

Copula 和相关性

内容提要

- Copula 定义和性质
- 相关性
- 常见的 Copula 函数
- Copula 的拟合
- Copula 在风险管理的应用

参考资料

- Value-at- Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk, Jorion, 3rd Edition
 - Ch. 9 Forecasting Risk Correlations (only Section 9.3 Modelling Correlations, pp. 232-236)
- Measurement and Modeling of Dependencies in Economic Capital, Ch. 4-5
 - 4. Correlation as the Simplest Type of Dependency
 - 5. Risk Aggregation
- ERM-125-15: Loss Models Further Topics, Klugman, Panjer and Wilmot,
 - Ch. 10 Copula models
- QRM, 2015

本文回答如下问题

相依性是什么意思？

相关系数是一个好相依性度量工具吗？

- 随着时间的推移，相关性是否稳定，它们如何变化？ - 风险多样化效益现实吗？
- 当他们谈论“尾部相依”时，人们意味着什么？
- 如何向董事会汇报相依建模对经济资本结果的影响？

ERM 的要求

- a) 评估风险的相关性，并给出与正相关的风险和负相关的风险的例子。
- b) 分析和评估风险汇总技术，包括使用相关性，综合风险分布和 Copulas。
- c) 分析分布尾数，尾部相关性和低频/高严重性事件的重要性
- d) 构建各种风险模型的方法，并评估实体如何对技术进行建模，测量和整合风险的决策，包括但不限于随机过程。

Copula 是描述相关性的一种有用的工具

与其他的基于联合分布函数的建模方法相比，Copula 函数模型应用起来更为灵活：

- 首先，Copula 函数模型不限制边缘分布的选择，由于 Copula 函数模型有很多分布族，因此，当正态分布假设被拒绝时，还可以选择不同的边缘分布和 Copula 函数进行更好地拟合。
- 其次，Copula 模型能将随机变量间的相关程度和相关模式有机的结合在一起，不仅可以得到度量相关程度的相关参数，而且可以得到描述相关模式的具体的 Copula 函数，可以更全面的刻画随机向量间的相关关系。

1、Copula 的定义和性质

定义 (Copula) Copula C 是一个多元分布函数，且边际分布服从均匀分布 $U(0,1)$ 。具体来说, $C:[0,1]^d \rightarrow [0,1]$ 是 copula 函数当且仅当:

1) C 是 grounded。也就是说，如果至少存在一个 $j \in \{1, \dots, d\}$ ，使得 $u_j = 0$ ，则

$$C(u_1, \dots, u_d) = 0 \text{ 成立。}$$

2) C 的单变量边际分布为 $(0,1)$ 上的均匀分布。即对所有 $u_j \in [0,1]$ ， $j \in \{1, \dots, d\}$ ，

$$C(1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_j \text{ 成立。}$$

3) C 是 d 维递增函数, 即对所有 $a, b \in [0,1]^d$ ， $a \leq b$ ，

$$\Delta_{(a,b]} C = \sum_{i \in \{0,1\}^d} (-1)^{\sum_{j=1}^d i_j} C(a_1^{i_1} b_1^{1-i_1}, \dots, a_d^{i_d} b_d^{1-i_d}) \geq 0$$

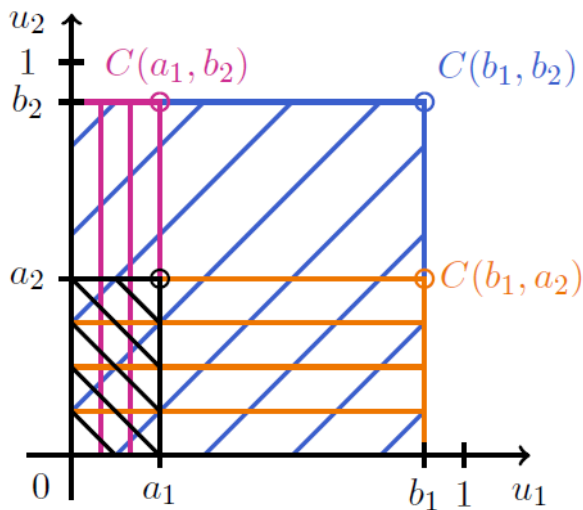
成立。同样的，密度函数 c 如果存在，则对所有 $u \in (0,1)^d$ ，密度 $c(u) \geq 0$ 成立。

2 维递增的含义

$$\Delta_{(a,b]}C = C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2)$$

$$= P(U \in (a, b]) \stackrel{!}{\geq} 0$$

C 对它的每一个变量都是单调递增的



$\Rightarrow \Delta_{(a,b]}C$ 是随机向量 $U \sim C$ 在区间 $(a, b]$ 内的概率。

预备知识-广义逆变换 Preliminaries

Definition 2.7 (Generalized inverse)

For any increasing function $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, with $T(-\infty) = \lim_{x \downarrow -\infty} T(x)$ and $T(\infty) = \lim_{x \uparrow \infty} T(x)$, the *generalized inverse* $T^{\leftarrow} : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ of T is defined by

$$T^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\}, \quad y \in \mathbb{R},$$

with the convention that $\inf \emptyset = \infty$. If T is a df, $T^{\leftarrow} : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ is the *quantile function* of T .

引理 (概率变换)

令 $X \sim F$ ， F 连续，则 $F(X) \sim U(0,1)$ 。

证明思路：

$$P(F(X) \leq u) = P(F^{\leftarrow}(F(X)) \leq F^{\leftarrow}(u)) = P(X \leq F^{\leftarrow}(u)) = F(F^{\leftarrow}(u)) = u, u \in [0, 1];$$

注意这里 F 必须是连续的，否则 $F(X)$ 的值不能覆盖所有 $\subseteq [0, 1]$ 的区间。

引理（分位点变换）

令 $U \sim U(0,1)$ ，且 F 是任意密度函数，则 $X = F^{\leftarrow}(U) \sim F$ 。

证明：

$$P\left(F^{\leftarrow}(U) \leq x\right) \underset{(GI5)}{=} P(U \leq F(x)) = F(x), x \in R$$

注：概率变换和分位点变换是所有涉及 **copulas** 的应用的关键。它们使得我们能用 R^d 的概率分布产生 $[0,1]^d$ 的概率分布，用 $[0,1]^d$ 的概率分布得到 R^d 上的概率分布。

定理 1: Sklar 定理

F 是一个 R^d 联合分布函数, 其边际分布为 F_1, \dots, F_d 。则存在一个 copula $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, 使得对所有在 $\bar{R} = [-\infty, \infty]$ 中的 x_1, \dots, x_d ,

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (1)$$

成立。如果边际分布是 F_1, \dots, F_d 连续的, 则 C 是唯一的; 否则 C 由

$\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2 \times \dots \times \text{Ran } F_d$ 唯一决定, 其中 $\text{Ran } F_i = F_i(\bar{R})$ 表示 F_i 的极差。

反过来, 如果 C 是一个 copula 并且 F_1, \dots, F_d 是单变量分布函数, 则 (1) 定义的函数 F 是一个边际分布为 F_1, \dots, F_d 的联合分布函数。

证明

1) **Proof for continuous F_1, \dots, F_d only.** Let $\mathbf{X} \sim F$ and define $U_j = F_j(X_j)$, $j \in \{1, \dots, d\}$. By the probability transformation, $U_j \sim U(0, 1)$ (continuity!), $j \in \{1, \dots, d\}$, so the df C of \mathbf{U} is a copula. Since $F_j \uparrow$ on $\text{ran } X_j$, (G13) implies that $X_j = F_j^{\leftarrow}(F_j(X_j)) = F_j^{\leftarrow}(U_j)$, $j \in \{1, \dots, d\}$. Therefore,

$$\begin{aligned} F(t_1, \dots, t_n) &= \Pr(T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n) \\ &= \Pr(F_1^{-1}(U_1) \leq t_1, \dots, F_n^{-1}(U_n) \leq t_n) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_1(t_1), \dots, U_n \leq F_n(t_n)) \\ &= C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)) \end{aligned}$$

2) For $\mathbf{U} \sim C$, define $\mathbf{X} = (F_1^{\leftarrow}(U_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(U_d))$. Then

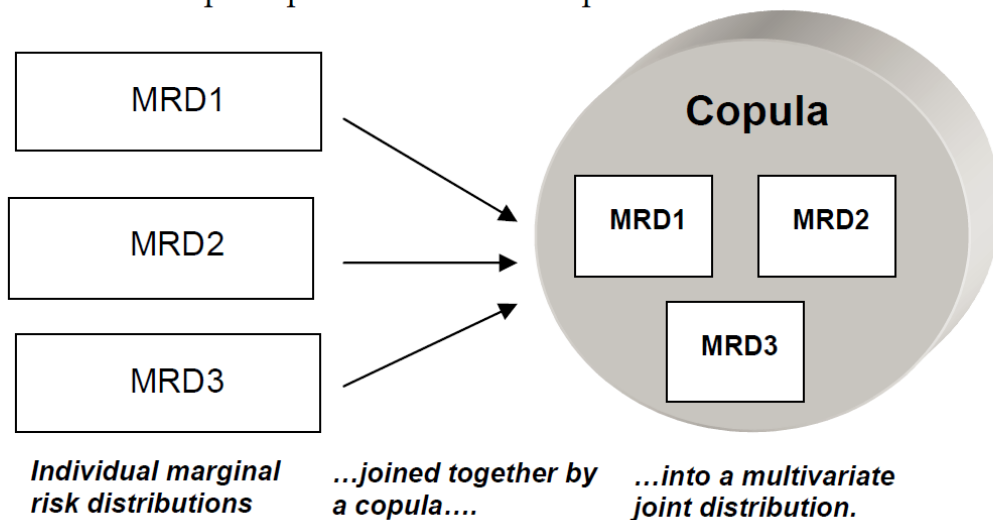
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) &= \mathbb{P}(F_j^{\leftarrow}(U_j) \leq x_j \ \forall j) \stackrel{(GI5)}{=} \mathbb{P}(U_j \leq F_j(x_j) \ \forall j) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Therefore, F defined by (29) is a df (that of \mathbf{X}), with margins F_1, \dots, F_d (obtained by the quantile transformation). \square

Sklar 意义 在于研究分布模型时可以将一个联合分布分解为一系列边际分布和一个 **Copula 函数** 的组合,而这个 **Copula 函数** 则描述了各个变量间的相关性。也就是说,Copula 函数事实上是一类将联合分布函数与其对应的边缘分布函数连接在一起的结构,因而时常也有人称其为连接函数。

定义 (分布函数的 copula).如果随机向量 \mathbf{X} 的联合分布函数为 F ，边际分布 F_1, \dots, F_d 连续，则 F (或者 \mathbf{X}) 的 copula 是 $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ 的分布函数 C 。

Figure 3. Simple representation of a Copula



Sklar 定理图解

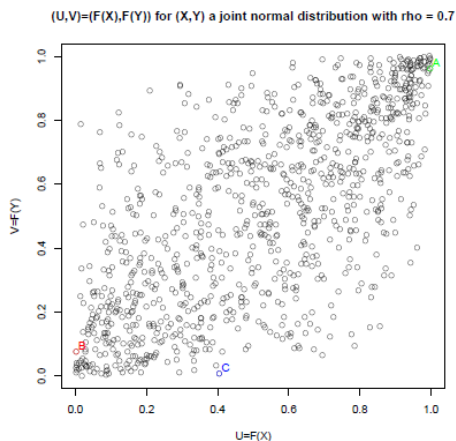
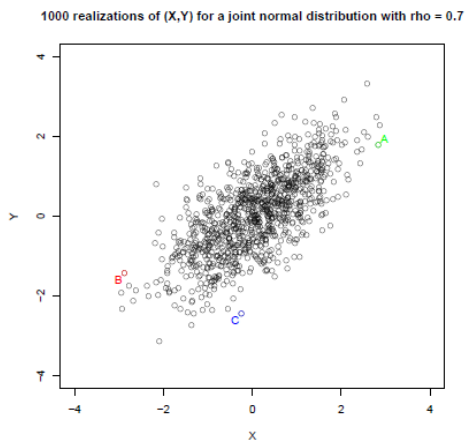
Sklar 定理的可视化 (1)

左边：来自分布 $(X_1, X_2) \sim N_2(0, P)$ 的样本量为 1000 的样本的散点图，其中

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}$ 。我们标出了 3 个点，分别是 A, B, C。

右边：相应的高斯 copula 的散点图（在应用了正态分布 $N(0,1)$ 的密度函数 Φ 之后）。

注意 A, B, C 怎样变化。



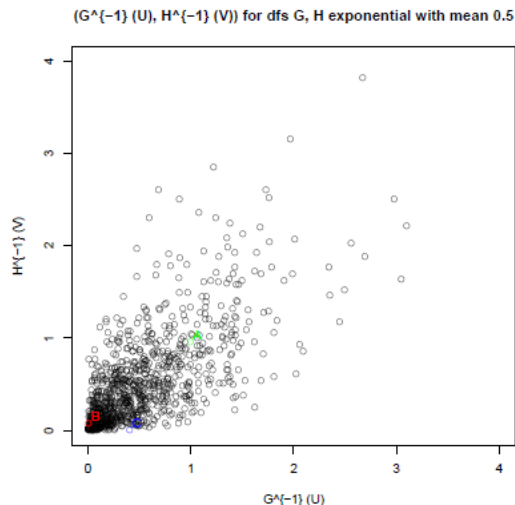
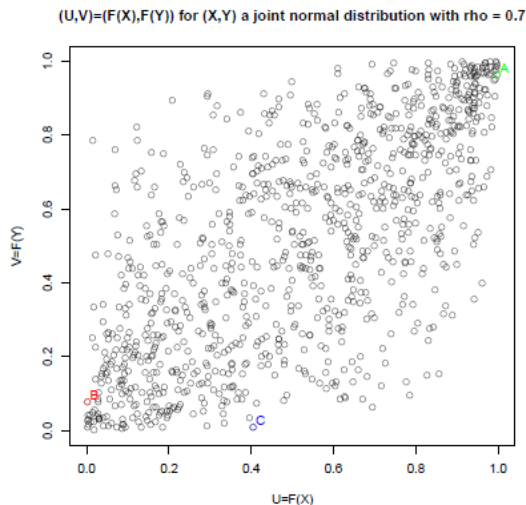
Sklar 定理的可视化部分(2)

左边：与之前相同的高斯 copula 散点图。指数分布 $\text{Exp}(2)$ 是边际分布，即

$$(F_j^{-1}(u) = -\log(1-u)/2, j \in \{1, 2\})$$

右边：相应的变换后的随机变量。注意 A, B, C 的变化。

R 程序实现



当 x_i 的分布是离散分布时，对应的 Copula 的个数不是唯一的

例（二元贝努利的 copulas）设 (X_1, X_2) 服从二元贝努利分布，满足

$$\begin{aligned}P(X_1 = 0, X_2 = 0) &= \frac{1}{8}, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{8} \\P(X_1 = 0, X_2 = 1) &= \frac{2}{8}, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{2}{8}\end{aligned}$$

显然， $P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = \frac{3}{8}$ 以及 X_1 的边缘分布 F_1 与 X_2 的边缘分布 F_2 相同。由

Sklar 定理知，存在 copula C 使得 $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = C(P(X_1 \leq x_1), P(X_2 \leq x_2))$ 。

对所有 x_1, x_2 以及部分。

由于 $\text{Ran } F_1 = \text{Ran } F_2 = \left\{0, \frac{3}{8}, 1\right\}$ ，显然对 C 唯一的限制就是 $C\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}$ 。任意满足这

一条件的 copula 都是 (X_1, X_2) 的一个 copula。满足这一条件的 copulas 有无穷多个。

2、Copula:的性质

- 定理 2 (不变原理) 设 $X \sim F$, 边际分布为 F_1, \dots, F_d 且连续, copula 为 C 。如果变

换 T_j 在 $\text{ran } X_j$ 上递增, 即 $T_j \uparrow$, 则 $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ 的 copula 也为 C 。

简单证明:

$$\begin{aligned} F_{T_j(X_j)}(x) &= \mathbb{P}(T_j(X_j) \leq x) = \mathbb{P}(T_j(X_j) < x) \stackrel{(G15)}{=} \mathbb{P}(X_j < T_j^{\leftarrow}(x)) \\ &= \mathbb{P}(X_j \leq T_j^{\leftarrow}(x)) = F_j(T_j^{\leftarrow}(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

This implies that $\mathbb{P}(F_{T_j(X_j)}(T_j(X_j)) \leq u_j \forall j)$ equals

$$\mathbb{P}(F_j(T_j^{\leftarrow}(T_j(X_j))) \leq u_j \forall j) \stackrel{(G13)}{=} \mathbb{P}(F_j(X_j) \leq u_j \forall j) \stackrel{\text{L.7.6}}{\underset{\text{"only if"}}{=}} C(\mathbf{u}).$$

Sklar 定理和不变性原理解释

- 1) Sklar 定理的部分 1)使得任意多元分布函数可以被分解为它的边际密度与 copula。这与 copula 的不变性共同使得通过 $U = (F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ 而不是 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 来研究相关性成为可能。
- 2) 部分 2)允许为特定应用构造灵活的多元分布。

● 定理 3 (Fréchet-Hoeffding 边界)

令 $W(u) = \max\left\{\sum_{j=1}^d u_j - d + 1, 0\right\}$ 以及 $M(u) = \min_{1 \leq j \leq d} \{u_j\}$,

1) 对任意 d 维 copula C , $W(u) \leq C(u) \leq M(u)$, $u \in [0, 1]^d$

2) W 是一个 copula 当且仅当 $d = 2$

3) 对所有 $d \geq 2$, M 是一个 copula。

证明:

对所有 i , $\bigcap_{1 \leq j \leq d} \{U_j \leq u_j\} \subset \{U_i \leq u_i\}$, 可以推出第二个不等式。

第一个不等式的证明如下:

$$\begin{aligned} C(u) &= P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq d} \{U_i \leq u_i\}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq d} \{U_i > u_i\}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^d P(U_i > u_i) = 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i \end{aligned}$$

对 $U \sim U(0,1)$, 容易证明

$$(U, \dots, U) \sim M$$

$$(U, 1-U) \sim W$$

注:Frechet-Hoffding 边界相当于完全相关 (W 是完全负相关, M 是完全正相关)。

Frechet-Hoffding 边界可以引出分布函数 F 的边界,

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^d F_j(x_j) - d + 1, 0 \right\} \leq F(x) \leq \min_{1 \leq j \leq d} \{ F_j(x_j) \}$$

我们之后会由此推出相关系数的边界。

4、Copular 的例子

- 基础 copular
- 隐含 copular
- 显性 copular

(1) 基础 copula

独立 copula: $\Pi(u) = \prod_{j=1}^d u_j$ 是独立 copula

由于 $C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \underset{Sklar}{=} F(x) \underset{ind.}{=} \prod_{j=1}^d F_j(x_j)$, 当且仅当 $C(u) = \Pi(u)$ (用 $F_j^{\leftarrow}(u_j)$ 代

替 x_j 并应用公式 (1))。

因此, X_1, \dots, X_d 是相互独立的当且仅当它们的 copula 是 Π ; 分布函数为

$$c(u) = 1, u \in [0, 1]^d \quad \circ$$

反单调 copula: *countermonotonicity copula*

Frechet-Hoffding 边界 W 是反单调 copula。它是 $(U, 1-U)$ 的分布函数。

如果 X_1, X_2 是完全负相关 (X_2 几乎处处是 X_1 的严格减函数), 它们的 copula 为 W 。

同单调 copula: *comonotonicity copula*

Frechet-Hoffding 边界 M 是同单调 copula。它是 (U, \dots, U) 的分布函数。

如果 X_1, \dots, X_d 是完全正相关 perfectly positively dependent, 即 X_2, \dots, X_{d-1} 几乎处处是 X_1 的严格增函数), 它们的 copula 为 M 。

定义 2 (同单调(comonotonicity))

随机变量 X_1, \dots, X_d 是同单调的, 如果它们满足 Frechet 上边界

$$M(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\}。$$

命题： X_1, \dots, X_d 是同单调的当且仅当存在随机变量 z 和递增函数 v_1, \dots, v_d 满足

$$(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (v_1(Z), \dots, v_d(Z)) \quad (3)$$

命题： X_1, \dots, X_d 是有连续分布函数的随机变量。它们是同单调的当且仅当对任意一对 (i, j) ，存在递增变换 T_{ji} 使得 $X_j = T_{ji}(X_i)$ 几乎处处成立。

证明（自学）：

设根据定义 2 知， X_1, \dots, X_d 是同单调的。令 U 是任意服从均匀分布的随机变量， F 是

X_1, \dots, X_d 的联合分布函数 F_1, \dots, F_d ，是 X_1, \dots, X_d 的边际函数。

由 (1) 知对任意 $U \sim U(0,1)$

$$\begin{aligned}
F(x_1, \dots, x_d) &= \min \{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\} \\
&= P(U \leq \min \{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}) \\
&= P(U \leq F_1(x_1), \dots, U \leq F_d(x_d)) \\
&= P(F_1^{\leftarrow}(U) \leq x_1, \dots, F_d^{\leftarrow}(U) \leq x_d)
\end{aligned}$$

其中最后一个等式使用了命题 A.3(iv)。它满足

$$(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (F_1^{\leftarrow}(U), \dots, F_d^{\leftarrow}(U)), \quad (3)$$

反过来, 如果 (2) 成立, 则

$$F(x_1, \dots, x_d) = P(v_1(Z) \leq x_1, \dots, v_d(Z) \leq x_d) = P(Z \in A_1, \dots, Z \in A_d)$$

其中, A_i 是一个类似于 $(-\infty, k_i]$ 或者 $(-\infty, k_i)$ 的区间, 从而一个区间 A_i 是所有其他区间的子区间。因此

$$F(x_1, \dots, x_d) = \min \{P(Z \in A_1), \dots, P(Z \in A_d)\} = \min \{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}$$

同单调性得证。

.

定义（反单调性）随机变量 X_1 和 X_2 是反单调的，如果它们满足 Frechet 下边界

$$W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}。$$

命题 5.19 X_1 和 X_2 是反单调的当且仅当对部分随机变量 Z 和增函数 v_1 ，减函数 v_2 （反

之亦然）满足 $(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (v_1(Z), v_2(Z))$

隐性 copular

(1)高斯 Copula

如果 $X \sim N_d(0, P)$ 是一个高斯随机向量，则它的 copula 就是高斯 copula。标准化边缘数量：

$$\begin{aligned} C_p^{Ga}(u) &= P(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d) \\ &= \Phi_p(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) \end{aligned} \quad (9)$$

因此，高斯 copular 由协方差矩阵决定。

高斯 copula 没有简单的解析表达式，它可以通过对 x 的分布函数积分得到。

$$C_p^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds_1 ds_2$$

Sklar's Theorem \Rightarrow The density of $C(u) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$ is

$$c(u) = \frac{f(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))}{\prod_{j=1}^d f_j(F_j^{\leftarrow}(u_j))}, \quad u \in (0, 1)^d.$$

In particular, the density of C_P^{Ga} is

$$c_P^{\text{Ga}}(u) = \frac{1}{\sqrt{\det P}} \exp\left(-\frac{1}{2}x'(P^{-1} - I_d)x\right), \quad (30)$$

where $x = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$.

独立和同调是 Gauss copula 的特殊情况.

- 如果 $P = I_d$ ，得到独立 copula；
- 如果 $P = J_d$ ， d 阶矩阵中每个元素都是 1，我们得到同单调 copula；
- 如果 $d = 2$ ， $\rho = P_{12} = -1$ ，则高斯 copula 与反单调 copula 相同。
- ρ 表示相关程度。

(2) *t* copulas

考虑 $X \sim t_d(\nu, 0, P)$ 。 *t* copula 表示为

$$\begin{aligned} C_{\nu, P}^t(u) &= P(t_\nu(X_1) \leq u_1, \dots, t_\nu(X_d) \leq u_d) \\ &= t_{\nu, P}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu, P}^{-1}(u_d) \end{aligned}$$

其中 $t_{\nu, P}$ 是 $t_d(\nu, 0, P)$ 的密度函数， t_ν 是自由度为 ν 的单变量 *t* 分布的密度函数。

Sklar 定理 $\Rightarrow C_{\nu, P}^t$ 的密度函数为

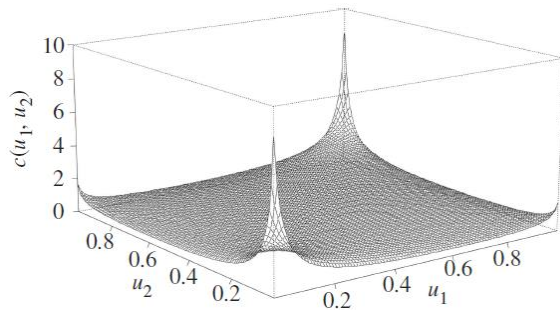
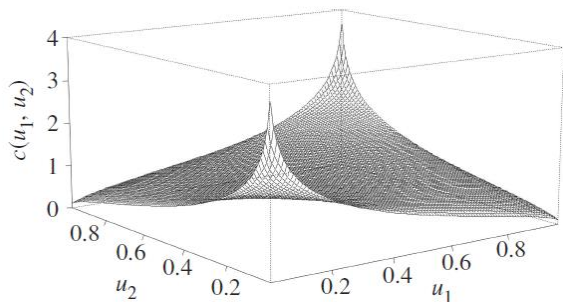
$$c_{\nu, P}^t(u) = \frac{\Gamma((\nu + d)/2)}{\Gamma(\nu/2) \sqrt{\det P}} \left(\frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma((\nu + 1)/2)} \right)^d \frac{(1 + x' P^{-1} x / \nu)^{-(\nu + d)/2}}{\prod_{j=1}^d (1 + x_j^2 / \nu)^{-(\nu + 1)/2}}$$

for $x = (t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d))$ 。

特例：

- $P = J_d = 11'$ 则 $C = M$ ，同单调。
- 但是，如果 $P = I_d$ ，则 $C \neq \prod$ ，即 C 不是独立。（除非 $\nu = \infty$ ，此时 $C_{\nu, P}^t = C_P^{Ga}$ ）。
- 如果 $d = 2$ ， $\rho = P_{12} = -1$ ，则 $C = W$ 。

$C_{\rho=0.3}^{Ga}$ （左边）和 $C_{4, \rho=0.3}^t(u)$ （右边）的密度函数透视图



椭圆 copula 的优缺点:

优点:

- 模仿两两相关性 (相对灵活)
- 密度函数已知
- 抽样简便

缺点:

- C 没有显性表达式
- 径向对称 (两侧尾部相同)

显性 copular

阿基米德 Archimedean copulas 的形式为

$$C(u) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)\right), \quad u \in [0,1]^d$$

其中 Archimedean 生成算子 $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0,1]$ 在 $[0, \inf\{t: \psi(t)=0\}]$ 上 \downarrow ，且满足

$\psi(0)=1, \psi(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)=0$ ；令 $\psi^{-1}(0)=\inf\{t: \psi(t)=0\}$ 。所有生存算子的集合

用 Ψ 来表示。如果 $\psi(t) > 0, t \in [0, \infty)$ ，则称 ψ 严格。

阿基米德 Archimedean copulas 的例子

● Gumbel copula

$$C_{\theta}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left\{-\left((- \ln u_1)^{\theta} + (- \ln u_2)^{\theta}\right)^{1/\theta}\right\}, \quad 1 \leq \theta \leq \infty$$

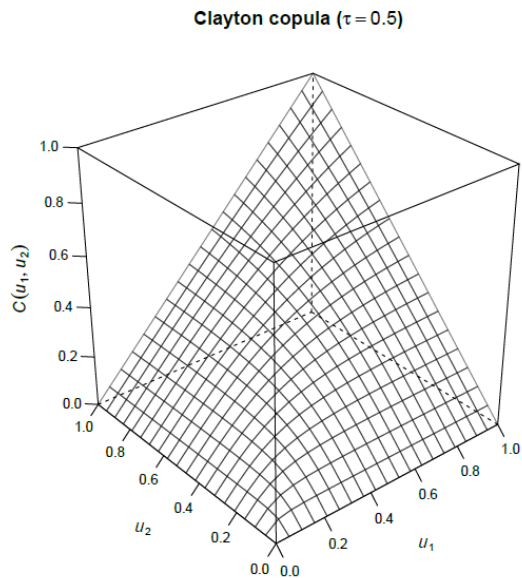
- 如果 $\theta=1$ ，得到的特例是一个独立 copula。

- 当 $\theta \rightarrow \infty$ 时, C_θ^{Gu} 的极限是二维同单调 copula。

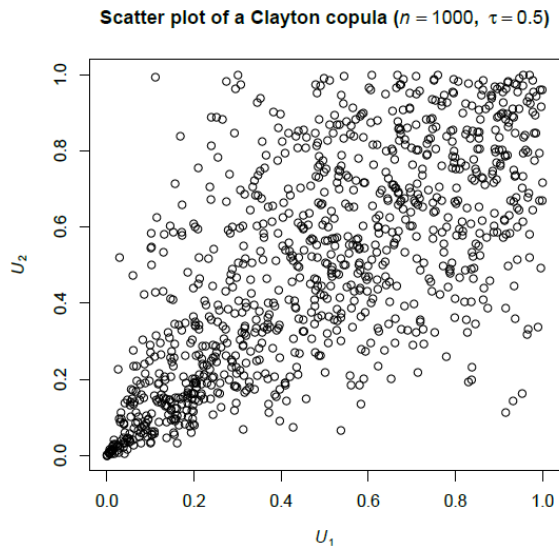
- **Clayton copula:**

$$C_\theta^{C1}(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta}, \quad 0 < \theta < \infty$$

当 $\theta \rightarrow 0$ 时我们得到独立 copula, 当 $\theta \rightarrow \infty$ 时我们得到二维同单调 copula。



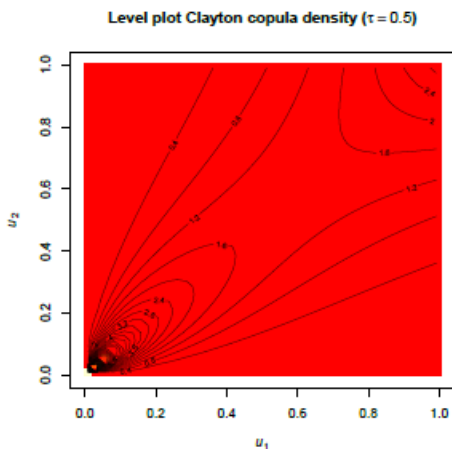
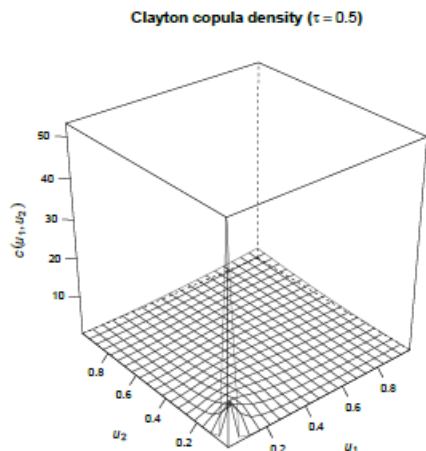
左边: 二元 Clayton copula 图



右边: 相应的散点图(样本量 $n = 1000$)

Left: Plot of the corresponding density.

Right: Level plot of the density (with heat colors).



Archimedean copulas

回忆一个 (Archimedean) 构造函数 ψ 是 $\psi:[0,\infty)\rightarrow[0,1]$ 的映射, 在区间

$[0,\inf\{t:\psi(t)=0\}]$ 上是 \downarrow , 且满足 $\psi(0)=1, \psi(\infty)=\lim_{t\rightarrow\infty}\psi(t)=0$; 所有构造函数的集合用 Ψ 来表示。

二元 Archimedean copulas

定理 (二元显性 copulas)

对 $\psi\in\Psi, C(u_1,u_2)=\psi(\psi^{-1}(u_1)+\psi^{-1}(u_2))$ 是一个 copula 当且仅当 ψ 是凸函数。

对一个严格连续二次可导函数 ψ , 可以证明

$$\rho_\tau = 1 - 4 \int_0^\infty t (\psi'(t))^2 dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\psi^{-1}(t)}{(\psi^{-1}(t))'}, dt$$

如果 ψ 是严格的, 则 $\lambda_l = 2 \lim_{t\rightarrow\infty} \frac{\psi'(2t)}{\psi'(t)}$, 且 $\lambda_u = 2 - 2 \lim_{t\downarrow 0} \frac{\psi'(2t)}{\psi'(t)}$ 。

最常用的单参数 **Archimedean Copulas** 是:

Family	θ	$\psi(t)$	$V \sim F = LS^{-1}(\psi)$
A	$[0,1)$	$(1-\theta)/(\exp(t)-\theta)$	$Geo(1-\theta)$
Clayton	$(0,\infty)$	$(1+t)^{-1/\theta}$	$\Gamma(1/\theta,1)$
Frank	$(0,\infty)$	$-\log(1-(1-e^{-\theta})\exp(-t))/\theta$	$Log(1-e^{-\theta})$
Gumbel	$[1,\infty)$	$\exp(-t^{1/\theta})$	$S(1/\theta,1,\cos^{\theta}(\pi/(2\theta)),I_{\{\theta-1\}};1)$
Joe	$[1,\infty)$	$1-(1-\exp(-t))^{1/\theta}$	$Sibuya(1/\theta)$

Archimedean Copulas 对应的相关系数

Family	ρ_τ	λ_1	λ_2
A	$1 - 2\left(\theta + (1 - \theta)^2 \log(1 - \theta)\right) / (3\theta^2)$	0	0
C	$\theta / (\theta + 2)$	$2^{-1/\theta}$	0
F	$1 + 4\left(D_1(\theta) - 1\right) / \theta$	0	0
G	$(\theta - 1) / \theta$	0	$2 - 2^{1/\theta}$
J	$1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} 1 / \left(k(\theta k + 2)(\theta(k - 1) + 2)\right)$	0	$2 - 2^{1/\theta}$

Multivariate Archimedean copulas

定义 称 ψ 是完全单调的(c.m.), 如果对所有 $t \in (0, \infty)$ 和 $k \in N_0$, 都有 $(-1)^k \psi^{(k)}(t) \geq 0$ 成立。完全单调的构造函数的集合 Ψ_0 用来表示。

定理 (Kimberling(1974)) (自学)

如果 $\psi \in \Psi$, 对 $\forall d$, $C(u) = \psi\left(\sum_{j=1}^d \psi^{-1}(u_j)\right)$ 是一个 copula, 当且仅当 $\psi \in \Psi_\infty$ 。

Bernstein 定理涵盖了所有 $\psi \in \Psi_\infty$ 。

定理 (Bernstein(1928)) (自学)

$\psi(0)=1$, ψ 完全单调, 当且仅当 $\psi(t) = E(\exp(-tV))$, for $V \sim G$, $V \geq 0$, 且 $G(0)=0$ 。

我们因此使用 $\psi = \hat{G}$ 这一概念, 并且将所有满足 $\psi \in \Psi_\infty$ 的显性 copulas 称为 LT-Archimedean copulas。

命题 7.31 (随机表达, 相关性质) (自学)

令 $\psi \in \Psi_\infty$, 满足 $V \sim G$, $\hat{G} = \psi$; 令 $E_1, \dots, E_d \underset{\text{ind.}}{\sim} \text{Exp}(1)$ 与 V 独立。则

1) $X = \left(\frac{E_1}{V}, \dots, \frac{E_d}{V} \right)$ 的生存 copula 是 Archimedean (with ψ)。

2) 假设 V 满足 $P(U_j \leq u | V = v) = \exp(-v\psi^{-1}(u))$, 则 $U = (\psi(X_1), \dots, \psi(X_d))$ 和 U_j 是条件独立的。

证明:

X 的联合生存函数为

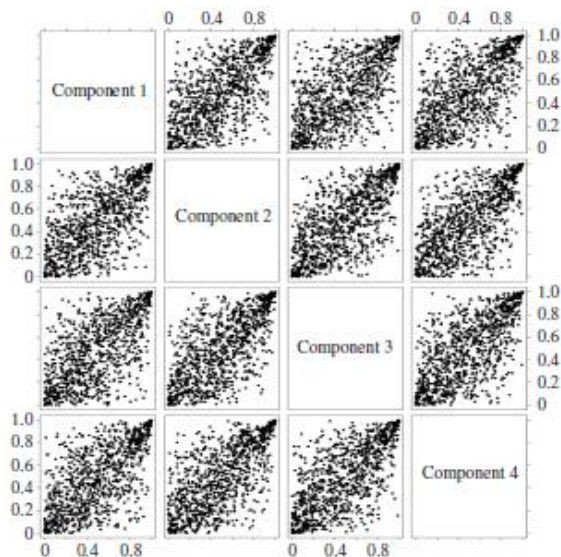
$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= P(X_j > x_j, \forall j) = \int_0^\infty P(E_j / V > x_j, \forall j | V = v) dG(v) \\ &= \int_0^\infty P(E_j > vx_j, \forall j) dG(v) = \int_0^\infty \prod_{j=1}^d \exp(-vx_j) dG(v) \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-v \sum_{j=1}^d x_j\right) dG(v) = \psi\left(\sum_{j=1}^d x_j\right) \end{aligned}$$

由命题可以得到 **Copula** 的模拟算法

Algorithm 7.32 (Marshall and Olkin (1988))

- 1) Sample $V \sim G$ (df corresponding to ψ).
- 2) Sample $E_1, \dots, E_d \stackrel{\text{ind.}}{\sim} \text{Exp}(1)$ independently of V .
- 3) Return $U = (\psi(E_1/V), \dots, \psi(E_d/V))$ (conditional independence).

1000 samples of a 4-dim. Gumbel copula ($\rho_\tau = 0.5$; $\lambda_u \approx 0.5858$)



- Various non-exchangeable extensions to Archimedean copulas exist.
- For fixed d , c.m. can be relaxed to d -monotonicity; see McNeil and Nešlehová (2009).

Archimedean copulas 的优缺点:

优点:

- 显性表达式 (如果 ψ^{-1} 已知)
- 在计算中很有用: 其形状可以用 ψ 来表示
- 多种例子的分布密度已知
- 通常来说, 抽样简便
- 不一定径向对称

缺点:

- All margins of the same dimension are equal (symmetry or exchangeability; see later) 所有同维边际分布相同 (对称或者可交换)
- 经常仅使用很少的参数 (还可以得到一些推广, 但仍然少于 $d(d-2)/2$)

Meta-C 分布族

meta-Gaussian distribution: 具有 Gauss copula C_p^{ga} , 边际分布为任意分布.

推广:

- a meta-tv 分布具有 t copula, 边际分布为任意分布
- a meta-Clayton 具有 Clayton copula, 边际分布为任意分布.

如何模拟 copula 函数

由于 copula 的构造是通过 Sklar 定理的，具体的 copulas 可以通过不变引理来模拟
算法 7.9（模拟具体 copulas）

模拟 $X \sim F$ ，其中 F 是密度函数，边际分布的密度函数 F_1, \dots, F_d 连续。

返回 $U = (F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ （概率变换）

例 7.10

- 模拟高斯 copulas C_P^{Ga} :

(1) 模拟 $X \sim N_d(0, P) \left(X = AZ \text{ for } AA' = P, Z \sim N_d(0, I_d) \right)$

(2) 返回 $U = (\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_d))$.

- 模拟 t_ν copulas $C_{\nu, P}^t$:

(1) 模拟 $X \sim t_d(\nu, 0, P) \left(X = \sqrt{W} AZ \text{ for } W = \frac{1}{V}, V \sim \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \right)$

(2) 返回 $U = (t_\nu(X_1), \dots, t_\nu(X_d))$

- 阿基米德 couplas

Algorithm 7.32 (Marshall and Olkin (1988))

- 1) Sample $V \sim G$ (df corresponding to ψ).
- 2) Sample $E_1, \dots, E_d \stackrel{\text{ind.}}{\sim} \text{Exp}(1)$ independently of V .
- 3) Return $U = (\psi(E_1/V), \dots, \psi(E_d/V))$ (conditional independence).

- 模拟 meta 分布

Meta-C 分布可以通过 Sklar 定理部分 2) 模拟

算法 7.11 (模拟 meta-C 模型)

模拟 $U \sim C$

返回 $X = (F_1^\leftarrow(U_1), \dots, F_d^\leftarrow(U_d))$ (分位点变换)

R 实例

```
library(copula)
library(gridExtra) # for grid.arrange()
n <- 1000 # sample size
set.seed(271)

## Define the copulas 定义
nc <- normalCopula(th.n) # Gauss copula
gc <- gumbelCopula(th.g) # Gumbel copula
cc <- claytonCopula(th.c) # Clayton copula
tc <- tCopula(th.t) # t_4 copula

## Generate copula data
U.nc <- rCopula(n, copula = nc)
U.gc <- rCopula(n, copula = gc)
U.cc <- rCopula(n, copula = cc)
U.tc <- rCopula(n, copula = tc)

## 从 Copula 映射到 N(0,1) Map to N(0,1) margins (meta-copula data)
X.nc <- qnorm(U.nc)
X.gc <- qnorm(U.gc)
X.cc <- qnorm(U.cc)
```

```
X.tc <- qnorm(U.tc)
```

```
##相关矩阵 Correlations
```

```
cors <- vapply(list(X.nc, X.gc, X.cc, X.tc), function(x) cor(x)[1,2], NA_real_)  
stopifnot(all.equal(cors, rep(0.7, 4), tol = 0.015))
```

```
## Define the corresponding (meta-C) densities (via Sklar's Theorem)
```

```
## Note: Density  $f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) * f_1(x_1) * f_2(x_2)$ 
```

```
##                                     = exp( log(c(F_1(x_1), F_2(x_2))) + log(f_1(x_1)) +  
log(f_2(x_2)) )
```

```
dMetaCopulaN01 <- function(x, copula)
```

```
  exp(dCopula(pnorm(x), copula = copula, log = TRUE) + rowSums(dnorm(x, log = TRUE)))
```

```
## Alternatively, we could work with dMvdc() here
```

```
### 3 Explicit copulas
```

```
#####
```

```
### 3.1 Clayton copula
```

```
#####
```

```
## Define the Clayton copula object  
th <- iTau(claytonCopula(), tau = tau)  
cc <- claytonCopula(th)
```

```
## Copula (wire frame and level curves)  
wireframe2(cc, FUN = pCopula)  
contourplot2(cc, FUN = pCopula)
```

```
## Copula density (wire frame and level curves)  
wireframe2(cc, FUN = dCopula, delta = 0.02)  
contourplot2(cc, FUN = dCopula)
```

```
## Scatter plots  
cc. <- claytonCopula(th, dim = 5)  
U <- rCopula(n, copula = cc.)  
plot(U[,1:2], xlab = expression(U[1]), ylab = expression(U[2])) # d = 2  
cloud2(U[,1:3], # d = 3  
       xlab = expression(U[1]), ylab = expression(U[2]), zlab = expression(U[3]))  
pairs2(U, cex = 0.4, col = tblack(0.5)) # d = 5
```



```
### 3.2 Gumbel copula
```

```
#####
```

```
## Define the Gumbel copula object
```

```
th <- iTau(gumbelCopula(), tau = tau)
```

```
gc <- gumbelCopula(th)
```

```
## Copula (wire frame and level curves)
```

```
wireframe2(gc, FUN = pCopula)
```

```
contourplot2(gc, FUN = pCopula)
```

```
## Copula density (wire frame and level curves)
```

```
wireframe2(gc, FUN = dCopula, delta = 0.02)
```

```
contourplot2(gc, FUN = dCopula)
```

```
## Scatter plots
```

```
gc. <- gumbelCopula(th, dim = 5)
```

```
U <- rCopula(n, copula = gc.)
```

```
plot(U[,1:2], xlab = expression(U[1]), ylab = expression(U[2])) # d = 2
cloud2(U[,1:3], # d = 3
       xlab = expression(U[1]), ylab = expression(U[2]), zlab = expression(U[3]))
pairs2(U, cex = 0.4, col = tblack(0.5)) # d = 5
```

```
## Scatter plot of a survival Gumbel copula
pairs2(1-U, cex = 0.4, col = tblack(0.5))
```

```
## Only the first component flipped
pairs2(U, cex = 0.4, col = tblack(0.5)) # original
pairs2(cbind(1-U[,1], U[,2:5]), cex = 0.4, col = tblack(0.5)) # first flipped
```

```
### 3.3 Outer power Clayton copula
```

```
#####
```

```
## Note: Outer power Clayton copulas can have both lower and upper tail dependence
```

```
## Define the outer power Clayton copula
tauC <- 0.3 # Kendall's tau for the underlying Clayton copula
```

```
thC <- copClayton@iTau(tauC) # choose Clayton's generator s.t. Kendall's tau is tauC
opC <- opower(copClayton, thC) # define an outer power Clayton copula (its parameter theta is
not specified yet)
th <- opC@iTau(tau) # define the outer power Clayton copula s.t. has Kendall's tau is tau
opcc <- onacopulaL(opC, list(th, 1:2)) # define the outer power Clayton copula
```

```
## Scatter plot
```

```
U <- rCopula(n, copula = opcc)
plot(U[,1:2], xlab = expression(U[1]), ylab = expression(U[2])) # d = 2
```

```
### 3.4 Marshall--Olkin copulas
```

```
#####
```

```
## Note: Marshall--Olkin copulas have a singular component, i.e., a set of
##         Lebesgue measure 0 with positive probability mass assigned.
```

```
## Define the MO copula
```

```
C <- function(u, alpha) {
  if(!is.matrix(u)) u <- rbind(u)
```

```

stopifnot(0 <= alpha, alpha <= 1, length(alpha) == 2)
pmin(u[,1]*u[,2]^(1-alpha[2]), u[,1]^(1-alpha[1])*u[,2])
}

```

Sampling

```

rMO <- function(n, alpha) {
  stopifnot(n >= 1, 0 <= alpha, alpha <= 1, length(alpha) == 2)
  U. <- matrix(runif(n*3), ncol = 3)
  U <- cbind(pmax(U[,1]^(1/(1-alpha[1])), U[,3]^(1/alpha[1])),
             pmax(U[,2]^(1/(1-alpha[2])), U[,3]^(1/alpha[2])))
}

```

Define the singular component

```

S.C <- function(u, alpha) {
  stopifnot(0 <= u, u <= 1,
            0 <= alpha, alpha <= 1, length(alpha) == 2)
  tau <- alpha[1] * alpha[2] / (alpha[1] + alpha[2] - alpha[1] * alpha[2])
  tau * pmin(u[,1]^alpha[1], u[,2]^alpha[2])^(1/tau)
}

```

```
## Define the absolutely continuous component  
A.C <- function(u, alpha) C(u, alpha) - S.C(u, alpha)
```

```
## Scatter plot  
alpha <- c(0.2, 0.8)  
U <- rMO(n, alpha = alpha)  
plot(U, xlab = expression(U[1]), ylab = expression(U[2]))  
## Interpretation: Given  $u_1 = 0.6$ , for example,  $u_2$  lies with a non-zero  
## probability  $p$  on the curve and with the remaining probability  $1-p$   
## anywhere else (*not*: uniform) along the line  $u_1 = 0.6$ .
```

```
## Check the margins  
plot(U[,1], ylab = expression(U[1]))  
plot(U[,2], ylab = expression(U[2]))
```

```
## Evaluate the copula (and its singular and absolutely continuous components)  
grid <- expand.grid("u[1]" = u, "u[2]" = u) # build a grid  
val.C <- cbind(grid, "C(u[1],u[2])" = C(grid, alpha = alpha)) # append C  
val.S <- cbind(grid, "S[C](u[1],u[2])" = S.C(grid, alpha = alpha)) # append S.C
```

```
val.A <- cbind(grid, "A[C](u[1],u[2])" = A.C(grid, alpha = alpha)) # append S.C
```

```
## Copula (wire frame and level curves)
```

```
wireframe2(val.C) # wire frame plot
```

```
contourplot2(val.C, xlim = 0:1, ylim = 0:1) # level curves
```

```
## The copula has a kink, that is, a so-called singular component.
```

```
## A singular component is a set of Lebesgue measure 0 where C puts
```

```
## mass at (here: a curve). This is better visible from the scatter plots below.
```

```
## Singular and absolutely continuous component (wire frame)
```

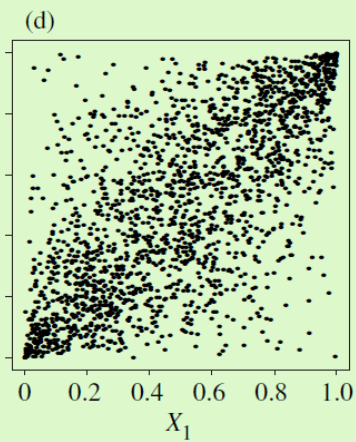
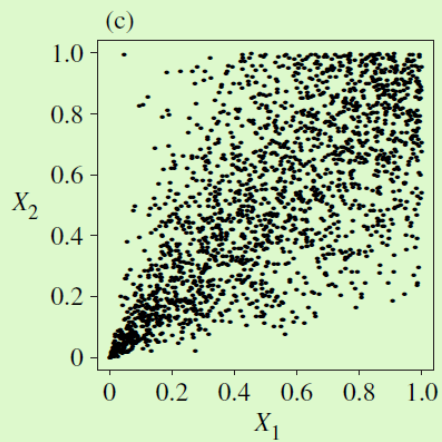
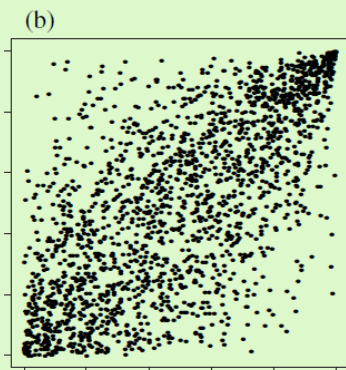
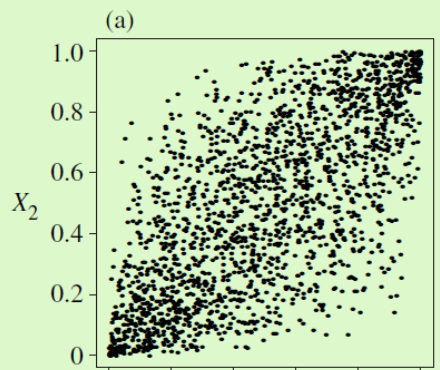
```
wireframe2(val.S) # singular component
```

```
wireframe2(val.A) # absolutely continuous component
```

例（模拟产生多种 copulas）在图中展示了从 4 个 copulas 中模拟的 2000 个样本点：

参数为 $\rho = 0.7$ 的高斯 copula（5.9）；参数为 $\theta = 2$ 的 Gumbel copula（5.11）；参数为

$\theta = 2.2$ 的 Clayton copula（5.12）；参数为 $\nu = 4$ 和 $\rho = 0.71$ 的 t copula（5.10）。



一般抽样算法（自学）

对于一个一般的 copula C （没有更多的信息），唯一已知的抽样算法是条件分布方法。see Embrechts et al. (2003) and Hofert (2010, p.41).

定理 7.12（条件分布方法）

如果 C 是一个 d 维 copula 并且满足 $U' \sim U(0,1)^d$ ，则 $U \sim C$ ，其中

$$U_1 = U_1',$$

$$U_2 = C_{2|1}^{\leftarrow}(U_2' | U_1),$$

$$U_3 = C_{3|1,2}^{\leftarrow}(U_3' | U_1, U_2),$$

$$\vdots$$

$$U_d = C_{d|1,\dots,d-1}^{\leftarrow}(U_d' | U_1, \dots, U_{d-1})$$

这通常涉及数值求根和以下结果。

Theorem 7.13 (Schmitz (2003))

Let C be a d -dimensional copula which admits, for $d \geq 3$, continuous partial derivatives w.r.t. u_1, \dots, u_{d-1} . For a.e. $u_1, \dots, u_{j-1} \in [0, 1]$,

$$C_{j|1, \dots, j-1}(u_j | u_1, \dots, u_{j-1}) = \frac{D_{j-1, \dots, 1} C^{(1, \dots, j)}(u_1, \dots, u_j)}{D_{j-1, \dots, 1} C^{(1, \dots, j-1)}(u_1, \dots, u_{j-1})},$$

where $C^{(1, \dots, j)}(u_1, \dots, u_j) = C(u_1, \dots, u_j, 1, \dots, 1)$ and $D_{j-1, \dots, 1}$ is the differential operator w.r.t. u_1, \dots, u_{j-1} .

Note: $C_{2|1}(u_2 | u_1) = \frac{D_1 C(u_1, u_2)}{1} = D_1 C(u_1, u_2)$ which also follows from

$$\begin{aligned} & \lim_{h \downarrow 0} \frac{C(u_1 + h, u_2) - C(u_1, u_2)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(U_1 \leq u_1 + h, U_2 \leq u_2) - \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(U_2 \leq u_2, u_1 < U_1 \leq u_1 + h)}{\mathbb{P}(u_1 < U_1 \leq u_1 + h)} = \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}(U_2 \leq u_2 | u_1 < U_1 \leq u_1 + h). \end{aligned}$$

二、相关性

1、相关性测度 Dependence Measures

相关性在金融领域中非常重要,描述的是变量之间的相互关系,常见的相关性有

- 完全相关 Perfect dependence
- Linear Correlation 线性相关
- Rank Correlation 秩相关
- Coefficients of Tail Dependence 尾相关的相关系数

完全相关 Perfect dependence

如果 (X_1, X_2) 的 copula 为 W , 则 X_1, X_2 是反单调的。

如果 (X_1, \dots, X_d) 的 copula 为 M , 则 X_1, \dots, X_d 是同单调的。

命题（完全相关）

1) $T(x) = F_2^{\leftarrow}(1 - F_1(x))$ 递减（反单调）对 $X_2 = T(X_1)$ 几乎处处成立，当且仅当

$$C(u_1, u_2) = W(u_1, u_2), u_1, u_2 \in [0, 1]$$

2) $T_j(x) = F_j^{\leftarrow}(F_1(x))$, $j \in \{2, \dots, d\}$ 递增（同单调）对 $X_j = T_j(X_1)$ 几乎处处成立，

当且仅当 $C(u) = M(u)$, $u \in [0, 1]^d$

Linear Correlation 线性相关

linear or *Pearson's* 相关系数

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{var}(X_i) \text{var}(X_j)}}$$

Proposition 7.16 (Höfdding's formula)

Let $X_j \sim F_j$, $j \in \{1, 2\}$, be two random variables with $\mathbb{E}(X_j^2) < \infty$, $j \in \{1, 2\}$, and joint distribution function F . Then

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)) dx_1 dx_2.$$

线性相关性的经典性质

X_1 和 X_2 是两个随机变量, 满足 $E(X_j^2) < \infty, j \in \{1, 2\}$

注意 ρ 取决于边际分布! 特别的, 二阶矩必须存在 (二阶矩不存在的例子, 比如

$$X_1, X_2 \stackrel{ind.}{\sim} F(x) = 1 - x^{-3}$$

- $|\rho| \leq 1$ 。 $|\rho| = 1$ 的含义: $X_2 = \alpha + \beta X_1$
- 如果 X_1 和 X_2 是相互独立的, 则 $\rho = 0$ 。然而, 反过来未必成立; 见例 7.17。
- 相关性 ρ 在 $\text{ran } X_1 \times \text{ran } X_2$ 严格增加的线性变换下是不变的, 但在非线性严格增加的变换下不是不变的 $\rho(T(X_1), T(X_2)) \neq \rho(X_1, X_2)$ 。比如 $(X_1, X_2) \sim N_2(0, P)$, 满足 $P_{12} = \rho$ 。尽管 $\rho(X_1, X_2) = \rho$, 但是 $\rho(F_1(X_1), F_2(X_2)) = \frac{6}{\pi} \arcsin(\rho/2)$ 。

R 计算 Person

```
> X1 《-c(1, 2, 3, 4, 5, 6)
> Y1 《-c(0.3, 0.9, 2.7, 2, 3.5, 5)
> mean(X1)  #平均值
[1] 3.5
> mean(Y1)
[1] 2.4
> var(X1)    #方差
[1] 3.5
> var(Y1)
[1] 2.976
> sd(X1)     #标准差
[1] 1.870829
> sd(Y1)
[1] 1.725109
> cov(X1,Y1) #协方差
[1] 3.06
> cor(X1,Y1,method="pearson") #皮尔森相关性系数
[1] 0.9481367
```

```
> X2 《-c(1,1,1,1,1,1)
```

```
> cor(X2,Y1,method="pearson")
```

```
[1] NA
```

Warning message:

In cor(X2, Y1, method = "pearson") : the standard deviation is zero

X2 里面的取值根本没有任何波动，那它与 **Y1** 的相关性也就没法用这种方法来计算了。

因为皮尔森相关性系数是协方差与标准差的比值，所以它对数据是有比较高的要求的：

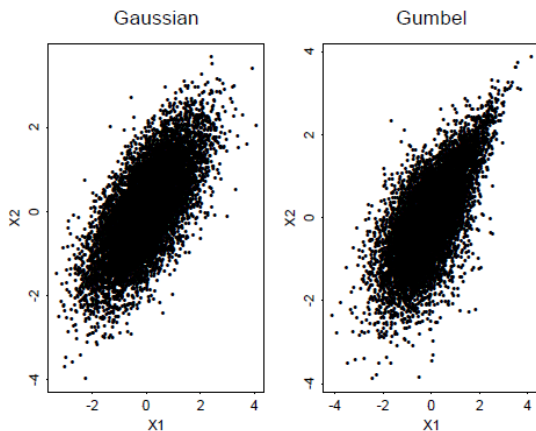
第一， 实验数据通常假设是成对的来自于正态分布的总体。通常还会用 **t** 检验之类的方法来进行皮尔森相关性系数检验，而 **t** 检验是基于数据呈正态分布的假设的。

第二， 实验数据之间的差距不能太大，或者说皮尔森相关性系数受异常值的影响比较大。

线性相关的 3 个谬误 (Correlation fallacies) (自学)

谬误 1: F_1, F_2 和 ρ 可以唯一决定 F

对二元椭圆分布来说是对的, 但是广义上来说是错的。下面的样本都有服从正态分布 $N(0,1)$ 的边际分布和相关系数 $\rho = 0.7$, 但是却来自不同的 *copula* 模型:



例 7.17 (不相关 \nRightarrow 独立)

- 考虑以下两个风险:

$$X_1 = Z \quad (\text{国家 A 的收益和损失})$$

$$X_2 = ZV \quad (\text{国家 B 的收益和损失})$$

其中 V, Z 相互独立, 满足 $Z \sim N(0,1)$ 和 $P(V=-1)=P(V=1)=1/2$ 。则 $X_2 \sim N(0,1)$,

且 $\rho(X_1, X_2) = \text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) = E(V)E(Z^2) = 0$, 但是 X_1 和 X_2 不是相互独立的 (事实上, V 在反单调和同单调中相互转化)

- 考虑 $(X_1', X_2') \sim N_2(0, I_2)$ 。 (X_1', X_2') 和 (X_1, X_2) 都有服从正态分布 $N(0,1)$ 的边缘分布和 $\rho=0$, 但是 (X_1', X_2') 的 copula 是 Π , 而 (X_1, X_2) 的 copula 是凸组合 $C(u) = \lambda M(u) + (1-\lambda)W(u)$, 其中 $\lambda=0.5$ 。

谬误 2: 在给定 F_1, F_2 的情况下, ρ 可能取到区间 $[-1, 1]$ 中的任意值

(X_1, X_2) 是椭圆分布, 满足 $E(R^2) < \infty$ ($\text{corr } X = P$) 是成立的, 但是广义上来说是错误的:

- 如果 F_1 和 F_2 不是相同类型 (非线性), $\rho(X_1, X_2)$ 取不到 1 (回忆一下, $|\rho|=1$

当且仅当存在常量 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$ 使得 $X_2 = aX_1 + b$ 几乎处处成立)。

- 那 ρ 能取到什么范围内? **Hoffding 公式**

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (C(F_1(x_1), F_2(x_2)) - F_1(x_1)F_2(x_2)) dx_1 dx_2$$

可以推断出 ρ 的可取边界,

$\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ (ρ_{\min} 由 $C=W$ 得出, ρ_{\max} 由 $C=M$ 得出)。

定理 7.28 (相关系数的取值范围) (X_1, X_2) 是一个随机向量, 其边际分布函数为 F_1 和 F_2 , 且边际分布方差有限, 联合分布未知; 另外假设 $\text{var}(X_1) > 0$ 和 $\text{var}(X_2) > 0$ 。则下列论断成立。

(1) 相关系数的可取范围是一个闭区间 $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$, 且 $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$ 。

(2) 相关系数取到最小 $\rho = \rho_{\min}$, 当且仅当 X_1 和 X_2 是反单调的。相关系数取到最

大 $\rho = \rho_{\max}$, 当且仅当 X_1 和 X_2 是同单调的。

(3) $\rho_{\min} = -1$ 当且仅当 X_1 和 $-X_2$ 属于相同类型, $\rho_{\max} = 1$ 当且仅当 X_1 和 X_2 属于相同类型。

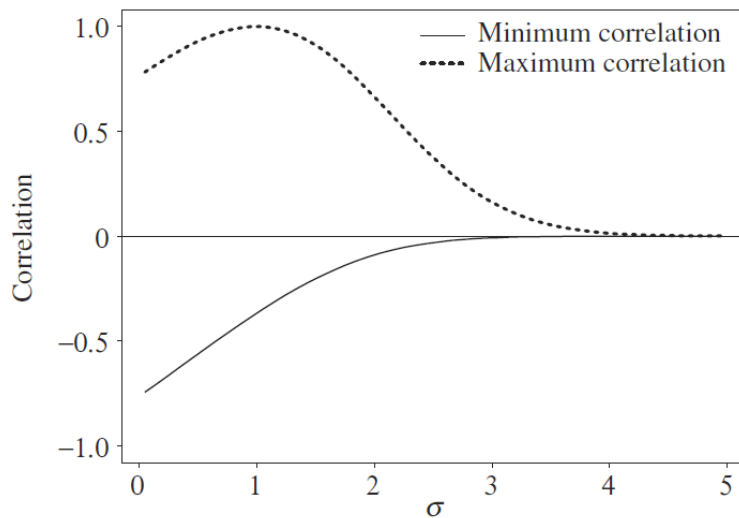
例 (对数正态随机变量相关系数的取值范围)

$$\ln X_1 \sim N(0,1) \text{ 及 } \ln X_2 \sim N(0,\sigma^2)$$

当 $\sigma \neq 1$ 时, 对数正态随机变量 X_1 和 X_2 不属于相同类型 (尽管 $\ln X_1$ 和 $\ln X_2$ 属于相同类型), 因此由定理 7.28(3)知, $\rho_{\max} < 1$ 。随机变量 X_1 和 $-X_2$ 也不属于相同类型, 则 $\rho_{\min} > -1$ 。

$$\rho_{\min} = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2} - 1)}}, \quad \rho_{\max} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2} - 1)}}$$

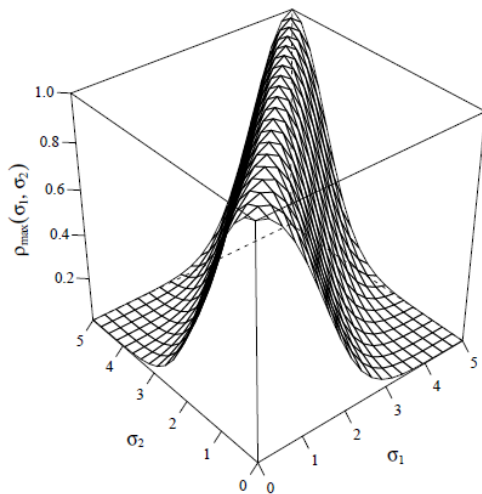
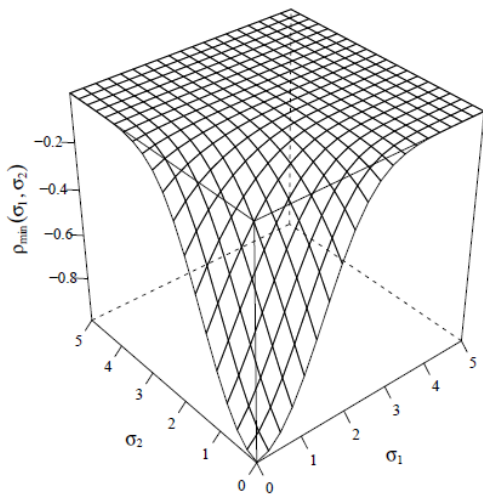
具体地，假设 $X_1 \sim LN(0,1)$ 及 $X_2 \sim LN(0,\sigma^2)$ 。下图表示 ρ_{\min} 和 ρ_{\max} 随 σ 的变化而变化：



随着 σ 的增加，区间的两侧边界都快速趋向 0。
同单调的随机变量可以取到相当小的相关系数。

例 7.18 (边际分布为 $LN(0, \sigma_j^2)$ 的模型的相关系数的可取边界)

假设 $X_j \sim LN(0, \sigma_j^2)$, $j \in \{1, 2\}$ 。可以证明最小的相关系数(左)和最大的相关系数(右)如下所示:



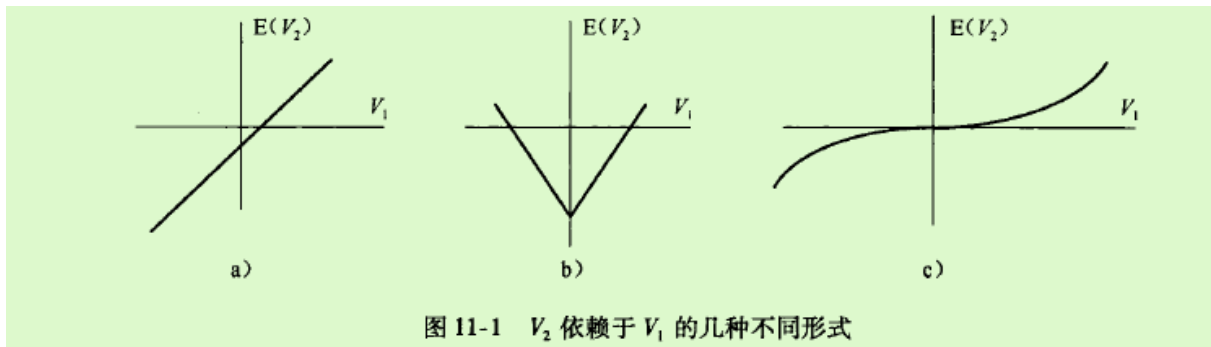
当 $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 16$ 时, 相关系数 $\rho \in [-0.0003, 0.0137]$!

谬误3: ρ 取到最大 (也就是 $C = M$) $\Rightarrow VaR_\alpha(X_1 + X_2)$ 取到最大

当 (X_1, X_2) 服从椭圆分布时该论断正确。由于相关系数最大能取到1 可以推断出是同单调的, 因此满足可加性;

任意超可加性的例子 $VaR_\alpha(X_1 + X_2) > VaR_\alpha(X_1) + VaR_\alpha(X_2)$ 可以用来作反例, 只有在同单调 (相关系数最大) 时不等式右手边才能等于 $VaR_\alpha(X_1 + X_2)$ 。

除了线性相关外, 变量之就可以有许多不同形式的关联关系



Rank Correlation 秩相关

定义 7.19 (*Kendall's tau* 等级相关)

假设 $X_j \sim F_j$, $j \in \{1, 2\}$, 且 F_j 连续。 (X_1', X_2') 是 (X_1, X_2) 的一个独立副本。*Kendall's tau* 定义为:

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= E\left(\text{sign}\left((X_1 - X_1')(X_2 - X_2')\right)\right) \\ &= P\left((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0\right) - P\left((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0\right)\end{aligned}$$

其中 $\text{sign}(x) = I_{(0, \infty)}(x) - I_{(-\infty, 0)}(x)$ (即 $x < 0$ 时取 -1, $x = 0$ 时取 0, $x > 0$ 时取 1)。

高维情形

$$\rho_\tau(\mathbf{X}) = \text{cov}\left(\text{sign}(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})\right)$$

其中 $\tilde{\mathbf{X}}$ 是 \mathbf{X} 的一个独立副本。

Kendall 秩相关系数可以看作是二元随机向量同调性的度量。

- 如果 $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$ ，则同调
- 如果 $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$ ，则不同调

命题 7.20（秩相关系数的计算公式）

假设 $X_j \sim F_j$ ， $j \in \{1, 2\}$ ，且 F_j 连续；copula 为 C 。则

$$\rho_\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 = 4E(C(U_1, U_2)) - 1$$

其中 $(U_1, U_2) \sim C$

证明：见附录。

一般可以用样本的等级相关系数来估计 ρ_τ :

同样, 用 $rank(X_{t,i})$ 来表示 $X_{1,i}, \dots, X_{n,i}$ 中 $X_{t,i}$ 的序 (即在排序样本中的位置), 可以计算 $\left\{ \left(rank(X_{t,i}), rank(X_{t,j}) \right) \right\}$ 的相关系数, 进而得到 **Kendall's rank correlation** 样本相关系数。

$$\frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{t=1}^n \left(rank(X_{t,i}) - \frac{1}{2}(n+1) \right) \left(rank(X_{t,j}) - \frac{1}{2}(n+1) \right)$$
$$\left(\binom{n}{2} \right)^{-1} \sum_{1 \leq t < s \leq n} \text{sign}((X_{t,i} - X_{s,i})(X_{t,j} - X_{s,j}))$$
$$r_n^\tau = \frac{1}{\left(\binom{n}{2} \right)} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} \text{sign}((X_{i_1 1} - X_{i_2 1})(X_{i_1 2} - X_{i_2 2}))$$

例: 对某地区 12 个街道进行调查, 并对经济发展水平和卫生水平按规定的标准打分, 评定结果如下表, 分析**经济发展水平**和**卫生水平**的相关程度。

区县编号	经济水平(x)	卫生水平(y)
1	82	86
2	87	78
3	60	65
4	98	88
5	75	64
6	89	90
7	84	80
8	78	77
9	80	76
10	94	96
11	85	85
12	68	70

数据来源：《非参数统计：方法与应用》 易丹辉、董寒青 中国统计出版社 138 页例 7.7

手算：

将上表中经济发展水平的评分按从小到大的顺序排列，得到下表：

区县编号	经济水平(x)	卫生水平(y)
------	---------	---------

3	60	65
12	68	70
5	75	64
8	78	77
9	80	76
1	82	86
7	84	80
11	85	85
2	87	78
6	89	90
10	94	96
4	98	88

计算卫生水平的一致对数目：

$$U = 10 + 9 + 9 + 7 + 7 + 3 + 4 + 3 + 3 + 1 = 56$$

Kendall 秩相关系数：

$$T = \frac{4 \times 56}{12 \times (12 - 1)} - 1 = 0.6970$$

$$r_n^\tau = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \text{sign}((X_{i_1 1} - X_{i_2 1})(X_{i_1 2} - X_{i_2 2}))$$

R 计算：

```
> x=c(82,87,60,98,75,89,84,78,80,94,85,68)
```

```
> y=c(86,78,65,88,64,90,80,77,76,96,85,70)
```

```
> cor.test(x,y,method="kendall")
```

Spearman's rho 相关系数

定义 (spearman 相关系数)

随机向量 X_1 和 X_2 ，其边际分布函数分别为 F_1 和 F_2 ，spearman 相关系数用下式来表示：

$$\rho_s(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

对于连续随机变量，Spearman 相关系数是其对应的 Copula 的线性相关系数。

命题 (spearman 相关系数的公式)

假设 $X_j \sim F_j$ ， $j \in \{1, 2\}$ ，且 F_j 连续；copula 为 C 。则

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3 = 12E(C(U'_1, U'_2)) - 3, \text{ 其中 } (U'_1, U'_2) \sim \Pi。$$

证明：用 Hoffding 公式，得到

$$\begin{aligned}
\rho_s(X_1, X_2) &= \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)) \\
&= 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2 \\
&= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3
\end{aligned}$$

对 $\kappa = \rho_\tau$ 和 $\kappa = \rho_s$ ，Embrechts et al. (2002) 证明了 $\kappa = \pm 1$ 当且仅当 X_1, X_2 是同/反单调的。一般来说，由 $\kappa = 0$ 不能推出独立性。

样本 Spearman 相关系数

假设原始的数据 x_i, y_i 已经按从大到小的顺序排列，记 x'_i, y'_i 为原 x_i, y_i 在排列后数据所在的位置，则 x'_i, y'_i 称为变量 x_i, y_i 的秩次，则 $d_i = x'_i - y'_i$ 为 x_i, y_i 的秩次之差。

如果没有相同的秩次，则 ρ_s 可由下式计算

$$\rho_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

如果有相同的秩次存在，那么就需要计算秩次之间的 Pearson 的线性相关系数

$$\rho_s = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$$

例：样本 Spearman 秩相关计算例

原始位置	原始 X	排序后	秩次 X'	原始 Y	排序后	秩次 Y'	秩次差 d_i 的平方
1	11	490	5	2	75	6	1
2	490	43	1	75	44	1	0
3	14	30	4	3	42	5	1
4	43	14	2	44	7	2	0
5	30	11	3	7	3	4	1
6	3	3	6	42	2	3	9

```
> X <-c(11,490,14,43,30,3)
```

```
> Y <-c(2,75,3,44,7,42)
```

```
> cor(X,Y,method="spearman")
```

```
[1] 0.6571429
```

三种相关系数的比较

让我们考虑一下表，从两个风险因素 A 和 B 中得出 10 个共同的观察结果。

Table 风险因子 A 和 B 的相关系数

Observations	Risk A	Risk B	Risk A Rank	Risk B Rank
Observations 1	0.5	0.2	5	1
Observations 2	0.6	0.9	6	8
Observations 3	0.4	0.6	4	5
Observations 4	0.8	0.3	8	2
Observations 5	0.3	0.4	3	3
Observations 6	0.2	0.7	2	6
Observations 7	0.9	0.5	9	4
Observations 8	0.7	0.9	7	8
Observations 9	0.1	1	1	10
Observations 10	100	0.8	10	7
Linear Correlation	0.21			
Spearman	-0.19			

Correlation	
Kendall's Tau	-0.16
Concordant pairs	19
Discordant pairs	26

观察差异性

Kendall's Tau , Spearman 相关系数与线性相关系数差别很大。这是因为线性相关系数受到极端值（最后一个观察值）的影响。

Coefficients of Tail Dependence 尾相关系数

目标：度量极值相关性，即尾部相关性

定义 7.23（尾相关） $X_j \sim F_j, j \in \{1, 2\}$ 是连续随机变量。如果下面两个式子的极限存在， X_1 和 X_2 的左侧（lower）尾部相关系数 λ_l 和右侧（upper）尾部相关系数 λ_u 定义为：

$$\lambda_l = \lim_{u \downarrow 0} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u)),$$

$$\lambda_u = \lim_{u \uparrow 1} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

如果 $\lambda_l \in (0, 1]$ ($\lambda_u \in (0, 1]$)，则 (X_1, X_2) 是左侧（右侧）尾部相关的。

如果 $\lambda_l = 0$ ($\lambda_u = 0$)，则 (X_1, X_2) 是左侧（右侧）尾部相关的。

作为（条件）概率，显然有 $\lambda_l, \lambda_u \in [0, 1]$

尾相关系数与 Copula

- 如果 F_1 和 F_2 是连续的分布函数，则我们可以得到 λ_l 和 λ_u 的简单表达式：

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u)) &= \frac{P(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u), X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u))}{P(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))} \\ &= \frac{F(F_1^{\leftarrow}(u), F_2^{\leftarrow}(u))}{F_1(F_1^{\leftarrow}(u))} \stackrel{(GI4)}{=} \frac{C(u, u)}{u}, \quad u \in (0, 1) \end{aligned}$$

So

$$\lambda_l = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

- 如果 $u \mapsto C(u, u)$ 在 0 的邻域内可导且极限存在, 则 $\lambda_l = \lim_{u \downarrow 0} \frac{d}{du} C(u, u)$ (l'Hôpital's rule)。

- 如果 C 在 0 的邻域内完全可导且极限存在, 则

$$\lambda_l = \lim_{u \downarrow 0} (D_1 C(u, u) + D_2 C(u, u)) \quad (\text{Chain Rule}).$$

- 且如果 C 对称, 则

$$\lambda_l = 2 \lim_{u \downarrow 0} D_1 C(u, u) \stackrel{\text{Th. 7.13}}{=} 2 \lim_{u \downarrow 0} C_{2|1}(u | u) = 2 \lim_{u \downarrow 0} P(U_2 \leq u | U_1 = u),$$

其中 $(U_1, U_2) \sim C$ 。

- 再结合任意连续分布函数 F , 且由 $(X_1, X_2) = (F^{\leftarrow}(U_1), F^{\leftarrow}(U_2))$, 得到

$$\lambda_l = 2 \lim_{x \downarrow -\infty} P(X_2 \leq x | X_1 = x) \stackrel[\text{density}]{\text{if}} = 2 \lim_{x \downarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f_{X_2 | X_1 = x}(x_2) dx_2$$

- 右侧尾部相关系数与上述过程相似,

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{u \uparrow 1} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\hat{C}(u,u)}{u} \\ &= \lim_{u \uparrow 1} \frac{2(1-u)-(1-C(u,u))}{1-u} = 2 - \lim_{u \uparrow 1} \frac{1-C(u,u)}{1-u}\end{aligned}$$

- 对所有**径向对称**的 copulas (比如二元 G_P^{Ga} 和 $C_{v,P}^t$ copula), $\lambda_l = \lambda_u = \lambda$ 成立。
- 对具有**严格递增** ψ 的 **Archimedean copulas**, 由 l'Hopital's Rule 知:

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{u \downarrow 0} \frac{\psi(2\psi^{-1}(u))}{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi'(2t)}{\psi'(t)}, \\ \lambda_u &= 2 - \lim_{u \uparrow 1} \frac{1-\psi(2\psi^{-1}(u))}{1-u} = 2 - \lim_{t \downarrow 0} \frac{1-\psi(2t)}{1-\psi(t)} = 2 - 2 \lim_{t \downarrow 0} \frac{\psi'(2t)}{\psi'(t)}\end{aligned}$$

例如: **Clayton**: 对 $\theta > 0$, $\lambda_l = 2^{-1/\theta}$, $\lambda_u = 0$, 有左侧尾部相关性;

Gumbel: 对 $\theta > 1$, $\lambda_l = 0$, $\lambda_u = 2 - 2^{1/\theta}$, 有右侧尾部相关

例（高斯和 t Copulas 的尾相关）

- 考虑二元正态分布 $N(0, P)$ 的密度函数，可以证明（利用

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} \quad X_2 | X_1 = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)。$$
 由此推断出

$$\lambda = 2 \lim_{x \downarrow -\infty} P(X_2 \leq x | X_1 = x) = 2 \lim_{x \downarrow -\infty} \Phi\left(\frac{x(1-\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = I_{\{\rho=1\}} \quad (\text{无尾部相关性})。$$

- 对 $C_{\nu, \rho}^t$ ，可以证明 $X_2 | X_1 = x \sim t_{\nu+1}\left(\rho x, \frac{(1-\rho^2)(\nu+x^2)}{\nu+1}\right)$ ，以及

$$P(X_2 \leq x | X_1 = x) = t_{\nu+1}\left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{\frac{(1-\rho^2)(\nu+x^2)}{\nu+1}}}\right)。$$

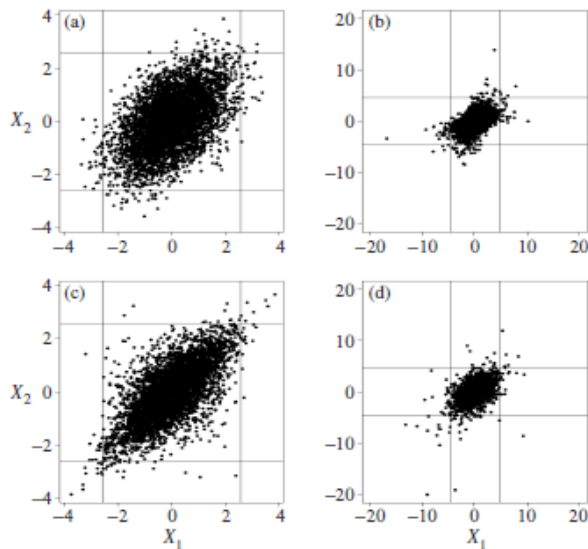
因此

$$\lambda = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right) \quad (\text{尾相关; } \rho \uparrow \text{ 和 } \nu \downarrow \text{ 时, } \lambda \uparrow)。$$

$$\lambda = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right) \quad (\text{尾相关; } \rho \uparrow \text{ 和 } \nu \downarrow \text{ 时, } \lambda \uparrow)。$$

ν	$\rho = -0.5$	$\rho = 0$	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.9$	$\rho = 1$
∞	0	0	0	0	1
10	0.00	0.01	0.08	0.46	1
4	0.01	0.08	0.25	0.63	1
2	0.06	0.18	0.39	0.72	1

Joint quantile exceedance probabilities



5000 samples from

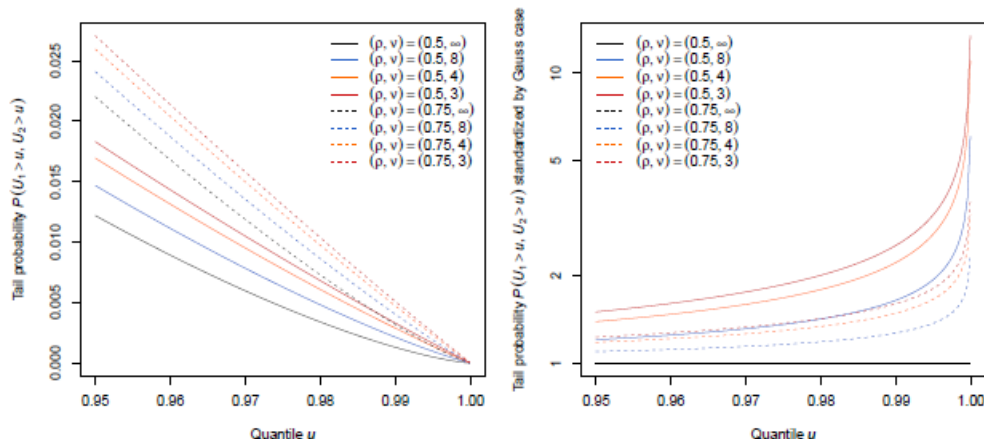
- (a) $N_2(0, P = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix})$, $\rho = 0.5$;
- (b) C_ρ^{Ga} with t_4 margins (same dependence as in (a));
- (c) $C_{4,\rho}^t$ with $N(0, 1)$ margins;
- (d) $t_2(4, 0, P)$ (same dependence as in (c)).

Lines denote the true 0.005- and 0.995-quantiles.

Note the different number of points in the bivariate tails (all models have the same Kendall's tau!)

- 尾部概率 (t-Copula)

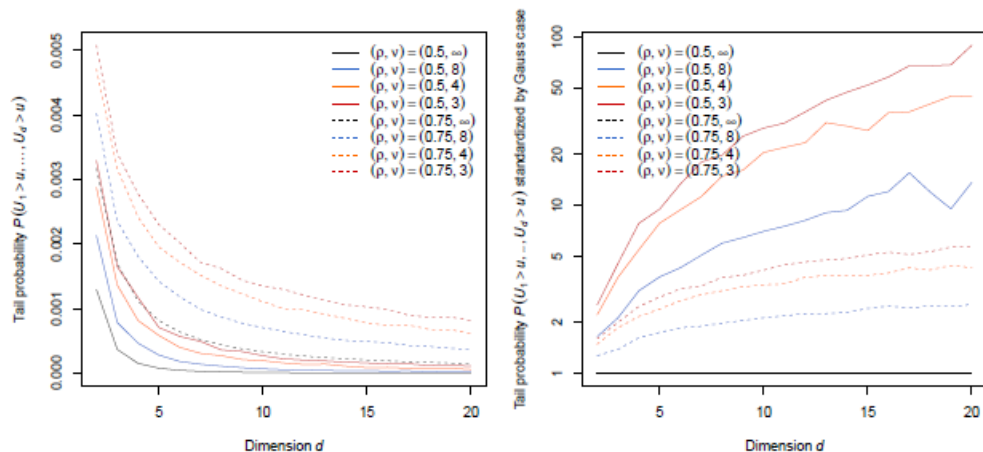
Joint tail probabilities $\mathbb{P}(U_1 > u, U_2 > u)$ for $d = 2$



■ **Left:** The higher ρ or the smaller ν , the larger $\mathbb{P}(U_1 > u, U_2 > u)$.

■ **Right:** $u \mapsto \frac{\mathbb{P}(U_1 > u, U_2 > u)}{\mathbb{P}(V_1 > u, V_2 > u)} \underset{\text{symm.}}{\stackrel{\text{radial}}{=}} \frac{C_{\nu, \rho}^t(u, u)}{C_{\rho}^{\text{Ga}}(u, u)}$

Joint tail probabilities $\mathbb{P}(U_1 > u, \dots, U_d > u)$ for $u = 0.99$



- Homogeneous P (off-diagonal entry ρ). Note the MC randomness.
- **Left:** Clear; less mass in corners in higher dimensions.
- **Right:** $d \mapsto \frac{\mathbb{P}(U_1 > u, \dots, U_d > u)}{\mathbb{P}(V_1 > u, \dots, V_d > u)} \underset{\text{symm.}}{\stackrel{\text{radial}}{=}} \frac{C_{\nu, \rho}^t(u, \dots, u)}{C_{\rho}^{\text{Ga}}(u, \dots, u)}$ for $u = 0.99$.

例联合尾部概率的直观解释

考虑 5 天的负（对数）收益 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_5)$ ，边际分布固定，且两两相关系数 $\rho = 0.5$ 。但是，还不能确定最佳联合模型。

- 如果 \mathbf{X} 的 copula 是 $C_{\rho=0.5}^{Ga}$ ，则 5 天的负收益高于 99%分位点的概率为

$$P(X_1 > F_1^{\leftarrow}(u), \dots, X_5 > F_5^{\leftarrow}(u)) = P(U_1 > u, \dots, U_5 > u) \\ \approx \underset{MC \text{ error}}{7.48 \times 10^{-5}} \quad \circ$$

长期来看，该事件平均每 $1 / 7.48 \times 10^{-5} \approx 13369$ 交易日会发生一次（51.4 年一次；假设一年有 260 个交易日）。

- 如果 \mathbf{X} 的 copula 是 $C_{\nu=4, \rho=0.5}^t$ ，则该事件的发生频率会变为之前的 7.68 倍，即约为 6.7 年一次。如果 d 更大会更严重！

三、Copular 的拟合估计

设 \mathbf{x} 满足 $X_1, \dots, X_n \stackrel{ind.}{\sim} F$ ，边际分布连续 F_1, \dots, F_d ，且 copula C 连续。假设数据 x_1, \dots, x_n 为 X_1, \dots, X_n 的实现。

假设：

- 对部分 $\theta_{0,j} \in \Theta_j, j \in \{1, \dots, d\}$ ，满足 $F_j = F_j(\cdot; \theta_{0,j})$ ；（对 $\forall \theta_j \in \Theta_j, j \in \{1, \dots, d\}$ ，假设 $F_j(\cdot; \theta_j)$ 连续）。
- 对部分 $\theta_{0,C} \in \Theta_C$ ，满足 $C = C(\cdot; \theta_{0,C})$ 。

因此需要估计 F 的未知参数向量 $\theta_0 = (\theta_{0,C}', \theta_{0,1}', \dots, \theta_{0,d}')'$ 。

这里，我们尤其要关注 $\theta_{0,C}$ 。必要时，假设边际分布 F_1, \dots, F_d 和 Copula C 是绝对连续的，相应的密度函数 f_1, \dots, f_d 为和 c 。

此外假设所选的 copula 是合适的（就对称性之类而言）。

1、矩估计

主要思想：假设有一个先验的理由，认为所选择的 Copula 是一个合适的模型，根据秩相关系数和 Copula 函数之间的理论关系来估计 Copula 参数。

将秩相关系数的经验值替换为该关系，以获得部分或全部 Copula 参数的估计。

矩估计 Method-of-moments using rank correlation

我们这里主要关注单参数 copulas，即 $\theta_{0,C} = \theta_{0,C}$ 。

- 对 $d = 2$ ，Genest 和 Rivest（1993）认为通过 $\rho_\tau(\theta_C) = r_n^\tau$ 求 θ_C 来估计 $\theta_{0,C}$ ，即

$$\hat{\theta}_{n,C}^{IKTE} = \rho_\tau^{-1}(r_n^\tau), \text{ (Kendall's tau 估计值的反函数)。其中用自变量为 } \theta \text{ 的函数}$$

$\rho_\tau(\cdot)$ 表示 Kendall's tau, r_n^τ 是 Kendall's tau 的样本值 (利用 X_1, \dots, X_n 或者 U_1, \dots, U_n 计算)。

- 椭圆 copulas 的标准方差矩阵 P 可以通过 Kendall's tau 的两两反函数来估计。如果 $r_{n,j_1 j_2}^\tau$ 表示数据 (j_1, j_2) Kendall's tau 的样本值, 则

$$\hat{P}_{n,j_1 j_2}^{IKTE} = \sin\left(\frac{\pi}{2} r_{n,j_1 j_2}^\tau\right)。$$

- 同样可以使用 Spearman 相关系数。对高斯 copulas,

$$\rho \approx \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2} \underset{\text{Prop. 7.26}}{=} \rho_s$$

估计误差相对来说很小, 则两两 Spearman 相关系数矩阵是 P 的一个估计。

- 对 t copulas, 可以用 \hat{P}_n^{IKTE} 来估计 P , 可以用基于 \hat{P}_n^{IKTE} 的极大似然估计来估计 ν 。see Mashal and Zeevi (2002)

矩估计的优点

边际分布不需要估计，因此关于 copula 的推断在某种意义上是“无边际”

例 1: Bivariate Archimedean Copulas with a Single Parameter

假设模型形式为 $F(x_1, x_2) = C_\theta(F_1(x_1), F_2(x_2))$ ，其中 θ 是一个要估计的单参数。

对很多这样的 copulas，Kendall's tau 和 θ 之间或者 Spearman 相关系数和 θ 之间存在简单的函数关系。具体来说，考虑 Gumbel, Clayton 和 Frank copulas；在这个例子中，关系的一般形式为 $\rho_\tau(X_1, X_2) = f(\theta)$ ；如下表所示。

Table. Kendall's rank correlations and coefficients of tail dependence for the copulas of

Table 5.4. $D_1(\theta)$ is the Debye function $D_1(\theta) = \theta^{-1} \int_0^\theta t / (\exp(t) - 1) dt$.

Copula	ρ_τ	λ_u	λ_l
--------	-------------	-------------	-------------

C_{θ}^{Gu}	$1-1/\theta$	$2-2^{1/\theta}$	0
C_{θ}^{Gl}	$\theta/(\theta+2)$	0	$\begin{cases} 2^{-1/\theta}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \leq 0 \end{cases}$
C_{θ}^{Fr}	$1-4\theta^{-1}(1-D_1(\theta))$	0	0
$C_{\theta,\delta}^{GC}$	$\frac{(2+\theta)\delta-s}{(2+\theta)\delta}$	$2-2^{1/\delta}$	$2^{-1/(\theta\delta)}$

假设 $\hat{\theta}$ 是在 copulas 参数有效范围内。首先计算 r^{τ} 的样本值，然后解方程 $r^{\tau} = f(\hat{\theta})$ 得到 $\hat{\theta}$ ，比如，假设 $r^{\tau} \geq 0$ ，令 $\hat{\theta} = (1 - r^{\tau})^{-1}$ 可以校准 Gumbel copula 的参数。Clayton copula 处在完全负相关和完全正相关之间，可以使用区间 $(-1,1)$ 中任意的 Kendall's tau 的值来进行来校准参数。

例 2:用 Spearman 相关系数校准高斯 copulas

假设 \mathbf{X} 是一个 meta-高斯模型，copula 为 C_P^{Ga} ，想要估计相关系数矩阵 \mathbf{P} 。根据定理知

$$\rho_S(X_i, X_j) = (6/\pi) \arcsin \frac{1}{2} \rho_{ij} \approx \rho_{ij}$$

其中最后的估计值很精确。这说明可以用两两 Spearman 秩相关系数 R^S 矩阵来估计 \mathbf{P} 。

这个例子也可应用于 t copula 模型。但是不如应用于 Gaussian copula 模型的结果精确度高。

T copula

2. Forming a Pseudo-Sample from the Copula 用 copula 构造一个 Pseudo 样本

- 一般来说 X_1, \dots, X_n 的边际分布不服从均匀分布 $U(0,1)$ 。为应用 copula 方法，需要产生来自 \mathbf{C} 的 pseudo 观察值。

- 一般的，取 $\hat{U}_i = (\hat{U}_{i1}, \dots, \hat{U}_{id}) = (\hat{F}_1(X_{i1}), \dots, \hat{F}_d(X_{id}))$, $i \in \{1, \dots, n\}$ ，其中 \hat{F}_j 表示 F_j 的估计。注意一般 $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$ 既不是相互独立的（即使 X_1, \dots, X_n 相互独立）也不是完全服从 $U(0,1)^d$ 。
- 获取边际分布的方法
 - ◆ 参数估计：（比如 t，帕累托等；如果 n 比较小）。也经常使用（34）来估计 $\theta_{0,c}$ （保证较小的由边际错误导致的误差）。
 - ◆ 半参数估计（比如 EVT 基础：主体采用经验估计，半参数尾部采用以 GPD 基础的 Smith 尾部估计）。
 - ◆ 采用经验分布的非参数估计，则

$$\hat{U}_{ij} = \frac{n}{n+1} \hat{F}_{n,j}(X_{ij}) = \frac{R_{ij}}{n+1} \quad (34)$$

其中 R_{ij} 表示 X_{ij} 在 X_{1j}, \dots, X_{nj} 中的顺序。缩放是为了避免估计 $[0,1]^d$ 边界上的密度。

如果 n 足够大，一般用（34）。

2、极大似然估计

分布 $F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ 的密度函数为（如果存在的话）：

$$f(x; \theta_0) = c(F_1(x_1; \theta_{0,1}), \dots, F_d(x; \theta_{0,d}); \theta_{0,C}) \prod_{j=1}^d f_j(x_j; \theta_{0,j})$$

X_1, \dots, X_n 的对数似然函数为

$$\begin{aligned} l(\theta; X_1, \dots, X_n) &= \sum_{i=1}^n l(\theta; X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n l_C(\theta_C; F_1(X_{i1}; \theta_1), \dots, F_d(X_{id}; \theta_d)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d l_j(\theta_j; X_{ij}) \end{aligned}$$

其中

$$l_C(\theta_C; u_1, \dots, u_d) = \log c(u_1, \dots, u_d; \theta_C)$$

$$l_j(\theta_j; x) = \log f_j(x; \theta_j), j \in \{1, \dots, d\}$$

θ_0 的最大似然估计为

$$\hat{\theta}_n^{MLE} = \arg \sup_{\theta \in \Theta} l(\theta; X_1, \dots, X_n).$$

这种最优化通常是通过数值均值来完成的。注意这个条件是非常苛刻的，尤其是在高维的情况。

The inference functions for margins estimator

Joe 和 Xu 提出了两步估计方法：

第一步：对 $j \in \{1, \dots, d\}$ ，用极大似然估计 $\hat{\theta}_{n,j}^{MLE}$ 来估计 $\theta_{0,j}$ 。

第二步：用下式估计 $\theta_{0,C}$

$$\hat{\theta}_{n,C}^{IFME} = \arg \sup_{\theta_C \in \Theta_C} l(\theta_C, \hat{\theta}_{n,1}^{MLE}, \dots, \hat{\theta}_{n,d}^{MLE}; X_1, \dots, X_n)$$

The inference functions for margins estimator (IFME) of θ_0 is thus

$$\hat{\theta}_n^{IFME} = (\hat{\theta}_{n,C}^{IFME}, \hat{\theta}_{n,1}^{MLE}, \dots, \hat{\theta}_{n,d}^{MLE})$$

这个计算要比 $\hat{\theta}_n^{MLE}$ 容易得多，而且结果很理想。

$\hat{\theta}_n^{IFME}$ 也可以作为计算 $\hat{\theta}_n^{MLE}$ 的初值。

In terms of likelihood equations, $\hat{\theta}_n^{IFME}$ compares to $\hat{\theta}_n^{MLE}$ as follows:

$$\hat{\theta}_n^{MLE} \text{ solves } \left(\frac{\partial}{\partial \theta_c} l, \frac{\partial}{\partial \theta_1} l, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_d} l \right) = 0$$

$$\hat{\theta}_n^{IFME} \text{ solves } \left(\frac{\partial}{\partial \theta_c} l, \frac{\partial}{\partial \theta_1} l_1, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_d} l_d \right) = 0$$

Where

$$l = l(\theta; X_1, \dots, X_n)$$

$$l_j = l_j(\theta_j; X_{1j}, \dots, X_{nj}) = \sum_{i=1}^n l_j(\theta_j; X_{ij}) = \sum_{i=1}^n \log f_j(X_{ij}; \theta_j)$$

获取边际分布的方法

- 非参数估计与经验分布。
- 尾值极值理论。

- 经验分布函数是对于底层分布的尾部估计效果不好。
- 另一种选择是使用第 7.2.6 节中描述的极值理论的技术，其中尾部使用广义帕累托分布（GPD）进行半参数建模；分布的主体可以用经验模型化。

R 语言实例 1

```
library(xts)
library(ADGofTest)
library(qqtest)
library(copula)
library(qrmdata)
library(qrmtools)
```

```
### 2 Fitting copulas
```

```
#####
```

```
## Compare various bivariate copulas
```

```
fit.N <- fitCopula(normalCopula(), data = U)
```

```
fit.t <- fitCopula(tCopula(), data = U) # df of freedom are estimated, too
```

```
fit.C <- fitCopula(claytonCopula(), data = U)
```

```
fit.G <- fitCopula(gumbelCopula(), data = U)
```

```
## Comparing the likelihoods
```

```
sort(c(N = fit.N@loglik, t = fit.t@loglik, C = fit.C@loglik, G = fit.G@loglik),  
     decreasing = TRUE)
```

```
library(rugarch)
```

```
library(xts)
```

```
library(ADGofTest)
```

```
library(qqtest)
```

```
library(copula)
```

```
library(qrmdata)
```

```
library(qrmtools)
```

四、The Copula GARCH Model

首先定义单变量 **ARMAGarch** 模型

Definition 4.20 (ARMA(p_1, q_1) with GARCH(p_2, q_2) errors)

Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{SWN}(0, 1)$. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is an **ARMA(p_1, q_1) process with GARCH(p_2, q_2) errors** if it is stationary and satisfies

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t \text{ for } \varepsilon_t = \sigma_t Z_t \text{ (so } X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t),$$

$$\mu_t = \mu + \sum_{k=1}^{p_1} \phi_k (X_{t-k} - \mu) + \sum_{k=1}^{q_1} \theta_k (X_{t-k} - \mu_{t-k}),$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p_2} \alpha_k (X_{t-k} - \mu_{t-k})^2 + \sum_{k=1}^{q_2} \beta_k \sigma_{t-k}^2,$$

where $\alpha_0 > 0$, $\alpha_k \geq 0$, $k \in \{1, \dots, p_2\}$, $\beta_k \geq 0$, $k \in \{1, \dots, q_2\}$,
 $\sum_{k=1}^{p_2} \alpha_k + \sum_{k=1}^{q_2} \beta_k < 1$.

其中 $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ 的边际分布服从正态分布，或者 t 分布，相关性是高斯 Copula 或者 tCopula

R 代码

```
copspec <- cgarchspec(uspec = marginspec,  
                      distribution.model = list(copula = "mvt", method = "ML",
```


time.varying = TRUE,

```
transformation = "parametric"))  
mod2 <- cgarchfit(copspec, data)  
mod2
```

Copula Garch 模型

使用说明见

https://cran.r-project.org/web/packages/copula/vignettes/copula_GARCH.html

首先定义单变量 ARMAGarch 模型

Definition 4.20 (ARMA(p_1, q_1) with GARCH(p_2, q_2) errors)

Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{SWN}(0, 1)$. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is an **ARMA(p_1, q_1) process with GARCH(p_2, q_2) errors** if it is stationary and satisfies

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad \text{for} \quad \varepsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (\text{so } X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t),$$

$$\mu_t = \mu + \sum_{k=1}^{p_1} \phi_k (X_{t-k} - \mu) + \sum_{k=1}^{q_1} \theta_k (X_{t-k} - \mu_{t-k}),$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p_2} \alpha_k (X_{t-k} - \mu_{t-k})^2 + \sum_{k=1}^{q_2} \beta_k \sigma_{t-k}^2,$$

where $\alpha_0 > 0$, $\alpha_k \geq 0$, $k \in \{1, \dots, p_2\}$, $\beta_k \geq 0$, $k \in \{1, \dots, q_2\}$, $\sum_{k=1}^{p_2} \alpha_k + \sum_{k=1}^{q_2} \beta_k < 1$.

其中 $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ 的边际分布服从正态分布，或者 t 分布，相关性是高斯 Copula 或者 tCopula

copula-Garch 计算投资组合的在险价值

$$X_t = \mu + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1) \quad \text{or} \quad \varepsilon_t \sim t_d.$$

$$\begin{aligned}
P(X_{t+1} \leq x | \Omega_t) &= P(a_{t+1} \leq (x - \mu) | \Omega_t) \\
&= P(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} | \Omega_t) \\
&= \begin{cases} N\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} \middle| \Omega_t\right), & \text{if } \varepsilon \sim N(0, 1) \\
t_d\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} \middle| \Omega_t\right), & \text{if } \varepsilon \sim t_d. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$X_{p,t} = wX_{1,t} + (1 - w)X_{2,t},$$

$$\begin{aligned}
P(X_{p,t} \leq VaR_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) \\
&= P(wX_{1,t} + (1 - w)X_{2,t} \leq VaR_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) \\
&= P\left(X_{1,t} \leq \frac{VaR_t(\alpha)}{w} - \frac{1 - w}{w}X_{2,t} | \Omega_{t-1}\right) = \alpha.
\end{aligned}$$

令 $w=1/2$

$$\begin{aligned}
P(X_{p,t} \leq VaR_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) \\
&= P\left(\frac{1}{2}X_{1,t} + \frac{1}{2}X_{2,t} \leq VaR_t(\alpha) | \Omega_{t-1}\right) \\
&= P\left(X_{1,t} \leq \frac{VaR_t(\alpha)}{2} - X_{2,t} | \Omega_{t-1}\right) = 0.05.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P(X_{p,t} \leq VaR_t | \Omega_{t-1}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{VaR_t}{2} - x_{2,t}} f(x_{1,t}, x_{2,t} | \Omega_{t-1}) dx_{1,t} dx_{2,t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{VaR_t}{2} - x_{2,t}} c(F(x_{1,t}), F(x_{2,t}) | \Omega_{t-1}) f(x_{1,t} | \Omega_{t-1}) \\
&\quad \times f(x_{2,t} | \Omega_{t-1}) dx_{1,t} dx_{2,t}.
\end{aligned}$$

关键 R 代码

```

copspec <- cgarchspec(uspec = marginspec,
                      distribution.model = list(copula = "mvt", method = "ML",
                                                time.varying = TRUE,
                                                transformation = "parametric"))
mod2 <- cgarchfit(copspec, data)
mod2

```

实例代码+作业

[qrm/R/07_Copulas and Dependence/07_Copula_estimation_and_goodness-of-fit.R](#)

[https://github.com/qrmtutorial/qrm/blob/master/R/07_Copulas and Dependence/07_Copula estimation and goodness-of-fit.R](https://github.com/qrmtutorial/qrm/blob/master/R/07_Copulas_and_Dependence/07_Copula_estimation_and_goodness-of-fit.R)

程序步骤

Setup

#####

```
library(rugarch)
library(xts)
library(ADGofTest)
library(qqtest)
library(copula)
library(qrmdata)
library(qrmtools)
```

1 Working with the data

#####

Select the data we work with

```
data("SP500_const") # load the constituents data of the S&P 500
```

```
stocks <- c("INTC", "QCOM", "GOOGL", "AAPL", "MSFT") # Intel, Qualcomm, Google,
Apple, Microsoft
```

```
time <- c("2007-01-03", "2009-12-31") # time period
```

```
S <- SP500_const[paste0(time, collapse = "/"), stocks] # data
```

```
## Check for missing data
```

```
stopifnot(all(!is.na(S))) # na.fill(, fill = "extend") is often helpful
```

2 Fitting marginal ARMA(1,1)-GARCH(1,1) models with standardized t residuals

```
## Build negative log-returns
```

```
X <- -returns(S) # -log-returns
```

```
## Basic plot
```

```
plot.zoo(X, main = "Negative log-returns")
```

```
## Fit marginal time series
```

```
uspec <- rep(list(ugarchspec(distribution.model = "std")), ncol(X))
```

```
fit.ARMA.GARCH <- fit_ARMA_GARCH(X, ugarchspec.list = uspec)
```

```
stopifnot(sapply(fit.ARMA.GARCH$error, is.null)) # NULL = no error
```

```
if(FALSE)
```

```
  fit.ARMA.GARCH$warning
```

```

## => Warning comes from finding initial values and can be ignored here
fits <- fit.ARMA.GARCH$fit # fitted models
Z <- as.matrix(do.call(merge, lapply(fits, residuals, standardize = TRUE))) # grab out
standardized residuals
colnames(Z) <- colnames(S)
(nu.mar <- vapply(fits, function(x) x@fit$coef[["shape"]], NA_real_)) # vector of
estimated df
n <- nrow(X) # sample size
d <- ncol(X) # dimension

```

3 Fitting copulas

```
#####
```

```
## Compute pseudo-observations from the standardized t residuals
```

```

U <- pobs(Z)
pairs2(U, cex = 0.4, col = adjustcolor("black", alpha.f = 0.5))

```

Fitting a Gumbel copula

```
fit.gc <- fitCopula(gumbelCopula(dim = d),
```

```

        data = U, method = "mpl")
fit.gc@estimate # estimated copula parameter
gc <- fit.gc@copula # fitted copula

## Compute matrices of pairwise Kendall's tau and upper tail-dependence coefficients
p2P(tau(gc), d = d)
p2P(lambda(gc)["upper"], d = d)

## Fitting a t copula
fit.tc <- fitCopula(tCopula(dim = d, dispstr = "un"),
                    data = U, method = "itau.mpl")
(nu <- tail(fit.tc@estimate, n = 1)) # estimated degrees of freedom nu
(P <- p2P(head(fit.tc@estimate, n = -1))) # estimated correlation matrix
tc <- fit.tc@copula # fitted copula

## Compute matrices of pairwise Kendall's tau and upper tail-dependence coefficients
p2P(tau(tc))
p2P(lambda(tc)[(choose(d,2)+1):(d*(d-1))])

```


4 Goodness-of-fit

#####

We use the parametric bootstrap here, based on the maximum pseudo-likelihood
estimator.

set.seed(271) # for reproducibility

N <- 100 # this is to save run time; it should be larger!

Check the Gumbel copula

gof.gc <- gofCopula(gc, x = U, N = N) # warning also because the copula doesn't fit well
here

stopifnot(gof.gc\$p.value < 0.05) # => rejection

Check the t copula

Note: - This can currently only be done for fixed and integer degrees of

freedom as there is no algorithm to evaluate the multivariate t df for

non-integer degrees of freedom.

- ... yet it's still quite slow. We thus check the model graphically

after mapping the variates to a $U(0,1)^d$ distribution with the

Rosenblatt transform.

```
U.Rsnbl <- cCopula(U, copula = tc)
pairs2(U.Rsnbl, cex = 0.4, col = adjustcolor("black", alpha.f = 0.5)) # looks ok
```

```
## Map it to a K_d distribution ("kay") and do a Q-Q plot
```

```
U.Rsnbl.K <- sqrt(rowMeans(qnorm(U.Rsnbl)^2)) # map to a kay distribution
```

```
pK <- function(q, d) pchisq(d*q*q, df = d) # df of a K_d distribution
```

```
AD <- ad.test(U.Rsnbl.K, distr.fun = pK, d = d) # compute an AD test
```

```
stopifnot(AD$p.value >= 0.05)
```

```
## Note: The AD test here does not take into account parameter estimation
```

```
## (that would require a parametric bootstrap, for example)
```

```
## A (sophisticated) Q-Q plot
```

```
qqtest(U.Rsnbl.K, dist = "kay", df = d, nreps = 1000, pch = 1,
```

```
col = adjustcolor("black", alpha.f = 0.5), main = "",
```

```
xlab = substitute(K[dof]~"quantiles", list(dof = d))) # => looks ok
```

```
### 5 Simulating paths from the full model #####
```

```
## Simulate paths
```

```

B <- 200
m <- ceiling(n/10) # length of the simulated paths
X.lst <- lapply(1:B, function(b) {
  ## 1) Simulate from the fitted copula
  U. <- rCopula(m, copula = tc)
  ## 2) Quantile-transform to standardized t distributions (for ugarchsim())
  Z. <- sapply(1:d, function(j) sqrt((nu.mar[j]-2)/nu.mar[j]) * qt(U.[,j], df = nu.mar[j]))
  ## 3) Use these multivariate dependent t innovations to sample from the
  ##      time series
  sim <- lapply(1:d, function(j)
    ugarchsim(fits[[j]], n.sim = m, m.sim = 1,
              custom.dist = list(name = "sample",
                                distfit = Z.[,j, drop = FALSE])))
  ## 4) Extract simulated series
  sapply(sim, function(x) fitted(x)) # simulated multivariate series X_t (=
x@simulation$seriesSim)
})
## => List of length B containing (n x d)-matrices

```

6 Predict the aggregated loss and VaR_0.99

Note: - This is merely a demo of what can be done with the simulated data.

- See also the vignette "ARMA_GARCH_VaR" in qrmtools

Predict VaR of the aggregated loss nonparametrically

Xs <- rowSums(X) # aggregated loss; n-vector

Xs. <- sapply(X.lst, rowSums) # simulated aggregated losses; (m, B)-matrix

Xs.mean <- rowMeans(Xs.) # predicted aggregated loss; m-vector

Xs.Cl <- apply(Xs., 1, function(x) quantile(x, probs = c(0.025, 0.975))) # CIs; (2, m)-matrix

alpha <- 0.99 # confidence level

VaR <- apply(Xs., 1, function(x) quantile(x, probs = alpha)) # VaR_alpha; m-vector

Plot

tm <- index(SP500_const)

start <- match(time[1], as.character(tm))

past <- tm[start:(start+n-1)]

future <- tm[(start+n):(start+n+m-1)]

plot(past, Xs, type = "l", xlim = range(c(past, future)), xlab = "", ylab = "") # actual (past) losses

```

polygon(c(future, rev(future)), c(Xs.CI[1,], rev(Xs.CI[2,])),
        border = NA, col = "grey80") # CI region
lines(future, Xs.mean, col = "royalblue3") # predicted aggregated loss
lines(future, Xs.CI[1,], col = "grey50") # lower CI
lines(future, Xs.CI[2,], col = "grey50") # upper CI
lines(future, VaR, col = "maroon3") # VaR_alpha
legend("bottomright", bty = "n", lty = rep(1, 4),
        col = c("black", "royalblue3", "grey50", "maroon3"),
        legend = c("(Aggregated) loss", "(Simulated) predicted loss",
                    "95% CIs", as.expression(substitute("Simulated"~VaR[a], list(a =
alpha))))))

```

五、Copular 在信用风险管理的应用

一元高斯 Copula 函数的一种应用

银行有一个巨额贷款组合，每支贷款每年的违约可能性为 1%

若贷款违约相互独立：每年违约率期望值为 1%

事实上，贷款违约不是相互独立的（系统性风险）

表 1970-2010 年所有被评级公司的年百分比违约率

年份	违约率	年份	违约率	年份	违约率
1970	2.641	1984	0.927	1998	1.255
1971	0.285	1985	0.950	1999	2.214
1972	0.455	1986	1.855	2000	2.622
1973	0.454	1987	1.558	2001	3.978
1974	0.275	1988	1.365	2002	3.059
1975	0.360	1989	2.361	2003	1.844
1976	0.175	1990	3.588	2004	0.855
1977	0.351	1991	3.009	2005	0.674
1978	0.352	1992	1.434	2006	0.654
1979	0.087	1993	0.836	2007	0.367
1980	0.343	1994	0.614	2008	2.028
1981	0.163	1995	0.935	2009	5.422
1982	1.036	1996	0.533	2010	1.283
1983	0.967	1997	0.698		

资料来源：穆迪。

应用 Copula 函数给违约率建模

假设 1: 所有贷款的违约时间 T_i 的累计概率分布函数相同，定义为 Q

假设 2: 对于每一个 i 我们将 T_i 分布的分位数与 U_i 分布（标准正态分布）的分位数之间进行一一对应的映射，当 $U = N^{-1}[Q_i(T)]$ 时， $\text{Prob}(T_i < T) = \text{Prob}(U_i < U)$.

$$U = N^{-1}(Q_i(T))$$

假定 3: U_i 之间的结构满足因子模型

$$U_i = aF + \sqrt{1-a^2}Z_i$$

式中，变量 F 及 Z_i 为互相独立的正态分布， Z_i 之间也相互独立。在这种情况下，每对贷款之间的 Copula 相关性是相等的，均为 $\rho = a^2$

$$U_i = \sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}Z_i$$

贷款组合违约率的估计

$$U = N^{-1}(Q_i(T))$$

其中： $\text{Prob}(T_i < T) = \text{Prob}(U_i < U)$

在因子 F 的条件下， $U_i < U$ 的条件概率为

$$\text{Prob}(U_i < U | F) = \text{Prob}\left(Z_i < \frac{U - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) = N\left(\frac{U - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

已知 $\text{Prob}(U_i < U | F) = \text{Prob}(T_i < T | F)$ ，我们有，因此

$$\text{Prob}(T_i < T | F) = N\left(\frac{U - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (*)$$

变量 $Q(T)$ 是一支贷款到 T 时是违约的无条件概率。我们将其记为 PD（违约概率

Probability of Default 的简写），并有 $U = N^{-1}(PD)$ 。式 $(*)$ 变为

$$\text{Prob}(T_i < T | F) = N\left(\frac{N^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

即为贷款组合违约率（Default rate）

最坏贷款组合违约率

因子 F ：可以理解为宏观经济指数

F 高， U_i 趋向于更高的值， $\text{Prob}(T_i < T) = \text{Prob}(U_i < U)$ 较低

F 低，则反之。

当 F 减小时，违约率会增加，那么违约率的最坏情况会是怎样的呢？因为 F 服从标准正态分布， $F < N^{-1}(Y)$ 的概率为 Y 。因此，存在一个概率 Y ，使得违约率大于

$$N\left(\frac{N^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}N^{-1}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

定义：WCDR(T,X) (worst case default rate) 为置信度为 $X\%$ ，展望期为 T 的情况下的最坏违约率。也即我们有 $X\%$ 的把握，在时间 T 内违约率不会超过 WCDR(T,X)

$$WCRD(T, X) = N \left(\frac{N^{-1}(PD) - \sqrt{\rho} N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}} \right) \quad (**)$$

贷款组合的风险价值度

假定，我们有一个贷款组合，其中所有贷款的数额和违约可能性都相等。上述结论可以用来计算在展望期 T ， X 置信区间的条件下，贷款组合的风险价值度为

$$VaR(T, X) = L \times (LGD) \times WCDR(T, X)$$

式中， LGD 是违约损失率（loss given default），即贷款违约时，以本金百分比计算的预期损失， L 是贷款组合的总规模。

在一篇重要的论文中，Gordy 论证了这一结果可以被扩展。对一个有 M 支贷款的大组合，当每支贷款的规模与整个组合的总规模相比都比较小时，下式基本成立

$$VaR(T, X) \approx \sum_{i=1}^M L_i \times LGD_i \times WCDR_i(T, X)$$

式中， L_i 为第 i 支贷款的大小， LGD_i 为第 i 支贷款的违约损失率， $WCDR_i(T, X)$ 为第 i 支贷款在最坏情况下的违约率（即式（**）中，令 PD 等于第 i 支贷款的违约率时 $WCDR$ 的值）。

估计违约概率和相关性

$$\text{违约率: } DR = N\left(\frac{N^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}N^{-1}(G(DR))}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

$$\text{违约率的累计概率分布函数: } G(DR) = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(DR) - N^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right) \text{ 求导}$$

违约率的概率密度函数:

$$g(DR) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\left(N^{-1}(DR)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(DR) - N^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)^2\right]\right\}$$

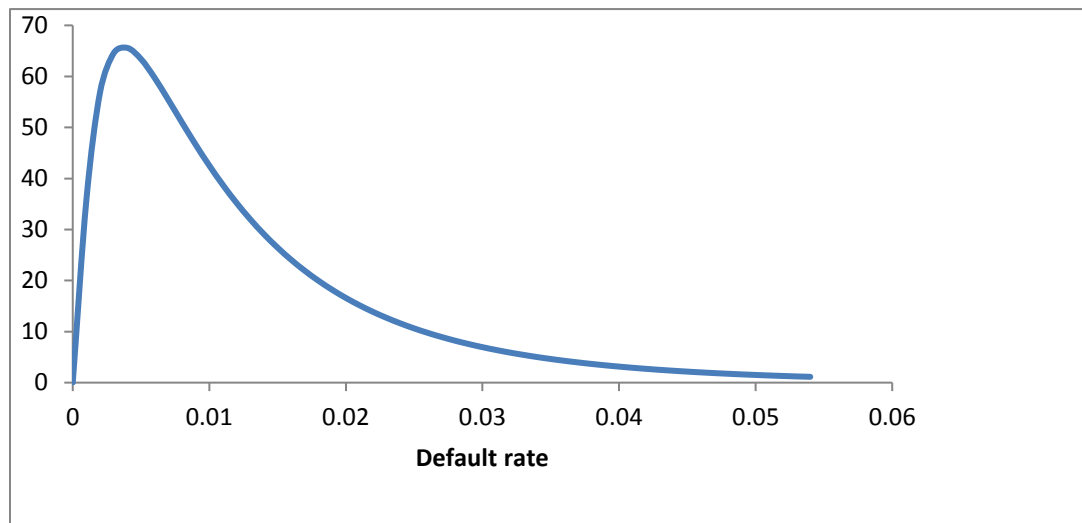
最大似然估计步骤

由历史违约数据计算违约概率 PD 的相关性 ρ 的最大似然估计的步骤如下:

1. 选择 PD 和 ρ 的初始值;
2. 对 DR 的每个观察值, 计算式 (11-15) 中概率密度函数的对数;

3. 使用 Slover 搜索 PD 和 ρ 的值使得步骤 2 中的值得最大。

应用表 11-4 的违约率数据做实证分析



其他 copula 函数

单因子高斯 copula 模型有其局限性。如上图所示，其得出的尾部相关性很小。这意味着一个公司的意外提早违约和另一家公司的意外提早违约很少同时发生。要找到合适的 ρ 来拟合数据可能比较困难。例如，如果 PD 为 1% 而 10 年中某年的违约率达到

3%，则找不到 ρ 的值可以跟这种情况保持一致。其他一些具备更强的尾部相关性的单因子 copula 模型可以更好地拟合数据。开发这样一种模型的方法是 F 为 Z，或选取比式 (11-9) 中的正态分布具有更厚尾部的分布（这些分布要被方所，以保证均值为 0，标准差为 1）。然后 U_i 的分布再由 F 和 Z_i 的分布（可能通过数值方法）决定。式 (11-13) 变为

$$WCDR(T, X) = \Phi \left(\frac{\Psi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} \Theta^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}} \right)$$

式中， Φ 、 Ψ 和 Θ 分别是 Z_i ， F 和 U_i 的累计概率分布函数。此时，式 (11-14) 变为

$$G(DR) = \Theta \left(\frac{\sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(DR) - \Psi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}} \right)$$

作业:

1、选做其中一个，

模仿论文[周孝华](#)；[张保帅](#)；[董耀武](#)《基于 Copula-SV-GPD 模型的投资组合风险度量》，管理科学学报，2012 年第 12 期。自选投资组合，分析投资组合风险。

模仿论文，Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method，自选投资组合，计算投资组合风险 VaR

2、选做（ERM 考试题）您担任提供两种产品的保险公司的风险分析师：

高级保费全人寿保险和单一保险金直接年金（SPIA）。

资产投资 60%在公司和政府债券的组合中，40%的股权投资。

责任在市场一致的基础上重视。负债分为 55%

全生命业务和 45%的 SPIA 业务。

（a）（2 分）描述公司面临以下风险：

（i）利率风险

（ii）权益资产价值风险

（iii）灾难性死亡风险

（iv）趋势死亡率风险（也称为长寿风险）

（b）（2.5 分）

(i) 一位同事建议将 (a) 项中每一项的单因素敏感度测试结果相结合，以评估企业的经济资本。评价这个建议。

(ii) 解释为什么公司的负债估值模式可能不适合用于评估经济资本。

该公司决定根据 1 年压力测试来评估经济资本。您计划使用 Copula 强调测试资产价值，以产生 200 年以上的压力情景。债券组合的现值为 600。一年期债券组合价值服从正态分布，参数为 $\mu_b = 630$ 和 $\sigma_b = 60$ 。资产组合的现值为 400。一年期资产组合价值服从正态分布，参数为 $\mu_e = 6.0$ 和 $\sigma_e = 0.35$ 。

你假定债券和股票投资组合价值之间的依赖关系是用相关系数 0.8 和 4 自由度的 t copula 建模。给你以下 t copula 的值表：

		v					
		0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
u	0.005	0.0026	0.0028	0.0030	0.0031	0.0033	0.0034
	0.006	0.0028	0.0030	0.0033	0.0035	0.0037	0.0039
	0.007	0.0030	0.0033	0.0036	0.0039	0.0040	0.0042
	0.008	0.0031	0.0035	0.0039	0.0041	0.0044	0.0046
	0.009	0.0033	0.0037	0.0040	0.0044	0.0050	0.0052
	0.010	0.0034	0.0039	0.0042	0.0046	0.0052	0.0054

		$T \text{ copula}, C(u, v)$
--	--	-----------------------------

(c) (1 分) 描述 **t copula** 并解释其主要特征。

(d) (2.5 分) 假设每个投资组合，您将产生一个 200 年的 1 年压力事件位于其 q 位分数为 q (相同的 q 用于两个投资组合)。

(i) 确定恰好满足该约束的分位数 q 。显示你的工作。

(二) 一年内计算债券和股权投资组合的压力值使用 (i) 的 q 。显示你的工作

(e) (1 分) 您的同事建议使用 $\rho = 0.8$ 的高斯 Copula。

说明所产生的压力测试是否比较严重或不那么严重
结果使用上面的 **t-copula**。

解答

The purpose of single factor sensitivity testing is for calculating materiality of assumptions, or for delta type calculations. Summing up the results of several single factor sensitivity tests ignores the interaction and correlations between risks, and may not capture the tail risk that happens when multiple factors are shocked at once – there may be dependencies between different risks in a stressed scenario (such as an equity market crash causing interest rates to drop).

The liability valuation model is not fit for the purpose of calculating economic capital. Because the liabilities are valued on a market-consistent basis, they will focus on the mean or best-estimate result. Economic capital should focus on results of individual scenarios in the tail, such as VaR.

The liability model likely uses risk-neutral scenarios. Economic Capital likely uses real-world scenarios.

The t-copula (in 2 dimensions) is defined as $C(u, v) = t_{\rho, d} \left(t_d^{-1}(u), t_d^{-1}(v) \right)$ where $t_{\rho, d}$ is the bivariate student's t distribution with, with parameters ρ and d degrees of freedom and t_d is the standard (univariate) t distribution with d degrees of freedom.

The t-copula is symmetric in 2 dimensions but asymmetric in higher dimensions.

The t-copula has upper and lower tail dependency

(i) A 1-in-200 year event is at the 0.005 level. In the table, the solution of the copula is 0.005 for $u=v=0.009$.

(ii) For 0.009, the Normal table provides a result of -2.365.

$$P(z < (B - 630)/60) = 0.009$$

$$B = 630 + z * 60 = 630 + (-2.365) * 60 = 488.10$$

$$P(z < (\ln(E) - 6.0)/0.35) = 0.009$$

$$E = e^{(6.0 + z * 0.35)} = e^{(6.0 + (-2.365) * 0.35)} = 176.3$$

The resulting stress test under the Gaussian copula would be less severe than the results using the t-copula. The t-copula has tail dependencies, and the Gaussian copula does not (except in the case of perfect correlation $\rho = 1$). This means that the t-copula's tails are

thicker than a Gaussian copula's tails.

For example, it seems reasonable that one event could cause multiple stresses, such as an extreme natural disaster causing catastrophic mortality and a crash in the financial markets. The t-copula does capture this situation with its thicker tails and tail dependency.

单因素敏感性测试的目的是计算假设的重要性，或 **delta** 型计算。总结了几种单因素敏感性测试的结果，忽视了风险之间的相互作用和关系，并可能无法捕捉到当多种因素同时发生时的尾部风险 – 在压力情景下不同风险之间可能存在相关性(如股票市场崩溃导致利率下降)。

负债定价模型不适合用来计算经济资本。

由于负债的价值是基于市场一致的基础上，更注重均值或最佳估计结果。经济资本应着眼于尾部个别情景的结果，如 **VaR**。

负债模型可能使用风险中性的情况。经济资本可能使用真实情景。

t-copula (2 维) 定义为 $C(u, v) = t_{\rho, d}(t_d^{-1}(u), t_d^{-1}(v))$ ，其中 $t_{\rho, d}$ 是二元 **t** 分布，参数为 ρ ，

自由度为 d ； t_d 为标准（一元）**t** 分布，自由度为 d 。

t-copula 在 2 维是对称的，在更高维是不对称的。

t-copula 有左侧或者右侧尾部相关性。

(i) 一个 200 年一次的时间在 0.005 的水平。在表中，**copula** 的解答是 $u=v=0.009$ 。

(ii) 对 0.009，根据正态表得到 -2.365。

$$P(z < (B-630)/60) = 0.009$$

$$B = 630 + z * 60 = 630 + (-2.365) * 60 = 488.10$$

$$P(z < (\ln(E) - 6.0)/0.35) = 0.009$$

$$E = e^{(6.0 + z * 0.35)} = e^{(6.0 + (-2.365) * 0.35)} = 176.3$$

在高斯 **copula** 下的压力测试结果没有使用 **t-copula** 结果严重。**t-Copula** 有尾相关，而高斯 **coupla** 没有尾相关（除了在完全相关 $\rho=1$ 的情况下。这意味着 **t-Copula** 的尾部比高斯 **copula** 的尾部厚。

例如，一个事件可能会引起多重压力，比如极端自然灾害导致灾难性死亡和金融市场崩溃，这似乎是合理的。**t-Copula** 的厚尾和尾相关与这种情况确实相符。