第三章 投资组合风险：分析方法

本节将回答如下问题

1、 如何计算投资组合的 VaR
2、 分散化投资为什么降低风险
3、 什么因子能够降低风险
4、 如何在非参数情形下建立 VaR 工具
5、 如何通过 VaR 工具最优化投资组合

3.1 投资组合的VaR

- 投资组合的 VaR 值可以通过所包含的各种资产的风险组合得出。本节将在均值方差法的框架下说明投资组合的 VaR
设 W 表示 t 到 t+1 之间的投资组合总投资金额，x=（$x_1, \dots\dots, x_n$）投资在每项资产的美元金额向量.，w 表示权重，权重和为 1.
投资组合的收益率定义为：

$$R_{p,t+!} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t+1} \tag{1}$$

其中 N 表示资产的数量，$R_{i,t+1}$ 表示资产 i 在 t+1 期的收益率，并且

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_N R_N = \left[w_1 w_2 \ldots w_N \right] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} = w' R \tag{2}$$

其中 $w_i = \frac{x_i}{W}$

$$E\left(R_p\right) = \mu_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \tag{3}$$

收益率的方差为

$$
\begin{aligned}
V\left(R_p\right) &= \sigma_p^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1, j<i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}
\end{aligned} \tag{4}
$$

- 矩阵形式

$$
\sigma_p^2 = \left[w_1 \ldots w_N\right] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & \ldots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}
$$

$$
\sigma_p^2 = w' \sum w \tag{5}
$$

以美元金额敞口 x 来表示 t+1 期投资组合的收益 WR_p 的方差

$$
\sigma_p^2 W^2 = x' \sum x \tag{6}
$$

3.2 正态模型的投资组合 VaR

- 假设所有单个证券的收益率都假设服从正态分布，则投资组合的收益率也服从正态分布。我们可以将置信水平 c 转化成标准差的倍数 a，投资组合的 VaR(基于均值)等于

$$Portfolio\,VAR = VAR_p = \alpha\sigma_p W = \alpha\sqrt{x'\sum x} \qquad (7)$$

- 我们定义各个组成部分的风险

$$VAR_i = \alpha\sigma_i\left|W_i\right| = \alpha\sigma_i\left|w_i\right|W \qquad (8)$$

上式表明投资组合的 VaR 取决于方差、协方差和资产的数量。

思考：为什么权重用绝对值？

3.3 相关性与投资组合风险

- 假设一个投资组合只有两项资产

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \tag{11}$$

$$VAR_p = \alpha\sigma_p W = \sigma\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}W \tag{12}$$

$$\rho = 0$$

$$VAR_p = \sqrt{\alpha^2 w_1^2 W^2\sigma_1^2 + \alpha^2 w_2^2 W^2\sigma_2^2} = \sqrt{VAR_1^2 + VAR_2^2} \tag{13}$$

投资组合的风险一定小于单个 VaR 的值，VaR 是一种对正态分布或更一般的椭圆分布的一致性风险度量

$$\rho = 1$$

$$VAR_p = \sqrt{VAR_1^2 + VAR_2^2 + 2VAR_1 \times VAR_2} = VAR_1 + VAR_2 \tag{14}$$

投资组合的风险等于单个 VaR 的值总和。,

思考：在允许卖空时，相关性对组合风险有什么影响？

- 资产正相关
- 资产负相关

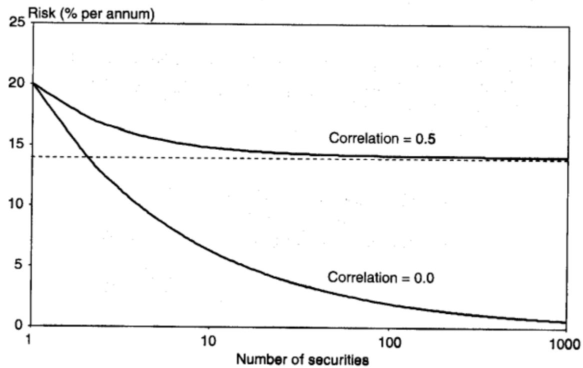
3.4 资产数量与投资组合风险

- 降低投资组合风险可以通过降低相关系数或增加资产数量来实现
  假设每种资产风险相同，相关性相同，且权重也相同，投资组合的风险

$$\sigma_p = \sigma\sqrt{\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho}$$

FIGURE 7-1

Risk and number of securities.



思考：当 N 无穷大，会出现什么情况？

3.5 案例 1

考虑两种外汇（加元和欧元）的投资组合。假设这两种货币是不相关的，并且对美元的波动率分别为 5%和 12%。第一步是确定以美元为单位的合理市值头寸。该投资组合有 200 万美元投资加元，100 万美元投资欧元。求 95%置信水平下该投资组合的 VAR。

设 x 为分配到各种风险因子下的投资金额（单位以百万美元计）。

$$\sum x = \begin{bmatrix} 0.05^2 & 0 \\ 0 & 0.12^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$2 \\ \$1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05^2 \times \$2 + 0 \times \$1 \\ 0 \times \$2 + 0.12^2 \times \$1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$0.0050 \\ \$0.0144 \end{bmatrix}$$

我们首先计算投资组合美元收益率的方差：

$$\sigma_p^2 W^2 = x'\left(\sum x\right) = [\$2 \quad \$1] \begin{bmatrix} \$0.0050 \\ \$0.0144 \end{bmatrix} = 0.0100 + 0.0144 = 0.0244$$

波动性是 $\sqrt{0.0244} = \$0.156205$ million.

95%的置信水平下，$\alpha = 1.65$, we find $VaR_p = 1.65 \times 156,205 = \$257,738$

$$\begin{bmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.65 \times 0.05 \times \$2 \ million \\ 1.65 \times 0.12 \times \$1 \ million \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$165,000 \\ \$198,000 \end{bmatrix}$$

将上述结果加总后得到风险分散化的收益为 363 000 美元。

案例2：股票组合的VaR

假设持有两种股票，价格分别为 S_1（持有数量 n_1）、 S_2（持有数量 n_2），则股票组合的价值为

$$V = n_1 S_1 + n_2 S_2 \tag{13}$$

（1）风险因子选择股票价格，

$$R_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{n_1 S_1}{V}\frac{\Delta S_1}{S_1} + \frac{n_2 S_2}{V}\frac{\Delta S_2}{S_2} = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 = \sum_{i=1}^{2} \omega_i R_i \tag{14}$$

R_V = 资产组合收益率

R_i =第 i 种股票的收益率， $i = \Delta S_i / S_i$

w_i =资产组合中投资于第 i 种股票的比重, $i = 1, 2, with\ \Sigma w_i = 1$

（2）计算风险因子 R_V 的分布：假设价格服从对数正态分布，日收益率

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln\left(1 - \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\right) \sim \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}}$$

服从正态分布。假设股票收益率R_i服从正态分布，μ_i和σ_i，相关系数为ρ。

$$R_i = \frac{\Delta S_i}{S_i} \sim N(\mu_i, \sigma_i) \quad i = 1,2$$

（3）计算股票 i 的 1 日和 10 日 VAR

$$\begin{aligned} VaR_i(1;99) &= 2.33 \cdot \sigma_i \cdot S_i \\ VaR_i(10;99) &= \sqrt{10} \cdot VaR_i(1;99) = 2.33\sqrt{10}\sigma_i \cdot S_i \end{aligned} \tag{15}$$

（4）计算资产组合 1 日和 10 日的 VaR

$$R_V \sim N(\mu_V, \sigma_V)$$

$$
\begin{aligned}
\mu_V &= \sum_{i=1}^{2} \omega_i \mu_i \\
\sigma_V^2 &= \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \operatorname{cov}(R_1, R_2) \\
&= \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 \\
&= \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\
&= w\Omega w^T = w\sigma C \sigma w^T
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&VaR_V(1;99) = 2.33 \cdot \sigma_V V \\
&VaR_V(10;99) = \sqrt{10} VaR_V(1;99) = 2.33 \cdot \sqrt{10} \cdot \sigma_V V
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
VaR_V(1;99) = 2.33 \left[w\sigma C \sigma w^T \right]^{1/2} V = \left[VaR \cdot C \cdot VaR^T \right]^{1/2} \tag{18}
$$

通过对这两支股票一年的历史数据，可以估计收益率的均值和方差分别为，

$$\mu_1 = 0.155\%$$
$$\mu_2 = 0.0338\%$$
$$\sigma_1 = 2.42\%$$
$$\sigma_2 = 1.68\%$$
$$\rho = 0.14 \tag{19}$$

代入数据

$$V = n_1 S_1 + n_2 S_2 = \$18,662$$
$$\omega_1 = \frac{n_1 S_1}{V} = 0.49$$
$$\omega_2 = \frac{n_2 S_2}{V} = 0.51$$
$$\mu_V = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 = 0.093\%$$

$$\sigma_V{}^2 = \omega_1{}^2 \sigma_1{}^2 + \omega_2{}^2 \sigma_2{}^2 + 2\rho\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2 = 0.00024$$
$$\sigma_V = 1.55\%$$
$$VaR_1(1;99) = 2.33\sigma_1 n_1 S_1 = \$517$$
$$VaR_2(1;99) = 2.33\sigma_2 n_2 S_2 = \$370$$
$$VaR_V(1;99) = 2.33\sigma_V V = \$677$$

其中VaR_1，VaR_2，和VaR_V 代表 99%置信区间下的 1 日 VaR

$$VaR_1^{'}(1;99) = (2.33\sigma_{1-\mu_1})n_1S_1 = \$503$$

$$VaR_2^{'}(1;99) = (2.33\sigma_{2-\mu_2})n_2S_2 = \$367$$

$$VaR_V^{'}(1;99) = (2.33\sigma_{V-\mu_V})V = \$657$$

注意，资产组合的 VaR 小于两个资产的 VaR 的和，这反映了由于权益资产不完全相关而引起的资产组合效应。

VaR 对相关系数的敏感性

ρ	VaR(1;99)	Portfolio Effect
1.0	$887	$0
0.5	$772	$115
0	$636	$251
-0.5	$461	$426
-1.0	$146	$741

完全正相关，没有风险分散效应
完全负相关，如果头寸相同，风险抵消
卖空情况相反。

3.6VaR 的工具

- 问题：我们应该改变哪一个头寸来更有效的修正 VaR 的值？
- 工具
  - 边际 VaR
  - 增量 VaR
  - 成分 VaR

下面以均值-方差法为例,说明上述 VaR 工具的含义和计算公式

3.6.1 边际 VaR

- 假设该投资组合由 N 中证券组合而成，每种资产的收益率服从正态分布。
- 边际 VaR 衡量的是对投资组合中某个资产增加 1 美元的敞口，所引起的组合 VaR 的变化值，它是对该资产头寸的部分偏导

$$\sigma_p^2 = w' \sum w$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_i} &= 2 w_i \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_j \sigma_{ij} \\ &= 2\operatorname{cov}\left(R_i, w_i R_i + \sum_{j\neq i}^{N} w_j R_j \right) = 2\operatorname{cov}\left(R_i, R_p\right)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{\operatorname{cov}\left(R_i, R_p\right)}{\sigma_p} \tag{16}$$

将其转换成 VaR 数值

$$\Delta VaR_i = \frac{\partial VaR}{\partial x_i} = \frac{\partial VaR}{\partial w_i W} = \alpha \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \alpha \frac{\operatorname{cov}\left(R_i, R_p\right)}{\sigma_p} \tag{17}$$

- 这个边际 VaR 与 β 密切相关，

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}\left(R_i, R_p\right)}{\sigma_p^2} = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p^2} = \frac{\rho_{ip}\sigma_i\sigma_p}{\sigma_p^2} = \rho_{ip}\frac{\sigma_i}{\sigma_p} \tag{18}$$

β被称为证券 i 相对于投资组合 P 的系统风险，可以通过 R_p 对 R_i 的回归方程的斜率吸收来表示

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{p,t} + \varepsilon_{i,t} \quad t = 1, \ldots, T \tag{19}$$

利用回归模型的系数公式，可以得到包括所有资产在内的向量

$$\beta = \frac{\sum w}{w'\sum w}$$

β 风险是 CAPM 模型的基础，资产的溢价取决于 β 的值。

综上，ΔVaR_i 和 β 的关系是

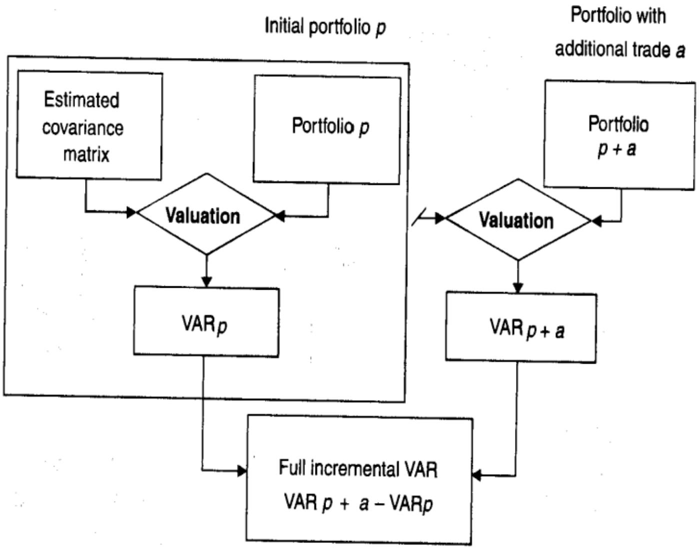
$$\Delta VaR_i = \frac{\partial VaR}{\partial x_i} = \alpha\left(\beta_i \times \sigma_p\right) = \frac{VaR}{W} \times \beta_i \tag{20}$$

3.6.2 "Incremental-VaR" (IVaR)增量 VaR

- IVAR 是指加入或撤销一个资产 A 后，资产组合整体 VAR 的变化。

$$\begin{aligned} IVaR(A) &= VaR(portfolio\ with\ asset\ A) \\ &-VaR(portfolio\ without\ asset\ A) \end{aligned} \tag{21}$$

- IVaR 为正，说明正相关，资产 A 增加风险
- IVaR 为负，说明负相关，资产 A 减少风险



但是精确计算增量 VaR 可能会耗时太多。例如某一机构的组合有 100000 笔交易。耗时可能会失去客户。

增量 VaR 的近似计算公式

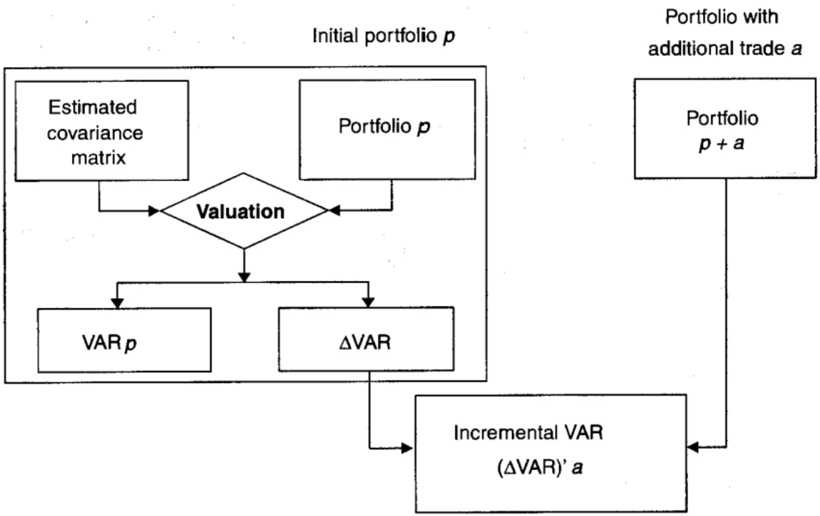
将 VaR_{p+a} 在原点附近泰勒展开

$$VaR_{p+a} = VaR_p + (\Delta VaR)' \times a + \ldots \tag{22}$$

$$\text{Incremental } VaR \approx (\Delta VaR)' \times a \tag{23}$$

FIGURE 7-3

The impact of a proposed trade with marginal VAR.



案例1 续

继续之前两种外汇的例子，我们现在考虑将加元的初始头寸提高 10000 美元。

首先，我们采用边际 VaR 的方法。β 的值等于

$$\beta = \frac{\sum w}{w'\sum w} = W \times \frac{\sum x}{x'\sum x}$$

$$\beta = \$3 \times \begin{bmatrix} \$0.0050 \\ \$0.0144 \end{bmatrix} / \left(\$0.156^2\right) = \$3 \times \begin{bmatrix} 0.205 \\ 0.590 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.615 \\ 1.770 \end{bmatrix}$$

$$\Delta VaR = \alpha \frac{\operatorname{cov}\left(R, R_p\right)}{\sigma_p} = 1.65 \times \begin{bmatrix} \$0.0050 \\ \$0.0144 \end{bmatrix} / \$0.156 = \begin{bmatrix} 0.0528 \\ 0.1521 \end{bmatrix}$$

我们增加 10000 美元的初始头寸，增量 VaR 为

$$\left(\Delta VaR\right)' \times a = \begin{bmatrix} 0.0528 & 0.1521 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$10,000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0.0528 \times \$10,000 + 0.1521 \times 0 = \$528$$

接着，我们把该值与投资组合风险进行精确评估获得的增量 VaR 相比

$$\sigma_{p+a}^2 W_{p+a}^2 = \begin{bmatrix} \$2.01 & \$1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05^2 & 0 \\ 0 & 0.12^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$2.01 \\ \$1 \end{bmatrix}$$

得到$VaR_{p+a}=\$258,267$，减去初始的$VaR_{p}=\$257,738$得到增量 VaR 的精确值为 529 美元，而近似得到增量 VaR 值等于 528 美元，两者非常接近。

最佳对冲

增量 VaR 方法通常适用于某笔交易在风险因子上存在敞口的情况。假设该笔交易仅在一个风险因子（或资产）上存在敞口，投资经理增加合适交易量 a，使得投资组合的价值从原值 W 变为新值 W_{p+a}

$$W_{p+a} = W + a$$

$$\sigma_{p+a}^2 W_{p+a}^2 = \sigma_p^2 W^2 + 2\alpha W \sigma_{ip} + a^2 \sigma_i^2 \tag{24}$$

投资经理需要找出新交易的合适交易量 a^*从而使投资组合风险达到最小。

$$\frac{\partial \sigma_{p+a}^2 W_{p+a}^2}{\partial a} = 2W\sigma_{ip} + 2a\sigma_i^2 \tag{25}$$

令（25）式等于 0，则

$$a^* = -W\frac{\sigma_{ip}}{\sigma_i^2} = -W\beta_i \frac{\sigma_p^2}{\sigma_i^2} \tag{26}$$

3.6.3 成分 VaR

- 成分 VaR 是指若该成分被剔除掉，投资组合 VaR 的值近似变化量，所有成分 VaR 的加总与组合的 VaR 值相等。
- 在均值方差法，成分 VaR 等于

$$Portfolio\,VAR = VAR_p = \alpha\sigma_p W = \alpha\sqrt{x'\sum x}$$

$$\text{Component}VaR_i = \left(\Delta VaR_i\right)\times w_i W = \frac{VaR\beta_i}{W}\times w_i W = VaR\beta_i w_i \quad (27)$$

$$CVAR_i = VARw_i\beta_i = \left(\alpha\sigma_p W\right)w_i\beta_i = \left(\alpha\sigma_i w_i W\right)\rho_i = VAR_i\rho_i \quad (28)$$

可以证明下面式子成立：

$$CVaR_1 + CVaR_2 + \ldots + CVaR_N = VaR_p$$

一方面

$$CVaR_1 + CVaR_2 + \ldots + CVaR_N$$
$$= VaR\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\beta_i\right) = \alpha\sigma_p^2\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\beta_i\right) \quad (29)$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
\sigma_p &= w_1 \operatorname{cov}(R_1, R_p) + w_2 \operatorname{cov}(R_2, R_p) + \cdots + w_N \operatorname{cov}(R_N, R_p) \\
&= w_1(\beta_1 \sigma_p^2) + \cdots + w_N(\beta_N \sigma_p^2) \\
&= \sigma_p^2 \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i \right)
\end{aligned}
$$

因此，第 i 项资产对 VaR 的贡献为 $i = \dfrac{CVaR_i}{VaR} = w_i \beta_i$ (30)

根据上述公式，VaR 可以根据任何标准对风险贡献进行分解。对于大型投资组合，成分 VaR 可以通过货币种类，资产等级种类、地理位置或部门的形式表示。

- **上述 VaR 的分解公式也适用于非正态分布。**

证明如下：设投资组合收益率 R

$$
\begin{aligned}
R_p &= f(w_1, \ldots, w_N) \\
kR_p &= f(kw_1, \ldots, kw_N)
\end{aligned} \tag{31}
$$

$$
R_p = f(w_1, \ldots, w_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} w_i \tag{32}
$$

$$VAR=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial VAR}{\partial w_i}\times w_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial VAR}{\partial x_i}\times x_i=\sum_{i=1}^{N}(\Delta VAR_i)\times x_i \tag{33}$$

案例1 续

- 续前例，使用 $CAVR_i=\Delta VAR_i x_i$ 计算成分 VaR，该投资组合的组合 VAR 可以分解为

$$\begin{bmatrix} CVAR_1 \\ CAVR_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0528\times\$2\ million \\ 0.1521\times 1\ million \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \$105,630 \\ \$152,108 \end{bmatrix}=VAR\times\begin{bmatrix} 41.0\% \\ 59.0\% \end{bmatrix}$$

- 各种资产对组合 VaR 的贡献为

$$\begin{bmatrix} CVAR_1/VAR \\ CVAR_2/VAR \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_1\beta_1 \\ w_2\beta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.667\times 0.615 \\ 0.333\times 1.770 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 41.0\% \\ 59.0\% \end{bmatrix}$$

- 若把欧元头寸调整为 0，计算 VaR 值的变化，并与原结果进行比较。

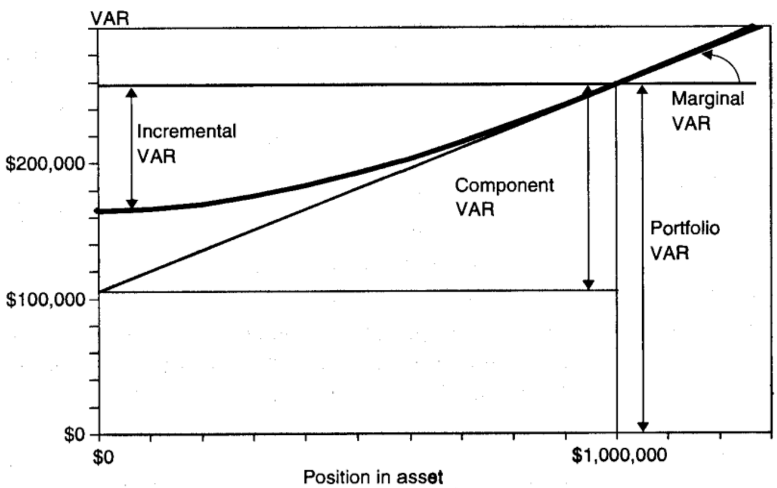
仅有两项资产，没有欧元头寸的新组合的 VAR 是加元的 VAR，VAR_1 =$165,000。因此

欧元的增量 VaR 为($257,738-$165,000)=$92,738。相比之下，欧元的的成分 VaR$152,108 高于欧元的增量 VaR 的值

3.8.5 总结

FIGURE 7-4

VAR decomposition.



案例 1 续（VaR 总结报告）

TABLE 7-1 VaR Decomposition for Sample Portfolio

Currency	Current Position, x_i or $w_i W$	Individual VaR, $VaR_i = \alpha \sigma_i w_i W$	Marginal VaR, $\Delta VaR_i = VaR \beta_i / W$	Component VaR, $CVaR_i = \Delta VAR_i x_i$	Percent Contribution, $CVaR_i / VaR$
CAD	\$2 million	\$165,000	0.0528	\$105,630	41.0%
EUR	\$1 million	\$198,000	0.1521	\$152,108	59.0%
Total	\$3 million				
Undiversified VAR		\$363,000			
Diversified VaR				\$257,738	100.0%

案例4：某投资公司全球股票投资组合的风险分析

TABLE 7-2 全球股票投资组合报告

Country	Current Position(%) w_i	Individual Risk $w_i\sigma_i$	Marginal Risk β_i	Percent Contribution to Risk $w_i\beta_i$	Best Hedge (%)	Volatility at Best Hedge
Japan	4.5	0.96%	0.068	31.2	-4.93	1.48%
Brazil	2.0	1.02%	0.118	22.9	-1.50	1.66%
U.S.	-7.0	0.89%	-0.019	13.6	3.80	1.75%
Thailand	2.0	0.55%	0.052	10.2	-2.30	1.71%
U.K.	-6.0	0.46%	0.035	7.0	2.10	1.80%
Italy	2.0	0.79%	-0.011	6.8	-2.18	1.75%
Germany	2.0	0.35%	0.019	3.7	-2.06	1.79%
France	-3.5	0.57%	-0.009	3.4	1.18	1.81%
Switzerland	2.5	0.39%	0.011	2.6	-1.45	1.81%
Canada	4.0	0.49%	0.001	1.5	-0.11	1.82%
South Africa	-1.0	0.20%	0.006	-0.7	-0.65	1.82%
Australia	-1.5	0.24%	0.014	-2.0	-1.89	1.80%
Total	0.0			100.0		
Undiversified		6.91%				

risk						
Diversified risk	1.82%					

- 日本与巴西头寸风险贡献加总超过 50%
- 美国和英国头寸占比最大，但头寸风险贡献为 20%
- 日本有 4.5%的超权重的头寸应该被降低到低风险水平，最佳是下降 4.93%

3.10 从 VaR 到投资组合管理

- 风险管理
  - 投资组合达到额度限制要求
  - 削减具有最大边际 VaR 值的头寸，增加最低边际 VaR 值得头寸，反复进行，直至投资组合的风险达到最小。
  - 这时，所有边际 VaR，或者投资组合的 b 值相等

$$\Delta VAR_i = \frac{VAR}{W} \times \beta_i = constant \tag{35}$$

案例 1 续

表 7-4 表示了该投资组合的过程。加元 200 万美元与欧元 100 万美元的头寸形成了 257738 美元的 VAR，或者说 15.62%的组合波动性。欧元的边际 VAR 为 0.1521，这要比加元的边际 VAR 高。

TABLE 7-4 Risk-Minimizing Position

Asset	**Original Position, w_I**	**Marginal VAR, ΔVAR_I**	**Final Position, w_I**	**Marginal VAR, ΔVAR_I**	**Beta β_I**
CAD	66.67%	0.0528	85.21%	0.0762	1.000
EUR	33.33%	0.1521	14.79%	0.0762	1.000
Total	100.00%		100.00%		
Diversified VAR	$257,738		$228,462		
Standard deviation	15.62%		13.85%		

- 投资组合管理
  - 选择期望收益率和风险最佳配置的投资组合
  - 最佳投资组合是在不同期望收益率下风险最小的投资组合，构成有效前沿

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} w_i E_i \tag{7.36}$$

$$SP_p \frac{E_p}{\sigma_p} \tag{7.37}$$

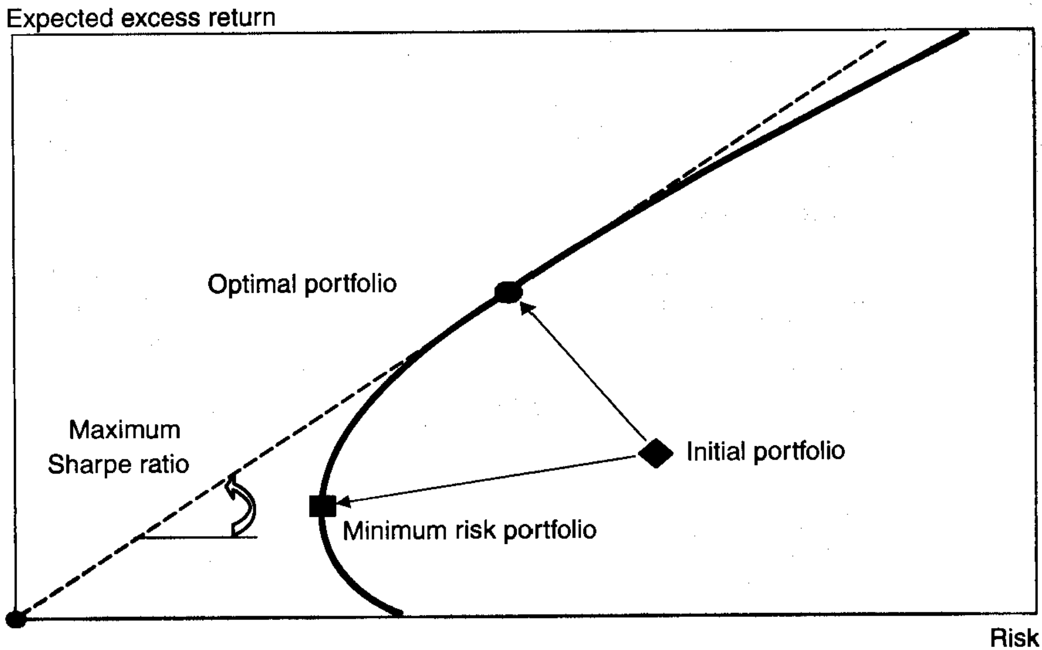
有效前沿

- 最大化夏普率

$$\frac{E_i}{\Delta VAR_i} = \frac{E_i}{\beta_i} = constant$$

FIGURE 7-5

From VAR to portfolio management.



$$E_i = E_m \beta_i \tag{7.39}$$

- 案例 1 续

Risk and Return-Optimizing Position

Asset	Expected Return E_I	Original Position w_I	Beta β_I	Ratio E_I/β_I	Final Position w_I	Beta β_I	Ratio E_I/β_I
CAD	8.00%	66.67%	0.615	0.1301	90.21%	1.038	0.0771
EUR	5.00%	33.33%	1.770	0.0282	9.79%	0.649	0.0771
Total		100.00%			100.00%		
Diversified VAR		\$257,738			\$230,720		
Standard deviation		15.62%			13.98%		
Expected return		7.00%			7.71%		
Sharpe ratio		0.448			0.551		

$$\beta = \frac{\Sigma w}{(w'\Sigma w)} \qquad (7.39)$$

计算过程见 Excel 表

但是，以上基于均值方差法的投资组合分析还存在以下缺点

1、非正态性---极值分布和广义双曲分布

2、异方差性---CARCH 模型和 SV 模型

3、尾部相关性-copula

4、高维---因子分析和主成分分析

5、没有考虑金融资产的多样性--衍生产品

6、只研究了市场风险，----忽略信用风险、操作风险和系统性风险

本节作业：

自行查找数据，用 R 编程或 excle 实现本节的例题

本节主要参考文献

- Value-at- Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk, Jorion, 3rd Edition
- Ch. 7 Portfolio Risk: Analytical Methods
- Aggregation of Risks and Allocation of Capital (Sections 4-7)

案例作业 5：巴林银行（以后讨论）

背景：

1995 年 2 月 27 日，英国中央银行突然宣布：巴林银行不得继续从事交易活动并将申请资产清理。这个消息让全球震惊，因为这意味着具有 233 年历史、在全球范围内掌管 270 多亿英镑的英国巴林银行宣告破产。具有悠久历史的巴林银行曾创造了无数令人瞠目的业绩，其雄厚的资产实力使它在世界证券史上具有特殊的地位。可以这样说：巴林银行是金融市场上的一座耀眼辉煌的金字塔。

年仅 28 岁的交易员尼克·里森将已有 233 年历史的英国巴林银行赔了个精光，真是巨石激起滔

天浪，一时间各方争相报道巴林事件。尼克·里森也由此成为了世界知晓的人物，挤进了各大报刊杂志的头版。当然，无数的假设与理性分析判断亦风起云涌，大量的猜测与结论令人眼花缭乱。

那么，这个金字塔怎样就顷刻倒塌了呢：究其原因还得从 1995 年说起，当时担任巴林银行新加坡期货公司执行经理的里森，同时一人身兼首席交易员和清算主管两职。有一次，他手下的一个交易员，因操作失误亏损了 6 万英镑，当里森知道后，却因为害怕事情暴露影响他的前程，便决定动用 88888“错误帐户”。而所谓的“错误帐户”，是指银行对代理客户交易过程中可能发生的经纪业务错误进行核算的帐户（作备用）。以后，他为了私利一再动用“错误帐户”，创造银行帐户上显示的均是赢利交易。随着时间的推移，备用帐户使用后的恶性循环使公司的损失越来越大。此时的里森为了挽回损失，竟不惜最后一博。由此造成在日本神户大地震中，多头建仓，最后造成损失超过 10 亿美元。这笔数字，可以称是巴林银行全部资本及储备金的 1．2 倍。233 年历史的老店就这样顷刻瓦解了，最后只得被荷兰某集团以一英镑象征性地收购了。

表 1 88888 账户之中的交易对巴林银行财务状况的影响

		Unaudited		Audited	
		Year ended 31 December 1994 £'000	Half year ended 30 June 1994 £'000	Year ended 31 December 1993 £'000	Year ended 31 December 1992 £'000
A	Notional profit before bonus and tax	204,762	109,528	200,206	42,528
B	Assumed bonus (50% x A)	(102,381)	(54,764)	(100,103)	(21,264)
C	Reported profit before tax	102,381	54,764	100,103	21,264
D	Tax	(39,410)	(18,459)	(31,800)	(8,916)
E	Reported profit after tax	62,971	36,305	68,303	12,348
	Reported shareholders' funds	354,371	336,037	308,814	253,895
F	Unreported loss in Account '88888'	(185,000)	(93,000)	(21,000)	(2,000)
	Adjusted for loss in Account '88888'				
G	Profit before bonus and tax (line A less line F)	19,762	16,528	179,206	40,528
H	Bonus (50% x G)	(9,881)	(8,264)	(89,603)	(20,264)
I	Profit before tax	9,881	8,264	89,603	20,264
J	Tax *	(39,410)	(18,459)	(31,800)	(8,916)
K	Profit (loss) after tax	(29,529)	(10,195)	57,803	11,348
	Adjusted shareholders' funds	250,371	278,037	297,314	252,895

案例讨论要点

- 简要介绍里森当时的投资策略的损益。
- 简要介绍当时的宏观经济环境。
- 里森的投资策略会面临哪些风险？
- 如果你是里森，你会如何管理里森的投资策略组合风险
- 如何使用 VaR 系统去识别里森的风险。如果存在一个有效的 VaR 系统，是否可以回答以下问题：
    - 里森的真实 VaR 值是多少？
    - 哪些构成成分对 VaR 影响最大？
    - 头寸之间是否实现了相互对冲，还是增强了总体风险

TABLE 7-3 Barings' Risks

	Risk % σ	**Correlation Matrix R**		**Covariance Matrix Σ**		**Positions ($ millions) x**	**Individual VAR $\alpha\sigma x$**
10-year JGB	1.18	1	-0.114	0.000139	-0.000078	($16,000)	$310.88
Nikkei	5.83	-0.114	1	-0.000078	0.003397	$7,700	$740.51
Total						$8,300	$1051.39
	Total VAR Computation			**Marginal VAR**			

			β_i for \$1 million			
Asset I	$(\Sigma x)_I$	$x_I'(\Sigma x)_I$	$(\Sigma x)_I/\sigma_P^2$	$\beta_I VAR$	**Component VAR** $\beta_I x_I VAR$	**Percent Contribution**
10-yr JGB	-2.82	45138.8	-0.0000110	**(\$0.00920)**	\$147.15	17.6%
Nikkei	27.41	21055.1	0.0001070	**\$0.08935**	\$688.01	82.4%
Total		256193.8			\$835.16	100.0%
Risk = σ_P		506.16				
VAR=$\alpha\sigma_P$		\$835.16				

- VaR 分析
  - 首先计算整体 VaR。根据相关性建立协方差矩阵

    $$\sigma_1^2 x_1 + \sigma_{12} x_2 = 0.000139 \times (-\$16,000) + (-0.000078) \times \$7700 = -2.82$$

  - 然后计算第二列的和得到投资组合的方差 256,193.8
  - 95%的 vaR 的值是 $1.65 \times \$506$ 小于里森的全部损失 13 亿美元。
  - 其他头寸：1995 年 1 月 23 日，神户大地震，日经指数下挫 6.4% ，在月波动性味 5.83%的基础上，95%的置信水平日本股票每日 VaR 是 2.5%。
  - 成分 VaR，债券头寸每增加 100 万美元时，VaR 的值变动是 0.92 万美元，股票头寸每增加 100 万美元，VaR 增加 8.935 万美元
  - 大部分风险来源于日经指数，而债券头寸没有起到对冲作用。