, $x\ vs\ y_3$.

(e) Hállese la ubicación del muchacho y de la barca cuando ésta se encuentre a 12 metros de AC; utilizar la solución exacta, los resultados del método de Euler y los de Runge-Kutta 4; calcular los errores relativos.

(f) Para las tablas $x\ vs\ y_1$, $x\ vs\ y_2$, $x\ vs\ y_3$, donde $x = 1, 3, 5, 7, 9$ interpolar polinomios de Newton. Graficar éstos tres polinomios y también y_1. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(g) Para las tablas $x\ vs\ (y_1 \text{y } y_1')$, $x\ vs\ (y_2 \text{ y } y_2')$, $x\ vs\ (y_3 \text{ y } y_3')$, donde $x = 1, 3, 5, 7, 9$ interpolar polinomios de Hermite. Graficar éstos tres polinomios y también y_1. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(h) Reescribir el problema de tal forma que se identifique como un problema de persecución.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

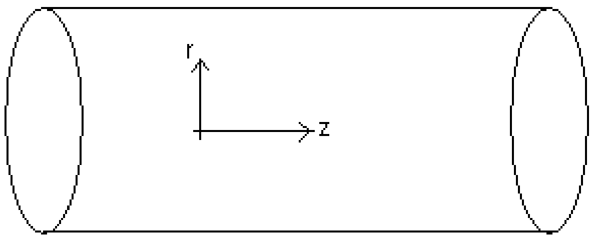
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 37: (Ver hoja de instrucciones)

37. El flujo de un fluido no newtoniano a través de un tubo circular de radio R, puede modelarse en cantidades adimensionales. como:

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2} = -\frac{\frac{1}{\eta}\frac{d\phi}{d\eta} + \left[1 + \lambda^2\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2\right]^{(1-n)/2}}{1 - \frac{(1-n)\lambda^2\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)}{\left[1+\lambda^2\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2\right]}}$$



donde: $\eta = r/R$ es la distancia adimensional.

$\phi = v_z/v^*$ es la velocidad adimensional.

$v^* = (-\Delta P)\, R^2/\,(L\mu)$

$\lambda = t_1\,(-\Delta P)\, R/\,(L\mu)$

. (a) Muestre que la ecuación diferencial dada si modela el proceso.

(b) Dadas las siguientes condiciones de frontera:

$$\phi\,(0.01) = 1/4 \qquad \phi\,(1) = 0$$

Se está ante la presencia de un PVF. Halle la solución a esta ecuación diferencial, por el método del disparo (con Runge-Kutta 4 y Taylor de ordes 2). Suponga que se tienen los siguientes datos: $\mu = 102\ Pa.s$, $t_1 = 4.36\ s$, $n = 0.375$, $R = 0.1\ m$, $(-\Delta P/L) = 20\ kPa/m$. Use un tamaño de paso $h = 0.01$..

(c) Vuelva a las variables dimensionales r y v_z, y construya un gráfico del perfil de velocidad.

(d) Para las tablas $r\ vs\ v_z$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(e) Para las tablas $r\ vs\ (v_z$ y $v_z')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLIN

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

EJERCICIO 38: (Ver hoja de instrucciones)

38. En el estudio de la cinética de la fermentación, la ley logística:

$$\frac{dy_1}{dt} = k_1 y_1 \left(1 - \frac{y_1}{k_2}\right)$$

ha sido usada frecuentemente para describir la dinámica del crecimiento celular (y_1 representa la concentración celular). En particular, se ha encontrado muy útil para modelar el crecimiento de *penicillium chryscogenum* (un microorganismo productor de penicilina). Además, la velocidad de producción de penicilina (y_2) ha sido cuantificada matemáticamente, por la ecuación:

$$\frac{dy_2}{dt} = k_3 y_1 - k_4 y_2$$

(a) Use los métodos de Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4, para encontrar la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, para $0 \leq t \leq 212$ horas, con un tamaño de paso $h = 2.12$ horas. Teniendo en cuenta que:

$$k_1 = 0.03120 \qquad k_2 = 47.70 \qquad k_3 = 3.374 \qquad k_4 = 0.01268$$

y que en $t = 0$, $y_1 = 5$ y $y_2 = 0$.

(b) Realice un gráfico en el que se muestre el crecimiento celular y la cantidad de penicilina presente, como una función del tiempo.

(c) Para las tablas t *vs* y_1, t *vs* y_2 (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Newton. Graficar polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.

(d) Para las tablas $t\ vs\ (y_1$ y $y_1')$, $t\ vs\ (y_2$ y $y_2')$ (para cada método numérico), tomando seis puntos igualmente espaciados, interpolar polinomios de Hermite. Graficar estos polinomios. Formule apreciaciones cualitativas, obtenidas del análisis de las gráficas.