אלגוריתמים נומריים – תרגיל בית 2

שאלה 1:

נתונה המטריצה: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1. וקטור השארית צריך להיות מאונך לעמודות A. מתקיים:

$$A^T \underline{r_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T \underline{r_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A^T \underline{r_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ולכן נוכל להסיק כי הוקטור היחיד שיכול להיות וקטור השארית הוא $\underline{r_3}$.

2. מתקיים:

$$A^T \underline{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+d+e+f \\ 4c+5d+e+2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

לכן:

$$c = -d - e - f ; c = \frac{-5d - e - 2f}{4} \Longrightarrow -5d - e - 2f = -4d - 4e - 4f$$
$$\Longrightarrow d = 3e + 2f ; \ c = -4e - 3f$$

3. עמודות A בת"ל (לא פרופורציונליות), ולכן לפי משפט המטריצה $K = A^T A$ היא מטריצה חיובית מוגדרת. לכן קיים פתרון יחיד לבעיה. וקטור הפתרון נתון ע"י הנוסחה: $\underline{x}^* = K^{-1} \underline{f}$:

$$K = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 46 \end{bmatrix} \Longrightarrow K^{-1} = \begin{bmatrix} 1.15 & \text{-}0.3 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f} = A^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^* = K^{-1} \underline{f} = \begin{bmatrix} 1.15 & -0.3 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. $$\underline{r} = A\underline{x}^* - \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.75 \\ 1.75 \\ 1.75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -0.25 \\ 0.75 \\ -1.25 \end{bmatrix}$$

ואכן מתקיים:

$$c = 0.75 = -4 \cdot 0.75 - 3 \cdot (-1.25) = -4e - 3f$$
$$d = -0.25 = 3 \cdot 0.75 + 2 \cdot (-1.25) = 3e + 2f$$

שאלה 2

1. אם נציב את 4 הדגימות בפונקציה הנתונה נקבל 4 משוואות. נרצה למצוא את וקטור המקדמים a, b, c כך שנקבל את המישור הקרוב ביותר לפונקציה. נקבל את בעיית ה-LS הבאה:

$$min\|A\underline{x}-\underline{b}\|_2^2 = \left\|\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{bmatrix}\right\|_2^2$$

נציב בוקטור את המספר הראשון בת"ז – 2. כלומר: $\underline{b} = \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$

2. נבדוק אם עמודות המטריצה A בת"ל ע"י דירוג המטריצה:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

הדרגה של A היא 3 ולכן עמודותיה בת"ל. לכן לפי משפט המטריצה $K = A^TA$ היא חיובית מוגדרת ולכן הפיכה, והפתרון נתון ע"י הנוסחה: $\underline{x}^* = K^{-1}f$, כאשר $f = A^T\underline{b}$.

$$K = A^TA = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow K^{-1} = \begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.25\end{bmatrix}$$

$$f = A^T\underline{b}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 2\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 8\end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^* = K^{-1}f = \begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

3. כפי שציינו, K מטריצה חיובית מוגדרת ולכן לפי משפט הפתרון יחיד.

<u>שאלה 3</u>

נתונה הפונקציה: $f(\underline{x}) = (x_1 - 1)^2 + (2x_1 + x_2 - 3)^2$

1. $f_{x_1}(\underline{x}) = 2(x_1 - 1) + 4(2x_1 + x_2 - 3) = 10x_1 + 4x_2 - 14 = 0$

$$f_{x_2}(\underline{x}) = 0 + 2(2x_1 + x_2 - 3) = 4x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

משתי המשוואות נקבל כי הפתרון הוא: $x_1 = 1, x_2 = 1$.

2. נרצה למצוא את הוקטור $\underline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ שמביא את הפונקציה: $p(x_1, x_2) = \left\| \begin{bmatrix} x_1 - 0 \cdot x_2 - 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3 \end{bmatrix} \right\|_2^2$ לאפס (הפונקציה היא סכום של ריבועים ולכן אי שלילית ולכן המינימום שלה גדול שווה 0).
כלומר בבעיה שלנו: $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. עמודות A בת"ל (לא פרופורציונליות), ולכן המטריצה $\mathrm{K} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}$ היא חיובית מוגדרת ולכן הפיכה.
לכן הפתרון נתון ע"י הנוסחה: $\underline{\mathrm{x}}^* = \mathrm{K}^{-1}\mathrm{f}$, כאשר $\mathrm{f} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\underline{\mathrm{b}}$.
$$\mathrm{K} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{f} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\underline{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\mathrm{x}}^* = \mathrm{K}^{-1}\mathrm{f} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. כפי שציינו, עמודות A בת"ל ולכן K מטריצה חיובית מוגדרת ולכן לפי משפט הפתרון יחיד.

5. לא, מכיוון שהיותה K מטריצה חיובית מוגדרת תלוי רק ב-A (כי $\mathrm{K} = \mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}$). לכן לכל $\underline{\mathrm{b}}$ נקבל פתרון יחיד.

שאלה 4 :

עבור בעיית LS הגדרנו את מטריצת ההטלה $P_A = A(A^TA)^{-1}A^T$

1.צ"ל : $P_A * A = A$

P_A היא מטריצת ההטלה כלומר לכל ווקטור b מתקיים ש - $P_A * b$ הינו הווקטור v^* שהוא ההיטל של b על תת המרחב הנפרש מעמודות A.

נסתכל על המטריצה A :

$$A = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ v_1 & v_2 & . & . & v_n \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$$

$$P_A * A = P_A * \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ v_1 & v_2 & . & . & v_n \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ P_A * v_1 & P_A * v_2 & . & . & P_A * v_n \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$$

אבל נשים לב ש־ $v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*$ אלה היטליהם של $v_1, v_2..., v_n$ בתת המרחב אבל בגלל ש־ $v_1, v_2..., v_n$ חלק מתת המרחב אז $v_i^* = v_i$ ולכן :

$$\begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ P_A v_1 & P_A v_2 & . & . & P_A v_n \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ v_1^* & v_2^* & . & . & v_n^* \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ v_1 & v_2 & . & . & v_n \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = A$$

2. צ"ל : $P_A P_A = P_A$

$$P_A * P_A = A(A^TA)^{-1}A^T * A(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}(A^T * A)(A^TA)^{-1}A^T$$

$$= A * I * (A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P_A$$

3.צ"ל: $P_A = (P_A)^T$

$$(P_A)^T = (P_A = A(A^TA)^{-1}A^T)^T = (A^T)^T((A^TA)^{-1})^T(A)^T$$

$$= A((A^TA)^T)^{-1}A^T = A(A^TA^{T^T})^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P_A$$

לכן P_A מטריצה סימטרית .

4.צ"ל: $H = I - P_A$ **סימטרית ואדמפוטנטית .**

סימטריות :

$$H^T = (I - P_A)^T = I^T - P_A^T$$

אבל מטריצת היחידה היא מטריצה סימטרית ולכן $I^T = I$ וגם הראנו ש-$P_A = (P_A)^T$ ולכן :

$$I^T - P_A^T = I - P = H$$

אדמפוטנטית :

$$H * H = (I - P_A) * (I - P_A) = I * I + I * (-P_A) + (-P_A) * I + (-P_A) * (-P_A)$$

$$= I - P_A - P_A + P_A * P_A = I - P_A - P_A + P_A = I - P_A = H$$

.5 נגדיר $A = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix}$ **צל:** $P_{M_2}P_A = P_{M_2}$

$$P_{M_2} * P_A = (M_2(M_2^T * M_2)^{-1}M_2^T) * P_A$$

$$= M_2(M_2^T * M_2)^{-1}(M_2^T * P_A) = M_2(M_2^T * M_2)^{-1}(P_A^T * M_2)^T$$

P_A סמטרית ולכן :

$$P_{M_2} * P_A = (M_2^T * M_2)^{-1}(P_A * M_2)^T$$

ובנוסף

$$P_A * (\ M_1 \quad M_2) = (\ P_A \quad M_1 P_A M_2) \quad P * A = A = (\ M_1 \quad M_2)$$

כלומר :

$$P_A * M_2 = M_2$$

ובסהכ :

$$P_{M_2} * P_A = (M_2^T * M_2)^{-1}(P_A * M_2)^T = M(M_2^T * M_2)^{-1}(M_2)^T = P_{M_2}$$

6.. צ"ל : $H_{M_2} * H_A = H_A$

$$H_{M_2} H_A = (I - P_{M_2})(I - P_A) = I * I - I * P_A - P_{M_2} * I + P_{M_2} * P_A$$

מסעיף 5 נובע ש : $P_{M_2} * P_A = P_{M_2}$ ולכן :

$$= I - P_A - P_{M_2} + P_{M_2} = I - P_A = H_A$$

שאלה 5 :

1. למצוא ממ"ל למציאת מקדמי a, b, c, d, e, f **.**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a * x' + b * y' + e \\ c * x' + b * y' + f \end{pmatrix}$$

לכן עבור סט המדידות מתקבלות המשוואות :

.1

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*0.5+b*1+e \\ c*0.5+d*1+f \end{pmatrix}$$

.2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*1.5+b*1+e \\ c*1.5+d*1+f \end{pmatrix}$$

.3

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*0+b*0+e \\ c*0+d*0+f \end{pmatrix}$$

.4

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*1+b*0+e \\ c*1+d*0+f \end{pmatrix}$$

לכן בסהכ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*0.5+b*1+e \\ c*0.5+d*1+f \\ a*1.5+b*1+e \\ c*1.5+d*1+f \\ a*0+b*0+e \\ c*0+d*0+f \\ a*1+b*0+e \\ c*1+d*0+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1 & 1 \\ 1.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ e \\ c \\ d \\ f \end{pmatrix}$$

עבורו ממ"ל נסמן את המרטיצה להיות A ואת מספר הנעלמים n=6 ואת המטריצה המרוחבת $A|b$.

מצורף קודם מטלב המראה ש :

$$r(A) = r(A|b) = n = 6$$

לכן למערכת פתרון יחיד .

2. משנים את הקורדינטה הימנית התחתונה להיות $(1.2, 0)$ צ"ל שלמערכת המשוואות אין פתרון .

כעת מערכת המשוואת נראת כך :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*0.5+b*1+e \\ c*0.5+d*1+f \\ a*1.5+b*1+e \\ c*1.5+d*1+f \\ a*0+b*0+e \\ c*0+d*0+f \\ a*1.2+b*0+e \\ c*1.2+d*0+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 \\ 1.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ e \\ c \\ d \\ f \end{pmatrix}$$

עבורו ממ"ל נסמן את המטריצה החדשה להיות C ואת המטריצה המרוחבת $C|b$.
מצורף קודם מטלב המראה ש :

$$6 = r(C) \neq r(C|b) = 7$$

לכן למערכת אין פתרון .

3. למצוא את מקדמי הטרנספורמציה הלינארית .

נפתור את בעיית הLS הבאה :

$$||C\overline{x} - \overline{b}||_2^2$$

ולכן הפתרון האופטימלי הינו הווקטור x^* :

$$(C^TC)x^* = C^Tb$$

והיות שעמודת C בת"ל (ניתן לראות בקוד המטלב כי הדרגה של C היא 6 כמספר העמודות) ולכן הפתרון יחיד וגלובאלי ונראה כך :

$$x^* = (C^TC)^{-1}C^Tb = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ e^* \\ c^* \\ d^* \\ f^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.901639344262295 \\ -0.360655737704918 \\ -0.0409836065573772 \\ -1.11022302462516*10^{-16} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.הצורה שהתקבלה הנה טרפז .

את הטרפז נקבל ע"י :

$$C * x^* = b^*$$

כאשר הנקודות מסודרות לאורכו של הווקטור בצמדים כמו שהצגנו בווקטור b.