

## Lección F

# Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos iterativos

Los métodos iterativos tienen la desventaja de que no se pueden aplicar, por lo menos de forma elemental, a cualquier sistema de ecuaciones  $Ax = B$  y tienen la ventaja de que son más eficaces para sistemas cuyo orden es superior a 1000.

### F.1. Método de Jacobi

**Práctica a** Consideramos las dos expresiones equivalentes de un mismo sistema

$$1) \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = -7 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} x_1 = 1/5(-7 - x_2 + x_3) \\ x_2 = 1/3(1 + x_1) \\ x_3 = 1/6(11 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

donde el sistema 2) ha sido obtenido a partir del 1) despejando la  $x$  de los elementos diagonales. Matricialmente, los sistemas anteriores tienen la expresión:

$$1) Ax = B; \quad 2) x = Hx + C$$

para  $H$  y  $C$  la matriz y el vector que se obtienen a partir de  $A$  y  $B$  de la siguiente manera: Dada  $A$  consideramos su parte diagonal,  $D$ , su parte triangular inferior,  $I$ , y su parte triangular superior,  $S$ ; claramente, se verifica  $A = I + D + S$  con lo que el sistema  $Ax = (I + D + S)x = B$  es equivalente a  $Dx = -(I + S)x + B$  y también equivalente a

$$\boxed{x = H_J x + C} \quad (\text{F.1})$$

donde  $H_J = -D^{-1}(I + S)$  y  $C = D^{-1}B$

En nuestro caso concreto:

$$H_J = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ -1/6 & -1/6 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -7/5 \\ 1/3 \\ 11/6 \end{bmatrix}$$

Ejecutando el listado

```
H=[0 -1/5 1/5;1/3 0 0;-1/6 -1/6 0] nInf=norm(H,inf), n2=norm(H,2),
n1=norm(H,1)
```

comprobamos que  $\|H\|_2^{\text{ind}} = \delta < 1$ . En consecuencia, si  $\{x^{(k)}\}$  denota la sucesión definida por las igualdades:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^{(k+1)} = H \cdot x^{(k)} + C = \begin{pmatrix} 1/5(-7 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ 1/3(1 + x_1^{(k)}) \\ 1/6(11 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{pmatrix} \quad (\text{F.2})$$

se verifica que  $\{x^{(k)}\}$  es una sucesión de Cauchy ya que

$$\begin{aligned} \|x^{(p+m)} - x^{(p)}\| &\leq \|x^{(p+m)} - x^{(p+m-1)}\| + \dots + \|x^{(p+1)} - x^{(p)}\| \\ &= \|H^{p+m-1}(x^{(1)} - x^{(0)})\| + \dots + \|H^{p-1}(x^{(1)} - x^{(0)})\| \\ &\leq \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \cdot (\|H^{p+m-1}\| + \dots + \|H^{p-1}\|) \\ &\leq \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \cdot \left( \sum_{k=p-1}^{p+m-1} \|H\|^k \right) \\ &\leq \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \cdot \left( \sum_{k=p-1}^{\infty} \delta^k \right) \\ &= \frac{\delta^{p-1}}{1-\delta} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, que  $\{x^{(k)}\}$  converge a un único punto  $\hat{x}$  que verifica

$$\hat{x} = H_J \hat{x} + C$$

que es lo mismo que decir que  $\hat{x}$  es la única solución del sistema  $Ax = B$  o de su equivalente  $x = H_J x + C$ .

Vamos a utilizar lo anterior para calcular la citada solución del sistema con una tolerancia menor a la centésima, para ello sólo tenemos que llevar al ordenador el proceso iterativo definido en (F.2) y eso lo conseguimos con el listado:

```
xn1=0; xn2=0; xn3=0;
ii=0; e=1; tol=0.01;
while e>tol
    ii=ii+1; x1=xn1; x2=xn2; x3=xn3;
    xn1=(-7-x2+x3)/5; xn2=(1+x1)/3; xn3=(11-x1-x2)/6;
    e=max([abs(x1-xn1) abs(x2-xn2) abs(x3-xn3)]);
    fprintf('x1=%f x2=%f x3=%f e=%f i=%i \n', xn1, xn2, xn3, e, ii);
end
```

Observamos que necesitamos 6 iteraciones para obtener la solución  $\hat{x} = (-1, 0, 2)$  con una tolerancia menor a la centésima.

En la práctica anterior hemos descrito el proceso iterativo de Jacobi, el cual convierte un sistema regular  $Ax = B$  a la forma  $x = H_J x + C_J$ , donde  $H_J$  es la matriz de Jacobi asociada a dicho sistema y  $C_J$  el vector dado por la fórmula:

$$H_J = -D(I + S); \quad C_J = D^{-1}B$$

La convergencia de la sucesión de Jacobi  $\{x^{(k)}\}$  definida a partir de un vector inicial  $x^{(0)}$  depende de las propiedades de la matriz  $H_J$ . En cualquier caso y justificados por la práctica anterior se verifica:

**Teorema F.1** Si la matriz de Jacobi  $H_J = (h_{ij})$  asociada al sistema regular  $Ax = B$  verifica una de las siguientes condiciones:

1.  $\|H_J\|_2^{\text{ind}} < 1$ .
2.  $\|H_J\|_\infty^{\text{ind}} = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |h_{ij}| \right\} < 1$ .
3.  $\|H_J^t\|_\infty^{\text{ind}} = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n |h_{ij}| \right\} < 1$ .

entonces la sucesión de Jacobi  $\{x^{(k)}\}$  definida con un vector inicial cualquiera  $x^{(0)}$  converge a la única solución  $\hat{x}$  del sistema  $Ax = B$ .

**Práctica b** El archivo `Mt\f_mj.m` permite calcular, por el método de Jacobi, la solución de un sistema lineal  $Ax = B$  con una determinada tolerancia y a partir de una aproximación inicial  $x^{(0)}$ . Su sintaxis es

```
f_mj(A,B,x0,tolerancia)
```

En esta práctica estudiamos el listado de la función `Mt\f_mj.m` para lo que ejecutamos `type f_mj`, comprobamos que el listado se corresponde con la implementación del método de Jacobi y después resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

con una aproximación de la milésima. Para ello ejecutamos

```
A=[3 1 1;2 5 1;-1 1 3]; b=[4 -1 4].';
x=f_mj(A,b,zeros(3,1),0.001).'
```

## F.2. Método de Jacobi amortiguado

Consideremos un número real positivo  $\omega$  y la expresión de Jacobi  $x = H_J x + C$  para un determinado sistema. El sistema de Jacobi es equivalente a  $\omega x = \omega H_J x + \omega C$  y también a  $x = ((1 - \omega) \text{Id} + \omega H_J) x + \omega C$ . Esto nos permite definir el sistema de Jacobi amortiguado de un sistema  $Ax = B$  por la fórmula

$$\boxed{x = H_J^\omega x + C_J^\omega}, \quad \text{donde} \quad H_J^\omega = (1 - \omega) \text{Id} + \omega H_J, \text{ y } C_J^\omega = \omega D^{-1} B \quad (\text{F.3})$$

La ventaja del método iterativo definido a partir del sistema anterior radica en el hecho de que el método de Jacobi puede no converger y sí hacerlo el método amortiguado y también en que, a veces, es posible acelerar la convergencia del método de Jacobi eligiendo un peso  $\omega$  adecuado.

### F.3. Método de Gauss-Seidel

**Práctica c** Tal como vimos en la práctica FA, el método de Jacobi usa las coordenadas de  $x^{(k)}$  para calcular las de  $x^{(k+1)}$ ; sin embargo, sería más conveniente usar en la iteración actual las componentes ya calculadas. Esta pequeña modificación da origen al *método iterativo de Gauss-Seidel*. Escribimos los dos métodos con el fin de observar las diferencias:

$$\text{Sistema inicial} \quad Ax = (I + D + S)x = B$$

Método de Jacobi:

Método de Gauss-Seidel:

$$\begin{array}{ll} x_1^{(k+1)} = 1/5(-7 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) & x_1^{(k+1)} = 1/5(-7 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 1/3(1 + x_1^{(k)}) & x_2^{(k+1)} = 1/3(1 + x_1^{(k+1)}) \\ x_3^{(k+1)} = 1/6(11 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) & x_3^{(k+1)} = 1/6(11 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{array} \quad (\text{F.4})$$

$$\boxed{x = H_J x + C_J}$$

$$\boxed{x = H_{gs} x + C_{gs}}$$

$$H_J = -D^{-1}(I + S)$$

$$H_{gs} = -(D + I)^{-1} S$$

$$C_J = D^{-1} B$$

$$C_{gs} = (D + I)^{-1} B$$

La operativa del método de Gauss-Seidel queda clara observando que corresponde a utilizar la igualdad  $(D + I)x = -Sx + B$ , con lo que el método iterativo de Gauss-Seidel es el correspondiente a utilizar la ecuación

$$\boxed{x = H_{gs} x + C_{gs}} \quad (\text{F.5})$$

donde la matriz de Gauss-Seidel es  $H_{gs} = -(D + I)^{-1} S$  y  $C_{gs} = (D + I)^{-1} B$ .

Llevamos al ordenador el algoritmo de Gauss-Seidel descrito en (F.4) mediante el listado

```

xn1=0; xn2=0; xn3=0;
ii=0; e=1; tol=0.001;
while e>tol
    ii=ii+1; x1=xn1; x2=xn2; x3=xn3;
    xn1=(-7-x2+x3)/5; xn2=(1+xn1)/3; xn3=(11-xn1-xn2)/6;
    e=max([abs(x1-xn1) abs(x2-xn2) abs(x3-xn3)]);
    fprintf('x1=%f x2=%f x3=%f e=%f i=%i \n', xn1, xn2, xn3, e, ii);
end

```

y comprobamos que el método de Gauss-Siedel converge más deprisa que el método de Jacobi ya que utiliza 4 iteraciones para aproximar a la solución con una tolerancia menor a la milésima, para la misma tolerancia el método de Jacobi necesitaría 8 iteraciones.

## F.4. Método de Gauss-Siedel amortiguado

Con el fin de obtener la etapa  $k + 1$  de la aproximación  $\tilde{x}^{(k+1)} \rightarrow \hat{x}$  podemos promediar las etapas  $(k)$  y  $(k + 1)$  de Gauss-Siedel según la fórmula

$$\tilde{x}^{(k+1)} = \omega x_{GS}^{(k+1)} + (1 - \omega)x_{GS}^{(k)} \quad (\text{F.6})$$

Análogamente a lo hecho en el apartado F.2 se verifica que tal proceso obedece a la ecuación

$$x = H_{gs}^{\omega} x + C_{gs}^{\omega} \quad (\text{F.7})$$

donde  $H_{gs}^{\omega} = (D + \omega I)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega S]$ ,  $C_{gs}^{\omega} = \omega(D + \omega I)^{-1}B$  y  $\omega$  es un número real positivo al que como regla empírica se le suele asignar un valor comprendido entre 1.2 y 1.7.

El método de Gauss-Siedel amortiguado se conoce también con el nombre de proceso SOR (Successive Overrelaxation Method).

**Práctica d** El sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ -x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

tiene solución  $(3, 4 - 5)^t$ . En esta práctica emplearemos los métodos de Gauss-Siedel, amortiguado con  $\omega = 1.25$  y no amortiguado, para resolverlo a partir el valor inicial  $X^{(0)} = (0, 0, 0)$ . Es fácil ver que las ecuaciones para el método de Gauss-Siedel son

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0.75x_2^{(k)} + 6 \\ x_2^{(k+1)} &= -0.75x_1^{(k+1)} + 0.25x_3^{(k)} + 7.5 \\ x_3^{(k+1)} &= 0.25x_2^{(k+1)} - 6 \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

y que las ecuaciones para el método amortiguado, con  $\omega = 1.25$  son

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= -0.25x_1^{(k)} - 0.9375x_2^{(k)} + 7.5 \\ x_2^{(k+1)} &= -0.9375x_1^{(k+1)} - 0.25x_2^{(k)} + 0.3125x_3^{(k)} + 9.375 \\ x_3^{(k+1)} &= 0.3125x_2^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} - 7.5 \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Comprobar que, en efecto, el listado

```

xk1=1; xk2=1; xk3=1;
ii=0; e=1; tol=0.0001;
while e>tol
    ii=ii+1; x1=xk1; x2=xk2; x3=xk3;

```

```

xk1=6-0.75*x2; xk2=7.5-0.75*xk1+0.25*x3; xk3=-6+0.25*xk2;
e=max([abs(x1-xk1) abs(x2-xk2) abs(x3-xk3)]);
fprintf('x1=%f x2=%f x3=%f e=%f i=%i \n', xk1, xk2, xk3, e ,ii);
end

```

permite obtener la solución del sistema con una tolerancia  $10^{-4}$  después de 17 iteraciones. Además, se pide contestar a las cuestiones:

1. Modificar convenientemente el listado anterior hasta obtener el listado necesario para implementar la ecuación (F.9) anterior.
2. ¿Cuántas iteraciones son necesarias con el método amortiguado?.
3. Repetir lo anterior con una tolerancia de  $10^{-7}$ .

## F.5. Resolución de un sistema no lineal

**Práctica puntuable e** (0.4 puntos) Considérese el sistema de ecuaciones no lineales siguiente:

$$\begin{cases} x_1 &= 1 - x_2 \\ x_i^2 &= \frac{\sqrt{i-1}}{(2i-1)}(1 - x_{i+1} - x_{i-1}) \quad i = 2, \dots, n \\ x_{n+1} &= -x_n \end{cases}$$

Nos planteamos la cuestión de resolver este sistema no lineal siguiendo en lo posible las ideas expuestas en el método de Jacobi. Para ello, se nos pide resolver las siguientes cuestiones.

1. Comprobar que los vectores  $x_5$ ,  $x_{10}$  cuyas coordenadas son las dadas en los ficheros `dxnolnV_x.dat` y `dxnolnX_x.dat` son solución del sistema anterior para  $n = 5$ , y  $n = 10$ , respectivamente.
2. ¿Existe una función vectorial  $G_n(x)$  de modo que el sistema anterior se puede expresar de la forma  $x = G_n(x)$ ? Obtener  $G_n$  para los casos  $n = 5$  y  $n = 10$ .
3. Comprobar, para  $n = 10$ , que la sucesión  $x^{(k)}$  definida por las igualdades  $x^{(0)} = (0, \dots, 0)$ ,  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$  converge a un único número **complejo** que es solución del sistema inicial. Para ello, listar (con la orden `type`) y ejecutar convenientemente la función `fenln_10`.
4. Consideramos los vectores  $x_5$  y  $x_{10}$ , ¿verifican  $x_5 = G_5(x_5)$  y  $x_{10} = G_{10}(x_{10})$ ?
5. (apartado puntuable con 0.2 puntos) Comprobar, para  $n = 5$ , que la sucesión definida por las igualdades  $x^{(0)} = (0, \dots, 0)$ ,  $x^{(k+1)} = G_5(x^{(k)})$  es oscilante, que tiene dos puntos de acumulación,  $\overline{x}_1$  y  $\overline{x}_2$ , y que además la sucesión definida por las igualdades

$$\overline{x}^{(0)} = \frac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}{2}, \quad \overline{x}^{(k+1)} = G(\overline{x}^{(k)})$$

converge a un único punto que se pide calcular con una tolerancia de  $1e-6$ .

(`fenlnX` y `fenlnV`)

## F.6. Ejercicios

**Práctica p** Resolver los siguientes sistemas con una tolerancia menor a  $10^{-5}$  empleando los siguientes métodos: de Jacobi, de Gauss-Siedel y de Gauss-Siedel con ponderación  $\omega = 1.2$ . Reflejar en una tabla las iteraciones necesarias para cada uno de los métodos citados y cada uno de los sistemas.

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 - x_2 - x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 & = & 3 \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{lcl} 10x_1 - x_2 & = & 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 & = & 7 \\ -2x_2 + 10x_3 & = & 6 \end{array} \right. \\
 3) \left\{ \begin{array}{lcl} 10x_1 + 5x_2 & = & 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 & = & 25 \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 & = & -11 \\ -x_3 + 5x_4 & = & -11 \end{array} \right. & 4) \left\{ \begin{array}{lcl} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 & = & -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 1 \end{array} \right. \\
 5) \left\{ \begin{array}{lcl} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = & 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 & = & 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 & = & 6 \end{array} \right. & 6) \left\{ \begin{array}{lcl} 4x_1 - x_2 - x_4 & = & 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 & = & 5 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 & = & 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 & = & 6 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 & = & -2 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 & = & 6 \end{array} \right.
 \end{array}$$

**Práctica q** Considérese el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -0.1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. ¿Qué ocurre al intentar resolverlo por el método de Jacobi?.
2. ¿Puedes dar una explicación de este hecho?.
3. ¿Es posible resolverlo por el método de Gauss-Siedel?. En dicho caso determinar el valor de la solución.

**Práctica r** ([6], p. 216) Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Queremos alcanzar la solución con una tolerancia en el error relativo del orden de  $\pm 0.001$  y empezando a iterar a partir del vector  $(0, 0, 0, 0)$ .

1. ¿Cuántas iteraciones de Jacobi hacen falta para alcanzar la solución ?
2. ¿Cuántas iteraciones de Gauss-Siedel hacen falta para alcanzar la solución?

**Práctica s** Resolver con una tolerancia menor a la milésima y por el método de Gauss-Siedel el sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

**Práctica t** Resolver con un error relativo inferior al 1 % el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 12x_2 + 2x_3 &= -33 \\ x_1 - 14x_2 + 10x_3 &= -103 \end{aligned}$$

usando 1) el comando '\', 2) el método de Jacobi y 3) el método de Gauss-Siedel. Contabilizar el número de operaciones necesarias en cada caso.

**Práctica puntuable u** (0.4 puntos) Sea

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & A_3 & B_3 & C_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & A_i & B_i & C_i \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

un sistema tridiagonal con predominio diagonal, es decir, que verifica  $|B_i| > |A_i| + |C_i|$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se pide:

1. Probar que la sucesión de Jacobi  $\{x^{(k)}\}$  definida con valor inicial  $x^{(0)} = (0, \dots, 0)$  es convergente.
2. Definir una función Matlab, `[x,k]=futrijac(A,B,C,d,tol)`, que admita como parámetros de entrada los elementos diagonales, **B**, los supradiagonales, **C**, los infradiagonales, **A**, los independientes, **d**, y una tolerancia, **tol**, y que dé como resultado la única solución **x** del sistema con una tolerancia prefijada y el número de iteraciones **k** necesarias.
3. Probar la función definida para calcular la solución del sistema definido en la práctica ET para  $n = 400, 600$  y  $800$ . ¿Cuántas iteraciones y operaciones son precisas para resolver los citados sistemas con una tolerancia de  $1e-4$ ?



- Práctica puntuable v** 1) Escribir una función Matlab, `xk1=f_gs(A,B,xk)`, que realice una iteración de Gauss-Seidel sobre el sistema de ecuaciones  $Ax = B$  a partir de la aproximación  $\mathbf{xk}$  (0.1 puntos).
- 2) Escribir una función Matlab, `[x,k]=f_mgs(A,B,x0,tolerancia)`, que admita como parámetros de entrada la matriz del sistema,  $A$ , el vector columna de los términos independientes,  $B$ , una aproximación inicial a la solución,  $\mathbf{x0}$ , y una `tolerancia`; y devuelva como parámetros de salida,  $\mathbf{x}$ , la solución del sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss-Seidel y,  $\mathbf{k}$ , el número de iteraciones preciso para obtener la solución. (0.2 puntos).