גליון 4 ־ אלגוריתמים נומריים

9 בינואר 2022

שאלה 1 :

סעיף 1

נתון כי A מטריצה לכסינה ולכן היא דומה למטריצה אלכסונית כאשר המטריצה P היא המטריצה המלכסנת שעמודותיה הם הווקטורים העצמיים של המטריצה A .

$$A = P^{-1}DP \rightarrow PAP^{-1} = D$$

נסמן $S = P^{-1}$ ונשתמש בפירוק QR למטריצה S ונקבל כי :

$$D = PAP^{-1} = S^{-1}AS = (QR)^{-1}AQR = R^{-1}Q^{-1}AQR$$

Q אורטונורמאלית ולכן $Q^{-1} = Q^{T}$ ו־Rהפיכה כי המטריצה S הפיכה (שורותיה מכילות את הו"ע של Aואלו בת"ל .
לכן בסהכ נקבל כי :

$$RDR^{-1} = Q^{T}AQ$$

D אלכסונית ו־Rמשולשת עליונה (לכן גם R^{-1} משולשת עליונה) ואם נבחר $T = RDR^{-1}$ נקבל כי T משולשת עליונה (מכפלה של משולשת עליונות .
ובסהכ קבלנו פירוק שור כנדרש .

סעיף 2

תהי Aמטריצה סימטרית ו PD לכן קיים לה פירוק ספטרלי בו D מטריצה אלכסונית עם איברי אלכסון חיוביים ן Qאורטונורמאלית .

$$A = Q^{T}DQ = Q^{T}D^{1/2}D^{1/2}Q$$

נסמן G=$D^{1/2}Q$ ואז

$$A = G^T G$$

נבצע לGפירוק QR ונקבל :

$$= (QR)^T QR = R^T Q^T QR$$

Rמשולשת עליונה ולכן R^T משולשת תחתונה נסמנה ב M ובנוסף Q אורתונורמאלית ולכת $Q^T Q = I$ ובסהכ נקבל כי :

$$A = MM^T$$

שאלה 2

סעיף 1

U,V הן המטריצות המתקבלות בפירוק ה SVD ולכן אורתונורמאלית ומימדן כמימד המטריצה A (כי היא ריבועית מהנתון) .

נראה ש $Q = UV^T$ אורתונורמאלית :

$$QQ^T = UV^T (UV^T)^T = UV^T VU^T = UU^T = I$$

$$Q^T Q = (UV^T)^T UV^T = VU^T UV^T = VV^T = I$$

לכן Q אורתונורמאלית לפי הגדרה .

סעיף 2

נבחר מטריצה Hלהיות $U\Sigma U^T$ נראה שהיא 1.סימטרית 2.חיובית מוגדרת :

.1

$$(U\Sigma U^T)^T = U^{T^T} \Sigma^T U^T = U\Sigma U^T$$

מתקיים ש $\Sigma^T = \Sigma$ בגלל ש-Σהמקבלת בפירוק הSVD בעלת אותו מימדים כמו של המטריצה A ולכן אלכסונית וריבועית $\leftarrow$ סמטרית .

.2

$$x^TU\Sigma U^Tx = (U^Tx)^T\Sigma U^Tx$$

נסמן $U^Tx = z$ ובגלל ש־U אורתונורמאלית ובפרט הפיכה נובע ש־ $\vec{x} = 0 \iff \vec{z} = 0$
ובגלל ש Aהפיכה כל האיברים באלסון של Σ חיוביים לכן לכל $\vec{z}$שונה מ=0 מתקיים ש:

$$z^T\Sigma z > 0$$

ולכן המטריצה $U\Sigma U^T$ חיובית מוגדרת .
ובפרט מתקיים כי :

$$HQ = (U\Sigma U^T)UV^T = U\Sigma(U^TU)V^T = U\Sigma V^T = A$$

סעיף 3

Aריבועית והפיכה ולכן גם A^Tחיובית והפיכה .
לפי סעיף 2 ניתן למצוא לA^T פירוק HQ בו H חיובית מוגדרת ו־ Q אורתונורמאלית .
כלומר :

$$A^T = HQ \iff (A^T)^T = (HQ)^T \iff A = Q^TH^T$$

ואכן Q^T אורתונורמאלית ו H^T חיובית מוגדרת כנדרש .

סעיף 4

נחשב פירוק $A = HQ$ למטריצההה $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
מסעיפים קודמים נובע כי :
$H = U\Sigma U^T$ ו־ $Q = UV^T$ וכלן נמצא את פירוק ה SVD של A.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

לכן $V^T = I$ ו־$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

$$U = V\Sigma^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}A$$

ולכן :

$$H = U\Sigma U^T = \frac{1}{\sqrt{5}} A \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$Q = UV^T = \frac{1}{\sqrt{5}} A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

שאלה 3

נתונה מערכת המשוואת :

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

סעיף 1 :

נסתכל על עמודות A נסמנם $v1, v2, v3$ בהתאמה לפי סדר הופעתם .
נשים לב כי $v1 = -v3$ כלומר עמודותיה בת"ל $\longleftarrow$ דרגתה לא מלאה ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות . (המערכת הינה מערכת משוואת הומוגנית ולכן יתכן או מצב של פתרון יחיד או של אינסוף פתרונות .

סעיף 2 :

נפתור את מערכת המשוואת :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

לכן $x_2 = 0$ ו־$x_1 = x_3$ ולכן נבחר את הווקטור xהבא $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

סעיף 3

נפתור את מערכת המשוואת עבור המטריצה החדשה :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

מתקבל כי $x_1 = x_3 = x_2 = 0$.

סעיף 4

$$min||\frac{Ax}{x^T x}|| = min||\frac{|U\Sigma V^T x}{x^T x}||$$

נסמן $V^T x = z$

Vאורתונורמאלית ולכן אינה משנה אתה גודלו של הווקטור איקס ולכן :

$$= min||\frac{U\Sigma z}{(Vz)^T Vz}|| = min||\frac{\Sigma z}{z^T z}||$$

ומבניית Σ המינימום מתקבל עבור הווקטור $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

כלומר :

$$V^T x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow x = V \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v1$$

סעיף 5

נחשב את $A^T A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 0 & 8 & 0 \\ -5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

נמצא ע"ע :

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ -5 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ -5 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ -12+\lambda & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda{-}12)(2{-}\lambda)(8{-}\lambda)$$

$\lambda =$8:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -5 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-x-5z=0$$

$$-5x-z=0$$

$$x=z=0$$

נבחר $y=1$ ונקבל $v_{\lambda=8} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 12$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & 0 \\ -5 & 0 & -5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$y=0, x=-z$$

נבחר $v_{\lambda=12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$\lambda = 2$ נבחר ווקטור עצמי להיות $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

ובסהכ נקבל כי :

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$Av_{\lambda=12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Av_{\lambda=8} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Av_{\lambda=2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \longrightarrow u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_4^{'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} * \sqrt{2} * \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} * 2 * \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow u_4 = \sqrt{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

לכן בסהכ נקבל :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

סעיף 6

פתרון בעיית ה־LS הוא $x^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ והערך של השגיאה הינו $\sigma_3^2 = 2$.

<u>אלגוריתמים נומריים – תרגיל בית 4</u>

<u>שאלה 4:</u>

נתונה המטריצה: $A = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 25 & -40 \\ 0 & 25 & 15 & 40 \\ 0 & -40 & 40 & 30 \end{bmatrix}$

ידוע כי 3 מארבעת הע"ע שלה הם: $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = -50, \lambda_3 = 40$.

1. לפי משפט, סכום הע"ע שווה לעקבה של המטריצה. לכן:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = trace(A)$$
$$\Longrightarrow 20 - 50 + 40 + \lambda_4 = 20 + 15 + 15 + 30$$
$$\Longrightarrow \lambda_4 = 70$$

2. נרצה לפתור את מערכת המשוואות: $(A - 20 \cdot I)\underline{x} = 0$.

$$(A - 20 \cdot I)\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 25 & -40 \\ 0 & 25 & -5 & 40 \\ 0 & -40 & 40 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

מכיוון שלמטריצה יש 4 ע"ע שונים, הריבוי הגיאומטרי של כל אחד מהם הוא 1, כלומר לכל אחד יש בדיוק ו"ע יחיד המתאים לו.

ניתן לראות כי הוקטור $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ פותר את המשוואה, ולכן הוא ו"ע מתאים לע"ע $\lambda_1 = 20$.

3. המטריצה Q מורכבת מהו"ע מסודרים בעמודות, והמטריצה D מורכבת מהע"ע באלכסון, לפי סדר הו"ע ב-Q. המטריצה A היא סימטרית, ולכן לפי משפט הו"ע שלה מהווים סט אורתוגונלי. כדי ש-Q תהיה אורתונורמלית נצטרך לנרמל את הוקטורים. לכן נקבל:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$$

4. ראינו בסעיף קודם כי קיים למטריצה פירוק ספקטרלי: $A = QDQ^T$, כאשר Q מטריצה אורונורמלית ו-D מטריצה אלכסונית. כדי לקבל את פירוק ה-SDV נצטרך רק לסדר את הע"ע כך שיהיו מסודרים בסדר יורד באלכסון (בערך מוחלט):

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. כפי שלמדנו בהרצאה, נצטרך להשאיר במטריצה Σ רק את 3 הע"ע הגדולים ביותר (שהם גם הערכים הסינגולריים של A במקרה זה), ולאפס את השאר. כלומר נקבל:

$$B = U\Sigma' V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 25 & -40 \\ 0 & 25 & 15 & 40 \\ 0 & -40 & 40 & 30 \end{bmatrix}$$

שאלה 5:

1. הטענה נכונה. נניח בשלילה כי A הפיכה. לכן לפי משפט המטריצה A^TA היא PD, ולכן כל הע"ע שלה חיוביים ממש. הערכים הסינגולריים של מטריצה A הם שורש הע"ע של המטריצה A^TA, ולכן בהכרח ל-A^TA, בסתירה לכך שכולם חיוביים ממש כפי שציינו מקודם.
לכן A בהכרח סינגולרית.
2. נסמן את פירוק ה-SVD של A: $A = U\Sigma V^T$. לפי הגדרת הפירוק, U ו-V^T מטריצות אורתונורמליות, ולכן מדרגה מלאה, והמטריצה Σ היא אלכסונית כאשר הערכים באלכסון מסודרים בסדר יורד (בערך מוחלט).
לכן, לפי המשפט שבהדרכה, מתקיים: $rank(A) = rank(U\Sigma V^T) = rank(\Sigma)$.
באותו אופן: $rank(A^TA) = rank((U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T) = rank(V\Sigma U^T U\Sigma V^T) = rank(\Sigma^2)$.
מכיוון ש-Σ אלכסונית, גם Σ^2 אלכסונית, ומתקיים $(\Sigma^2)_{ij} = (\Sigma)_{ij}^2$.
לכן $(\Sigma^2)_{ij} = 0$ אמ"מ $(\Sigma)_{ij}^2 = 0$, ולכן $rank(\Sigma^2) = rank(\Sigma)$ (כי הדרגה שווה למספר הערכים השונים מ-0 באלכסון של מטריצה אלכסונית).
באותו אופן מתקיים: $rank(AA^T) = rank(\Sigma^2)$ ולכן:
$$rank(A) = rank(AA^T) = rank(A^TA)$$
3. $$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$
המטריצה A היא סכום של 3 מטריצות מדרגה 1. הוקטורים a_1 ו-a_2 בת"ל ולכן כל אחת מהמטריצות $a_1a_1^T, a_2a_2^T$ יוסיפו 1 לדרגה של A, אך ניתן לראות כי a_3 הוא סכום של שני הוקטורים הראשונים, ולכן לא יוסיף עוד לדרגה. לכן הדרגה של A היא 2.
4. לפי הנתונים מתקיים: $rank(A) = rank(B) = n$.
בנוסף, לפי משפט מאלגברה א', מתקיים: $rank(A \cdot B) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$.
   a. המטריצה לא בהכרח הפיכה.
   הגודל של המטריצה AA^T הוא $m \times m$, וכן לפי המשפט שציינו מתקיים $rank(AA^T) \leq n$
   לכן אם $m > n$ נקבל שהדרגה של AA^T לא מלאה.
   נראה גם ע"י דוגמה נגדית: נגדיר $A = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$. העמודות של A בת"ל ולכן דרגת העמודות מלאה,
   ומתקיים: $AA^T = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ וניתן לראות כי המטריצה לא הפיכה.
   b. המטריצה בהכרח הפיכה.
   לפי משפט, מתקיים כי אם עמודות A בת"ל (כפי שנתון), אז המטריצה A^TA היא PD, ולכן גם הפיכה.
   c. המטריצה לא בהכרח הפיכה.
   נגדיר: $A = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. דרגת עמודות A ו-B היא מלאה כי יש לכל אחת עמודה אחת שונה מ-0. ובנוסף מתקיים: $A^TB = \begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [0]$.
   קיבלנו את מטריצת האפס ולכן היא לא הפיכה.
   d. המטריצה לא בהכרח הפיכה.
   עבור דוגמה זהה לסעיף a, כאשר מגדירים: $A = B = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$.
   נקבל שדרגת העמודות של שתי המטריצות מלאה, אך $AA^T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ לא הפיכה.

<u>שאלה 6:</u>

נתונה המטריצה: $$A = \begin{bmatrix} +7 & +5 & +4 & +2 & +1 \\ -7 & +5 & -4 & +2 & -1 \\ +7 & -5 & -4 & +2 & +1 \\ -7 & -5 & +4 & +2 & -1 \\ +7 & +5 & +4 & -2 & -1 \\ -7 & +5 & -4 & -2 & +1 \\ +7 & -5 & -4 & -2 & -1 \\ -7 & -5 & +4 & -2 & +1 \end{bmatrix}$$

1. $$G = A^T A = \begin{bmatrix} +7 & -7 & +7 & -7 & +7 & -7 & +7 & -7 \\ +5 & +5 & -5 & -5 & +5 & +5 & -5 & -5 \\ +4 & -4 & -4 & +4 & +4 & -4 & -4 & +4 \\ +2 & +2 & +2 & +2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +7 & +5 & +4 & +2 & +1 \\ -7 & +5 & -4 & +2 & -1 \\ +7 & -5 & -4 & +2 & +1 \\ -7 & -5 & +4 & +2 & -1 \\ +7 & +5 & +4 & -2 & -1 \\ -7 & +5 & -4 & -2 & +1 \\ +7 & -5 & -4 & -2 & -1 \\ -7 & -5 & +4 & -2 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 392 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
2. נסמן: $A = U\Sigma V^T$. אז מתקיים:

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T = \begin{bmatrix} 392 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$A^T A$ היא כבר מטריצה אלכסונית. לכן הפירוק הספקטרלי שלה הוא: $A^T A = IDI$ כאשר I זו מטריצת היחידה (מהגודל המתאים) ו-$D = A^T A$ מטריצה אלכסונית.

לכן הו"ע של המטריצה הם וקטורי הבסיס הסטנדרטי. נציב אותם בשורות המטריצה V^T, ונקבל:

$$V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σ מתקבלת ע"י הוצאת שורש לערכי D. כלומר: $\Sigma = \begin{bmatrix} 19.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.31 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ולבסוף, הוקטורים ב-U מתקבלים ע"י הנוסחה: $u_k = Av_k$, ונרמולם לאחר ההכפלה.

מכיוון ש-V מורכבת מהבסיס הסטנדרטי, מתקיים ש-u_i שווה לעמודה i במטריצה A.

לכן לאחר נרמול נקבל: $U = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. נרחיב את הפירוק ע"י הוספת עמודות אורתונורמליות למטריצה U בתהליך גראם-שמידט.
4. ניתן לראות לפי המימדים של המטריצות ש-A היא מגודל 8×5. לכן A^T מגודל 5×8.

$$A^T = V\Sigma^T U^T$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&4&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0&0\\1&1&-1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&-1&-1\\0&0&1&-1&-1&1&0&0\end{bmatrix}$$

נרצה לפתור את המערכת: $A^T x = V\Sigma U^T x = b$.

נגדיר: $z = U^T x$. הוקטור z שיתקבל יהיה באורך 5, מכיוון ש-U לא בצורה אורתונורמלית מלאה. לכן נצטרך להרחיב אותו לאורך 8. נעשה זאת ע"י הרחבה באפסים, מכיוון שכפי שראינו בהרצאה זה ייתן את הפתרון הקצר ביותר ב-L^2.

בנוסף נצטרך גם להרחיב את Σ לגודל 8×5 (כגודל A) בעזרת שורות אפסים.

כעת המשוואה שלנו תהיה: $\Sigma z = \frac{1}{2}V^T b$ (אחרי העברת V אגף, כאשר V מטריצה אורתונורמלית).

מתקיים: $\frac{1}{2}V^T b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

כדי לפתור את המערכת, נצטרך לבצע *pseudo-inverse* למטריצה Σ המתוקנת, כפי שלמדנו בהרצאה.

נקבל: $z = \frac{1}{2}\Sigma^\dagger V^T b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0&0&0\\0&\frac{1}{4}&0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\\frac{1}{4}\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

לבסוף, נפתור את המערכת: $U^T x = z$, כאשר כדי להתאים את הגדלים נצטרך להרחיב את U לגודל 8×8, אך מכיוון שקיבלנו ב-3 האיברים האחרונים ב-z אפסים, נוכל להרחיב בעמודות אפסים (הן בכל מקרה יתאפסו במכפלה).

$$x = Uz = \begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&1&0&0&0\\1&-1&0&0&-1&0&0&0\\0&0&1&1&-1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\\frac{1}{4}\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$