תרגיל בית 3

תאריך הגשה	שעת הגשה	אחראי על התרגיל	מייל אחראי
30/12/2021	23:59	חמזה חטיב	Hamzakhatieb1@gmail.com

(נא לכתוב 234125 בכותרת מיילים)

שאלה 1 (**25** נק')

נגדיר פעולת כפל חדשה על מטריצות בצורה הבאה:

$$A^{m\times n}\otimes B^{p\times q}=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}^{mp\times nq}$$

1. (5 נק')הוכיחו שפעולת הכפל החדשה שהגדרנו מקיימת את חוק הפילוג, כלומר:

$$A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$$

2. (5 נק')הוכיחו ש:

$$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$$

3. (5 נק')הוכיחו ש:

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$$

4. (10 נק')נגדיר מטריצה H_{2^n} באופן הבא:

$$H_{2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_{2^{n-1}}\otimes[1,1] \\ I_{2^{n-1}}\otimes[1,-1] \end{bmatrix}$$

כאשר $I_{2^{n-1}}$ היא מטריצת היחידה בגודל 2^{n-1} ו- $H_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. הוכיחו ש- H_{2^n} הינה מטריצה אורתונורמלית.

שאלה 2 (15 נק')

נתונה המטריצה הבאה:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. (3 נק') חשבו את המטריצה A^TA. ניתן לבצע את החישוב במטלב.

   האם עמודות המטריצה A מהווים קבוצה אורתוגונלית?

2. (7 נק') חשבו **ידנית** פירוק $Economy\ QR$ למטריצה זו (רמז: היעזרו בתוצאת הסעיף הקודם).

   השתמשו בסימון Q_A, R_A עבור המטריצות בסעיף זה. אנו נעשה בהן שימוש בסעיפים הבאים.

   הסבירו היטב כיצד נבנתה המטריצה Q_A וכיצד חושבו הערכים עבור המטריצה R_A.

   הציגו במפורש את המטריצות Q_A, R_A.

3. (5 נק') הסבירו כיצד המטריצה A^TA מסייעת בחישוב הפירוק בסעיף הקודם.

שאלה 3 (30 נק')

שאלה זו עוסקת ביציבות הנומרית של שיטות גרם-שמידט שלמדנו.

נניח כי נתונה קבוצת וקטורים בת"ל $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n\}$ וברצוננו לייצר קבוצה א"נ חלופית $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ הפורסת את אותו תת-מרחב באמצעות תהליך גרם-שמידט.

1. (5 נק') פתחו את הביטויים עבור $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ בשיטת גרם-שמידט הקלאסית ובשיטת Stable GS והראו שמתקבלים ביטויים זהים.
2. (5 נק') פתחו את הביטוי עבור $\underline{u}_3$ בשיטת גרם-שמידט הקלאסית ובשיטת Stable GS והראו שמתקבלים ביטויים שונים.
3. (5 נק') האם למרות שהתקבלו ביטויים שונים עבור $\underline{u}_3$ הם שקולים אנליטית? כלומר, אם נפעיל את שתי השיטות במחשב שמבצע כל חישוב בדיוק מושלם, האם הוקטורים שיתקבלו בשתי השיטות צפויים להיות זהים? הסבירו.

בסעיפים הבאים ננסה להצביע על הבדלים בין שתי השיטות.

כפי שציינו במהלך הקורס, קבוצת הוקטורים $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ המתקבלת בתהליך גרם-שמידט אינם מהווים בהכרח קבוצה א"נ, כלומר לא תמיד מתקיים $\underline{u}_i^T \underline{u}_j = 0$ עבור $i \neq j$.

בסעיפים הבאים נעבוד תחת ההנחות הבאות:

- הוקטורים $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ שמתקבלים בסיום תהליך גרם-שמידט (בשתי השיטות) אינם בהכרח אורתוגונליים.
- הוקטורים $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ שמתקבלים בסיום תהליך גרם-שמידט (בשתי השיטות) הינם מנורמלים, כלומר מתקיים $\underline{u}_j^T \underline{u}_j = 1$.
- לא מובטח כי החישוב מתבצע במדויק, אך הוא דטרמניסטי.

  כלומר אם מתקיים $\underline{x}^T \underline{y} = c$, אזי תמיד כשנבצע חישוב זה נקבל תוצאה זהה.

  כלומר לא ייתכן כי בחישוב כלשהו של ביטוי זה נקבל $\underline{x}^T \underline{y} \neq c$.

4. (5 נק') כעת פתחו ביטוי כללי, כלומר לכל קבוצת וקטורים $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$, עבור המכפלה הפנימית $\underline{u}_2^T \underline{u}_3$ תחת ההנחות הנ"ל בשיטה הקלאסית והראו כי הפעם תוצאת המכפלה הפנימית $\underline{u}_2^T \underline{u}_3$ אינה בהכרח מתאפסת.
5. (10 נק') פתחו ביטוי כללי, כלומר לכל קבוצת וקטורים $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$, עבור המכפלה הפנימית $\underline{u}_2^T \underline{u}_3$ תחת ההנחות הנ"ל בשיטת Stable GS והראו כי מתקיים $\underline{u}_2^T \underline{u}_3 = 0$.

   המלצה: על מנת להקל על הפיתוח, מומלץ לעבוד עם $\underline{w}_3$ לאחר הקילוף של $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ במקום לעבוד עם $\underline{u}_3$.

   ניתן לקצר את הפיתוח בסעיף זה ע"י שימוש בביטוי שהתקבל בסעיף הקודם.

שאלה 4 (10 נק')

נתונה מטריצה A ריבועית.

1. (2 נק') נניח כי קיים עבורה פירוק שנסמנו $\mathbf{A}=\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$.

   הציעו פירוק שונה (אפילו במקצת) ועם זאת בעל המבנה הנכון, דהיינו $\mathbf{A}=\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1=\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$ כאשר $\mathbf{Q}_2$ אורתונורמלית, $\mathbf{R}_2$ משולשת עליונה, ושתי אלו שונות מהמטריצות $\mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1$ בהתאמה.
2. (4 נק') נרצה להציע פירוק חדש למטריצה מהצורה $\mathbf{A}=\mathbf{LS}$ כאשר $\mathbf{L}$ מטריצה משולשת תחתונה, $\mathbf{S}$ מטריצה אורתונורמלית. בהנחה שיש בידיכם את הקוד המיישם את פירוק QR, כיצד ניתן יהיה להשתמש בו להשגת הפירוק המיוחל? נמקו.
3. (4 נק') באופן דומה, נרצה להציע פירוק חדש למטריצה מהצורה $\mathbf{A}=\mathbf{SL}$ כאשר $\mathbf{L}$ מטריצה משולשת תחתונה, $\mathbf{S}$ מטריצה אורתונורמלית. הציעו שיטה לקבלת פירוק מתאים והסבירו את הצעתכם.

שאלה 5 (20 נק')

נתונים הוקטורים $\underline{x}_1 = [1 \quad 2 \quad 3]^T$, $\underline{x}_2 = [3 \quad 2 \quad 1]^T$.

1. (5 נק') מצאו מטריצת Householder, נסמנה H_1, כך שיתקיים:

$$H_1 \begin{bmatrix} | & | \\ \underline{x}_1 & \underline{x}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \underline{x}_2 & \underline{x}_1 \\ | & | \end{bmatrix}$$

2. (5 נק') מצאו וקטור $\underline{x}_3 \neq \underline{0}$, אשר הערך 0 הוא אחד מאיבריו, ובנוסף מתקיים:

$$H_1 \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{x}_2 & \underline{x}_1 & \underline{x}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

עבור המטריצה H_1 שחושבה בסעיף הקודם.

3. (5 נק') מצאו מטריצת Householder, נסמנה H_2, כך שיתקיים:

$$H_2 \begin{bmatrix} | & | \\ \underline{x}_1 & \underline{x}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ -\underline{x}_2 & -\underline{x}_1 \\ | & | \end{bmatrix}$$

4. (5 נק') מצאו וקטור $\underline{x}_4 \neq \underline{0}$, עבורו מתקיים:

$$H_1 \underline{x}_4 = \underline{x}_4 \quad \text{וגם} \quad H_2 \underline{x}_4 = -\underline{x}_4$$

בהצלחה !

הוראות הגשה

- **יינתנו עד 10 נקודות בונוס על תרגיל מוקלד (סדר התשובות ובהירותן יילקחו בחשבון).**

1. את העבודה יש להגיש אלקטרונית בזוגות לאתר הקורס. **הגשות שאינן בזוגות וללא אישור, לא ייבדקו.**

- **את גיליון התשובות יש לשמור כקובץ pdf בשם id1-id2.pdf.**
- במקרה שנדרשת הגשה עם מספר קבצים (למשל קטעי קוד) יש להגיש קובץ zip בשם id1-id2.zip (ובתוכו את גיליון התשובות בשם id1-id2.pdf).

2. את קטעי הקוד ניתן לכתוב בכל שפת תכנות שנוחה לכם (ההנחיות לגבי MATLAB רלוונטיות לכל שפה).

- יש להציג בקובץ id1-id2.pdf את כל פלטי ההרצה והגרפים המבוקשים, כולל כותרות ברורות עבור כל גרף, הסברים ומסקנות.
- יש לצרף את קבצי הקוד (קבצי m.) עבור שאלות ה-MATLAB לקובץ ה-zip המוגש. (אין צורך להעתיק את הקוד לקובץ id1-id2.pdf).
- על הקוד להכיל תיעוד והסברים, וכמובן שירוץ ויציג את התוצאות במסודר.

3. ניתן להגיש את תרגיל הבית עד 4 ימי איחור בדף תרגיל הבית באתר הקורס, תחת Late submission. עבור $x \in \{1,2,3,4\}$ ימי איחור יינתן קנס של 2^x נקודות מציון התרגיל.