第一章 理赔额的分布

一、常用名词

被保险人（insured）

承保人，保险公司（insurance）

损失事件（loss event or claim）

注意：事故不等于损失事件

损失额（loss）

理赔事件（payment event）

赔付额，理赔额（amount paid）

注意：损失事件不等于理赔事件，理赔额不等于损失额

记号：

X 表示投保人实际损失额（ground-up loss）。

Y^P 表示保险人每次理赔事件的赔付额(amount paid **per payment**)，简称理赔额，一般认为 Y>0;

Y^L 表示投保人每次损失事件中获得的实际赔付额(amount paid **per loss**)，实际赔付有可能为 0。

二、常见的部分赔偿形式

1、免赔额（deductible）

- 普通免赔额 ordinary deductible：当损失额低于某一限额时不做赔偿，这一限额称为免赔额（或自付额），当损失额高于免赔额，只赔偿高出的部分。

  例如 免赔额为 50 元

- Franchise 免赔额：当损失额低于某一限额时不做赔偿，这一限额称为免赔额（或自付额），当损失额高于免赔额，则全额赔偿。

- 普通免赔额的数学形式：

$$Y^L=\begin{cases}0 & X\le d\\ X-d & X>d\end{cases}$$

$$Y^P=\begin{cases}\text{未定义} & X\le d\\ X-d & X>d\end{cases}$$

Franchise 免赔额的数学形式

$$Y^L = \begin{cases} 0 & X \le d \\ X & X > d \end{cases}, \quad Y^P = \begin{cases} \text{未定义} & X \le d \\ X & X > d \end{cases}$$

注： 除非特别说明，本讲义中的免赔额都是指普通免赔额。

请问：Y^P 和 Y^L 的区别是什么？

例 1.1：已知某风险标的的原始损失额如下：

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.4	0.2	0.2	0.15	0.05

假设免赔额为 1，求每次理赔事件的赔付额 Y^P 和每次损失事件的赔付额 Y^L 的分布。

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.4	0.2	0.2	0.15	0.05
y^L*	0	0	1	2	3
y^P			1	2	3
$P(Y^L=y)$	0.4	0.2	0.2	0.15	0.05
$P(Y^P=y)$			0.2/0.4	0.15/0.4	0.05/0.4

Y^L的分布容易计算，

$$F_{Y^L}(0) = P(Y^L = 0) = P(X \le d) = F_X(d)$$

$$F_{Y^L}(y) = P(X - d \le y) = F_X(d + y), \quad y>0$$

$$f_{Y^L} = \begin{cases} P(X \le d) & y = 0 \\ f_X(d + y) & y > 0 \end{cases}$$

请同学们画出分布密度图。

Y^P 的分布是在 $X>d$ 的条件下， $X-d$ 的条件分布。记 Y^P 的分布函数记为 $F_{Y^P}(y)$， 当 $y>0$ 时为，

$$F_{Y^P}(y) = P(Y^P \le y) = P(X - d \le y \mid X > d)$$

$$= \frac{P(X - d \le y, X > d)}{P(X > d)}$$

$$= \frac{F(y+d) - F(d)}{1 - F(d)}$$

当 y＝0 时， $F_{Y^P}(0) = 0$

Y^P 的分布密度函数可以写为

$$f_{Y^P}(x) = \frac{d}{dx} F_{Y^P}(x) = \frac{f(x+d)}{1-F(d)}, \quad x>0$$

2、保单限额（Policy limit）

- 含义：每次保险事故中按保险单所约定的最高赔偿金额。

  例如：最高保单限额为 1500 元

- 数学形式：

$$Y^P = Y^L = \begin{cases} X & X < u \\ u & X > u \end{cases}$$

$$F_{Y^P}(y) = P(X \le y) = F_X(y), \quad y < u$$

$$F_{Y^P}(y) = P(Y^P \le y) = 1, \quad y \ge u,$$

$$f_{Y^P}(y) = \begin{cases} f_X(y) & y < u \\ P(X \ge u) & y = u \end{cases}$$

请同学们画出分布密度函数图。

请问：当免赔额和保单限额同时存在时，情况会怎样？

例 1.2：设某医疗保险单上规定了免赔额为 100，保单限额为 5,000，有三个投保人看病花费分别为 50, 4000 和 5500，问他们获得的赔付额各是多少?

注意：如果同时规定最高保单限额为 u，免赔额为 d，则投保人所能得到的最高赔偿金额为 u。

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \le d \\ X-d, & d < X \le u+d \\ u, & X > u+d \end{cases}$$

$$Y^P = \begin{cases} \text{undefined}, & X \le d \\ X-d, & d < X \le u+d \\ u, & X > u+d \end{cases}$$

解：设 X_i 表示第 i 个投保人的损失额, Y_i 表示他所获得的赔付，则

$$Y_i^L=\begin{cases} 0, & X_i<100 \\ X_i-100, & 100<X_i<5100 \\ 5000, & X_i>5100 \end{cases}$$

所以，由 $X_1=40$, $X_2=4000$, $X_3=5500$，得

$Y_1^L=0$, $Y_2^L=4000-100=3900$，$Y_3^L=5000$

例 1.3：假设某险种的保单规定免赔额为 100 元，保单限额为 1,000 元。假设损失服从 Weibull 分布，

$$F(x)=1-e^{-\theta x^{\tau}}，\quad x>0，\quad \theta>0,\tau>0$$

求理赔额 Y^P 的分布。

解：设 X 表示实际损失额，Y^P 表示理赔额，则

$$Y^P=\begin{cases}\text{undefined}, & X\le 100\\ X-100, & 100<X\le 1100\\ 100, & X>1100\end{cases}$$

Y^P 的分布函数和分布密度分别为

$$F_{Y^P}(y)=\begin{cases}0, & y=0\\ \dfrac{F_X(y+100)-F_X(100)}{1-F_X(100)}, & 0<y\le 1000\\ 1, & y\ge 1000\end{cases}$$

$$f_{Y^P}(y)=\begin{cases}\dfrac{f_X(y+100)}{1-F_X(100)}, & 0\le y<1000\\ \dfrac{1-F_X(1100)}{1-F_X(100)}, & y=1000\\ 0, & y>1000\end{cases}$$

当 y＝1000 时，

$$f_{Y^P}(900)=\frac{1-F_X(1100)}{1-F_X(100)}=\frac{\exp[-(1100\cdot\theta)^\tau]}{\exp[-(100\cdot\theta)^\tau]}$$

当 $0\le y<1000$ 时，

$$f_{Y^P}(y)=\frac{f_X(y+100)}{1-F_X(100)}=\frac{\theta^\tau\tau(y+100)^{\tau-1}\exp[-\theta^\tau(x+100)^\tau]}{\exp[-(100\cdot\theta)^\tau]}$$

3、比例分担（coinsurance）

- 含义：在保险单中约定一个比例常数α，当损失事故中的实际损失额为 X 时，保险公司只赔付αX。
- 例如，α＝0.8

$$Y^P = Y^L = \alpha X$$

$$f_{Y^P}(y) = \frac{1}{\alpha} f_X(\frac{y}{\alpha})$$

- 当免赔额、保单限额和比例分担三者同时存在时

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \le d \\ \alpha(X-d), & d < X \le u \\ \alpha(u-d), & X > u \end{cases}$$

注意,在这个式子中 u 不是赔偿限额, 是覆盖最大损失. *maximum covered loss*.赔偿限额为$\alpha(u-d)$.

$$Y^P=\begin{cases}\text{未定义}, & X\le d\\ \alpha(X-d), & d<X\le u\\ \alpha(u-d), & X>u\end{cases}$$

练习：请同学们计算 Y^P 和 Y^L 的分布。

当 y＝0 时，$F_{Y^L}(y)=1-F_X(d)$

当 0<y<$\alpha(u-d)$时，

$$F_{Y^L}(y)=P(\alpha(X-d)\le y)=P(X\le\frac{y}{\alpha}+d)=F_X(\frac{y}{\alpha}+d)$$

当 y⩾$\alpha(u-d)$时，$F_{Y^L}(y)=1$

于是计算 Y^L 的分布密度

$$f_{Y^L}(y)=\begin{cases}F_X(d) & y=0\\ \frac{1}{\alpha}f_X(\frac{y}{\alpha}+d) & 0<y\le\alpha(u-d)\\ 1-F_X(u) & y>\alpha(u-d)\end{cases}$$

下面计算 Y^P 的分布

当 $0<y<\alpha(u-d)$ 时，

$$F_{Y^P}(y)=P(Y^P\le y)=P(\alpha(X-d)\le y\mid X>d)$$

$$=\frac{P(\alpha(X-d)\le y, X>d)}{P(X>d)}$$

$$=\frac{F_X(\frac{y}{a}+d)-F_X(d)}{P(X>d)}$$

当 $y=\alpha(u-d)$ 时， $F_{Y^P}(\alpha(u-d))=P(Y\le\alpha(u-d))=1$

$$f_{Y^P}(y)=\begin{cases}\dfrac{(\frac{1}{\alpha})f_X(\frac{y}{\alpha}+d)}{1-F_X(d)}, & 0<y<\alpha(u-d)\\[2ex] \dfrac{1-F_X(u)}{1-F_X(d)}, & y=\alpha(u-d)\end{cases}$$

三、理赔额的期望

记号

$$I_d(X)=\begin{cases}0 & X\le d\\ X-d & X>d\end{cases}$$

$$X\wedge d=\begin{cases}X & X\le d\\ d & X>d\end{cases}$$

显然， $X\wedge d = X - I_d(X)$

设 X 表示损失额，Y^P 表示每次赔偿理赔额，Y^L 每次损失的赔付额

- 免赔额情形：$Y^L = I_d(X)$， $Y^P = Y^L \mid X>d = X-d \mid X>d$
- 保单限额：$Y^P = Y^L = X\wedge u = X - I_u(X)$
- 保单限额、免赔额同时存在：

$$Y^L = X\wedge(u+d) - X\wedge d = I_d(X) - I_{u+d}(X),\quad Y = Y^L \mid X>d$$

- 比例分担、保单限额、免赔额同时存在：
- $Y^{L}=\alpha\left(X\wedge u-X\wedge d\right)=\alpha\left(I_{d}(X)-I_{u}(X)\right)$

1、有限期望函数

$$E(X\wedge d)=\int_{-\infty}^{d}xf(x)dx+d(1-F(d))$$

有限期望函数性质

①. $$\lim_{d\to\infty}E(X\wedge d)=E(X)$$

②.对于非负随机变量 X,

$$E(X\wedge d)=\int_{0}^{d}xf(x)dx+d(1-F(d))$$

③.对非负随机变量 X,

$$E(X\wedge d)=\int_{0}^{d}(1-F(x))dx$$

证明：

$$\begin{aligned} E(X\wedge d) &= \int_0^d xf(x)dx + d(1-F(d)) \\ &= -x(1-F(x))\Big|_0^d + \int_0^d (1-F(y))dy + d(1-F(d)) \\ &= \int_0^d (1-F(x))dx \end{aligned}$$

④. $E(X\wedge u)-E(X\wedge d)=\int_d^u (1-F(x))dx$

例 1.4：设某险种的损失额 X 具有密度函数

$$f(x)=\frac{324}{(3+x)^5},\ x>0,$$

假定最高理赔额为 u=4 万元，求理赔额的期望是多少?

解：设理赔额为 Y^p，则

$$Y^P=\begin{cases}X & X<u\\ u & X>u\end{cases}\Rightarrow Y=X\wedge u$$

由

$$F(x)=\int_0^x\frac{324}{(3+y)^5}dy=-\frac{324}{4}(3+y)^{-4}\Big|_0^x=1-\frac{81}{(3+x)^4}$$

知，

$$E(X\wedge d)=\int_0^d(1-F(x))dx=1-\frac{27}{(3+d)^3}$$

$$E(Y)=E(X\wedge 4)=1-\frac{27}{(3+4)^3}=0.9212$$

例1.5：

The unlimited severity distribution for claim amounts under an auto liability insurance policy is given by the cumulative distribution:

$$F(x) = 1 - 0.8e^{-0.02x} - 0.2e^{-0.001x}, \quad x \geq 0$$

The insurance policy pays amounts up to a limit of 1000 per claim.

Calculate the expected payment under this policy for one claim.

解：

由题意知，保单限额为 1000 元，因此理赔额的期望为 $E(X\wedge 1000)$

$$
\begin{aligned}
&E(X\wedge 1000)\\
&=\int_0^{1000}(1-F(x))dx\\
&=\int_0^{1000}0.8e^{-0.02x}+0.2e^{-0.001x}dx\\
&=(-40e^{-0.02x}-200e^{-0.001x})\Big|_0^{1000}\\
&=39.9999+126.4=166.4
\end{aligned}
$$

2、剩余期望函数 the mean excess loss

$$e_X(d) = E(X-d \mid X>d) = \int_d^{\infty} \frac{(x-d)f(x)}{1-F(d)}dx$$

$E(X)$，$e_X(d)$与 $E(X \wedge d)$的关系

$$e_X(d) = \frac{E(X)-E(X\wedge d)}{1-F_X(d)}$$

$$E(X)= E(X\wedge d)+ e_X(d)(1-F(d))$$

请同学们分析一下 $e_X(d)$的直观含义。

3、损失消失率（loss elimination ratio）

$$ELR = \frac{E(X \wedge d)}{E(X)}$$

ELR 计算由于加入免赔额后，保险人减少的损失率。

附加例题

Y are given the following information for an auto collision coverage

Ordinary deductible	Average payment per payment	Loss elimination ratio
0	800	0
1000	720	0.8

A new version of the coverage with a 100 franchise deductible is introduced. Determine the average payment per loss for this coverage.

解：800*（1-0.8）=160

$$160=720(1-F(1000))$$

$$1-F(1000)=\frac{2}{9}$$

$$160+1000(1-F(1000)=160+1000(2/9)=382\frac{2}{9}$$

例 1.6：设某险种的损失额 X 具有密度函数

$$f(x)=\frac{324}{(3+x)^5}, x>0,$$

假定免赔额等于 0.2 万元，求每次损失事件实际赔付额$I_{0.2}(X)$和每次理赔额事件理赔额 Y 的期望。

解：由例 1.4 知$F(x)=\int_0^x \frac{324}{(3+y)^5}dy=-\frac{324}{4}(3+y)^{-4}\Big|_0^x=1-\frac{81}{(3+x)^4}$

$$E(X\wedge d)=\int_0^d (1-F(x))dx=1-\frac{27}{(3+d)^3}$$

经计算得到$E(X)=1$，且

$$1-F_X(0.2)=81/(3.2)^4=0.7724\text{，}$$

$$E(X\wedge 0.2)=1-\frac{27}{(3+0.2)^3}=0.1760$$

$$E(I_{0.2}(X)) = E(X) - E(X \wedge 0.2) = 1 - 0.1760 = 0.8240$$

$$E(Y^P) = \frac{E(X) - E(X \wedge 0.2)}{1 - F_X(0.2)} = \frac{1 - 0.1760}{0.7724} = 1.067$$

例1.7：The random variable for a loss X, has the following characteristics:

x	$F(x)$	$E(X \wedge x)$
0	0.0	0
100	0.2	91
200	0.6	153
1000	1.0	331

Calculate the mean excess loss for a deductible of 100.

解： 设 Y^{P} 表示理赔额，则 $Y^{P}=X-100 \mid X>100$， 由公式

$$
\begin{aligned}
E(Y^{P}) &= E(X-100 \mid X>100) \\
&= \frac{E(X)-E(X\wedge 100)}{1-F(100)} \\
&= \frac{331-91}{0.8} = 300
\end{aligned}
$$

上面的例子可以总结为下面的定理：

定理 设 X 表示实际损失额， 免赔额为 d， 最大覆盖损失为 u 和比例分担额α, 则每次损失赔付额 Y^L 和赔偿的理赔额 Y^P 的期望分别为

$$E(Y^L)=\alpha[E(X\wedge u)-E(X\wedge d)]$$

$$E(Y^P)=\frac{E(Y^P)}{1-F_X(d)}=\frac{\alpha[E(X\wedge u)-E(X\wedge d)]}{1-F_X(d)}$$

证明：因为

$$Y^L=\begin{cases}0, & X\le d\\ \alpha(X-d), & d<X\le u\\ \alpha(u-d), & X>u\end{cases}$$

可以表示为

$$Y^L=\alpha[(X\wedge d)-(X\wedge u)]$$

所以

$$E(Y^L)=\alpha[E(X\wedge u)-E(X\wedge d)]$$

由于 Y^P 是 X>d 条件下，Y^L 的值，因此

$$E(Y^P)=\frac{E(Y^L)}{1-F_X(d)}=\frac{\alpha[E(X\wedge u)-E(X\wedge d)]}{1-F_X(d)}$$

四、增限因子

增限因子是较高限额下保单的期望赔付与基本限额下保单的期望赔付的期望保险成本之比。

设保单限额为 U，基本限额为 B，

$$\text{限额为U的增限因子IFL}(\text{U})=\frac{\text{限额为U的期望成本}}{\text{限额为}B\text{的期望成本}}$$

- 如果下面假设满足：

1） 保单附加费用与保费成比例

2） 索赔频率独立于所购买的保单限额，换言之，限额为 U 的期望索赔频率等于限额为 B 的期望索赔频率。

3） 没有附加费用

3）没有免赔额，则限额为 U 的增限因子为

$$\text{ILF}(U)=\frac{E(X\wedge U)}{E(X\wedge B)}$$

- 如果有附加费用，则增限因子可以写为

$$\text{限额为}L\text{的增限因子}=\frac{\text{限额为}L\text{的平均赔款}+\text{限额为}L\text{的风险附加}}{\text{限额为}B\text{的平均赔款}+\text{限额为}B\text{的风险附加}}$$

计算 ILF 的方法

（1）直接使用损失分布计算

这时，我们可以利用有限期望函数的公式来计算增限因子。

14.1. Losses follow a two-parameter Pareto distribution with $\alpha=3$ and $\theta=20{,}00$
Basic coverage has a policy limit of 10,000.
Calculate the ILF for a policy limit of 50,000.

补充例题

已知损失服从 2 参数的 pareto 分布 α=3，θ=20000，基础限额为 10000，求限额为 50000 的 ILF

解：利用 Table 上的 pareto 分布的性质，

$$\mathrm{E}[X \wedge x] = \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha \neq 1$$

代入题设中参数赋值 α=3，θ=20000 可得

$$\mathbf{E}[X \wedge 10{,}000] = \frac{20{,}000}{2}\left(1 - \left(\frac{20{,}000}{30{,}000}\right)^2\right) = 5555.56$$

$$\mathbf{E}[X \wedge 50{,}000] = \frac{20{,}000}{2}\left(1 - \left(\frac{20{,}000}{70{,}000}\right)^2\right) = 9183.67$$

$$\text{ILF}(50{,}000) = \frac{9183.67}{5555.56} = \boxed{\mathbf{1.6531}}$$

（2）利用经验数据来计算，如

EXAMPLE 14A You are given the following loss experience:

Loss Size	Number of Losses	Total Losses
1–100,000	285	9,975,000
100,001–200,000	72	8,640,000
200,001–500,000	48	12,480,000

The basic policy limit is 100,000.
Calculate increased limits factors for policy limits of 200,000 and 500,000.

限额为 100，000 的期望赔付成本（LAS）为

9975000+（72+48）（100000）=21975

限额为 200，000 的期望赔付成本（LAS）为

9975000+8640000+48（200000）=28215000

限额为 500，000 的期望赔付成本（LAS）为

9975000+864000+12480000=31095000

$$\frac{28215000}{21975000} = 1.2840 \text{ for a } 200{,}000 \text{ limit}$$

$$\frac{31095000}{21975000} = 1.4150 \text{ for a } 500{,}000 \text{ limit}$$

322. You are given the following loss distribution probabilities for a liability coverage, as well as the average loss within each interval:

Limit	Cumulative Probability	Average Loss
1,000	0.358	300
25,000	0.761	8,200
100,000	0.879	47,500
250,000	0.930	145,000
500,000	0.956	325,000
1,000,000	0.984	650,000
10,000,000	1.000	3,700,000

Calculate the increased limits factor for a 1,000,000 limit when the basic limit is 100,000 and there is no loading for risk or expenses.

解：利用下面公式计算

$$E(X \wedge L)=\int_0^L xf(x)dx+L(1-F(L))$$

根据上表知

P(X<1000)=0.358,

P(1000<X<25000)=0.403,

类似的，可计算出损失位于其他区间的概率为 0.118，0.01，0.026，0.028 和 0.016.

因此，基础限额 100,000 的期望损失为

0.358(300)+0.403(8200)+0.118(47500)+0.121(100000)=21117

限额在 1,000,000 的期望损失为

0.358(300)+0.403(8200)+0.051(1450000)+0.026(325000)+0.028(650000)+0.016(1000000)=59062

因此，增限因子是 59062/21117=2.797

四、通货膨胀效应

1、通货膨胀率已知为 r

■ 对损失额的影响

设 X 表示过去时期内损失额，Z 表示现在或未来时期内的损失额，则两者的关系为 Z=(1+r)X。容易计算得到

$$F_Z(z) = F_X\left(\frac{z}{(1+r)}\right)$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{(1+r)} f_X\left(\frac{z}{(1+r)}\right)$$

$$E(Z) = (1+r)E(X), \quad \text{var}(Z) = (1+r)^2 \text{var}(X)$$

■ 对理赔额的影响：

定理：设 X 表示实际损失额，免赔额为 d，最大覆盖损失为 u 和比例分担额α，通货膨胀率为 r，则明年每次损失赔付额为

$$Z^L=\begin{cases}0, & X\le d/(1+r)\\ \alpha[(1+r)X-d)], & d/(1+r)<X<u/(1+r)\\ \alpha(u-d), & X\ge u/(1+r)\end{cases}$$

每次理赔的理赔额为

$$Z^P=\begin{cases}\text{未定义} & X\le d/(1+r)\\ \alpha[(1+r)X-d)], & d/(1+r)<X<u/(1+r)\\ \alpha(u-d), & X\ge u/(1+r)\end{cases}$$

$$E(Z^L)=a(1+r)\{E[X\wedge(u/(1+r))]\text{-}E[X\wedge(d/(1+r))]\}$$

$$E(Z^P)=\frac{a(1+r)\{E[X\wedge(u/(1+r))]-E[X\wedge(d/(1+r))]\}}{1-F_X(\frac{d}{1+r})}$$

证明参见 loss model。

例 1.8 假设某险种在 2003 年的实际损失额服从离散分布，$P(X=1000k)=1/6,k=1,\cdots,6$。保单上规定每次损失的免赔额为 1500 元。假设从 2003 年到 2004 年的通货膨胀额为 5%，2004 年的免赔额保持不变，求 2004 年的每次损失赔付额的期望是多少。比今年相比，增长率是多少？

解法一：2003 年的每次损失事故的索赔额为

$$Y^L = \begin{cases} 0 & X \le 1500 \\ X - 1500 & X > 1500 \end{cases}$$

$$E(Y^L) = \frac{1}{6}(2000-1500) + \frac{1}{6}(3000-500) + \frac{1}{6}(4000-1500)$$
$$+\frac{1}{6}(5000-1500) + \frac{1}{6}(6000-1500)$$
$$= \frac{1}{6}(500+1500+2500+3500+4500)$$
$$= \frac{1}{6}\times 12500$$

2004 年的每次损失的索赔额

$$Y_1^L=\begin{cases}0 & 1.05X\le 1500\\ 1.05X-1500 & 1.05X>1500\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(Y_1^L)&=\frac{1}{6}(1.05\times 2000-1500)+\frac{1}{6}(1.05\times 3000-1500)+\frac{1}{6}(1.05\times 4000-1500)\\&\quad+\frac{1}{6}(1.05\times 5000-1500)+\frac{1}{6}(1.05\times 6000-1500)\\&=\frac{1}{6}\times 1.05\times 1000\times(2+3+4+5+6)-\frac{5\times 1500}{6}\\&=\frac{1}{6}\times 13500\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{E(Y_1^L)}{E(Y^L)}=\dfrac{13500}{12500}=1.08$，故增长率为8%。

解法二：

$$E(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)\times 1000=\frac{21000}{6}$$

$$E(X\wedge 1500)=\frac{1}{6}\times 1000+\frac{5\times 1500}{6}=\frac{8500}{6}$$

$$E(X\wedge \frac{1500}{1.05})=\frac{1}{6}\times 1000+\frac{5\times 1500}{6\times 1.05}=\frac{8550}{6\times 1.05}$$

今年每次损失的索赔额为

$$E(Y^L)=E(X)-E(X\wedge 1500)=(21000-8500)/6=12500/6$$

明年每次损失的索赔额为

$$E(Y_1^L)=1.05\times[E(X)-E(X\wedge \frac{1500}{1.05})]=13500/6$$

增长率为 8%

补充例题：

An insurance coverage has an ordinary deductible of 500.losses follow a two-parameter Pareto distribution with $\alpha=3$, $\theta=1000$ .Calculate the reduction in loss elimination rayio sfter 10% inflation

$$E(X\wedge d)=E(X)\left(1-\left(\frac{\theta}{\theta+d}\right)^{\alpha-1}\right)$$

$$\text{LER}=\frac{E(X\wedge 500)}{E(X)}=1-\left(\frac{1000}{1500}\right)^{2}=\frac{5}{9}$$

通货膨胀后，pareto 分布的参数 $\theta=1000(1.1)=1100$ ，因此

$$1-\left(\frac{1100}{1600}\right)^{2}=\frac{135}{256},\quad 5/9-135/256=0.02821$$

扩展内容，再保险的基础知识

再保险（reinsureance），也称分保，是保险公司在保险合同的基础上通过签订分保合同，转嫁所承担的风险和责任的方式，通俗的说，就是对保险人的保险。

常见的再保险形式：

- **比例再保险**

（1）成数再保险：原保险人按约定的比例，将每一个风险单位的保险金额向再保险人分保。

例：某成数再保险合同，每一风险单位的规定自留 45%，分出 55%。现有一风险单位保险金额为 400 万元，费率为 1/1000，在保险责任范围内发生损失 2 万元，问保费如何分配，损失如何分摊？

解：收取保费 400 万×（1/1000）=4000 元。

保费按自留 45%，分出 55%的比例分配：

自留保费 4000*45%=1800 元；

分出保费 4000*55%=2200 元。

赔款亦按此比例分摊：

分出公司自负赔款 2 万*45%=0.9 万；

分入公司应负赔款 2 万*55%=1.1 万。

（２）溢额再保险（surplus-share），是原保险人规定一个最大保险金额（一线）作为自留额。当任何一个风险单位的保险金额小于这个金额时，原保险人自留全部责任。当保险金额超过自留额的部分时，原保险人与再保险人按自留额和分出额对总保额的比例分摊赔款责任。

特点

保险合约中还规定了自留额的一定线数作为再保险人的赔偿限额。

与成数再保险的区别在于

自留额固定

分保比例变化

例：某溢额再保险合同，每一风险单位自留额为 50 万元，溢额分保的限额为 5 根线，即 250 万元。请问下列情况下，分保人的自留和赔偿责任分别是多少？

当保险金额为 40 万元时

当保险金额为 100 万元时

当保险金额为为 350 万元时

2：非比例再保险

（1）超额赔偿再保险：（Excess of loss treaties）原保险人因同一原因发生的任何一次损失或因同一原因所导致的各次赔偿额的总和超过约定的自负额，其超出部分由再保险公司负责至一定额度。

在超额赔款再保险方式中，有一种分层（Layering）的安排方法，即将整个超赔保障数额分割为几层，便于不同的再保险人接受。

- 例如，某保险人对他承保的 500 万英磅的业务，分四层来安排超额赔款再保险：第一层为超过 10 万英镑以后的 40 万英镑（400,000 excess of 100,000），即原保险人的自负责任为 10 万英镑的赔款，超过 10 万英镑，少于 50 万英镑的责任，由某一再保险人承担。
- 第二层为超过 50 万英镑以后的 50 万英镑。
- 第三层为超过 100 英镑以后的 100 万英镑。
- 第四层为超过 200 英镑以后的 200 万英镑。

例题　已知以下损失值

4000　6000 7000 9000

计算在超赔层（2000 excess of 5000）的总损失。

解 0+1000+2000+2000=5000

有的时候，再保险保单还会出现共保形式，例如巨灾再保险

324. A primary insurance company has a 100,000 retention limit. The company purchases a catastrophe reinsurance treaty, which provides the following coverage

Layer 1:	85% of 100,000 excess of 100,000
Layer 2:	90% of 100,000 excess of 200,000
Layer 3:	95% of 300,000 excess of 300,000

The primary insurance company experiences a catastrophe loss of 450,000.

Calculate the total loss retained by the primary insurance company.

Question #324
Key: D

The retained loss is 100,000 + 0.15(100,000) + 0.10(100,000) + 0.05(150,000) = 132,500.

计算再保险期望损失的方法（exposure rating）

对于财产再保险，设保险人的损失是 X，

给定一个保险金额，并已知再保险接受的自留额 attp 和赔偿限额为 limit，再保险人承担的损失为

$$Y=\begin{cases} 0, & X\le attp \\ X-attp, & attp<X\le attp+R\lim t \\ R\lim t, & X>attp+R\lim t \end{cases}$$

则**再保险接受人的损失占期望总损失的比例**为

$$\frac{E(Y)}{E(X)}=\frac{1}{E(X)}\left\{E(X\wedge\frac{attp+R\lim t}{IV}IV)-E(X\wedge\frac{attp}{IV}IV)\right\}$$

$$=P(\frac{attp+R\lim t}{IV})-P(\frac{attp}{IV})$$

从而得到

$$E(Y)=\left(P(\frac{attp+R\lim t}{IV})-P(\frac{attp}{IV})\right)E(X)$$

如果根据

$$P(p)=\frac{E(X\wedge pIV)}{E(X)}$$

计算每个 p 对应的 P(p)则得到一条风险曲线，则我们可以根据这条曲线计算再保险损失。

■ 例：某$400,000 excess of $100,000 的超额赔款再保险合同，现有一份保险金额为$500,000，则再保险接受人的损失所占比例

为 44% (= 93%-49%).如果原保险人再保前的预计总损失额为 1000 万元，则再保险公司预计将承担 440 万元的损失。

Percent of I.V.	Exposure Factor
0%	0%
10%	37%
20%	49%
30%	57%
40%	64%
50%	70%
60%	76%
70%	81%
80%	85%
90%	89%
100%	93%
110%	97%
120%	100%

计算**责任超赔再保险损失**，通常会采用增限因子的方法

- 数理模型

设原保险公司的损失为 X，超赔损失层再保险的自留额为 attp，再保限额为 Rlimit，则再保险损失 Y 定义为

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} 0 & X \le attp \\ X - attp & attp < X \le attp + \mathrm{Rlimit} \\ \mathrm{Rlimit} + attp & X > attp + \mathrm{Rlimit} \end{cases} \\
&= (X \wedge attp + \mathrm{Rlimit}) - (X \wedge attp) \\
&= (X - (X; attp)) - (X - (X; attp + \mathrm{Rlimit}))
\end{aligned}
$$

则对于再保险损失占原保险公司的损失比例（即超赔损失因子）

$$\frac{E(Y)}{E(X)} = \frac{E(X \wedge attp + \text{Rlimit}) - E(X \wedge attp)}{E(X)}$$

$$= IFL(atttp + R\lim it) - IFL(attP)$$

$$E(Y) = \left(IFL(atttp + R\lim it) - IFL(attp)\right)E(X)$$

六、**认识 table,了解分布之间的关系.**

1、 几种常见的损失分布函数的性质

2、 拓展分布的方法

3、 矩母函数、母函数和特征函数

4、 VaR 和 TVaR

- 几种常见分布的性质
  - 指数分布

$$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0$$

  - Gamma 分布

$$f(x)=\frac{(\frac{x}{\theta})^{\alpha}e^{-\frac{x}{\theta}}}{x\Gamma(\alpha)}, a\geq 0, x>0$$

指数分布、χ^2 分布是 Gamma 分布的特例

  - 对数正态分布

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, 0<x<+\infty$$

■ Pareto 分布

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha}$$

性质：设X服从Pereto分布，参数为α,θ

定义X(d)=X-d |X>d 则X(d)的分布为Pareto分布，参数为θ＋d, α;

定义Z＝tX，则Z的分布是Pareto分布，参数是tθ,α

■ 威布尔（Weibull）分布

$$F(x) = 1 - \exp(-(x/\theta)^{\tau}), \quad f(x) = \frac{\tau (x/\theta)^{\tau} e^{-(x/\theta)^{\tau}}}{x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0, \tau > 0$$

其中形状参数为τ和尺度参数为θ。

当τ=1 时，威布尔分布为指数分布。

扩展分布的方法

- 变量代换法
  - 数乘，$Y = kX$
  - 幂变换，$Y = X^{1/\tau}$
  - 逆变换，$Y = X^{-1}$
  - 指数变换，Y=exp(X)
- 分布的混合
  - 一种是离散混合，即对有限个分布进行混合。例如，两个随机变量的混合分布的密度函数可以表示为

$$f(x) = af_1(x) + (1-a) f_2(x)$$

更一般地，如果 n 个随机变量的密度函数分别为 $f_i(x), i = 1, \cdots, n$，则混合后的密度函数为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x), \qquad a_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

- 另一种是连续混合，假设损失随机变量 X 的密度函数可以写为 $f_{X|\Theta}(x|\theta)$，其中参数Θ的取值随投保人的不同而不同，已知Θ存在一个概率分布$u(\theta)$，则 X 的无条件分布为

$$f(x)=\int f_{X|\Theta}(x|\theta)u(\theta)d\theta$$

通过上述的扩张，可以把损失的分布分为三个基本分布族

1 transformed beta 分布

2 Transformed Gamma 分布

3 逆 Transformed Gamma 分布

请仔细阅读 table 或教材附录。

- 母函数与矩母函数

设 N 是一个离散随机变量，取值于 $0,1,2\cdots$

分布列：

$$p_k = P(N = k) \qquad k = 0, 1\cdots$$

母函数：

$$P_N(z)=E(z^N)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k$$

对于一个随机变量 X，如果

$$M_{\mathrm{X}}(z)=E(e^{zX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{zx}f(x)dx \quad or=\sum_{k=0}^{\infty}e^{zk}p_k \text{ ， } \quad M_N(z)=P_N(e^z)$$

存在，则称 $M_{\mathrm{X}}(z)$ 为矩母函数

母(矩母)函数性质

1、若 N 的母(矩母)函数存在，那么母(矩母)函数与分布函数是相互唯一决定的。

2、由母(矩母)函数可以导出矩的计算：

$$P^{'}(1)=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=E(N)$$

$$P''(1)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p_k=E(N(N-1))$$
$$=E(N^2)-E(N)$$
$$Var(N)=E(N^2)-E(N)^2$$
$$=P''(1)+P'(1)-(P'(1))^2$$

请问：

$$M_N'(0)=?$$
$$M_N''(0)=?$$

3、设 $N=N_1+N_2+\cdots+N_n$， $N_1,\cdots,N_n$ 相互独立，则

$$P_N(z)=\prod_{j=1}^{n}P_{N_j}(z)$$

$$M_N(z)=\prod_{j=1}^{n} M_{N_j}(z)$$

六、TVaR 和 VaR

定义 1.17 随机变量 X 的概率分布的 α 分位点称为 π_α，即

$$\pi_\alpha=\inf\{x: P(X\leqslant x)\geqslant\alpha\} \tag{1—7—1}$$

若 X 是连续型随机变量，则

$$\int_{-\infty}^{\pi_\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\alpha$$

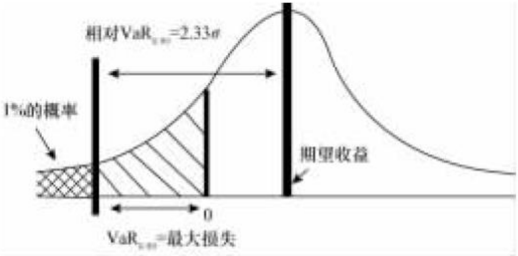
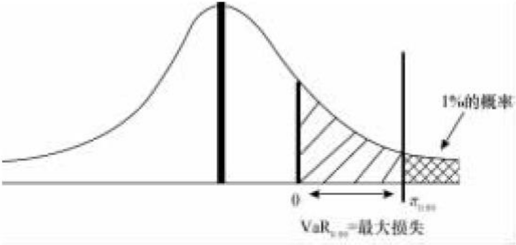


图 1—3　收益服从正态分布的 $VaR_{0.99}$ 示意图



【例 1—4】

假定一个为期 1 年的项目的最终结果介于 5 000 万元损失和 5 000 万元收益之间，5 000 万元损失和 5 000 万元收益之间的任意结果具有均等的可能。求该项目在 99%置信度下的 VaR。

【例 1—5】

假定一个为期 1 年的项目有 98% 的概率收益为 200 万元，有 1.5%的概率损失 400 万元，有 0.5%的概率损失 1 000 万元。求该项目在 99%和 99.5%置信度下的 VaR。

【解】该项目损失的累积分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0.98, & -200\leqslant x<400\\ 0.995, & 400\leqslant x<1\,000\\ 1, & x\geqslant 1\,000\end{cases}$$

对应 99%的分位点是 400 万元。因此，对于 1 年的展望期，在 99%置信度下的 VaR 为 400 万元。在 99.5%置信度下，对于在 400 万元和 1 000 万元之间的任意数值 V，损失超出 V 的概率均为 0.5%。我们选取最小值 400 万元作为 99.5%置信度下的 VaR 值。

练习：

已知 Z 的分布函数为

$$F_Z(1) = 0.91,$$
$$F_Z(90) = 0.95,$$
$$F_Z(100) = 0.96.$$

(1)求 $VaR_{0.95}(Z)$

(2)定义两个随机变量 X 和 Y，求 $VaR_{0.95}(X)$和 $VaR_{0.95}(Y)$

$$X = \begin{cases} Z, & Z \le 100, \\ 0, & Z > 100, \end{cases}$$

and

$$Y = \begin{cases} 0, & Z \le 100, \\ Z, & Z > 100. \end{cases}$$

（3）请问下面的选择哪个正确

（A）$VaR_{0.95}(Z) = VaR_{0.95}(X) + VaR_{0.95}(Y)$

（B）$VaR_{0.95}(Z) < VaR_{0.95}(X) + VaR_{0.95}(Y)$

（C）$VaR_{0.95}(Z) > VaR_{0.95}(X) + VaR_{0.95}(Y)$

答案：The 95% quantile, the VaR95%(Z) is 90 because there is a 5% chance of exceeding 90.

$\mathrm{VaR}_{95\%}(X) = 1$，$\mathrm{VaR}\ 95\%(Y) \leqslant 0.$

定义 1.18 设 X 表示损失额，$\mathrm{TVaR}_{\alpha}(X)$是指在给定 X 超过分位数π_{α} 时 X 的条件期望，即

$$\mathrm{TVaR}_{\alpha}(X)=E(X|X>\pi_{\alpha})=\frac{\int_{\pi_{\alpha}}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x}{1-F(\pi_{\alpha})} \tag{1—7—2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{TVaR}_{\alpha}(X)=E(X|X>\pi_{\alpha})&=\pi_{\alpha}+\frac{\int_{\pi_{\alpha}}^{\infty}(x-\pi_{\alpha})f(x)\mathrm{d}x}{1-\alpha}\\&=\mathrm{VaR}_{\alpha}(X)+e(\pi_{\alpha})\end{aligned}$$

$$\mathrm{TVaR}_{\alpha}(X)=\frac{\int_{\alpha}^{1}\mathrm{VaR}_{u}(X)\mathrm{d}u}{1-\alpha}$$

研究性自主学习内容

- **如何用 Excle 或 R 软件产生常见的损失分布的随机数?**

正态分布、

均匀分布、

指数分布、

gamma 分布、

Pareto 分布、

对数正态分布

注意：这些分布有的需要指定 rate 参数或 scale 参数，scale=1/rate，因此两者在本质上是等价的，例如在 R 代码中默认为指数分布的参数比率参数，如使用尺度参数，必须明确申明 sacle=1/rate。《Table》中使用的是 scale 参数，在指定参数时千万不要弄混。

例如：生成 5 个 pareto 分布随机数。

```
> rpareto(5, shape = 2, scale = 2)
[1] 7.91025 0.09817 0.18824 0.48281 0.85600
```

请尝试对比

- **如何用 R 计算常见分布的矩、E(X∧d)和 E(X-d|X>d)**
  - actuar 包提供了与 Loss Models（Klugman 等，2009）的附录 A 中所列示的连续分布族相配套的这四种函数（除去逆高斯和对数 t 分布，但包括对数 Gamma 分布），actuar 包还对这些连续分布提供了 m、lev 和 mgf 三种函数，m 是计算理论原点矩，lev 是计算有限期望值，mgf 是计算矩母函数。

1.假设某险种的损失额 X 服从帕累托分布，分布密度为：

$f(x)=\dfrac{3\times 2000^3}{(x+2000)^4}$，若保单规定的免赔额为 500，保单限额为 2000，求每次损失事件的实际赔付额 I(X)的期望。

解：

$$E(Y)=\frac{E(X\wedge 2500)-E(X\wedge 500)}{1-F_X(500)}=\frac{802.5-360}{0.512}\approx 864.26$$

R 程序：

```
library(actuar)
curve(dpareto(x,3,2000),xlim =c(0,6000),ylab = "pdf", main="pdf of per payment" )   #绘制原始分布密度曲线
f<-coverage(pdf = dpareto, cdf = ppareto, deductible = 500,limit = 2500)   #这里保单限额为 2000,覆盖的最大损失额为 2500
curve(f(x,3,2000),xlim=c(0,1999),col=3,add=TRUE)
curve(f(x,3,2000),xlim=c(2001,6000),col=3,add=TRUE)   #绘制加入免赔额及限额后的 Yp 密度曲线
```

```
curve(ppareto(x,3,2000),xlim = c(0,6000),ylab = "cdf",main="cdf of per payment")
#绘制原始分布的分布函数曲线
F<-coverage(cdf=ppareto,,deductible = 500,limit = 2500)
curve(F(x,3,2000),xlim = c(0,1999),col=4,add=TRUE)
curve(F(x,3,2000),xlim = c(2001,6000),col=4,add=TRUE)    #加入免赔额及限额后的 Yp 分布函数曲线

m1l<-levpareto(2500,shape=3,scale=2000,order=1)    #计算 E(X∧2500)
m2l<-levpareto(500,shape = 3,scale = 2000,order = 1)    #计算 E(X∧500)
p1<-ppareto(500,shape=3,scale=2000)    #计算 P(X<500)
Ey<-(m1l-m2l)/(1-p1)    #根据公式计算理赔额 Yp 的期望值
Ey
## [1] 864.1975
```