

# תרגיל בית 1

תאריך הגשה	שעת הגשה	אחראי על התרגיל	מייל אחראי
25/11/2021	23:59	נעם קורן	noam.koren@campus.technion.ac.il

## שאלה 1 (20 נק')

נתונה המטריצה הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. (8 נק') חשבו את הפירוק  $A = LU$  בעזרת האלגוריתם האיטרטיבי שנלמד בתרגול. יש לפרט את שלבי החישוב.

2. (2 נק') חשבו את הדטרמיננטה של  $A$ .

3. (7 נק') ברצוננו לפתור את מערכת המשוואות:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix}$$

בעזרת תוצאות הסעיפים הקודמים קבעו אם למערכת זו קיים פתרון יחיד, ואם כן – חשבו אותו ידנית.

4. (3 נק') האם קיים פירוק LDV? חשבו אותו.

## שאלה 2 (20 נק')

נתונה המטריצה הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -7 & 9 \\ -4 & -1 & 1 & -4 \\ -8 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

1. (8 נק') הציעו פירוק  $LU$  למטריצה זו ללא פרמוטציה, ע"י האלגוריתם שנלמד בהרצאה (אלימינציה של גאוס).

כתבו במפורש את המטריצות  $L$  ו- $U$ .

2. (3 נק') האם קיים פירוק  $LDV$  למטריצה זו? אם כן, הציגו אותה, ואם לא, הסבירו מדוע אינו קיים.

3. (2 נק') חשבו את הדטרמיננטה של מטריצה זו.

234125 - אלגוריתמים נומריים - סמסטר חורף תשפ"א  
4. (7 נק') חשבו את העמודה הראשונה של המטריצה  $A^{-1}$ .

הציעו דרך יעילה (בסיבוכיות  $cn^2$ ) אשר תנצל את פירוק LU מסעיף א' על מנת להשיג זאת.  
הסבירו את תשובתכם.

### שאלה 3 (10 נק')

נתונה המטריצה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 91 \end{bmatrix}$$

האם ניתן לחשב עבורה פירוק צ'ולסקי?  
אם לא, נמקו.

אם כן, חשבו את הפירוק בשתי דרכים שונות אשר נלמדו בכיתה והשוו את התוצאות.

### שאלה 4 (10 נק')

1. (2 נק') תהי  $A$  מטריצה ממשית (לא בהכרח סימטרית) הוכיחו כי  $A$  חיובית מוגדרת אם ורק אם  $A^T + A$  חיובית מוגדרת.
2. (3 נק') נתונה מטריצה  $M$  ריבועית, ממשית ולא סימטרית המקיימת  $x^T M x > 0$  לכל  $x$ .  
איזו מטריצה סימטרית וחיובית מוגדרת  $Q$  תקיים  $x^T Q x = x^T M x$  לכל  $x$ .
3. שלמו ואיילת, שניהם סטודנטים בקורס אלגוריתמים נומריים, פתרו תרגיל בית על מטריצות חיוביות מוגדרות.  
תוך כדי פתירת התרגיל התפתח ביניהם ויכוח. שלמו טען שאם עבור מטריצה  $A$  מסוימת מתקיים שלכל  $x$  הביטוי  $x^T A x$  שווה זהותית ל 0, אז  $A$  בהכרח מטריצה סינגולרית. לאומת זאת, איילת אמרה שקיימות מטריצות  $A$  הפיכות עבורם  $x^T A x = 0$  לכל  $x$ . מי לדעתכם צודק? אם אתם חושבים ששלמה צודק תוכיחו את טענתו. אם לחלופין אתם משוכנעים שאיילת צודקת, תנו דוגמה למטריצה  $A$  הפיכה המקיימת את התנאי.

### שאלה 5 (20 נק')

בהרצאה ראינו את המשפט הבא:

מטריצה ריבועית וסימטרית  $K$  היא חיובית מוגדרת אם ורק אם היא ניתנת לפירוק  $LDL^T$  ללא פרמוטציה ועם מטריצה  $D$  אלכסונית בה כל אברי האלכסון חיוביים.  
חזרו על ההוכחה שניתנה בתרגול והשלימו אותה על פי השלבים הבאים:

1. (5 נק') הראו שכל מטריצה הניתנת לפירוק  $LDL^T$  ללא פרמוטציה עם מטריצה  $D$  אלכסונית בה כל אברי האלכסון חיוביים, הנה סימטרית וחיובית מוגדרת.
2. (5 נק') הראו שעבור מטריצה סימטרית וחיובית מוגדרת  $K$  מתקיים שכל איברי האלכסון חיוביים, ובפרט האיבר  $k_{11}$ .

3. (5 נק') הראו שעבור מטריצה סימטרית וחיובית מוגדרת  $\mathbf{K}$ , המטריצה  $\mathbf{B} = \mathbf{K}_2 - \underline{\ell}_1 \underline{\ell}_1^T$  המתקבלת במהלך אלגוריתם פירוק LU שנלמד בתרגול היא סימטרית וחיובית מוגדרת.
4. (5 נק') הראו שמסעיפים 2 ו-3 נובע שכל מטריצה סימטרית וחיובית מוגדרת ניתנת לפירוק  $\mathbf{LDL}^T$  ללא פרמוטציה עם מטריצה  $\mathbf{D}$  אלכסונית בה כל אברי האלכסון חיוביים.

## שאלה 6 (20 נק')

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ מטריצה}$$

1. (5 נק') מצאו את פירוק ה-LU שלה באופן ידני.
2. (5 נק') חשבו את פירוק LU ללא פרמוטציה של המטריצה A ב-MATLAB. לצורך חישוב הפירוק, השתמשו בקוד הבא:

```
[L, U] = lu(sparse(A), 0);
L = full(L);
U = full(U);
```

הציגו את המטריצות L, U שהתקבלו.

בגלל סדרי הגודל השונים של הערכים במטריצות, הציגו כל ערך של המטריצות בנפרד ע"י הפקודות:

```
L(1,1) , L(1,2) , L(2,1) , L(2,2)
U(1,1) , U(1,2) , U(2,1) , U(2,2)
```

הציגו גם את המכפלה  $L^*U$  ע"י הצגת כל איבר במטריצה בנפרד באופן דומה.

3. (5 נק') השוו את הפירוק האנליטי מסעיף (1) לתוצאת הפירוק מסעיף (2). עבור כל אחת מהמטריצות L ו-U, ציינו האם התקבלה מטריצה זהה בשני הסעיפים. עבור כל איבר במטריצות L, U שערכו שונה בהשוואה בין שני הפירוקים, הציגו את השגיאה/ההפרש בחישוב והסבירו את הסיבה להבדל.

4. (5 נק') דני טוען שאפשר לשפר את דיוק החישוב הנומרי ע"י שימוש בפרמוטציה. יוסי טוען שאם בפירוק האנליטי לא נדרשה פרמוטציה, היא לא תועיל גם בחישוב הנומרי. מי מהם צודק? הסבירו את התוצאה בהקשר של בחירת איבר ה-pivot בפירוק. לצורך כך, חזרו על הסעיפים הקודמים כאשר נתיר שימוש בפרמוטציה, כלומר, מצאו פירוק  $\mathbf{PA=LU}$  והציגו את המטריצות  $\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{U}, \mathbf{P}^* \mathbf{A}, \mathbf{L}^* \mathbf{U}$  שמתקבלות (גם כאן בדקו את ערכו של כל איבר במטריצה בנפרד). הסבירו את התוצאה. לצורך פירוק עם פרמוטציה השתמשו בפקודה:

```
[L, U, P] = lu(A);
```

הנחיה: היעזרו בפקודת [lu](#) המובנית במטלאב.

שימו לב - במקרה הצורך ניתן להציג את ערכו המדויק של איבר בודד במטריצה ע"י A(1,1) וכו'.

**בהצלחה !****הוראות הגשה**

1. את העבודה יש להגיש אלקטרונית לאתר הקורס
  - a. את גיליון התשובות יש לשמור כקובץ pdf בשם id1-id2.pdf
  - b. במקרה שנדרשת הגשה עם מספר קבצים (למשל קטעי קוד) יש להגיש קובץ zip בשם id1-id2.zip (ובתוכו את גיליון התשובות בשם id1-id2.pdf).
  - (ב-word ניתן לייצא קובץ ל-pdf ע"י file->export).
2. את קטעי הקוד ניתן לכתוב בכל שפת תכנות שנוחה לכם (ההנחיות לגבי MATLAB רלוונטיות לכל שפה)
  - a. יש להציג בקובץ id1-id2.pdf את כל פלטי ההרצה והגרפים המבוקשים, כולל כותרות ברורות עבור כל גרף, הסברים ומסקנות.
  - b. יש לצרף את קבצי הקוד (קבצי m). עבור שאלות ה-MATLAB לקובץ ה-zip המוגש. אין צורך להעתיק את הקוד לקובץ id1-id2.pdf.
  - c. על הקוד להכיל תיעוד והסברים, וכמובן שירוצ ויציג את התוצאות במסודר.
3. מומלץ להכין את העבודה במחשב, אך ניתן גם לכתוב את הפתרון ידנית ולסרוק אם זה יותר נוח, ובלבד שאיכות הסריקה תהיה טובה. שימו לב שעבודה לא קריאה עלולה לגרור הורדת נקודות.
4. ניתן להגיש את תרגיל הבית עד 4 ימי איחור בדף תרגיל הבית באתר הקורס, תחת Late submission. עבור  $x \in \{1,2,3,4\}$  ימי איחור יינתן קנס של  $2^x$  נקודות מציון התרגיל.