Matemáticas Avanzadas CURSO 2009-10

Clase Práctica No. 9

ECUACIONES DIFERENCIALES

Métodos de solución

de ecuaciones de 1ro y 2do orden



ECUACIÓN DE CLAIRAUT (método)

Recordemos que la ecuación de Clairaut es de la forma

$$y = xy' + f(y') \tag{1}$$

El método de resolución es hacer y'=p y derivar respecto a x, teniendo en cuenta que p=p(x).

Nos queda entonces

$$\frac{dp}{dx}(x+f'(p))=0.$$

Si $0=rac{dp}{dx}$ entonces y'=C y por tanto teniendo en cuenta (1) se obtiene que

$$y = Cx + f(C), (2)$$

La familia (2) es un haz de rectas, todas ellas solución de (1).

Si 0 = x + f'(p), usando (1) se obtiene la solución singular en forma paramétrica:

$$x = -f'(p), \ \ y = -f'(p)p + f(p).$$

En general no es obligatorio eliminar p para obtener una ecuación de la forma G(x,y)=0.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación de Clairaut

$$y = xy' - 1/4(y')^2$$
.

Representar la solución general obtenida, así como la solución singular.

La segunda función es una parábola que es la envolvente de la familia integral de la ecuación.

Ejemplo 1 (obtención de la gráfica)

Los siguientes comandos producen la figura de la siguiente diapositiva, en la que aparecen algunas de las rectas solución y la solución singular del ejemplo 1.

Ejemplo 1 (gráfica)

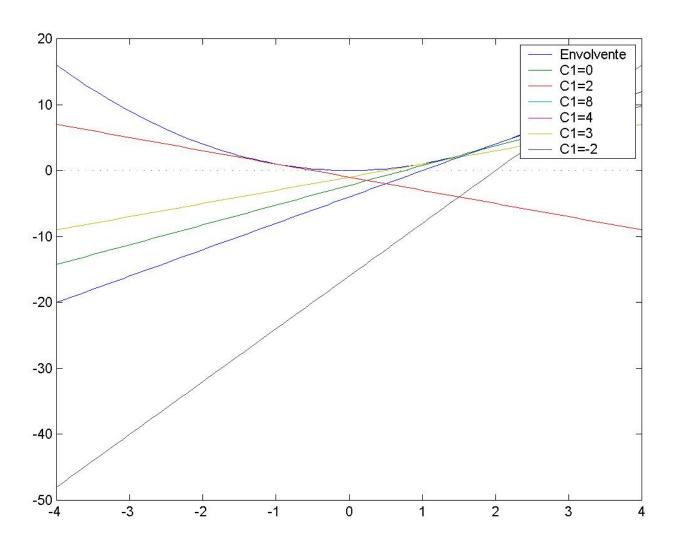


Figura : Algunas soluciones de la ecuación $y=xy^\prime-1/4(y^\prime)^2$

Ejercicios

Con la ayuda de MATLAB y tomando como referencia al ejemplo 1, resolver las siguientes ecuaciones de Clairaut utilizando el procedimiento anterior. Intentar el estudio gráfico trazando la solución singular y algunas rectas de la solución general.

$$a) y = xy' + \ln(y')$$

$$b)\; y = xy' + \frac{1}{y'}$$

$$c) y = xy' + \sin(y')$$

E.D. LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Las EEDD lineales de orden superior pueden ser tratadas con el comando DSOLVE aunque no siempre se obtiene solución, o la solución se presenta de una forma poco satisfactoria para el consumo.

Se presentan a continuación dos ejemplos y dos ejercicios de problemas relativos a EEDD lineales con y sin condiciones iniciales. El alumno deberá identificar completamente cada problema reconociendo linealidad, orden, coeficientes constantes o variables, homogénea o completa, etc, y decidir consecuentemente qué método artesanal le aplicaría para su resolución en el caso de no contar con recursos informáticos.

En todos los ejemplos las respuestas son exactas, con fórmulas cerradas. El procedimiento que se indica en cada ejemplo debe ser reproducido y ejecutado en la ventana de comandos del Matlab.

Ejemplos

Ejemplo 1) Resolver la E.D.

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

(Obsérvese que -2 es una raíz doble del polinomio característico)

Ejemplo 2) Resolver el P.C.I.

$$y'' + 10y' + 16y = 0$$
, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Notar que se ha obtenido $C_1=-1$ y $C_2=2$.

Ejercicios

Tomando los anteriores ejemplos como referencia, resolver los siguientes problemas.

Ejercicio 1) Resolver la E.D.

$$y'' + 100y' + 196y = 1.$$

Ejercicio 2) Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$y''' = \log(x)/x^2$$
, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$.

¿Corresponde el ejercicio 2 con una Euler?