תרגיל בית 5

תאריך הגשה	שעת הגשה	אחראי על התרגיל	מייל אחראי
27/1/2021	23:59	גרישה וקסמן	grishav@campus.technion.ac.il

(נא לכתוב 234125 בכותרת מיילים)

שאלה 1 (25 נק')

1. (4 נק') עבור מטריצת האדמארד $\mathbf{H}_n$ *בגודל* $2^n \times 2^n$ בגירסתה הלא מנורמלת (כל האיברים הם ± 1).
   בטאו כפונקציה של n את שלוש הנורמות המושרות הבאות $\|\mathbf{H}\|_\infty, \|\mathbf{H}\|_2, \|\mathbf{H}\|_1$ ואת הנורמה $\|\mathbf{H}\|_F$.

2. (3 נק') הציעו מטריצה $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ עם עמודות בת"ל, שלא מכילה אפסים ומקיימת $\|\mathbf{A}\|_\infty = \|\mathbf{A}\|_1 = 9$.

3. (4 נק') הציעו מטריצה לא אלכסונית $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ שדרגתה 3 והיא מקיימת $\|\mathbf{B}\|_2 = 6$.

4. (3 נק') האם ניתן לשנות את $\mathbf{B}$ מהסעיף הקודם כך שבנוסף יתקיים $\|\mathbf{B}\|_F = 4$? הסבירו.

נגדיר את הנורמה הבאה (לא מושרית) למטריצה ריבועית $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|\mathbf{A}\|_S = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{k,j}|$.

5. (3 נק') הוכיחו כי לכל $\mathbf{A}$ ריבועית מתקיים אי-השוויון $\frac{1}{n}\|\mathbf{A}\|_S \le \|\mathbf{A}\|_1 \le \|\mathbf{A}\|_S$.

6. (4 נק') נחפש מטריצות $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ריבועיות בגודל <u>כללי</u> $n \times n$ המקיימות:

   $$\frac{1}{n}\|\mathbf{A}\|_S = \|\mathbf{A}\|_1 \quad ; \quad \|\mathbf{B}\|_1 = \|\mathbf{B}\|_S.$$

   כמו כן, דרגת כל אחת מהמטריצות צריכה להיות <u>גבוהה</u> ככל שניתן.

   הציעו דרך בנייה לכל אחת מהמטריצות עבור n כללי.

7. (4 נק') הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:
   עבור $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הביטוי $\sqrt[n]{|\det(\mathbf{A})|}$ (שורש n של ערך מוחלט של הדטרמיננטה) הוא נורמה חוקית.

שאלה 2 (15 נק')

נרצה לפתור מערכת משוואות $\boldsymbol{A}\underline{x} = \underline{b}$ באמצעות שיטה איטרטיבית $\underline{x}_{k+1} = \boldsymbol{T}\underline{x}_k + \underline{c}$.

בנוסף נתון כי לכל הע"ע של $\boldsymbol{T}$ ריבוי אלגברי 1.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, הוכיחו שהיא נכונה או הפריכו ע"י דוגמה נגדית:

א. (3 נק') אם המטריצה $\boldsymbol{A}$ דומיננטית באלכסון (DD) אז היא בהכרח לא סינגולרית.

ב. (4 נק') עבור שיטת Jacobi, אם $\boldsymbol{A}$ דומיננטית באלכסון (DD), אז $\|\mathbf{T}\|_\infty < 1$.

ג. (4 נק') אם נתון כי הרדיוס הספקטרלי של $\boldsymbol{T}$ גדול מ-1, אז בהכרח שיטת Jacobi מתבדרת.

ד. (4 נק') אם נתון כי הרדיוס הספקטרלי של $\boldsymbol{A}$ גדול מ-1, אז בהכרח שיטת Jacobi מתבדרת.

שאלה 3 (20 נק')

נתונה מטריצה $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית חיובית מוגדרת כלשהי עם ערכים עצמיים שונים $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$.

תזכורת מהתרגול: למדנו שתי שיטות למציאת λ_n בעזרת שיטת החזקה.

- שיטת השיקוף – נפעיל את שיטת החזקה על המטריצה $\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{A}$.
- שיטת ההיפוך – נפעיל את שיטת החזקה על המטריצה $\mathbf{A}^{-1}$.

עתה נשלב את השיטות. בשלושת הסעיפים הבאים נניח שמתקיים $\lambda_2 \in [13, 15],\ \lambda_3 \in [7, 12],\ \lambda_4 \in [4.5, 6],\ \lambda_5 \in [1, 2]$.

א. (8 נק') נמצא את הווקטור העצמי $\underline{v}_4$ המתאים לעה"ע λ_4, מבלי למצוא ערכים עצמיים או וקטורים עצמיים אחרים. הציעו $\mu \in \mathbb{R}$ כך שעבור המטריצה $\mathbf{B}_\mu = (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})$ הערך העצמי הקטן ביותר בערך מוחלט יהיה $\lambda_{min}(\mathbf{B}_\mu) = \lambda_4 - \mu$ ובנוסף הפעלת שיטת החזקה על ${\mathbf{B}_\mu}^{-1}$ תתכנס לווקטור העצמי $\underline{v}_4$.

ב. (8 נק') בלי ידע נוסף על הנתונים (λ_4 לא ידוע), ציינו בכל תת-סעיף מהו הערך המתאים של μ כך ששיטת החזקה על ${\mathbf{B}_\mu}^{-1}$ תתכנס לווקטור העצמי המבוקש. אם לא קיים μ כזה, ציינו זאת ונמקו.

א. נרצה למצוא את $\underline{v}_2$.

ב. נרצה למצוא את $\underline{v}_3$.

ג. נרצה למצוא את $\underline{v}_5$.

ג. (4 נק') נניח כי מצאנו את λ_4. מפעילים את המערכת האיטרטיבית:

$$\underline{u}_{k+1} = \frac{(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I}) \cdot \underline{u}_k}{\left\|(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I}) \cdot \underline{u}_k\right\|_2}$$

מה יהיה $\lim_{k\to\infty} \underline{u}_k$ עבור $\underline{u}_0$ שמוגרל אינו מנוון (משמע $\forall i: \langle \underline{u}_0, \underline{v}_i \rangle \neq 0$). ניתן להניח ש-$\underline{u}_0$ שמוגרל אקראית?

שאלה 4 (24 נק')

לארך כל השאלה זו נתון: $\mathbf{T}$ ו $\mathbf{S}$ מטריצות ריבועיות ממשיות, ו- ρ מסמן רדיוס ספקטרלי.

א. (4 נק') נתונה מערכת דינמית $\underline{x}_{k+1} = \mathbf{T}\underline{x}_k$, כאשר $\mathbf{T}$ <u>אינה</u> בהכרח לכסינה. הראו שאם $\rho(\mathbf{T}) \geq 1$ אזי קיים $\underline{x}_0$ שהינו וקטור עצמי של $\mathbf{T}$ שעבורו המערכת לא תתכנס ל- $\underline{0}$.

ב. (4 נק') הוכיחו או הפריכו (למשל על ידי דוגמה נגדית קטנה): $\sqrt{\left\|\mathbf{T}^T\mathbf{T}\right\|_2}$ מהווה נורמה חוקית של $\mathbf{T}$.

ג. (4 נק') הוכיחו או הפריכו (למשל על ידי דוגמה נגדית קטנה): $\sqrt{\left\|\mathbf{T}^2\right\|_2}$ מהווה נורמה חוקית של $\mathbf{T}$.

ד. (4 נק') נתונה מערכת דינמית $\underline{x}_{k+1} = \mathbf{T}\underline{x}_k$, ונתון כי קיים סקלר שלם חיובי n עבורו $\left\|\mathbf{T}^n\right\| < 1$ עבור נורמה מושרית כלשהי. הוכיחו שמערכת זו יציבה.

עבור שני הסעיפים הבאים ידוע כי $\rho(\mathbf{S}) < 1$ וגם $\rho(\mathbf{T}) < 1$, ונתונה המערכת הדינמית:

$$\underline{x}_{\text{temp}} = \mathbf{T}\underline{x}_k$$
$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{S}\underline{x}_{\text{temp}}$$

ה. (4 נק') הוכיחו או הפריכו (למשל על ידי דוגמה נגדית קטנה) שמערכת זו יציבה (כלומר מתכנסת ל- $\underline{0}$ לכל וקטור התחלתי $\underline{x}_0$), לכל $\mathbf{S}$ ו- $\mathbf{T}$ <u>סימטריות</u>.

ו. (4 נק') הוכיחו או הפריכו (למשל על ידי דוגמה נגדית קטנה) שמערכת זו יציבה, לכל $\mathbf{S}$ ו- $\mathbf{T}$ (שאינן בהכרח סימטריות).

שאלה 5 (16 נק')

בשאלה זאת נעסוק בקשר בין שני אלגוריתמי QR לערכים עצמיים שלמדנו.

<u>תזכורת</u>:

אלגוריתם QR למציאת p ערכים עצמיים של מטריצה סימטרית $\mathbf{A}$

- אתחול: קבע p וקטורים אורתונורמליים כעמודות של $\mathbf{U}_0$
- משוואת האיטרציה עבור $k = 1, 2, ..., K$: חשב $[\mathbf{U}_k, \mathbf{R}_k] = QR\{\mathbf{A}\mathbf{U}_{k-1}\}$

אלגוריתם QR למציאת כל הערכים העצמיים של מטריצה ריבועית כלשהי $\mathbf{A}$

- אתחול: קבע $\tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}$ ו $\tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{I}$
- משוואת האיטרציה עבור $k = 1, 2, ..., K$:
  - חשב $\left[\tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}, \tilde{\mathbf{R}}_{k-1}\right] = QR\left\{\tilde{\mathbf{A}}_{k-1}\right\}$
  - חשב $\tilde{\mathbf{A}}_k = \tilde{\mathbf{R}}_{k-1}\tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}$
  - עדכן $\tilde{\mathbf{U}}_k = \tilde{\mathbf{U}}_{k-1}\tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}$

<u>הוכיחו</u>:

עבור מטריצה לא סינגולרית $\mathbf{A}$ ואתחול $\mathbf{U}_0 = \mathbf{I}$, שני האלגוריתמים למציאת ערכים עצמיים שקולים זה לזה, כלומר בכל איטרציה k הם מייצרים תוצאה זהה: $\mathbf{U}_k = \tilde{\mathbf{U}}_k = \tilde{\mathbf{Q}}_0 \cdots \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}$.

<u>הדרכה</u>:

- הוכיחו בעזרת אינדוקציה על k.
- השתמשו בשוויון $\tilde{\mathbf{A}}_k = \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}^T \cdots \tilde{\mathbf{Q}}_0^T \tilde{\mathbf{A}}_0 \tilde{\mathbf{Q}}_0 \cdots \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1} = \tilde{\mathbf{U}}_k^T \tilde{\mathbf{A}}_0 \tilde{\mathbf{U}}_k$ שהוכח בתרגול.
- השתמשו ביחידות של הפירוק QR.
- ההוכחה אמורה להיות קצרה. אם הסתבכתם – כנראה שאתם לא בכיוון הנכון.

בהצלחה !

הוראות הגשה

- **יינתנו עד 10 נקודות בונוס על תרגיל מוקלד (סדר התשובות ובהירותן יילקחו בחשבון).**

1. את העבודה יש להגיש אלקטרונית בזוגות לאתר הקורס. **הגשות שאינן בזוגות וללא אישור, לא ייבדקו.**

- **את גיליון התשובות יש לשמור כקובץ pdf בשם id1-id2.pdf.**
- במקרה שנדרשת הגשה עם מספר קבצים (למשל קטעי קוד) יש להגיש קובץ zip בשם id1-id2.zip (ובתוכו את גיליון התשובות בשם id1-id2.pdf).

2. את קטעי הקוד ניתן לכתוב בכל שפת תכנות שנוחה לכם (ההנחיות לגבי MATLAB רלוונטיות לכל שפה).

- יש להציג בקובץ id1-id2.pdf את כל פלטי ההרצה והגרפים המבוקשים, כולל כותרות ברורות עבור כל גרף, הסברים ומסקנות.
- יש לצרף את קבצי הקוד (קבצי m.) עבור שאלות ה-MATLAB לקובץ ה-zip המוגש. (אין צורך להעתיק את הקוד לקובץ id1-id2.pdf).
- על הקוד להכיל תיעוד והסברים, וכמובן שירוץ ויציג את התוצאות במסודר.

3. ניתן להגיש את תרגיל הבית עד 4 ימי איחור בדף תרגיל הבית באתר הקורס, תחת Late submission. עבור $x \in \{1,2,3,4\}$ ימי איחור יינתן קנס של 2^x נקודות מציון התרגיל.