

תרגיל בית 3

תאריך הגשה	שעת הגשה	אחראי על התרגיל	מייל אחראי
13.1.2022	23:59	תיאו אדראי	theoat@cs.technion.ac.il

שאלה 1 (10 נק')

1. (5 נק') הציעו דרך לחשב את פירוק Schur של מטריצה לכסינה A באמצעות שימוש בפירוק QR.
2. (5 נק') הראו שמטריצה סימטרית חיובית מוגדרת A תמיד ניתנת לפירוק צ'ולסקי $A = MM^T$ כאשר M מטריצה משולשת תחתונה.
הדרכה: השתמשו בעובדה שמטריצה סימטרית חיובית מוגדרת ניתנת לפירוק ספקטרלי, ולאחר מכן השתמשו בפירוק QR.

שאלה 2 (15 נק')

- נרצה להוכיח כי כל מטריצה ריבועית והפיכה A ניתנת לפירוק מהצורה $A = HQ$ כאשר H הינה מטריצה סימטרית חיובית מוגדרת ו- Q היא מטריצה אורתונורמלית.
1. (2 נק') נציע את המטריצה $Q = UV^T$ כאשר U, V הינן המטריצות המתקבלות בפירוק SVD של A . הוכיחו במפורש (על פי ההגדרה) כי המטריצה Q הנ"ל היא מטריצה אורתונורמלית.
 2. (4 נק') עבור בחירת Q מהסעיף הקודם, מצאו מטריצה מתאימה H שתקיים $A = HQ$ והוכיחו כי H שמצאתם הינה מטריצה סימטרית וחיובית מוגדרת כנדרש.
 3. (4 נק') האם לכל מטריצה ריבועית והפיכה A קיים גם פירוק מהצורה $A = QH$ כאשר Q היא מטריצה אורתונורמלית וכן H מטריצה חיובית מוגדרת כלשהי (שימו לב להחלפת הסדר במכפלה)? אם כן, הציעו פירוק כזה, ואם לאו, הסבירו מדוע פירוק כזה אנו קיים.
 4. (5 נק') חשבו את פירוק $A = HQ$ עבור המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

שאלה 3 (25 נק')

נתונה מערכת המשוואות ההומוגנית הבאה

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. (3 נק') הראו שלמערכת זו ישנם אינסוף פתרונות.

2. (4 נק') מצאו פתרון המקיים $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

עקב שגיאה במדידות, התקבלה המטריצה הבאה

3. (3 נק') הראו שלמערכת זו ישנו פתרון יחיד הנתון על ידי $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

אנו מעוניינים למצוא פתרון אחר למערכת המקיים $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$, אולם פתרון זה כאמור אינו קיים. במקום זאת, נחפש פתרון במובן LS:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = 1$$

4. (5 נק') הראו שהפתרון לבעיה זו מתקבל על ידי $\mathbf{x} = \mathbf{v}_{\min}$ כאשר \mathbf{v}_{\min} הינה העמודה של \mathbf{V} המתאימה לערך הסינגולרי הקטן ביותר בפירוק SVD של $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ (כלומר – אם הערכים הסינגולריים מסודרים מהגדול לקטן על פי המוסכמה, \mathbf{v}_{\min} הינה העמודה הימנית ביותר ב- \mathbf{V}).

5. (5 נק') חשבו את פירוק SVD של \mathbf{A} שהוגדרה לאחר סעיף (2).

6. (5 נק') מצאו את הפתרון לבעיית ה-LS הנ"ל ואת ערך השגיאה המתקבל.

שאלה 4 (15 נק')

נתונה המטריצה הבאה:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 25 & -40 \\ 0 & 25 & 15 & 40 \\ 0 & -40 & 40 & 30 \end{bmatrix}$$

וידוע כי 3 מארבעת ערכיה העצמיים הם: $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = -50$, $\lambda_3 = 40$.

1. (2 נק') מצאו את הערך העצמי הרביעי λ_4 .

2. (2 נק') מצאו את הוקטור העצמי \mathbf{v}_1 המתייחס לערך העצמי $\lambda_1 = 20$.

3. (3 נק') נתונים שלושת הוקטורים העצמיים הנותרים:

$$\lambda_1 = 20, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_3 = 40, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_4 = ?, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

בעזרת מידע זה, כתבו באופן מלא את המטריצות \mathbf{Q}, \mathbf{D} של הפירוק הספקטרלי $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$.

4. (3 נק') הציעו פירוק SVD למטריצה זו $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$. כתבו את כל מרכיבי הפירוק.

5. (5 נק') מצאו את המטריצה \mathbf{B} מדרגה 3 הקרובה ביותר למטריצה \mathbf{A} .

שאלה 5 (15 נק')

1. (2 נק') כעת נתון שבפירוק ה-SVD של A קיים ערך סינגולרי 0, האם בהכרח A אינה הפיכה? הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית.

2. (5 נק') תהי A מטריצה כלשהיא. **השתמשו בפירוק SVD** על מנת להוכיח ש-

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(A^T A)$$

הדרכה: ניתן להשתמש במשפט $\text{rank}(XY) = \text{rank}(Y) = \text{rank}(YZ)$ עבור מטריצות ריבועיות X, Z מדרגה מלאה.

3. (3 נק') נגדיר $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ותהי $A = \sum_{i=1}^3 a_i a_i^T$. מצאו את דרגת A **ללא חישוב המטריצה** A עצמה, ונמקו כיצד הסקתם זאת.

4. (5 נק') כעת יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ עבור $m \geq n$, בעלת דרגות עמודות מלאה. אלו מן המטריצות הבאות הפיכות בהכרח? הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

a. AA^T

b. $A^T A$

c. $A^T B$

d. AB^T

שאלה 6 (20 נק')

נתונה המטריצה הבאה:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +7 & +5 & +4 & +2 & +1 \\ -7 & +5 & -4 & +2 & -1 \\ +7 & -5 & -4 & +2 & +1 \\ -7 & -5 & +4 & +2 & -1 \\ +7 & +5 & +4 & -2 & -1 \\ -7 & +5 & -4 & -2 & +1 \\ +7 & -5 & -4 & -2 & -1 \\ -7 & -5 & +4 & -2 & +1 \end{bmatrix}$$

1. (5 נק') חשבו את מטריצת הגרם $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$
2. (5 נק') הציגו את פירוק ה-SVD Economy של \mathbf{A} (רמז – לא נדרש חישוב ישיר או מורכב על מנת לקבל את הפירוק).
3. (5 נק') הציגו כיצד להרחיב פירוק זה ל-SVD מלא כשהמטריצות \mathbf{U} ו- \mathbf{V} ריבועיות. לא נדרש החישוב אלא רק הסבר על הדרך לקבלת פירוק זה.

הסעיף הבא מתייחס למטריצה אחרת \mathbf{A} , הנתונה דרך פירוק ה-SVD שלה:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{=\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{V}^T}$$

4. (5 נק') ברצוננו למצוא את פתרון מערכת המשוואות $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$ עבור הוקטור $\mathbf{b}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ אשר יהיה הקצר ביותר ב- \mathbf{L}_2 . כיצד נעשה זאת ומהו הפתרון?

בהצלחה !

1. את העבודה יש להגיש אלקטרונית בזוגות לאתר הקורס
 - את גיליון התשובות יש לשמור כקובץ pdf בשם **id1-id2.pdf**.
 - הגשות שאינן בזוגות וללא אישור, לא ייבדקו.
 - במקרה שנדרשת הגשה עם מספר קבצים (למשל קטעי קוד) יש להגיש קובץ zip בשם id1-id2.zip (ובתוכו את גיליון התשובות בשם id1-id2.pdf).
 - (ב-word ניתן לייצא קובץ ל-pdf ע"י file->export).
2. את קטעי הקוד ניתן לכתוב בכל שפת תכנות שנוחה לכם (ההנחיות לגבי MATLAB רלוונטיות לכל שפה).
 - יש להציג בקובץ id1-id2.pdf את כל פלטי ההרצה והגרפים המבוקשים, כולל כותרות ברורות עבור כל גרף, הסברים ומסקנות.
 - יש לצרף את קבצי הקוד (קבצי m) עבור שאלות ה-MATLAB לקובץ ה-zip המוגש. אין צורך להעתיק את הקוד לקובץ id1-id2.pdf.
 - על הקוד להכיל תיעוד והסברים, וכמובן שירוצ ויציג את התוצאות במסודר.
3. מומלץ להכין את העבודה במחשב, אך ניתן גם לכתוב את הפתרון ידנית ולסרוק אם זה יותר נוח, ובלבד שאיכות הסריקה תהיה טובה. שימו לב שעבודה לא קריאה עלולה לגרור הורדת נקודות.
4. ניתן להגיש את תרגיל הבית עד 4 ימי איחור בדף תרגיל הבית באתר הקורס, תחת Late submission. עבור $x \in \{1,2,3,4\}$ ימי איחור יינתן קנס של 2^x נקודות מציון התרגיל.