

Apéndice E

La toolbox de PDEs de MATLAB

Contenidos del capítulo

E.1	Introducción	243
E.2	La interfaz gráfica de la PDE toolbox	244
E.2.1	Menús	244
E.2.2	Barra de herramientas	246
E.3	Definición de geometrías complicadas	247
E.3.1	Creando esquinas redondeadas	248
E.4	Método sugerido de modelado	249
E.5	Ejemplo de aplicación a la ecuación de Poisson	250
E.6	Ejemplos de problemas parabólicos: la ecuación del calor	250
E.7	Ejemplos de problemas de autovalores: modos de vibración	252
E.8	Los modos de aplicación	253
E.9	Mecánica de estructuras: tensión plana	255
E.9.1	Deformación de una placa de acero	257
E.10	Mecánica de estructuras: deformación plana	259
E.11	Electrostática	259
E.11.1	Potencial electrostático en un marco relleno de aire	260
E.12	Electromagnetismo de potencia en corriente alterna	260
E.12.1	Efecto piel en cables de corriente alterna	262
E.13	Transferencia de calor	263
E.13.1	Transferencia de calor en medios anisótropos	264

E.1 Introducción

Debido a las enormes aplicaciones prácticas del método de elementos finitos existen multitud de paquetes informáticos que simplifican su aplicación a distintos problemas de ingeniería. Por su sencillez, presentamos aquí la toolbox de ecuaciones en derivadas parciales (PDE toolbox) de MATLAB.

Esta toolbox cuenta con una interfaz gráfica de MATLAB `pdetool`, parte de la “PDE toolbox”, proporciona una herramienta gráfica de fácil manejo para la descripción de estas geometrías complicadas, generación de mallas, resolución de la ecuación discretizada y representación de resultados.

Además, muchas de las aplicaciones de interés en ingeniería (deformación de sólidos, problemas de electromagnetismo, transmisión de calor, ...) tienen formas concretas y al ingeniero tan sólo le interesa el comportamiento de un determinado material o geometría en su problema de estudio, sin querer tener que preocuparse de la formulación matemática inherente al mismo. Por este motivo, la `pdetool` de MATLAB incorpora varios modos de solución específicos para la solución de ciertos problemas típicos en ciencia e ingeniería, de modo que el trabajo del usuario tan sólo se limita a definir las geometrías y la introducción de los parámetros del material. También estudiaremos estas funcionalidades de la toolbox.

Finalmente indicamos que la toolbox tiene un *hermano mayor* que es el programa FEMLAB, que es un programa independiente con mayores posibilidades que ésta pero que esta basado en los mismos conceptos que ella.

En este apéndice se pretende desarrollar una introducción al manejo de esta toolbox. Este material se basa en los capítulos sobre la toolbox que se encuentran en el libro: “Herramientas informáticas de las matemáticas en ingeniería”, del que también son autores: Alfonso Bueno Orovio Gaspar D. Montesinos.

E.2 La interfaz gráfica de la PDE toolbox

La “PDE toolbox” de MATLAB incluye una interfaz gráfica de usuario (GUI) completa, que cubre todos los aspectos del proceso de solución de una EDP. La interfaz se inicializa escribiendo

```
pdetool
```

en la línea de comandos de MATLAB, siempre y cuando la toolbox mencionada se encuentre instalada en tu sistema. La Fig. E.1 muestra el aspecto que presenta la `pdetool` GUI nada más ser inicializada en la versión 6 de MATLAB bajo Windows XP.

E.2.1 Menús

Existen un total de 11 menús desplegables en la interfaz gráfica. Brevemente, la funcionalidad de cada uno de ellos es la siguiente:

- Menú **File**. Como es habitual, desde este menú pueden abrirse y salvarse ficheros `.m` que contienen los modelos en ecuaciones en derivadas parciales en los que se esté trabajando. También pueden imprimirse las gráficas activas en ese momento y salir de la interfaz.
- Menú **Edit**. Capacidades de edición habituales: copiar, cortar, borrar y pegar objetos, así como opciones de seleccionar todo.

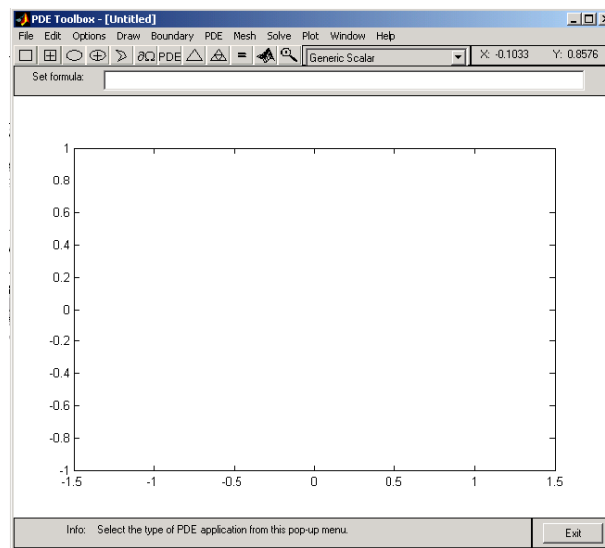


Figura E.1: *Interfaz gráfica pde tool de la toolbox de EDPs de MATLAB*

- Menú **Options**. Contiene opciones como cambiar el rango y espaciado de los ejes, obligar a que en la fase de dibujo las formas se anclen a los puntos de la rejilla, zoom, etc.
- Menú **Draw**. Desde este menú se pueden seleccionar los objetos sólidos básicos como círculos o polígonos que se emplearán en la definición de la geometría, y a continuación dibujarlos en el área de trabajo mediante el uso del ratón. Se recomienda el uso de la barra de herramientas para este fin.
- Menú **Boundary**. Desde este menú se accede al cuadro de diálogo donde se definen las condiciones de frontera. Adicionalmente se pueden poner etiquetas a los bordes y a los subdominios, borrar bordes entre subdominios y exportar la geometría descompuesta y las condiciones de fronteras al espacio de trabajo de MATLAB.
- Menú **PDE**. Este menú proporciona un cuadro de diálogo para especificar la EDP, y opciones para etiquetar subdominios y exportar los coeficientes de la ecuación al espacio de trabajo.
- Menú **Mesh**. Desde este menú se crea y se modifica la malla triangular. Puede inicializarse la malla, refinarla, reorganizarla, deshacer cambios previos en la malla, etiquetar los nodos y los triángulos, visualizar la calidad de la malla y exportar la misma al espacio de trabajo.
- Menú **Solve**. Para resolver la EDP. También abre un cuadro de diálogo donde pueden ajustarse los parámetros involucrados en la resolución, y exportar la solución al espacio de trabajo.
- Menú **Plot**. Desde este menú se puede dibujar correctamente la solución a la EDP. Un cuadro de diálogo permite seleccionar que propiedad va a visualizarse,

en qué estilo y otros tipos de parámetros. Si se ha generado una animación en tiempo de la solución, también puede exportarse al espacio de trabajo.

- Menú **Window**. Básicamente para seleccionar cuál de las ventanas de figuras de MATLAB es la activa entre las abiertas en ese momento.
- Menú **Help**. Breve ayuda sobre ciertos comandos y funcionalidades.

E.2.2 Barra de herramientas

La barra de herramientas colocada debajo del menú principal (Fig. E.2) en la parte superior de la interfaz gráfica contiene botones con iconos que proporcionan un acceso fácil y rápido a algunas de las funcionalidades más importantes de la `pdetool`.










Figura E.2: Barra de herramientas de la `pde tool` de MATLAB

Los cinco botones más a la izquierda son los botones del modo de dibujo, representando cada uno, de izquierda a derecha:

	Dibuja un rectángulo/cuadrado comenzando en una esquina.
	Dibuja un rectángulo/cuadrado comenzando en el centro.
	Dibuja una elipse/círculo comenzando en el perímetro.
	Dibuja una elipse/círculo comenzando en el centro.
	Dibuja un polígono. Pincha y arrastra para crear los lados del polígono. El polígono puede cerrarse haciendo click con el botón derecho del ratón o pinchando sobre el vértice inicial.

Como en gran número de programas informáticos, sólo puede haber uno de estos botones de dibujo activado en cada momento. El hacer doble-click sobre uno de ellos fija esa herramienta como activa, pudiendo seguir dibujando objetos del mismo tipo hasta que vuelva a pulsarse el botón. Usando el botón derecho del ratón, o bien Control+click, se restringen las herramientas a dibujar cuadrados o círculos en vez de rectángulos o elipses.

El segundo grupo de botones contiene las siguientes herramientas de análisis:

	Entra en el modo para especificar condiciones de frontera.
	Abre el cuadro de diálogo para especificar la EDP a resolver.
	Inicializa la malla triangular.
	Refina la malla triangular.
	Resuelve la EDP.
	Abre el cuadro de diálogo para representar los resultados.
	Zoom on/off.

E.3 Definición de geometrías complicadas

Las geometrías complicadas pueden generarse a partir de objetos sólidos básicos (rectángulos/cuadrados, elipses/círculos y polígonos) que se solapen, parcial o totalmente. La interfaz gráfica asigna automáticamente un nombre a cada objeto sólido que se cree: R1, R2, ... para los rectángulos; SQ1, SQ2, ... para cuadrados; E1, E2, ... para elipses; C1, C2, ... en el caso de los círculos; y P1, P2, ... para nombrar los polígonos. Obviamente, estos nombres pueden ser modificados por el usuario haciendo doble-click sobre los mismos, lo que abre el cuadro de diálogo de las propiedades del objeto (Fig. E.3). Este cuadro de diálogo también nos posibilita el modificar otras características de la forma básica, como la posición de su centro, dimensiones, etc.

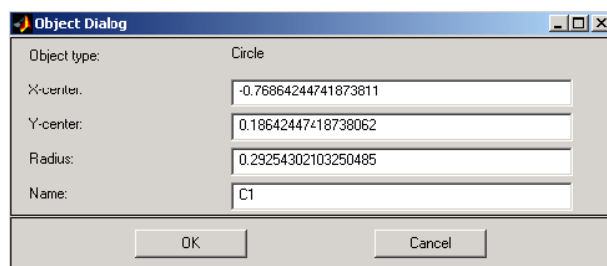


Figura E.3: Cuadro de diálogo con las propiedades de un círculo

Una vez que los objetos básicos han sido dibujados, la geometría final se crea mediante la introducción, en la línea situada debajo de la barra de herramientas, de una fórmula que emplee operaciones del álgebra de conjuntos, +, * y -. De todos ellos, el operador de mayor precedencia es el operador diferencia, -, mientras que los operadores unión e intersección, + y *, poseen igual prioridad. Sin embargo, este orden de precedencia puede controlarse mediante el uso de paréntesis. El modelo geométrico final, Ω , es el conjunto de todos los puntos para los cuales la fórmula introducida puede evaluarse como verdadera. El proceso general puede entenderse más fácilmente a partir del siguiente ejemplo, la creación de una placa con esquinas redondeadas.

E.3.1 Creando esquinas redondeadas

Inicia la interfaz gráfica y activa la propiedad de la rejilla “snap-to-grid” localizada dentro del menú Options. Además, cambia el espaciado a $-1.5:0.1:1.5$ para el eje- x y $-1:0.1:1$ para el eje- y .

Selecciona el icono para crear rectángulos y usando el ratón dibuja uno de anchura 2 y altura 1, comenzando en el punto $(-1,0.5)$. Para crear las esquinas redondeadas añade círculos, uno en cada esquina. Los círculos deben tener radio 0.2 y centros a una distancia de 0.2 unidades de las fronteras izquierda/derecha y superior/inferior del rectángulo $((-0.8,-0.3), (-0.8,0.3), (0.8,-0.3)$ y $(0.8,0.3)$). Para dibujar círculos en vez de elipses, recuerda usar el botón derecho del ratón o mantener la tecla Ctrl pulsada mientras realizas el dibujo. Para finalizar, dibuja en cada una de las esquinas un pequeño cuadrado de lado 0.2. Los objetos dibujados deberían presentar el aspecto mostrado en la parte izquierda de la Fig. E.4.

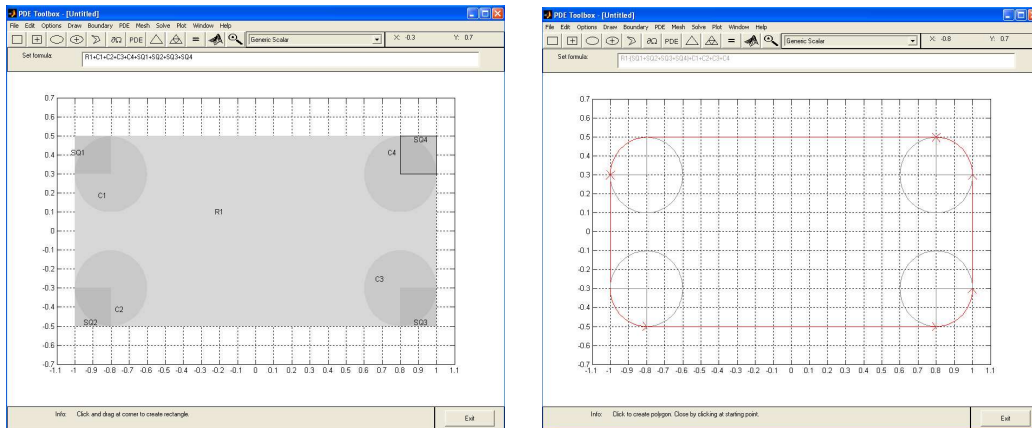



Figura E.4: (Izquierda) Objetos básicos a partir de los cuales será definida la geometría definitiva. (Derecha) Modelo geométrico final, Ω .







Ahora debemos editar la fórmula que define la geometría. Para conseguir las esquinas redondeadas, restemos los cuadrados pequeños del rectángulo y sumemos a continuación los círculos. En forma de expresión de conjuntos como:

$$R1 - (SQ1 + SQ2 + SQ3 + SQ4) + C1 + C2 + C3 + C4$$

Presionando el botón  podemos entrar en el modo Boundary y ver las fronteras de la geometría final (Fig. E.4, derecha). Puede observarse que aún existen dentro de la placa algunas de las fronteras provenientes de los subdominios originales. Si se supone que la placa es homogénea, entonces podemos borrarlos. Para ello, selecciona la opción “Remove All Subdomain Borders” del menú Boundary. Ahora el modelo de la placa está completo.

E.4 Método sugerido de modelado

El flujo básico de acciones al emplear la interfaz gráfica de la toolbox de ecuaciones en derivadas parciales es el indicado de izquierda a derecha por los menús y los botones de la barra de herramientas, trabajando en este sentido a lo largo del proceso de modelado, definición y resolución del problema. La siguiente secuencia de acciones cubre todos los pasos de una sesión normal empleando la `pdetool`:

1. Usa la `pdetool` como herramienta de dibujo para realizar el dibujo de la geometría 2-D en la que se quiere resolver la EDP, haciendo uso de las objetos básicos y de la característica de “fijar a rejilla”. Combina los objetos sólidos mediante las fórmulas de álgebra de conjuntos para crear la geometría definitiva.
2. Salva la geometría a un fichero de modelo (un fichero `.m`), de manera que puedas seguir empleándola en futuras sesiones de trabajo. Si salvas el fichero más adelante a lo largo del proceso de resolución, el fichero del modelo también incluirá ciertos comandos para recrear las condiciones de frontera, los coeficientes de la EDP y la malla.
3. Pasa a especificar las condiciones de frontera presionando el botón . Si las fronteras no son las correctas, puedes volver a editar la geometría volviendo al modo de dibujo (Draw mode). Si durante la definición de la geometría han quedado bordes de subdominios no deseados puedes borrarlos mediante las opciones del menú Boundary (“Remove Subdomain Border” o “Remove All Subdomain Borders”). A continuación puedes fijar las condiciones de cada una de las fronteras haciendo doble-click sobre cada una de ellas.
4. Usa el botón  para especificar la EDP a resolver. En el caso en el que los coeficientes de la EDP dependan del material, estos son introducidos entrando en el modo PDE y haciendo doble-click en cada uno de los subdominios.
5. Inicializa la malla triangular mediante el botón . Normalmente, los parámetros por defecto del algoritmo de generación de la malla producen buenos resultados, aunque en caso necesario pueden modificarse desde la opción “Parameters” del menú Mesh.
6. Si es necesario, refina la malla mediante el botón . En cada refinamiento, el número de triángulos aumenta en un factor cuatro. Ten presente que cuando más fina sea la malla mayor será el tiempo requerido para calcular la solución. Otra opción es reordenar la triangulación de la malla para mejorar su calidad mediante la opción “Jiggle Mesh” del menú Mesh.
7. Resuelve la EDP presionando el botón .
8. Visualiza las propiedades de la solución en las que estés interesado mediante el botón . También puedes exportar la solución y/o la malla al espacio de trabajo principal de MATLAB para un análisis en mayor detalle.







E.5 Ejemplo de aplicación a la ecuación de Poisson

Como ejemplo básico de un problema elíptico resolvamos la *ecuación de Poisson* en un disco unitario con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas. La formulación del problema es la siguiente:

$$-\Delta u = 1 \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \delta\Omega$$

donde Ω es el disco unitario y $\delta\Omega$ su frontera.

Tanto para éste como para el resto de ejemplos que desarrollaremos aquí seleccionaremos el modo **Generic Scalar** de la lista desplegable de modos disponible que se encuentra localizada a la derecha de la barra de herramientas. A continuación se listan los pasos a realizar con la `pdetool` para resolver el problema descrito.

1. Dibuja un círculo de radio unidad centrado en el origen usando las herramientas de dibujo. Si dibujas una elipse en vez de un círculo, o el mismo no está perfectamente centrado, haz doble-click en el mismo y cambia sus propiedades en el cuadro de diálogo.
2. Imposición las condiciones de frontera. Para ello primero pulsa el botón  y a continuación haz doble-click sobre las fronteras de la región. Selecciona para todas ellas condiciones de frontera Dirichlet iguales a cero (aunque éstas son las condiciones de frontera por defecto).
3. Define la EDP presionando el botón . Esto abre un cuadro de diálogo donde pueden introducirse los coeficientes de la ecuación, c , a y f . En este caso tan sencillo todos son constantes: $c = 1$, $f = 1$ y $a = 0$. En el caso de que dependan de la posición, también pueden introducirse con la notación habitual de MATLAB en forma de productos de vectores (por ejemplo, $c = x.^2 + y.^2$).
4. Inicializa la malla haciendo uso del botón . Refínala con .
5. Resuelve la ecuación presionando . Emplea también  si quieres cambiar las propiedades del gráfico que la `pdetool` devuelve por defecto, como por ejemplo el mapa de colores.

E.6 Ejemplos de problemas parabólicos: la ecuación del calor

Un problema parabólico típico es la *ecuación del calor*, que describe la difusión de calor en un cuerpo:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

Como ejemplo estudiemos el comportamiento de calentar un bloque de metal que posee una cavidad rectangular en el medio. El lado izquierdo del bloque se calienta a 100°C . En la parte derecha del bloque, el calor fluye al aire circundante en una tasa constante.

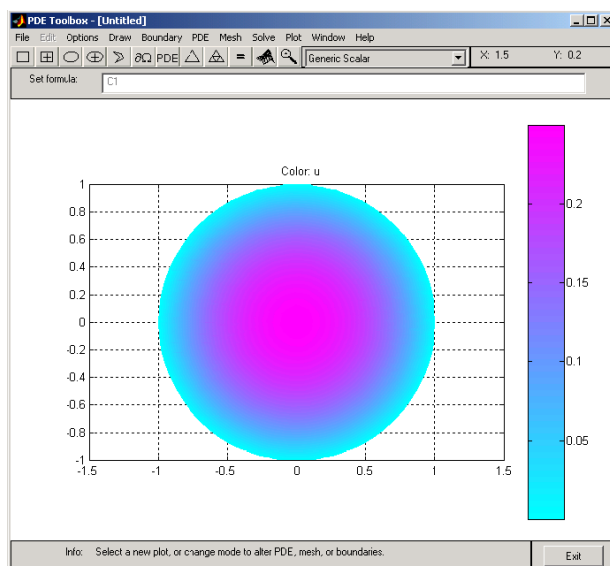


Figura E.5: Solución a la ecuación de Poisson en el círculo unidad.

Todas las otras fronteras del bloque se hayan aisladas térmicamente. Todo esto nos conduce al siguiente conjunto de condiciones de contorno:

- $u = 100$ en el lado izquierdo (condición Dirichlet)
- $\frac{\partial u}{\partial n} = -10$ en el lado derecho (condición Neumann)
- $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en todas las restantes fronteras (condición Neumann)

Además, para la ecuación del calor necesitamos una condición inicial para t_0 . Para este caso supondremos que la temperatura del bloque es de 0°C en el momento en el que empezamos a aplicar el calor. Finalmente, para completar la formulación del problema, especificaremos que el tiempo inicial de 0 y que queremos estudiar la distribución de calor durante los cinco primeros segundos.

Resolvamos el problema utilizando la `pdetool` de MATLAB. Los pasos a dar para resolver el problema son los siguientes:

1. En primer lugar, asegúrate de que se encuentra seleccionado el modo **Generic Scalar** en la lista desplegable que se encuentra a la derecha de la barra de herramientas.
2. Dibuja un rectángulo (R1) con las esquinas opuestas localizadas en $(-0.5, 0.8)$ y $(0.5, -0.8)$. Para crear la cavidad, dibuja otro rectángulo (R2) con esquinas opuestas situadas en $(-0.05, 0.4)$ y $(0.05, -0.4)$. Realiza la diferencia de ambas geometrías, introduciendo en la línea de debajo de la barra de herramientas la fórmula $R1 - R2$.

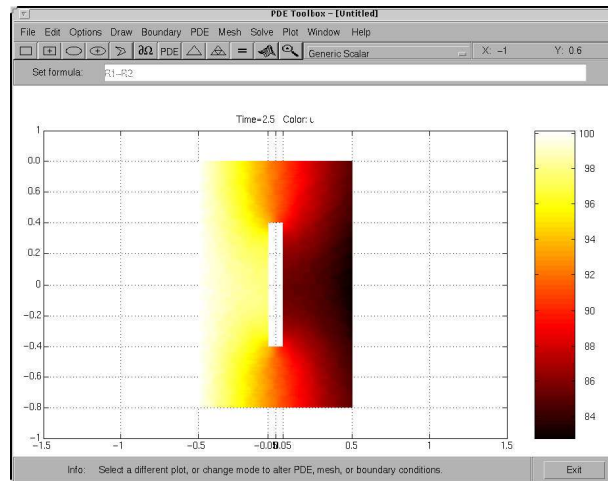








Figura E.6: Solución a la ecuación del calor en la geometría estudiada.

3. Impón las condiciones de frontera. Para ello primero pulsa el botón  y a continuación haz doble-click sobre las fronteras de la región. Para la frontera izquierda introduce la condición Dirichlet $u = 100$, para la derecha la condición Neumann $\partial u / \partial n = -10$, y para el resto condiciones Neumann homogéneas $\partial u / \partial n = 0$.
4. Introduce los coeficientes que definen la EDP presionando el botón . Para este caso, $d = 1$, $c = 1$, $a = 0$ y $f = 0$. Al ser un problema con evolución temporal, también debemos introducir la condición inicial $u_0 = 0$ y el rango de tiempo en el que queremos resolver el problema $[0:0.5:5]$. Estos parámetros son introducidos dentro del menú Solve seleccionando la opción “Parameters”.
5. Inicializa la malla haciendo uso del botón . Refínala con .
6. Resuelve la ecuación presionando . Por defecto, la `pdetool` muestra la distribución de calor para el instante final de la simulación. Presionando  puedes cambiar las propiedades del gráfico, por ejemplo, seleccionar un `colormap` más apropiado, como el `hot`. También es interesante poder ver cómo se mueve el calor a lo largo de la simulación. Para ello, activa la casilla “Animation” dentro del cuadro de diálogo de las propiedades de visualización. Por defecto, la animación se ejecuta cinco veces, aunque este número de veces también puede modificarse.







E.7 Ejemplos de problemas de autovalores: modos de vibración

El encontrar los autovalores y las correspondientes autofunciones de una membrana con forma de L es un problema de interés a todos los usuarios de MATLAB, dado que el logo del producto es precisamente la primera de estas autofunciones. Formalmente, lo que

intentamos es calcular la solución al siguiente problema de autovalores

$$-\Delta u = \lambda u$$

en una geometría con forma de membrana en L, con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas ($u = 0$ en todas las fronteras).

1. Asegúrate de que se encuentra seleccionado el modo **Generic Scalar** en la lista de los posibles modos de solución.
2. Dibuja la membrana en forma de L como un polígono con esquinas en $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.
3. Impón las condiciones de frontera. Pulsa el botón  e introduce la condición Dirichlet homogénea, $u = 0$, para todas las fronteras de la membrana (condición por defecto).
4. Introduce los coeficientes que definen la EDP presionando el botón . Para este caso, $d = 1$, $c = 1$ y $a = 0$. También debemos introducir el rango de autovalores en el que estamos interesados. Para ello, selecciona dentro del menú Solve seleccionando la opción “Parameters”. En el cuadro de diálogo emergente introduce $[0 \ 100]$.
5. Inicializa la malla haciendo uso del botón . Refínala con .
6. Resuelve la ecuación presionando . Presionando  puedes cambiar las propiedades de visualización, y seleccionar de un menú desplegable las distintos autofunciones que han sido calculadas como solución al problema.

E.8 Los modos de aplicación

La “PDE Toolbox” de MATLAB puede aplicarse a una gran cantidad de problemas habituales en ciencia e ingeniería. Ocho modos diferentes de aplicación se encuentran implementados para facilitar el uso de la `pde-tool`:

- Mecánica de estructuras: tensión plana
- Mecánica de estructuras: deformación plana
- Electroestática
- Magnetoestática
- Electromagnetismo de potencia en corriente alterna
- Medios conductores de corriente continua
- Transferencia de calor

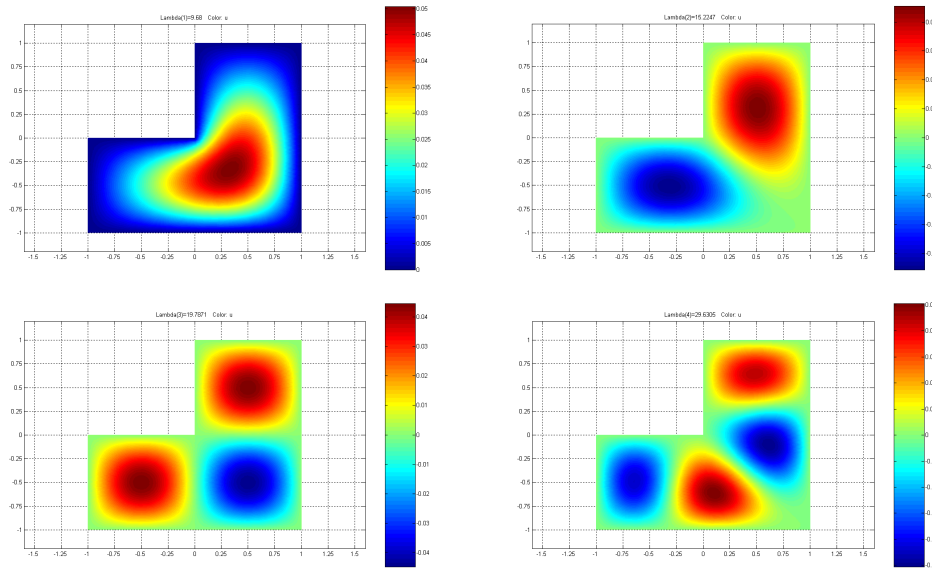


Figura E.7: Cuatro primeras autofunciones al problema de autovalores en la membrana con forma de L, con $\lambda_1 = 9.68$, $\lambda_2 = 15.22$, $\lambda_3 = 19.79$ y $\lambda_4 = 29.63$.

- Difusión

En estas notas estudiaremos sólo algunos de estos modos de aplicación a modo de ejemplos sin entrar en una descripción exhaustiva de todos ellos.

Algunas consideraciones deben ser tenidas en cuenta. En primer lugar, para la interfaz gráfica el sistema de EDPs puede ser como máximo de dimensión dos, aunque esta limitación podría solventarse resolviendo el problema usando funciones en el modo de línea de comandos (no vistas aquí). También téngase presente que el cambiar de un modo de aplicación a otro automáticamente reinicia todos los coeficientes de la EDP y las condiciones de frontera a los valores de defecto para ese modo de aplicación en concreto.

Cuando se emplea un modo de aplicación, los coeficientes de la EDP genérica son reemplazados por parámetros específicos de la aplicación, como el módulo de Young en problemas de mecánica de estructuras. Todos estos parámetros son introducidos seleccionando “Parameters” del modo menú o haciendo click en el botón **PDE**. También pueden ser introducidos haciendo doble-click sobre el subdominio, opción de especial interés en el caso de problemas que posean regiones con materiales con diferentes propiedades. El cuadro de diálogo para las condiciones de fronteras también aparece modificado, de manera que la descripción de las columnas reflejan el significado físico de los distintos coeficientes que intervienen en la condición de frontera. Finalmente, el cuadro de diálogo de visualización también permite elegir entre diferentes variables con significado físico relevantes a la aplicación de estudio.

E.9 Mecánica de estructuras: tensión plana

En mecánica de estructuras, las ecuaciones que relacionan la tensión y la deformación provienen del equilibrio de fuerzas en el medio material. El término *tensión plana* es una condición que prevalece en placas planas en el plano xy , cargadas únicamente en su propio plano y sin restricciones en la dirección- z .

Asumiendo isotropía y condiciones isotermales, las relaciones de tensión-deformación pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

donde σ_x y σ_y son las tensiones en las direcciones x e y y τ_{xy} es la tensión cortante. Las propiedades del material vienen expresadas como combinación de E , el módulo de Young, y ν , el coeficiente de Poisson.

Las deformaciones del material son descritas como los desplazamientos en las direcciones x e y , u y v respectivamente, de modo que las deformaciones se definen como

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

mientras que las ecuaciones de equilibrio de fuerzas son

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= K_x \\ -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= K_y \end{aligned}$$

donde K_x y K_y representan las fuerzas de volumen.

Combinando las relaciones anteriores podemos conseguir las ecuaciones en desplazamientos, escritas como

$$-\nabla \cdot (\underline{\mathbf{c}} \otimes \nabla \mathbf{u}) = \underline{\mathbf{k}}$$

donde $\underline{\mathbf{c}}$ es un tensor de rango cuatro, que puede ser reescrito como cuatro matrices 2×2 , c_{11} , c_{12} , c_{21} y c_{22}

$$\begin{aligned} c_{11} &= \begin{pmatrix} 2G + \mu & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} & c_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ G & 0 \end{pmatrix} \\ c_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & G \\ \mu & 0 \end{pmatrix} & c_{22} &= \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 2G + \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

viniedo G (módulo cortante), μ y $\underline{\mathbf{k}}$ (fuerzas de volumen) definidas por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \mu = 2G \frac{\nu}{1-\nu} \quad \underline{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix}$$

Éste es un sistema de EDPs de tipo elíptico (\mathbf{u} es bidimensional), pero para su resolución el usuario tan sólo tiene que seleccionar el modo **Structural Mechanics**,

Plane Stress y a continuación introducir los parámetros dependientes del material, E y ν , y las fuerzas de volumen, $\underline{\mathbf{k}}$ en el cuadro de diálogo para la especificación de la EDP.

En este modo de trabajo, también puede resolverse el problema de autovalores definido como

$$-\nabla \cdot (\underline{\mathbf{c}} \otimes \nabla \mathbf{u}) = \lambda \underline{\mathbf{d}} u$$

$$\underline{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

donde ρ , la densidad, también puede introducirse en el cuadro de diálogo de especificación de la EDP.

En el cuadro de diálogo de representación, los desplazamientos en los ejes x y y , u y v respectivamente, y el valor absoluto del vector de desplazamientos (u, v) pueden ser visualizados usando color, líneas de contorno, o gráficos con altura en el eje z , y el campo de desplazamientos (u, v) puede dibujarse bien usando flechas o una malla deformada. Adicionalmente pueden escogerse otras 15 expresiones escalares con significado físico para su visualización con color, líneas de contorno o altura:

- $u_x = \partial u / \partial x$
- $u_y = \partial u / \partial y$
- $v_x = \partial v / \partial x$
- $v_y = \partial v / \partial y$
- **exx**, la deformación en la dirección- x (ϵ_x)
- **eyy**, la deformación en la dirección- y (ϵ_y)
- **exy**, la deformación cortante (γ_{xy})
- **sxx**, la tensión en la dirección- x (σ_x)
- **syy**, la tensión en la dirección- y (σ_y)
- **sxy**, la tensión cortante (τ_{xy})
- **e1**, la primera deformación principal (ϵ_1)
- **e2**, la segunda deformación principal (ϵ_2)
- **s1**, la primera tensión principal (σ_1)
- **s2**, la segunda tensión principal (σ_2)
- **von Mises**, la tensión efectiva de von Mises ($\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$)

E.9.1 Deformación de una placa de acero






Consideremos una placa de acero cuadrada a la que se aplica un corte en forma de ángulo recto en su esquina inferior izquierda, mientras que la esquina superior derecha se recorta de forma redondeada. La placa se ancla a lo largo del corte en ángulo recto, mientras que se somete a tracción a lo largo del borde redondeado. Todos los otros bordes se encuentran libres.

La placa de acero tiene las siguientes propiedades: dimensión: $1\text{ m} \times 1\text{ m}$; espesor: 1 mm ; dimensión del corte en ángulo recto: $1/3 \times 1/3$ metros; corte redondeado: desde $(2/3, 1)$ hasta $(1, 2/3)$; módulo de Young: $196 \cdot 10^3$ (MN/m²); coeficiente de Poisson: 0.31.

La frontera redondeada se somete a una carga en el sentido de la normal exterior de 500 N/m . Dado que necesitamos especificar la tensión superficial dividiremos entre el espesor de 1 mm , resultando por tanto en una tensión superficial de 0.5 (MN/m²).

Nos gustaría calcular ciertas cantidades interesantes, como las tensiones y deformaciones en las direcciones x e y , el esfuerzo cortante, y la tensión efectiva de von Misses.

Resolución mediante la interfaz gráfica

1. El primer paso a dar es seleccionar el modo de aplicación. Para este problema, emplea **Structural Mechanics, Plane Stress**.
2. La geometría de la placa puede definirse rápidamente dibujando un polígono (P1) con esquinas en $[0 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1/3 \ 1/3 \ 0]$ y $[1 \ 1 \ 2/3 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 1/3]$ y un círculo (C1) con radio en $x = 2/3$, $y = 2/3$ y radio $x = 1/3$. La geometría final viene dada por la fórmula $P1+C1$. A continuación borra los bordes de los subdominios originales seleccionando en el menú Boundary la opción "Remove All Subdomain Borders".
3. Imposición de las condiciones de frontera. Para ello primero pulsa el botón  y a continuación haz doble-click sobre las fronteras de la región. Las fronteras del corte en ángulo recto están ancladas, lo que supone condiciones Dirichlet con desplazamiento cero. El corte redondeado está sujeto a una condición Neumann con $q=0$ y $g1=0.5 \cdot nx$, $g2=0.5 \cdot ny$. El resto de fronteras están libres, lo que implica una condición Neumann con $q=0$ y $g=0$.
4. Introduce los coeficientes que definen la EDP presionando el botón , lo que abre el cuadro de diálogo mostrado en la Fig. E.8. Los parámetros E y ν (ν) son respectivamente el módulo de Young y el coeficiente de Poisson. Al no existir fuerzas de volumen, Kx y Ky son cero. El valor de la densidad ρ (ρ) no es empleado para este problema. Al tratarse de un material homogéneo, el mismo valor de E y ν es aplicado a todo el dominio 2-D.
5. Inicializa la malla haciendo uso del botón . Refínala con  si lo deseas.
6. Resuelve la ecuación presionando .

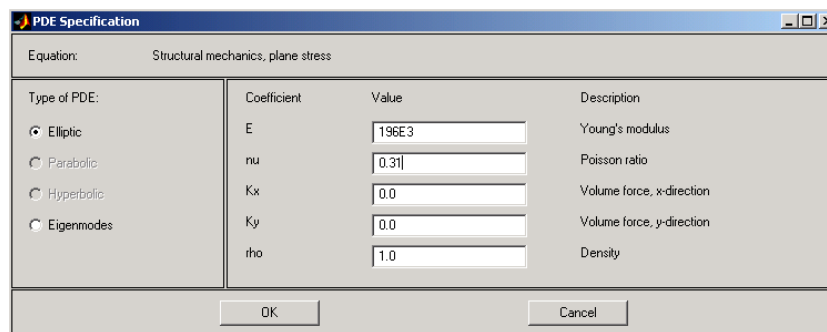



Figura E.8: Especificación de la EDP para el ejemplo de tensión plana.

7. Un número elevado de propiedades físicas pueden visualizarse presionando el botón , como los desplazamientos u y v , las tensiones y deformaciones en las direcciones x e y , la tensión cortante o la tensión efectiva de von Mises. Todas estas propiedades pueden seleccionarse en el cuadro de diálogo de las propiedades de visualización, pudiéndose representar simultáneamente una combinación de distintas propiedades escalares y vectoriales. Por ejemplo, la Fig. E.9 muestra simultáneamente la tensión efectiva de von Mises y los desplazamientos de la placa combinando visualización en color junto con una malla deformada.

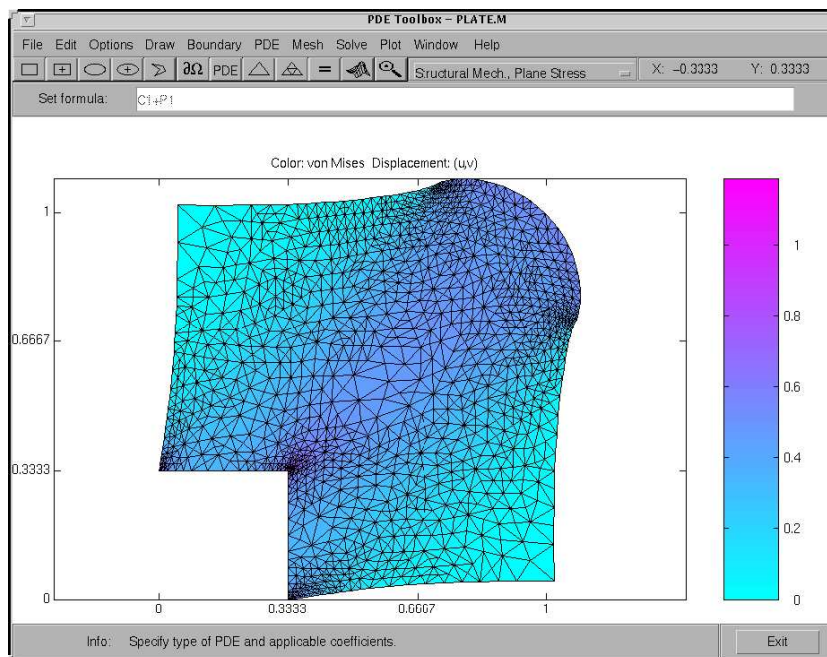


Figura E.9: Visualización de la tensión efectiva de von Mises en color y de los desplazamientos usando una malla deformada.

E.10 Mecánica de estructuras: deformación plana

Un estado de deformación donde no existen desplazamientos en la dirección z , y los desplazamientos en las direcciones x e y son funciones de x e y pero no de z , es llamado *deformación plana*. Este tipo de problemas pueden ser resueltos mediante la interfaz gráfica de la PDE Toolbox de MATLAB seleccionando el modo de aplicación **Structural Mechanics, Plane Strain**. La relación tensión-deformación es tan sólo ligeramente diferente para el caso de deformación plana, y se emplean los mismos parámetros del material que resolviendo los problemas de tensión plana. De hecho, las interfaces de la aplicación son idénticas para ambos modos de mecánica de estructuras. Únicamente hay dos diferencias entre las ecuaciones de deformación plana frente a las de tensión plana:

- El parámetro μ del tensor $\underline{\mathbf{c}}$ se define como

$$\mu = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu}$$

- La tensión efectiva de von Mises es calculada como

$$\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\nu^2 - \nu + 1) - \sigma_1 \sigma_2 (2\nu^2 - 2\nu - 1)}$$

Los problemas de deformación plana son menos comunes que los de tensión plana. Un ejemplo sería una sección a lo largo del eje- z de un túnel subterráneo: su deformación obedece esencialmente a condiciones de deformación plana.

E.11 Electroestática

Entre las aplicaciones que involucra la *electroestática* se incluyen aparatos de alto voltaje, dispositivos electrónicos y capacitores. El “estática” implica que el cambio en tiempo es lento, y que las longitudes de las ondas son muy grandes comparadas con el tamaño de los dominios de interés. En electrostática, el potencial escalar electrostático V se relaciona con el campo eléctrico \mathbf{E} mediante $\mathbf{E} = -\nabla V$ y, a través de las ecuaciones de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ y $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ llegamos a la ecuación de Poisson

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho$$

donde ϵ es el coeficiente dieléctrico y ρ la densidad espacial de carga. En realidad ϵ debería escribirse como $\epsilon_r \epsilon_0$, donde ϵ_0 es el coeficiente dieléctrico del vacío ($8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m) y ϵ_r es el coeficiente dieléctrico relativo del medio (1.00059 en el aire, 2.24 en un transformador de aceite, etc.).

Este tipo de problemas puede resolverse mediante la `pdeTool` a través de un cuadro de diálogo en donde se introducen los parámetros ϵ y ρ . Las condiciones de frontera en estas aplicaciones pueden ser Dirichlet o Neumann. En el caso de condiciones Dirichlet, el potencial electrostático V es especificado a lo largo de la frontera. Para condiciones Neumann, en cambio, lo que se especifica es la carga superficial $\mathbf{n} \cdot (\epsilon \nabla V)$ sobre la frontera. Para la visualización de la solución, las opciones de dibujo incluyen el potencial electroestático V , el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} .







E.11.1 Potencial electrostático en un marco relleno de aire

Consideremos el problema de determinar el potencial electrostático en un “marco” cuadrado lleno de aire, limitado por dos cuadrados centrados, el exterior de lado 0.5 y el interior de lado 0.2. En la frontera interior, el potencial electrostático es de 1000V, mientras que en la exterior es de 0V, y no existe ninguna carga en el dominio. Por lo tanto, esto conduce a la resolución de la ecuación de Laplace

$$\Delta V = 0$$

con condiciones Dirichlet $V = 1000$ en la frontera interior y $V = 0$ en la externa.

Resolución mediante la interfaz gráfica

1. En primer lugar selecciona **Electrostatics** como modo de aplicación.
2. Para definir la geometría, dibuja dos cuadrados, el primero (SQ1) de lado 0.5 y el segundo (SQ2) de lado 0.2, ambos con el mismo centro. La fórmula para la geometría será por tanto SQ1-SQ2.
3. Imposición de las condiciones de frontera. Para ello primero pulsa el botón  y a continuación haz doble-click sobre las fronteras. Fija condiciones Dirichlet $V = 1000$ en todas las fronteras internas y $V = 0$ en las exteriores.
4. Introduce los coeficientes que definen la EDP presionando el botón . Al no haber ninguna carga en el dominio, introduce 0 en el campo destinado a la densidad de carga (rho). El coeficiente dieléctrico puede dejarse en 1, dado que esto no afecta al resultado al tratarse de una constante.
5. Inicializa la malla haciendo uso del botón . Refínala con  si lo deseas. Resuelve la ecuación presionando .
6. Para ver las líneas equipotenciales presiona el botón  y selecciona `contour` dentro de las opciones de visualización. Para dibujar las líneas equipotenciales cada 100 voltios (Fig. E.10), introduce `0:100:1000` en el campo de texto de las opciones del `contour`.

E.12 Electromagnetismo de potencia en corriente alterna

Este tipo de problemas aparecen en ingeniería en el estudio de motores, transformadores y conductores transportando corriente alterna. Comencemos considerando un dieléctrico homogéneo, de coeficiente dieléctrico ϵ y permeabilidad magnética μ . Consideremos por ahora que no existen cargas en el mismo. De este modo, los campos deben satisfacer un conjunto especial de las ecuaciones generales de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}\end{aligned}$$

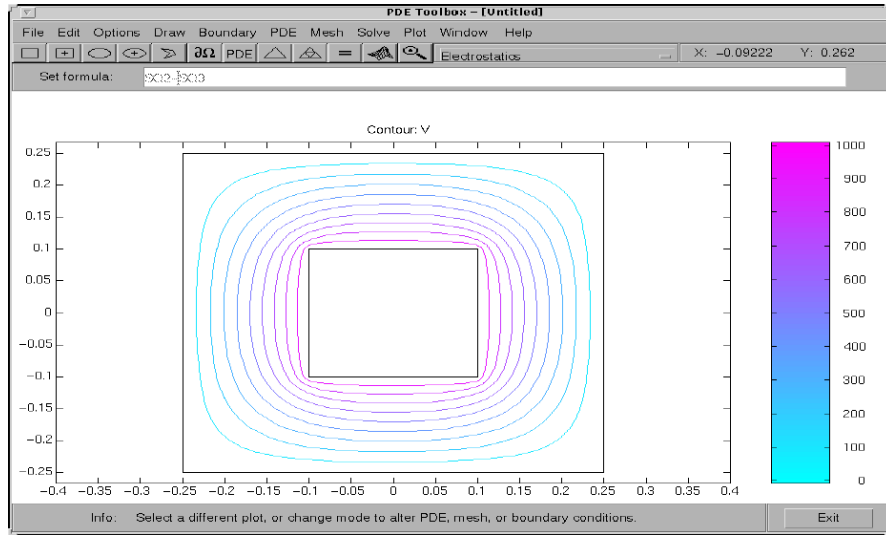


Figura E.10: Líneas equipotenciales en el marco relleno de aire.

En ausencia de corriente, podemos eliminar \mathbf{H} de la primera ecuación y \mathbf{E} de la segunda, dado que es conocido que en este caso que ambos campos satisfacen las ecuación de ondas con una velocidad de onda $\sqrt{\epsilon\mu}$

$$\nabla \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

En el caso en el que estuviésemos interesados en estudiar un dieléctrico homogéneo libre de carga, con coeficiente dieléctrico ϵ , permeabilidad magnética μ y conductividad σ , es más que sabido que la densidad de corriente viene dada por

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

lo que se traduce en que las ondas aparecen amortiguadas por una resistencia óhmica

$$\nabla \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

y del modo similar para el campo \mathbf{H} .

El caso de campos armónicos en tiempo se trata usando formulación en variable compleja, reemplazando \mathbf{E} por $\mathbf{E}_c e^{j\omega t}$. De este modo, en el caso plano usado en la “PDE Toolbox” de MATLAB en el modo **AC Power Electromagnetics** el campo eléctrico está definido por $\mathbf{E} = (0, 0, E_c e^{j\omega t})$ y $\mathbf{J} = (0, 0, J e^{j\omega t})$, de manera que el campo magnético viene expresado por

$$\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0) = -\frac{1}{j\mu\sigma} \nabla \times E_c$$

y la ecuación escalar para E_c se transforma en

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla E_c \right) + (j\omega\sigma - \omega^2\epsilon) E_c = 0$$

que es una ecuación compleja de Helmholtz describiendo la propagación de ondas electromagnéticas planas en dieléctricos imperfectos y buenos conductores ($\sigma \gg \omega\epsilon$). También puede definirse una *permitividad compleja* como $\epsilon_c = \epsilon - j\sigma/\omega$. Así pues, los coeficientes que deben introducirse para especificar la EDP son la frecuencia angular ω , la permeabilidad magnética μ , la conductividad σ y el coeficiente dieléctrico ϵ . Las condiciones de frontera asociadas a este modo de trabajo pueden ser tanto una condición de frontera Dirichlet que especifique el valor del campo eléctrico E_c en la frontera, como una condición Neumann que exprese la derivada normal de E_c .

Varias propiedades interesantes pueden calcularse a partir de la solución del problema (el campo eléctrico \mathbf{E}), como la densidad de corriente $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ y la densidad de flujo magnético





$$\mathbf{B} = \frac{j}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}$$

estando todos ellos disponibles para su visualización tanto en color como en forma de campos vectoriales en el cuadro de diálogo de representación de la `pdetool`. Adicionalmente, también puede seleccionarse el índice de calentamiento resistivo, $Q = E_c^2/\sigma$.

E.12.1 Efecto piel en cables de corriente alterna

El ejemplo presentado a continuación demuestra el llamado *efecto piel*, presente cuando una corriente alterna es transportada por un cable de sección circular. La conductividad del cobre es $57 \cdot 10^6$ y su permeabilidad es 1, es decir, $\mu = 4\pi 10^{-7}$. El coeficiente dieléctrico es prácticamente despreciable, $\epsilon = 8.8 \cdot 10^{-12}$. Debido a la inducción, veremos que la densidad de corriente en el interior del conductor es menor que la existente en la superficie exterior, que fijaremos a $J_S = 1$ (es decir, una condición Dirichlet para el campo eléctrico dado que $E = J/\sigma$).

Resolución mediante la interfaz gráfica

1. Antes que nada, selecciona **AC Power Electromagnetics** como modo de aplicación de la `pdetool`.
2. Dibuja un círculo de radio 0.1 para representar la sección circular de un conductor.
3. Imposición de las condiciones de frontera. Pulsa el botón  y selecciona todas las fronteras. A continuación introduce el valor `1/57E6` para definir la condición de frontera de tipo Dirichlet ($E = J/\sigma$).
4. Introduce los coeficientes que definen la EDP presionando el botón . Entra $\mu = 4\pi 10^{-7}$, $\sigma = 57 \cdot 10^6$, $\epsilon = 8.8 \cdot 10^{-12}$ y $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50$.
5. Inicializa la malla haciendo uso del botón . Refinala con  si lo deseas. También puedes mejorar la precisión de la solución cerca de la superficie, empleando una malla adaptativa. Para ello abre el cuadro de diálogo “Solve Parameters” y selecciona la opción “Adaptive mode”. Fija el número máximo de triángulos en `Inf`, el número máximo de refinamientos en 1 y como método de selección de triángulos que use el que escoge los peores triángulos de la malla. Resuelve la

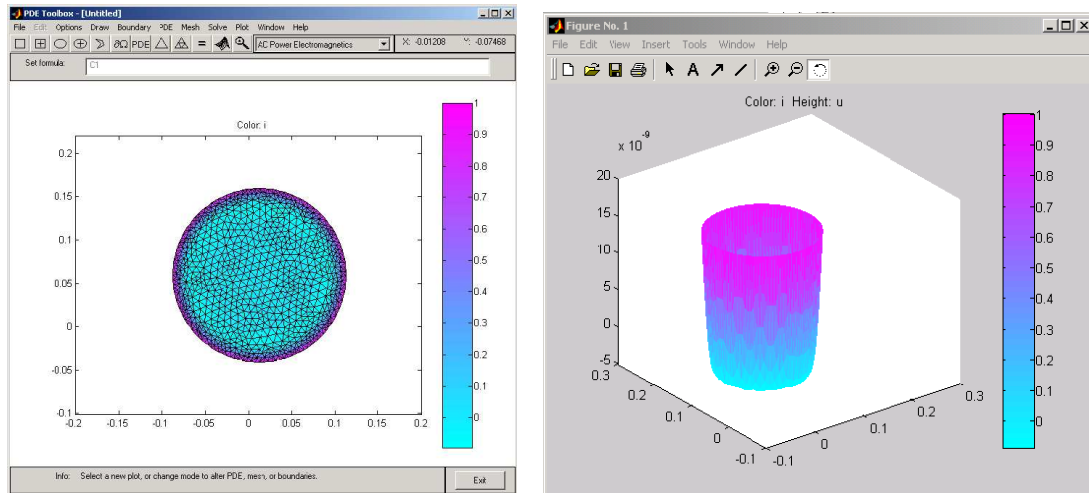



Figura E.11: (Izquierda) Malla adaptativa para la resolución del problema. (Derecha) “Efecto piel” en un conductor de sección circular transportando corriente alterna.

ecuación varias veces, presionando . En cada iteración, el resultor adaptativo refina la malla en aquellas zonas donde el error estimado es mayor, mostrándose el número de triángulos de la malla en la línea inferior de la ventana de la interfaz. Como ejemplo, la malla mostrada en la parte izquierda de la Fig. E.11 es el resultado de varios refinamientos sucesivos de la inicial, conteniendo un total de 1548 triángulos.

6. La solución a la ecuación de electromagnetismo de potencia en corriente alterna es compleja, de modo que los gráficos tan sólo muestran la parte real de la solución (Fig. E.11, derecha), aunque ésta puede ser exportada al espacio de trabajo y el usuario puede visualizar sus distintas propiedades mediante comandos en línea. Por ejemplo, `imag(u)` o `abs(u)` son dos ejemplos de entradas válidas.

E.13 Transferencia de calor

La ecuación del calor es una EDP de tipo parabólico:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q + h \cdot (T_{ext} - T)$$

que describe el proceso de transferencia de calor a través de los siguientes parámetros: la densidad ρ , la capacidad calorífica C , el coeficiente de conductividad térmica k , las fuentes de calor Q , el coeficiente de transferencia de calor por convección h y la temperatura externa T_{ext} . Para el estudio del estado estacionario de la solución también se encuentra disponible la versión elíptica de la ecuación del calor



$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = Q + h \cdot (T_{ext} - T)$$

Las condiciones de frontera pueden ser bien de tipo Dirichlet, donde se impone la temperatura de la frontera, o de tipo Neumann, donde se especifica el flujo de calor $\vec{n} \cdot (k\nabla T)$ a lo largo de la misma. También pueden imponerse condiciones de frontera Neumann generalizadas, $\vec{n} \cdot (k\nabla T) + qT = g$, donde q es el coeficiente de transferencia de calor. Las técnicas de representación para estos problemas incluye la visualización de la temperatura, su gradiente y del flujo de calor, $k\nabla T$.

E.13.1 Transferencia de calor en medios anisótropos

Como ejemplo, resolvamos un problema de transferencia de calor donde intervengan dos materiales con diferentes propiedades térmicas. El dominio del problema 2-D consiste en un cuadrado con un rombo en su interior (en realidad un cuadrado girado 45°). La región cuadrada consiste en un material con coeficiente de conductividad térmica k igual a 10 y una densidad de 2. La región en forma de rombo contiene una fuente de calor uniforme de valor 4, y está compuesta de un material con conductividad térmica de 2 y densidad 1. Ambas regiones tienen una capacidad calorífica de 0.1. La frontera exterior se mantiene a temperatura 0 y no existe transferencia de calor por convección.

Resolución mediante la interfaz gráfica

1. En primer lugar, selecciona **Heat Transfer** como modo de trabajo de la interfaz gráfica.
2. Dibuja el cuadrado exterior (SQ1) con su esquina inferior izquierda localizada en $(0,0)$ y la superior derecha en $(3,3)$. Para dibujar el rombo, usa un polígono (P1) con esquinas en $(1.5,0.5)$, $(2.5,1.5)$, $(1.5,2.5)$ y $(0.5,1.5)$. La geometría será simplemente SQ1+P1.
3. Imposición de las condiciones de frontera. Pulsa el botón  y haz doble-click sobre las fronteras exteriores, fijando en todas ellas la condición Dirichlet $T = 0$.
4. Introduce los coeficientes que definen la EDP presionando el botón  y haciendo doble-click en cada uno de los subdominios. Para la región cuadrada, introduce el valor 2 en su densidad ρ , una capacidad calorífica C de 0.1 y una conductividad térmica k de 10. Como en esta parte de la geometría no hay fuente de calor, introduce 0 en el campo de Q . Para la región en forma de rombo, introduce 1 en su densidad, 0.1 en la capacidad calorífica, 2 en su conductividad térmica y 4 en la fuente de calor. Dado que no existe transferencia de calor por convección, introduce $h = 0$ en el coeficiente convectivo.

Dado que es un problema con evolución temporal, también debe introducirse el valor inicial de la temperatura para $t = 0$. Para ello, selecciona la opción “Parameters” dentro del Menú Solve, y fija la temperatura inicial en 0. La dinámica de este problema es muy rápida (el estado estacionario se alcanza en aproximadamente 0.1 unidades de tiempo). Para capturar la parte interesante de la dinámica, introduce `logspace(-2,-1,10)` como vector de tiempos en los cuales resolver la ecuación del calor. Con esto conseguimos 10 números logarítmicamente espaciados entre 0.01 y 0.1.

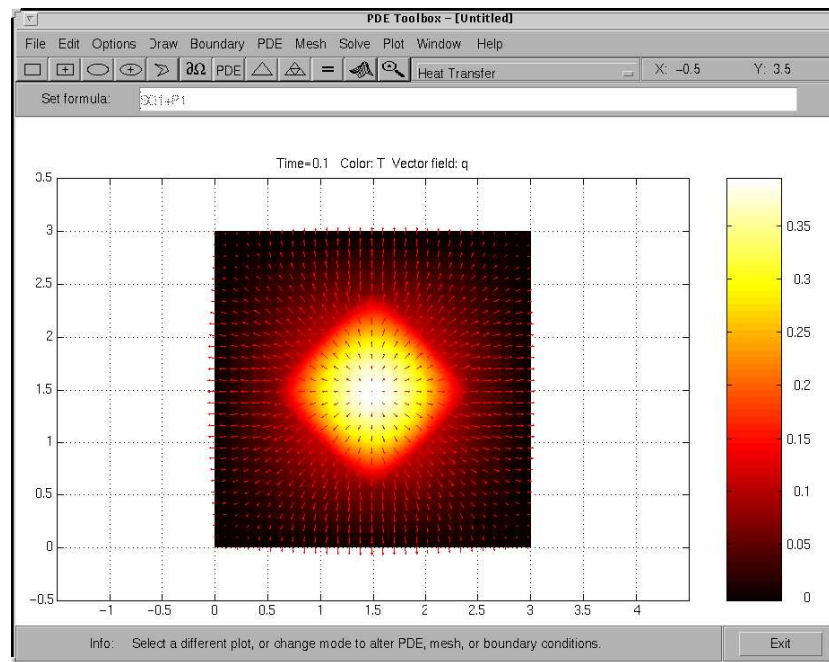





Figura E.12: Visualización de la temperatura y del flujo de calor.

5. Inicializa la malla haciendo uso del botón . Refínala con  si lo deseas.
6. Resuelve la ecuación presionando .
7. Modifica a conveniencia las propiedades de visualización. Por defecto la aplicación muestra la distribución de temperatura en el último instante temporal, aunque la mejor manera de visualizar el comportamiento dinámico de la solución es a través de una animación. Otras representaciones interesantes pueden ser dibujar las isotermas mediante contour y el flujo de calor en forma de campo vectorial (Fig. E.12).

Ejercicios

- E.1 Supongamos que queremos obtener la distribución estacionaria de temperaturas en la sección de viga mostrada en la Fig. E.13, donde no existen ni términos fuente ni intercambio de calor por convección. Por lo tanto, la ecuación a resolver es

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = 0$$

sujeta a las condiciones de fronteras que aparecen en la mencionada figura, donde $T_1 = 290^\circ\text{C}$ y $T_2 = 320^\circ\text{C}$. El coeficiente de conductividad térmica es $k_1 = 1$.

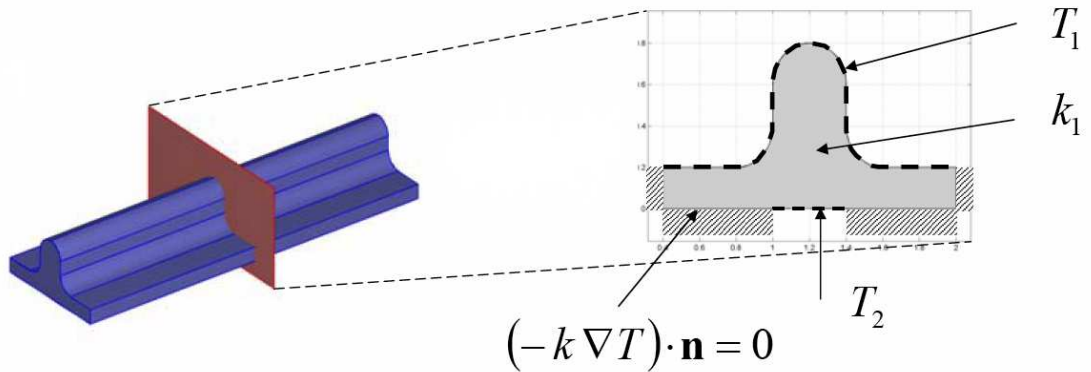


Figura E.13: Geometría y condiciones de contorno de una viga sometida a restricciones de temperatura y aislamiento.

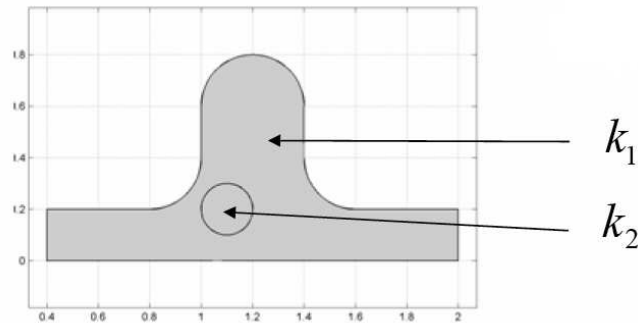


Figura E.14: Impureza localizada dentro de la viga de estudio.

- a) Obtén la distribución de temperaturas pedida y representa la información que juzgues interesante (distribución de temperaturas en color, líneas de contorno, flujo de calor ...).
- b) Estudia como se altera la distribución de temperaturas si existe una impureza dentro de la sección con un coeficiente de conductividad térmica mayor al del resto de material (Fig E.14). La impureza puedes representarla como un círculo centrado en (1.1,1.2) y de radio $R = 0.1$. Estudia el efecto de distintos valores de conductividad térmica en la impureza ($k_2 = 10k_1$, $k_2 = 100k_1$, ...).

E.2 Consideremos un problema de electrostática donde se pretende realizar el estudio del efecto de un sistema de electrodos punta-plano sobre un cilindro dieléctrico, donde el cilindro puede tener mayor o menor coeficiente dieléctrico que el medio.

La geometría del problema puede simplificarse a la mostrada en la Fig. E.15,

donde la esquina inferior izquierda del rectángulo está situada en el punto $(-1.5, -1)$ y posee una anchura de 3 y altura de 2 unidades. La pared izquierda del rectángulo es el electrodo en forma de plano y el electrodo en punta es representado por una elipse, centrada en $(-1.5, 0)$, semieje mayor $a = 1$ y semieje menor $b = 0.5$. El coeficiente dieléctrico del medio es 1. Tanto la pared izquierda como la elipse (ambos electrodos) tienen un potencial eléctrico constante de valor $V = 1$, mientras que no existe flujo en el resto de paredes del rectángulo (condiciones Neumann homogéneas).

- Coloca un cilindro (representado por un círculo) de radio 0.35 y centrado en el $(0,0)$. En estas condiciones, la fórmula que define la geometría del problema sería $R1-E1+C1$, donde $R1$ sería el rectángulo, $E1$ la elipse y $C1$ el círculo. Estudia el caso en el que el coeficiente dieléctrico del cilindro es cinco veces mayor que el del medio. Obtén la solución al problema, y representa tanto las líneas equipotenciales como el campo eléctrico resultante.
- Vuelve de nuevo al modo de dibujo y desplaza el cilindro a la posición $(0.5,0)$, y resuelve de nuevo el problema.
- Repite los dos apartados anteriores en el caso en el que el coeficiente dieléctrico del cilindro sea cinco veces menor que el del medio.
- ¿Qué conclusiones se obtienen? ¿En qué condiciones es el cilindro atraído o repelido de la zona de campos fuertes?

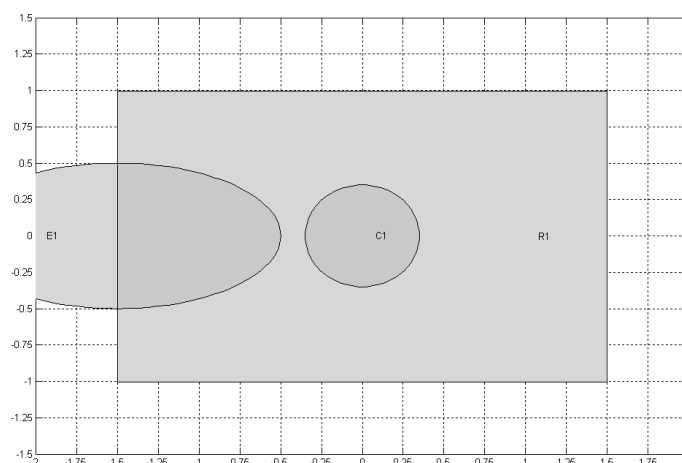


Figura E.15: Geometría para el estudio del efecto de un sistema de electrodos punta-plano sobre un cilindro dieléctrico.

