

תרגיל בית 2

תאריך הגשה	שעת הגשה	אחראי על התרגיל	מייל אחראי
16/12/2021	23:59	עירא חשן	erachoshen@campus.technion.ac.il

(נא לכתוב 234125 בכותרת מיילים)

שאלה 1 (15 נק')

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ נתונה המטריצה}$$

1. (5 נק') נניח שעבור וקטור \underline{b} כלשהו למערכת המשוואות $A\underline{x} = \underline{b}$ אין פתרון, ועל כן נסתפק במציאת הקירוב הטוב ביותר במובן נורמת L_2 .

אילו מהווקטורים הבאים יכולים להתקבל כווקטור השגיאה (השארית $\underline{r} = A\underline{x}^* - \underline{b}$) ?

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

הסבירו את תשובתכם.

2. (3 נק') נניח שווקטור השארית נתון על ידי $\underline{r} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$. בטאו את c, d באמצעות e, f .

3. (4 נק') בהינתן הווקטור $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, חשבו את פתרון בעיית מינימום הריבועים המתאימה.

4. (3 נק') עבור הפתרון מסעיף (3), הראו שווקטור השארית $\underline{r} = A\underline{x}^* - \underline{b}$ מקיים את הביטוי הפרמטרי שמצאתם בסעיף (2).

שאלה 2 (15 נק')

$$\begin{cases} f(1,0) = \alpha \\ f(0,1) = \beta \\ f(-1,0) = \gamma \\ f(0,-1) = \delta \end{cases} : f(x,y) \text{ פונקציה דו ממדית}$$

ברצוננו למצוא את המישור $z = f(x,y) = ax + by + c$ ב- \mathbb{R}^3 שנותן את הקירוב הטוב ביותר למדידות הנתונות (במובן נורמת L_2).

1. (5 נק') נסחו בצורה פורמלית את בעיית הריבועים הפחותים המתאימה, כלומר כמערכת משוואות $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$. כעת הציבו:

α = first digit of #1 student ID

β = first digit of #1 student ID

γ = first digit of #1 student ID

δ = first digit of #1 student ID

2. (7 נק') פתרו את הבעיה מסעיף (1) ובטאו את משוואת המישור המבוקש.

3. (3 נק') האם הפתרון יחיד? הסבירו.

שאלה 3 (20 נק')

נתונה פונקציה f .

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + (2x_1 + x_2 - 3)^2$$

1. (3 נק') מצאו את ה- x שמביא את הפונקציה למינימום בעזרת הנגזרות החלקיות של x 2. (3 נק') נסחו את בעיית הבאת f למינימום כבעיית LS - $\|Ax - b\|^2$, מה הם A, b ?3. (4 נק') מצאו את ה- x המביא את בעיית ה-LS למינימום כפי שלמדנו בכיתה.4. (5 נק') הוכיחו בעזרת A כי קיים מינימום יחיד לבעיה.5. (5 נק') האם שינוי b היה משנה את יחידות הפתרון? נמקו.

שאלה 4 (20 נק')

עבור בעיית ריבועים פחותים $\min_x \|Ax - b\|_2^2$ כלשהיא, הגדרנו בשיעור את מטריצת ההטלה $P_A = A(A^T A)^{-1} A^T$.1. (1 נק') הוכיחו כי המטריצה A אינואריאנטית תחת כפל משמאל במטריצת ההטלה שלה, כלומר $P_A A = A$.2. (1 נק') הוכיחו כי מטריצת ההטלה אידמפוטנטית, כלומר $P_A P_A = P_A$.

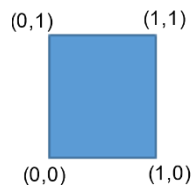
3. (1 נק') הוכיחו כי מטריצת ההטלה סימטרית.

4. (2 נק') הוכיחו כי $H_A = (I - P_A)$ היא סימטרית ואידמפוטנטית.5. (10 נק') נגדיר $A = (M_1 \ M_2)$ (מטריצה המחולקת לשני בלוקים). הוכיחו כי $P_{M_2} P_A = P_{M_2}$.6. (5 נק') הוכיחו בעזרת הסעיפים הקודמים כי $H_{M_2} H_A = H_A$.

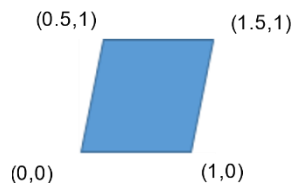
שאלה 5 (30 נק')

דודכם נתן לכם במתנה מקרן שקופיות ישן.

לדאבונכם, המקרן מעוות את התמונה כך שבמקום לקבל על המסך תמונה ריבועית:



מתקבלת תמונת מקבילית:



קואורדינטות קודקודי הריבוע (x, y) והמקבילית (x', y') מופיעות בתמונה.

על מנת לתקן את העיוות, אתם מחפשים טרנספורמציה ליניארית אשר הפעלתה על קודקודי המקבילית תעביר אותם למיקום לקודקודי הריבוע הנ"ל:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

1. (12 נק') כתבו את מערכת המשוואות הליניארית למציאת מקדמי הטרנספורמציה a, b, c, d, e, f והראו שיש לה פתרון יחיד.

לאחר עריכת מדידה מדוקדקת יותר, מסתבר שהקואורדינטה הימנית התחתונה אינה כפי שנתון, אלא $(1.2, 0)$, כלומר, זו אינה מקבילית אלא טרפז.

2. (4 נק') הראו שכעת למערכת המשוואות אין פתרון.

3. (9 נק') מצאו את מקדמי הטרנספורמציה הליניארית שהפעלתה על קודקודי הטרפז תקרב אותם כמה שיותר לקודקודי הריבוע במובן הריבועים הפחותים.

4. (5 נק') ציירו את הצורה שהתקבלה על גבי הריבוע לשם השוואה. מהי הצורה?

הערה: בשאלה זו מותר להיעזר במטלב לצורך הפתרון.

בהצלחה !

הוראות הגשה

- יינתנו עד 10 נקודות בonus על תרגיל מוקלד (סדר התשובות ובהירותן יילקחו בחשבון).

1. את העבודה יש להגיש אלקטרונית בזוגות לאתר הקורס. **הגשות שאינן בזוגות וללא אישור, לא ייבדקו.**

- **את גיליון התשובות יש לשמור כקובץ pdf בשם id1-id2.pdf.**
- במקרה שנדרשת הגשה עם מספר קבצים (למשל קטעי קוד) יש להגיש קובץ zip בשם id1-id2.zip (ובתוכו את גיליון התשובות בשם id1-id2.pdf).

2. את קטעי הקוד ניתן לכתוב בכל שפת תכנות שנוחה לכם (ההנחיות לגבי MATLAB רלוונטיות לכל שפה).

- יש להציג בקובץ id1-id2.pdf את כל פלטי ההרצה והגרפים המבוקשים, כולל כותרות ברורות עבור כל גרף, הסברים ומסקנות.
- יש לצרף את קבצי הקוד (קבצי m). עבור שאלות ה-MATLAB לקובץ ה-zip המוגש. (אין צורך להעתיק את הקוד לקובץ id1-id2.pdf).
- על הקוד להכיל תיעוד והסברים, וכמובן שירץ ויציג את התוצאות במסודר.

3. ניתן להגיש את תרגיל הבית עד 4 ימי איחור בדף תרגיל הבית באתר הקורס, תחת Late submission.

עבור $x \in \{1,2,3,4\}$ ימי איחור יינתן קנס של 2^x נקודות מציון התרגיל.