110

אלגוריתמים נומריים – תרגיל בית 3

שאלה 1:

נגדיר פעולת כפל חדשה על מטריצות בצורה הבאה:

$$A^{m\times n}\otimes B^{p\times q}=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}^{mp\times nq}$$

.1

$$A\otimes(B+C)=\begin{bmatrix} a_{11}(B+C) & \cdots & a_{1n}(B+C) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(B+C) & \cdots & a_{mn}(B+C) \end{bmatrix}\underbrace{=}_{\substack{regular\ distribution \\ on\ matrices}}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B+a_{11}C & \cdots & a_{1n}B+a_{1n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B+a_{m1}C & \cdots & a_{mn}B+a_{mn}C \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11}C & \cdots & a_{1n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}C & \cdots & a_{mn}C \end{bmatrix}=A\otimes B+A\otimes C$$

.2

$$(A\otimes B)^T=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & a_{1n}b_{p1} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & a_{mn}b_{p1} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{1q} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & a_{m1}b_{pq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{p1} & \cdots & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}b_{1q} & \cdots & a_{1n}b_{pq} & \cdots & a_{mn}b_{1q} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}=A^T\otimes B^T$$

.3

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1n}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}D & \cdots & c_{mn}D \end{bmatrix}\underbrace{=}_{multiply\ matices\ by\ blocks}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B\cdot c_{11}D+\cdots+a_{1n}B\cdot c_{m1}D & \cdots & a_{11}B\cdot c_{1n}D+\cdots+a_{1n}B\cdot c_{mn}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B\cdot c_{11}D+\cdots+a_{mn}B\cdot c_{m1}D & \cdots & a_{m1}B\cdot c_{1n}D+\cdots+a_{mn}B\cdot c_{mn}D \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}c_{11}\cdot BD+\cdots+a_{1n}c_{m1}\cdot BD & \cdots & a_{11}c_{1n}\cdot BD+\cdots+a_{1n}c_{mn}\cdot BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}c_{11}\cdot BD+\cdots+a_{mn}c_{m1}\cdot BD & \cdots & a_{m1}c_{1n}\cdot BD+\cdots+a_{mn}c_{mn}\cdot BD \end{bmatrix}=AC\otimes BD$$

.4 נגדיר מטריצה H_{2^n} באופן הבא:

$$H_{2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_{2^{n-1}}\otimes[1,1] \\ I_{2^{n-1}}\otimes[1,-1] \end{bmatrix}$$

נוכיח באינדוקציה על n:

בסיס - $n=1$:

$$H_2 \cdot (H_2)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = I_2$$

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_2 \otimes [1,1] \\ I_2 \otimes [1,-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \cdot [1,1] & 1 \cdot [1,1] \\ 1 \cdot [1,1] & -1 \cdot [1,1] \\ 1 \cdot [1,-1] & 0 \cdot [1,-1] \\ 0 \cdot [1,-1] & 1 \cdot [1,-1] \end{bmatrix}$$

לכן H_2 היא מטריצה אורתונורמלית לפי הגדרה.

צעד: נניח כי $H_{2^{n-1}}$ אורתונורמלית ונוכיח עבור H_{2^n}.

$$H_{2^n} \cdot (H_{2^n})^T \underbrace{=}_{\text{section 2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_{2^{n-1}} \otimes [1,1] \\ I_{2^{n-1}} \otimes [1,-1] \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} (H_{2^{n-1}})^T \otimes [1,1]^T & (I_{2^{n-1}})^T \otimes [1,-1]^T \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{multiplying} \\ \text{by blocks}}} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_{2^{n-1}} \otimes [1,1] \cdot (H_{2^{n-1}})^T \otimes [1,1]^T & H_{2^{n-1}} \otimes [1,1] \cdot (I_{2^{n-1}})^T \otimes [1,-1]^T \\ I_{2^{n-1}} \otimes [1,-1] \cdot (H_{2^{n-1}})^T \otimes [1,1]^T & I_{2^{n-1}} \otimes [1,-1] \cdot (I_{2^{n-1}})^T \otimes [1,-1]^T \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\text{section 3}} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_{2^{n-1}} \cdot (H_{2^{n-1}})^T \otimes [1,1] \cdot [1,1]^T & H_{2^{n-1}} \cdot (I_{2^{n-1}})^T \otimes [1,1] \cdot [1,-1]^T \\ I_{2^{n-1}} \cdot (H_{2^{n-1}})^T \otimes [1,-1] \cdot [1,1]^T & I_{2^{n-1}} \cdot (I_{2^{n-1}})^T \otimes [1,-1] \cdot [1,-1]^T \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{induction} \\ \text{hypothesis}}} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_{2^{n-1}} \otimes [2] & H_{2^{n-1}} \cdot (I_{2^{n-1}})^T \otimes [0] \\ H_{2^{n-1}} \cdot (I_{2^{n-1}})^T \otimes [0] & I_{2^{n-1}} \otimes [2] \end{bmatrix} = I_{2^n}$$

לכן H_{2^n} היא מטריצה אורתונורמלית לפי הגדרה.

<u>שאלה 2:</u>

.1

```
A =

    0.7071    0.7071    0.7071    0.7071    3.5355
    0.7071   -0.7071    0.7071   -0.7071   -0.7071
    0.7071    0.7071   -0.7071   -0.7071   -0.7071
    0.7071   -0.7071   -0.7071    0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071    0.7071    0.7071   -2.1213
    0.7071   -0.7071    0.7071   -0.7071   -0.7071
    0.7071    0.7071   -0.7071   -0.7071   -0.7071
    0.7071   -0.7071   -0.7071    0.7071    0.7071

>> A'*A

ans =

    4.0000         0         0         0   -0.0000
         0    4.0000         0         0   -0.0000
         0         0    4.0000         0   -0.0000
         0         0         0    4.0000    4.0000
   -0.0000   -0.0000   -0.0000    4.0000   20.0000
```

עמודות A לא מהווית קבוצה אורתוגונלית. ניתן לראות שבמטריצה A^TA האיברים (4,5) ו-(5,4) שונים מ-0. זה מצביע על כך שעמודות 4 ו-5 לא אורתוגונליות אחת לשנייה.

.2 נסמן ב-Q_{Ai} את העמודה ה-i במטריצה Q_A ובאופן דומה עבור R_A.
ניתן לראות לפי סעיף קודם שכל העמודות במטריצה A אנכיות אחת לשנייה פרט ל-4 ו-5.
לכן 4 העמודות הראשונות ב-Q_A יהיו 4 העמודות הראשונות ב-A לאחר נרמול. ניתן לראות שמתקיים: $\|Q_{Ai}\|_2 = 2$ עבור $i = 1,2,3,4$. לכן $Q_{Ai} = \frac{1}{2}A_i$.
עבור עמודה 5, ראינו כי היא אנכית לעמודות 1-3, ולכן נדרש לבצע "קילוף" רק מעמודה 4.
לפי סעיף קודם ניתן לראות כי $A_4^TA_5 = 4$.

$$u_4 = A_5 - (Q_{A4})^T \cdot A_5 \cdot Q_{A4} = A_5 - \frac{1}{2}A_4^TA_5 \cdot \frac{1}{2}A_4 = A_5 - A_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow Q_{A5} = \frac{u_5}{\|u_5\|_2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow Q_A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

כעת, עבור המטריצה R_A מתקיים $R_A = Q_A^T \cdot A$. לכן:

$$R_A = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3. ניצלנו את העובדה שהמטריצה A^TA מכילה את כל המכפלות הפנימיות בין כל העמודות של המטריצה A ניתן להסיק ש-4 העמודות הראשונות כבר אורתוגונליות ושהאחרונה אנכית ל-3 הראשונות ובכך נמנענו מלבצע פעולות מיותרות של קילופים על 4 העמודות האלה.

<u>שאלה 3:</u>

1. השיטה הקלאסית:
   - u_1 מתקבל ע"י נרמול w_1: $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|_2}$
   - כדי לקבל את u_2 צריך "לקלף" מ-w_2 את u_1 ואז לנרמל:

$$v_2 = w_2 - u_1^T w_2 u_1 \Longrightarrow u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \frac{w_2 - u_1^T w_2 u_1}{\|w_2 - u_1^T w_2 u_1\|_2}$$

   שיטת SGS:
   - u_1 מתקבל ע"י נרמול w_1: $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|_2}$
   - נקלף את u_1 שקיבלנו מ-w_2:

$$v_2 = w_2 - u_1^T w_2 u_1$$

   - כעת כשמגיעים ל-u_2 נותר רק לנרמל את v_2 שקיבלנו מקודם:

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \frac{w_2 - u_1^T w_2 u_1}{\|w_2 - u_1^T w_2 u_1\|_2}$$

   ניתן לראות ששני הביטויים שקיבלנו זהים.

2. השיטה הקלאסית:
   - ניקח את w_3 ונקלף ממנו את u_1, u_2 שקיבלנו מקודם:

$$v_3 = w_3 - u_1^T w_3 u_1 - u_2^T w_3 u_2$$

   - כעת ננרמל כדי לקבל את u_3:

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|_2} = \frac{w_3 - u_1^T w_3 u_1 - u_2^T w_3 u_2}{\|w_3 - u_1^T w_3 u_1 - u_2^T w_3 u_2\|_2}$$

   שיטת SGS:
   - לאחר קבלת u_1 מקלפים אותו מ-w_2 ו-w_3. לכן עבור w_3 נקבל: $w'_3 = w_3 - u_1^T w_3 u_1$.
   - ראינו כי u_2 המתקבל בשתי השיטות זהה.
   - לאחר שמוצאים את u_2, מקלפים אותו מ-w'_3 (שהתקבל לאחר הקילוף של u_1). לכן נקבל:

$$v_3 = w'_3 - u_2^T w'_3 u_2 = w_3 - u_1^T w_3 u_1 - u_2^T (w_3 - u_1^T w_3 u_1) u_2$$
$$= w_3 - u_1^T w_3 u_1 - u_2^T w_3 u_2 + u_2^T u_1^T w_3 u_1 u_2$$

   - כעת ננרמל את v_3 כדי לקבל את u_3:

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|_2}$$

   ניתן לראות שהביטויים ל-v_3 בשתי השיטות שונים (נבדלים בביטוי $u_2^T u_1^T w_3 u_1 u_2$ שנוסף ב-SGS). לכן הביטויים עבור u_3 בשתי השיטות שונים.

3. כן. נתבונן בביטוי המבדיל בין v_3 שמצאנו בשתי השיטות: $u_2^T u_1^T w_3 u_1 u_2$.
   הביטוי $u_1^T w_3$ הוא סקלר כלשהו. לכן ניתן להעביר אותו אל תחילת המכפלה. נקבל: $(u_1^T w_3) u_2^T u_1 u_2$.
   כעת, u_1 ו-u_2 מאונכים זה לזה, לפי דרך בניית האלגוריתם. לכן עבור חישוב בדיוק מושלם נקבל $u_2^T u_1 = 0$, ולכן כל הביטוי הזה מתאפס, ונקבל ש-u_3 בשתי השיטות יהיה זהה.

4. נשתמש בביטויים שמצאנו בסעיפים קודמים:

$$u_2 = \frac{w_2 - u_1^T w_2 u_1}{\|v_2\|_2} \; ; \; u_3 = \frac{w_3 - u_1^T w_3 u_1 - u_2^T w_3 u_2}{\|v_3\|_2}$$

$$u_2^T u_3 = u_2^T \cdot \left(\frac{w_3 - u_1^T w_3 u_1 - u_2^T w_3 u_2}{\|v_3\|_2} \right) = \frac{u_2^T w_3 - u_2^T u_1^T w_3 u_1 - u_2^T u_2^T w_3 u_2}{\|v_3\|_2}$$

$$= \frac{u_2^T w_3 - \overbrace{(u_1^T w_3)}^{\text{סקלר}} u_2^T u_1 - \overbrace{(u_2^T w_3)}^{\text{סקלר}} \overbrace{u_2^T u_2}^{1}}{\|v_3\|_2} = \frac{-(u_1^T w_3) u_2^T u_1}{\|v_3\|_2}$$

   אם מתקיים $u_2^T u_1 \neq 0$, נקבל שהביטוי הכללי שמתקבל שונה מ-0 (בהנחה שגם $u_1^T w_3 \neq 0$).

5. נעבוד עם v_3 שחישבנו בסעיף 2 עבור *SGS*, שזה הוקטור w_3 לאחר קילוף u_1, u_2 ולפני הנרמול.

$$
\begin{aligned}
u_2^T v_3 = u_2^T(w_3 - u_1^T w_3 u_1 - u_2^T w_3 u_2 + u_2^T u_1^T w_3 u_1 u_2) \\
&= u_2^T w_3 - u_2^T u_1^T w_3 u_1 - u_2^T u_2^T w_3 u_2 + u_2^T u_2^T u_1^T w_3 u_1 u_2 \\
&= \overbrace{u_2^T w_3}^{c_1} - \overbrace{(u_1^T w_3)}^{c_2}\overbrace{(u_2^T u_1)}^{c_3} - \overbrace{(u_2^T w_3)}^{c_1}\overbrace{u_2^T u_2}^{=1} + \overbrace{(u_1^T w_3)}^{c_2}\overbrace{(u_2^T u_1)}^{c_3}\overbrace{(u_2^T u_2)}^{=1} \\
&= c_1 - c_2 c_3 - c_1 + c_2 c_3 = 0
\end{aligned}
$$

**כל ה-c_i-ים הם סימונים לשם נוחות.*

לכן מתקיים: $u_2^T u_3 = \frac{u_2^T v_3}{\|v_3\|_2} = 0$ כנדרש.

שאלה 4:

1. נסמן: $A = Q_1R_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$

נגדיר: $Q_2 = \begin{bmatrix} -q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$.

כלומר, זהה ל-Q_1, פרט לעמודה הראשונה שמוכפלת במינוס 1.

בנוסף נגדיר: $R_2 = \begin{bmatrix} -r_{11} & \cdots & -r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$

כלומר, זהה ל-R_1, פרט לשורה הראשונה שמוכפלת במינוס 1.

אז במכפלה Q_2R_2, בכל הכפלת שורה מ-Q_2 בעמודה מ-R_2, סימני המינוס יבטלו אחד את השני, ונקבל את המטריצה A המקורית.

בנוסף, R_2 היא בבירור עדיין משולשת עליונה, ו-Q_2 היא אורתונורמלית כי הכפלת עמודה במינוס 1 לא משנה את הנורמה, ומכיוון שהמכפלה עם כל וקטור אחר הייתה 0, אז היא עדיין תישאר כך.

2. נמצא את פירוק ה-QR למטריצה A^T, נקבל: $A^T = QR$, ואז נבצע טרנספוז לשני האגפים ונקבל:

$A^{T^T} = (QR)^T \Longrightarrow A = R^TQ^T = LS$.

R מטריצה משולשת עליונה ולכן $L = R^T$ מטריצה משולשת תחתונה.

בנוסף Q מטריצה אורתנורמלית ולכן גם $S = Q^T$ מטריצה אורתונורמלית.

3. נוכל לשנות את אלגוריתם QR כך שבבניית המטריצה Q נתחיל מימין במקום משמאל. כך נקבל שהעמודה הראשונה (השמאלית) אנכית לכל העמודות ב-A החל מהשנייה, העמודה השנייה אנכים לכל העמודות ב-A החל מהשלישית וכן הלאה. לכן לאחר קבלת מטריצה אורתונורמלית שנסמנה ב-S, המטריצה L תתקבל מהמכפלה S^TA, ונקבל ש-$S_1^T \cdot A$ (השורה הראשונה ב-S^T שהיא העמודה הראשונה ב-S כפול A), תהיה שורת אפסים מלבד האיבר הראשון, $S_2^T \cdot A$ תהיה שורת אפסים מלבד האיבר הראשון והשני וכן הלאה. כך נקבל ש-L מטריצה משולשת תחתונה.

שאלה 5:

נתונים הוקטורים $x_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

1. נגדיר כפי שראינו בתרגול עבור שני וקטורים שווי אורך:

$$v_1 = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow H_1 = I - 2v_1v_1^T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \frac{2}{8}\begin{bmatrix}4&0&-4\\0&0&0\\-4&0&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

ואכן מתקיים: $H_1\begin{bmatrix}|&|\\x_1&x_2\\|&|\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&1\\2&2\\1&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}|&|\\x_2&x_1\\|&|\end{bmatrix}$

2. כפי שראינו בתרגול, הכפלת וקטור המאונך ל-v במטריצה H_1 משמאל לא משפיעה עליו.

נרצה למצוא וקטור $x_3 \neq 0$ אשר הערך 0 הוא אחד מאבריו והוא מאונך ל-v. לכן עבור $x_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, נקבל $x^Tv = \begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix} = 0$, ולכן יתקיים: $H_1\begin{bmatrix}|&|&|\\x_1&x_2&x_3\\|&|&|\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}|&|&|\\x_2&x_1&x_3\\|&|&|\end{bmatrix}$.

3. לפי הדרישה צריך להתקיים:

$$H_2x_1 = -x_2\,; H_2x_2 = -x_1 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{equations\ summary} \quad H_2(x_1+x_2) = -(x_1+x_2)$$

ניצור את המטריצה מהוקטור: $v_2 = \frac{x_1+x_2}{\|x_1+x_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{48}}\begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}$

$$H_2 = I - 2v_2v_2^T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \frac{2}{48}\begin{bmatrix}16&16&16\\16&16&16\\16&16&16\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$$

וניתן לראות שמתקיים:

$$H_2\begin{bmatrix}|&|\\x_1&x_2\\|&|\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3&-1\\-2&-2\\-1&-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}|&|\\-x_2&-x_1\\|&|\end{bmatrix}$$

4. נגדיר: $x_4 = \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}$. הוקטור מאונך לוקטור v_1 ולכן הכפלה במטריצה H_1 לא משפיעה עליו.

בנוסף הוא ת"ל בוקטור v_2 ולכן הכפלה במטריצה H_2 משקפת אותו.

ניתן לראות שאכן מתקיים:

$$H_1x_4 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}$$

$$H_2x_4 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-4\\-4\end{bmatrix}$$