שאלה 1

נתונה המטריצה הבאה:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6&4&4&-1\\3&-4&-3&1\\-3&4&1&3\\3&2&2&2\end{bmatrix}$$

1. (8 נק') חשבו את הפירוק $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ בעזרת האלגוריתם האיטרטיבי שנלמד <u>בתרגול</u>.

נסמן:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\l_{21}&1&0&0\\l_{31}&l_{32}&1&0\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\0&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\0&0&u_{33}&u_{34}\\0&0&0&u_{44}\end{bmatrix}$$

לפי האלגוריתם שראינו השורה הראשונה ב- U זהה לשורה הראשונה ב-A.
בנוסף העמודה הראשונה ב- L מקיימת: $l_{k,1}=\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ עבור $k=2,3,4$.

לכן נקבל:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0.5&1&0&0\\-0.5&l_{32}&1&0\\0.5&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&4&4&-1\\0&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\0&0&u_{33}&u_{34}\\0&0&0&u_{44}\end{bmatrix}$$

כעת נסמן:

$$B=\underset{A_2}{\begin{bmatrix}-4&-3&1\\4&1&3\\2&2&2\end{bmatrix}}-\underset{l_1}{\begin{bmatrix}0.5\\-0.5\\0.5\end{bmatrix}}\underset{u_1^T}{\begin{bmatrix}4&4&-1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}-6&-5&1.5\\6&3&2.5\\0&0&2.5\end{bmatrix}=L_2U_2$$

ונמשיך עם האלגוריתם על מטריצה B - השורה הראשונה ב-U_2 זהה לשורה הראשונה ב- B,
והעמודה הראשונה ב- L_2 מקיימת שווה $\frac{b_{k1}}{b_{11}}$ עבור $k=1,2,3$.

לכן נקבל:

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6&-5&1.5\\0&u_{33}&u_{34}\\0&0&u_{44}\end{bmatrix}$$

כעת נסמן:

$$C=\underset{B_2}{\begin{bmatrix}3&2.5\\0&2.5\end{bmatrix}}-\underset{l_2}{\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}}\underset{u_2^T}{\begin{bmatrix}-5&1.5\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}-2&4\\0&2.5\end{bmatrix}=L_3U_3$$

השורה הראשונה ב-U_3 זהה לשורה הראשונה ב- C והעמודה הראשונה ב- L_3 מקיימת $\frac{c_{k1}}{c_{11}}$ עבור $k=1,2$.

לכן נקבל:

$$C=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&4\\0&u_{44}\end{bmatrix}$$

כעת נסמן:

$$D=\underset{C_2}{\begin{bmatrix}2.5\end{bmatrix}}-\underset{l_3}{\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}}\underset{u_3^T}{\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}2.5\end{bmatrix}$$

כלומר נקבל $u_{44}=2.5$.

לכן בסה"כ קיבלנו:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0.5&1&0&0\\-0.5&-1&1&0\\0.5&0&0&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}6&4&4&-1\\0&-6&-5&1.5\\0&0&-2&4\\0&0&0&2.5\end{bmatrix}}_{U}$$

2. (2 נק') חשבו את הדטרמיננטה של **A**.

מתקיים $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U)$

מכיוון ש-L ו-U הן מטריצות משולשות, הדטרמיננטה של כל אחת מהן היא מכפלת איברי האלכסון. $\det(L) = 1,\ \det(U) = 6\cdot(-6)\cdot(-2)\cdot 2.5 = 180$

לכן $\det(A) = 180$.

3. (7 נק') ברצוננו לפתור את מערכת המשוואות:

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix}$$

בעזרת תוצאות הסעיפים הקודמים קבעו אם למערכת זו קיים פתרון יחיד, ואם כן – חשבו אותו ידנית.

לפי סעיף קודם, הדטרמיננטה של A שונה מ-0 לכן היא אינה סינגולרית ולכן לפי משפט לכל וקטור $\underline{b}$ קיים פתרון יחיד למשוואה $A\underline{x} = \underline{b}$.

נמצא את הפתרון בעזרת החלפה קדמית ואחורית כפי שראינו בהרצאה:

$$A\underline{x} = LU\underline{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix}$$

נסמן $U\underline{x} = \underline{y}$ ונפתור תחילה את המערכת $L\underline{y} = \underline{b}$:

$$L\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix}$$

נבצע החלפה קדמית ונקבל:

$$\begin{cases} y_1 = 14 \\ 0.5y_1 + y_2 = 7 \Rightarrow y_2 = 7 - 0.5y_1 = 7 - 7 = 0 \\ -0.5y_1 - y_2 + y_3 = 13 \Rightarrow y_3 = 13 + 0.5y_1 + y_2 = 13 + 7 - 0 = 20 \\ 0.5y_1 + 0 + 0 + y_4 = -8 \Rightarrow y_4 = -8 - 0.5y_1 = -8 - 7 = -15 \end{cases}$$

$$\underline{y}^T = [14 \quad 0 \quad 20 \quad -15]$$

כעת נפתור את המערכת $U\underline{x} = \underline{y}$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 1.5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 20 \\ -15 \end{bmatrix}$$

נפתור בעזרת החלפה אחורית:

$$2.5x_4 = -15 \Rightarrow x_4 = -6$$

$$-2x_3 + 4x_4 = 20 \Rightarrow x_3 = -10 + 2x_4 = -10 - 12 = -22$$

$$-6x_2 - 5x_3 + 1.5x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-5x_3 + 1.5x_4}{6} = \frac{110 - 9}{6} = 16.833$$

$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 14 \Rightarrow x_1 = \frac{14 - 4x_2 - 4x_3 + x_4}{6} = \frac{14 - 67.332 + 88 - 6}{6} = 4.78$$

$$\underline{x}^T = [4.78,\ 16.833,\ -22,\ -6]$$

4. (3 נק') האם קיים פירוק LDV? חשבו אותו.

כן. ראינו ש קיים למטריצה פירוק LU ללא פרמוטציה והיא אינה סינגולרית ולכן היא רגולרית. לכן לפי משפט קיים לה פירוק LDV.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.67 & 0.67 & -0.167 \\ 0 & 1 & 0.833 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V}$$

נתונה המטריצה הבאה:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&1&-3&2\\4&3&-7&9\\-4&-1&1&-4\\-8&-1&3&-2\end{bmatrix}$$

1. (8 נק') הציעו פירוק **LU** למטריצה זו ללא פרמוטציה, ע"י האלגוריתם שנלמד <u>בהרצאה</u> (אלימינציה של גאוס).
כתבו במפורש את המטריצות **L** ו - **U**.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}}_{E_1}\cdot A=\begin{bmatrix}4&1&-3&2\\0&2&-4&7\\0&0&-2&-2\\0&1&-3&2\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-0.5&0&1\end{bmatrix}}_{E_2}E_1A=\begin{bmatrix}4&1&-3&2\\0&2&-4&7\\0&0&-2&-2\\0&0&-1&-1.5\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-0.5&1\end{bmatrix}}_{E_3}E_2E_1A=\underbrace{\begin{bmatrix}4&1&-3&2\\0&2&-4&7\\0&0&-2&-2\\0&0&0&-0.5\end{bmatrix}}_{U}$$

$$E_3E_2E_1A=U \implies A=\underbrace{(E_3E_2E_1)^{-1}}_{L}U$$

$$\implies A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-2&0.5&0.5&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}4&1&-3&2\\0&2&-4&7\\0&0&-2&-2\\0&0&0&-0.5\end{bmatrix}}_{U}$$

2. (3 נק') האם קיים פירוק **LDV** למטריצה זו? אם כן, הציגו אותו, ואם לא, הסבירו מדוע אינו קיים.

כן, מאחר שאיברי האלכסון של U שונים מ-0.

$$A=L\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-0.5\end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0.25&-0.75&0.5\\0&1&-2&3.5\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{V}$$

3. (2 נק') חשבו את הדטרמיננטה של מטריצה זו.

מתקיים

$$\det(A)=\det(LDV)=\det(L)\det(D)\det(V)$$

כי המטריצות משולשות ולכן הדטרמיננטה של כל אחת היא מכפלת איברי האלכסון. לכן:

$$\det(A)=\underset{|L|}{1}\cdot\underset{|D|}{(4\cdot2\cdot(-2)\cdot(-0.5))}\cdot\underset{|V|}{1}=8$$

4. (7 נק') חשבו את העמודה הראשונה של המטריצה $\mathbf{A}^{-1}$.

הציעו דרך יעילה (בסיבוכיות cn^2) אשר תנצל את פירוק **LU** מסעיף א' על מנת להשיג זאת.

הסבירו את תשובתכם.

מתקיים כי $AA^{-1} = I$. לכן אם נכפיל את A בעמודה הראשונה של A^{-1} נקבל את העמודה הראשונה של I. כלומר נרצה לפתור את מערכת המשוואות $A\underline{x} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \underline{b}$.

מצאנו את פירוק LU של A, לכן נוכל לסמן $U\underline{x} = \underline{y}$ ולפתור את מע' המשוואות $L\underline{y} = \underline{b}$ ולאחר מכן את המע' $U\underline{x} = \underline{y}$ (ע"י החלפה קדמית ואחורית כפי שראינו בהרצאה).

$$L\underline{y} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-2&0.5&0.5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{y} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -y_1 = -1 \\ -y_1 + 0 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = y_1 = 1 \\ -2y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + y_4 = 0 \Rightarrow y_4 = 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$U\underline{x} = \begin{bmatrix}4&1&-3&2\\0&2&-4&7\\0&0&-2&-2\\0&0&0&-0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\2\end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix}-0.25\\20.5\\3.5\\-4\end{bmatrix}$$

$$-0.5x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = -4$$

$$-2x_3 - 2x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} - x_4 = 3.5$$

$$2x_2 - 4x_3 + 7x_4 = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + 2x_3 - 3.5x_4 = -\frac{1}{2} + 7 + 14 = 20.5$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{4} - 5.125 + 2.625 + 2 = -0.25$$

לכן $\underline{x}$ שקיבלנו הוא העמודה הראשונה במטריצה A^{-1}.

ראינו כי החלפה קדמית ואחורית לוקחות סדר גודל של n^2 פעולות ולכן האלגוריתם עומד בתנאים.

שאלה 3

$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&8&4\\1&4&91\end{pmatrix}$, A מטריצה סימטרית ולפיכך לכל מטריצה סימטרית , PD

קיים פירוק LDL^t כך שאלכסון D חיובי ושאת פירוק

LDL^t ניתן לרשום כ $M\cdot M^t$ שזהו פירוק צ'ולסקי.

לפי משפט אם נראה של A קיים פירוק LDL^t ללא פרמוטציה אז A , PD

ומכך נסיק שקיים לה פירוק.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&8&4\\1&4&91\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&4&6\\0&6&90\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{-6}{4}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&4&6\\0&6&90\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&4&6\\0&0&81\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad A=\overset{L}{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&\frac{6}{4}&1\end{pmatrix}}\overset{U}{\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&4&6\\0&0&81\end{pmatrix}}=\overset{L}{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&\frac{6}{4}&1\end{pmatrix}}\overset{D}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&81\end{pmatrix}}\overset{V=L^t}{\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&\frac{6}{4}\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

ואכן הפירוק ללא נתקע לכן A היא PD $\Leftarrow$ קיים לה פירוק צ'ולסקי.

נחשב פירוק צ'ולסקי ב-2 דרכים:

לפי ההרצאה:

קיבלנו ש-

$$A=LDL^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&\frac{6}{4}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&81\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&\frac{6}{4}\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\underset{L}{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&\frac{6}{4}&1\end{pmatrix}}\underset{D^{\frac{1}{2}}}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&9\end{pmatrix}}\underset{(D^{\frac{1}{2}})^t}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&9\end{pmatrix}}\underset{L^t}{\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&\frac{6}{4}\\0&0&1\end{pmatrix}}=$$

נסמן $LD^{\frac{1}{2}}=M \Leftarrow (D^{\frac{1}{2}})^t\cdot L^t=(LD^{\frac{1}{2}})^t=M^t$ ולכן:

$$\Rightarrow\ =\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\1&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&3\\0&0&9\end{pmatrix}=\ M\cdot M^t$$

לפי התרגול:

$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&8&4\\1&4&91\end{pmatrix}=A=M\cdot M^t=\begin{pmatrix}m_{11}&0&0\\m_{21}&m_{22}&0\\m_{31}&m_{32}&m_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m_{11}&m_{21}&m_{31}\\0&m_{22}&m_{32}\\0&0&m_{33}\end{pmatrix}$$

נכפול שורה ראשונה של M בעמודה ראשונה של M^t ונקבל $m_{11}^2=a_{11} \Leftarrow m_{11}=\sqrt{1}=1$

ונמשיך לכפול שורה זו בשאר עמודות M^t: $m_{11}\cdot m_{21}=-2$, $m_{11}\cdot m_{31}=1 \Leftarrow m_{21}=-2, m_{31}=1$

נעבור לשורה שניה ונפעל באופן דומה שכבר אנו יודעים את m_{21}:

$$m_{21}^2+m_{22}^2=a_{22} \Rightarrow m_{22}=2$$

$$m_{21}\cdot m_{31}+m_{22}\cdot m_{32}=a_{23}=4 \Rightarrow m_{32}=\frac{4-(-2)}{2}=3$$

ועתה נכפול שורה 3 של M בשורה שלישית של M^t: $m_{31}^2+m_{32}^2+m_{33}^2=91=a_{33} \Rightarrow m_{33}=\sqrt{91-1-9}=\sqrt{81}=9$

לכן קיבלנו את אותה תוצאה.

שאלה 4

1. תהי A (ריבועית בהכרח כי אחרת A^t+A לא מוגדר).

צ"ל A חיובית מוגדרת אמ"מ A^T+A חיובית מוגדרת.

⇐ נתון $A_{n\times n}$ חיובית מוגדרת לכן לכל וקטור $X_{n\times 1}$ מתקיים $X^tAX>0$

יהי $X_{n\times 1}$.

$$X^t(A^t+A)X = X^tA^tX + X^tAX = (X^t(A^t)^t(X^t)^t)^t + X^tAX = (X^tAX)^t + X^tAX = 2X^tAX > 0$$

הסבר: X^tAx זהו סקלר ובגלל ש- A חיובית מוגדרת זהו סקלר חיובי.

$(X^tAx)^t$ זהו סקלר בטרנספוז לכן שווה לעצמו.

⇒ נתון $(A^t+A)_{n\times n}$ חיובי מוגדרת לכן לכל $X_{1\times n}$ מתקיים $X^t(A^t+A)X>0$

$$\Rightarrow X^tA^tX + X^tAX > 0 \Rightarrow (X^t(A^t)^t(X^t)^t)^t + X^tAX \Rightarrow (X^tAX)^t + X^tAX \Rightarrow 2X^tAX>0 \Rightarrow X^tAX>0$$

מאותו נימוק של קודם

2. $X^tMX>0$, כל מטריצה ניתנת לפירוק למטריצה סימטרית ואנטי סימטרית.

$$M = \underbrace{\frac{M+M^t}{2}}_{\text{סימטרית נסמן ב- } Q} + \underbrace{\frac{M-M^t}{2}}_{\text{אנטי סימטרית}}.$$

$$X^tQX = X^t\left(\frac{M+M^t}{2}\right)X = \frac{X^tMX}{2} + \underbrace{\frac{X^tM^tX}{2} = \frac{X^tMX}{2} + \frac{(X^tMX)^t}{2}}_{\text{לפי סעיף א'.}} = \frac{2\cdot X^tMX}{2} = X^tMX$$

מצאנו מטריצה Q סימטרית המקיימת $X^tQX = X^tMX$.

3. נבדוק את הטענה על מטריצה 2x2 נראה איזה מט' מקיימת זאת:

$$(x\quad y)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

$$(xa+yc\quad bx+dy)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

$$ax^2+cyx+bxy+dy^2=0$$

ע"מ שהמטריצה תהיה סינגולרית נדרוש $a\neq b$ או $c\neq d$ כך שעמודותיה יהיו בת"ל.
נדרוש $a=0$ וגם $d=0$ ו $c=-b=1$ ונקבל: $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

זו מטריצה שעמודותיה בת"ל ולכן היא הפיכה וגם מקיימת $X^TAX=0\ \forall X$.
ולכן אוילר צודקת.

שאלה 5

1) צ"ל: כל מט' הניתנת לפירוק LDL^T, עם אלכסון $D>0$, ללא פרמוטציה הינן סימטריות ו-PD.

נראה סימטריות:

$$A^T = (LDL^T)^T = (L^T)^T D^T L^T = LD^TL^T$$

D מט' אלכסונית ולכן $D^T=D$

נראה חיוביות מוגדרת:

ראשית מהגדרת הפירוק LDL^T ידוע ש-L משולשת תחתונה בסיסית ובנוסף מהנתון, D הינה PD כי היא מט' אלכסונית עם איברי אלכסון חיוביים.

נראה לפי הגדרה:

$$x^TLDL^Tx = z^TDz > 0 \quad (*)$$

נסמן $z=L^Tx$

אזי $x^TL=z^T$

(*) L הפיכה ולכן למערכת $L^Tx=z$ קיים פתרון יחיד כלומר לכל x קיים z יחיד כך ש- $L^Tx=z$ כלומר רק $x=0$ מקיים $L^Tx=0$ והיות ש-D PD בהכרח מתקיים שלכל $0\neq x$ ובפרט לכל $z\neq0$ $z^TDz>0$.

2) צ"ל: שלכל מט' K חיובית סימטרית וחיובית מוגדרת כל איברי האלכסון חיוביים ובפרט K_{11}

תהי מט' $K_{n\times n}$ סימטרית וחיובית מוגדרת לכן לכל x ובפרט $x_{n\times1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$

מתקיים:

$$K_{11} = (K_{11}\ \ K_{12} \dots K_{1n})\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = (1\,0\,0\dots)\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12} & \cdots\\ K_{21} & K_{22} & \cdots\\ \vdots & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix} = x^TKx>0$$

ובאופן דומה לכל K_{ii} ניקח $X_{n\times 1} = \begin{cases} x_{j1}=1, & i=j \\ x_{j1}=0 & i\neq j \end{cases}$.

3. נראה שהמטריצה $K_2 - l_1 u_1^T$ סימטרית.

K מטריצה סימטרית ו- K_2 היא המטריצה K ללא שורה ראשונה ועמודה ראשונה

לכן הסימטריה נשמרת $\Leftarrow$ K_2 סימטרית ומתקיים $K_2^T = K_2$.

K PD וסימטרית ורגולרית לכן קיים לה פירוק ללא פרמוטציות ומתקיים $K=LU$

$\Leftarrow$ $K=K^T=(LU)^T=U^TL^T$ מיחידות הפירוק. $U^TL^T=LU \Leftarrow u_1 l_1^T = l_1 u_1^T$

$\Leftarrow$ $(l_1 u_1^T)^T = l_1 u_1^T \Leftarrow l_1 u_{1\,n\times n}^T$ סימטרית ומשיקולים של סימטריה גם $l_1 u_{1\,n-1\times n-1}^T$ סימטרית

$$\Rightarrow (K_2 - l_1 u_1^T)^T = K_2^T - u_1 l_1^T = K_2 - u_1^T l_1$$

$\Leftarrow$ סימטרית.

<u>נראה PD:</u>

צ"ל שלכל $x\neq 0$ המטריצה $x^T(K_2 - l_1 u_1^T)x > 0$

K סימטרית לכן $K_{ij}=K_{ji}$ לכל i,j וגם K סימטרית:

מאלגוריתם הפירוק הנלמד בהרצאה

$$Z^T = u_1 = \begin{pmatrix} K_{12} \\ \vdots \\ K_{1n} \end{pmatrix}^T \qquad \frac{Z}{K_{11}} = l_1 = \begin{pmatrix} \frac{K_{12}}{K_{11}} \\ \vdots \\ \frac{K_{1n}}{K_{11}} \end{pmatrix}$$

$$l_1 u_1^T = \frac{1}{K_{11}} Z \cdot Z^T$$

$$X^T K_2 X - \frac{1}{K_{11}} X^T Z \cdot Z^T X \quad (*)$$

$$x^T(K_2)x = (x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \dots & K_{2n} \\ K_{32} & \ddots & K_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{n2} & & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(X_2K_{22}+\dots+X_nK_{n2},\ X_2K_{23}+\dots+X_nK_{n3},\dots,\ X_2K_{2n}+\dots+X_nK_{nn})\begin{pmatrix}X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$$

$$X_2(X_2K_{22}+\dots+X_nK_{n2})+X_3(X_2K_{23}+\dots+X_nK_{n3})+\dots+X_n(X_2K_{2n}+\dots+X_nK_{nn})\ (*)$$

K PD ולכן:

$$(X_1\dots\ X_n)\begin{pmatrix}K_{11} & \dots & K_{1n}\\ K_{21} & & \\ \vdots & & \\ K_{n1} & & K_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}>0$$

$$X_1(X_1K_{11}+\dots X_nK_{n1})+X_2(X_1K_{12}+\dots X_nK_{n2})+\dots+X_n(X_1K_{1n}+\dots X_nK_{nn})>0$$

$$X_1^2K_{11}+2X_1(X_2K_{12}+X_3K_{13}+\dots X_nK_{1n})+\underbrace{X_2(X_2K_{22}+\dots X_nK_{n2})+\dots X_n(X_2K_{2n}+\dots X_nK_{2n})}_{(*)}$$

$$(1)\ X_1^2K_1+X^TK_2X+2X_1(Z^TX)>0\ ..$$

מספיק לדרוש ש-

$$(2)\ X^TK_2X>\frac{1}{K_{11}}X^TZZ^TX \Leftarrow X^TK_2X-\frac{1}{K_{11}}X^TZ\cdot Z^TX>0$$

כלומר נקטין את ביטוי 1 ונדרוש שוויון ל-0

$$\frac{1}{K_{11}}X^TZZ^TX+X_1^2K_{11}+2X_1Z^TX=0$$

$$X_1^2K_{11}^2+2X_1K_{11}Z^TX=-X^TZZ^TX$$

$$(X_1K_{11}+\bar{Z}^T\bar{X})^2=(\bar{Z}^T\bar{X})^2-X^TZZ^TX=\underbrace{Z^TX}_{\text{סקלר}}-\underbrace{X^TZ}_{\text{סקלר}}=0$$

$$\Rightarrow X_1=\frac{-Z^T\bar{X}}{K_{11}} \Longrightarrow \bar{X}=\begin{pmatrix}-\bar{Z}^T\bar{X}\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$$

נסתר לכן

4) נשים לב שבאלגוריתם הפירוק אם נמשיך באופן רקורסיבי יתקבל ש-.

$$K=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{A_2}{A_1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & 1 & \\ \frac{A_n}{A_1} & \frac{B_n}{B_1} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & \cdots & & A_n\\ 0 & B_2 & \cdots & B_n\\ & & \ddots & \\ & & & Z_n\end{pmatrix}=$$

כי $A_1 \dots Z_n$ חיוביים לכן אלכסון D חיובי.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{A_2}{A_1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & 1 & \\ \frac{A_n}{A_1} & \frac{B_n}{B_1} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Z_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{A_2}{A_1} & \cdots & \frac{A_n}{B_n}\\ & \frac{B_2}{B_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}=LDL^T$$

מ.ש.ל

שאלה 6

נתונה המטריצה $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}10^{-20} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

1. (5 נק') מצאו את פירוק ה-**LU** שלה באופן ידני.

נבצע פירוק LU ע"י שימוש באלימינציית גאוס:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ -10^{20} & 1\end{bmatrix}}_{E_1}\underbrace{\begin{bmatrix}10^{-20} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{A}=\begin{bmatrix}10^{-20} & 1\\ 0 & 1-10^{20}\end{bmatrix} \Rightarrow A=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10^{20} & 1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}10^{-20} & 1\\ 0 & 1-10^{20}\end{bmatrix}}_{U}$$

2. (5 נק') חשבו את פירוק LU ללא פרמוטציה של המטריצה A ב-MATLAB.

לצורך חישוב הפירוק, השתמשו בקוד הבא:

```
[L, U] = lu(sparse(A),0);
L = full(L);
U = full(U);
```

הציגו את המטריצות L,U שהתקבלו.

בגלל סדרי הגודל השונים של הערכים במטריצות, הציגו כל ערך של המטריצות בנפרד ע"י הפקודות:

```
L(1,1) , L(1,2) , L(2,1) , L(2,2)
U(1,1) , U(1,2) , U(2,1) , U(2,2)
```

הציגו גם את המכפלה L*U ע"י הצגת כל איבר במטריצה בנפרד באופן דומה.

L

```
>> L(1,1)
L(1,2)
L(2,1)
L(2,2)

ans =

     1


ans =

     0


ans =

   1.0000e+20


ans =

     1
```

U

```
>> U(1,1)
U(1,2)
U(2,1)
U(2,2)

ans =

   1.0000e-20


ans =

     1


ans =

     0


ans =

  -1.0000e+20
```

LU

```
>> LU = L*U

LU =

    0.0000    1.0000
    1.0000         0

>> LU(1,1)
LU(1,2)
LU(2,1)
LU(2,2)

ans =

   1.0000e-20


ans =

     1


ans =

    1.0000


ans =

     0
```

3. (5 נק') השוו את הפירוק האנליטי מסעיף (1) לתוצאת הפירוק מסעיף (2).
עבור כל אחת מהמטריצות **L** ו-**U**, ציינו האם התקבלה מטריצה זהה בשני הסעיפים.
עבור כל איבר במטריצות **L,U** שערכו שונה בהשוואה בין שני הפירוקים, הציגו את השגיאה/ההפרש בחישוב והסבירו את הסיבה להבדל.

- המטריצה L זהה בשני החישובים.
- במטריצה U האיבר במקום (2,2) בחישוב הידני הוא $1-10^{20}$ בעוד שב-MATLAB הוא -10^{20}.
זה נובע מכך ש-$1 << 10^{20}$ ולכן זניח בסכום שלהם מבחינת המחשב.
- זה יוצר את השגיאה במכפלה LU, שבמקום 1 במטריצה A המקורית (ובחישוב הידני) נמצא 0 במקום (2,2).

4. (5 נק') דני טוען שאפשר לשפר את דיוק החישוב הנומרי ע"י שימוש בפרמוטציה.
יוסי טוען שאם בפירוק האנליטי לא נדרשה פרמוטציה, היא לא תועיל גם בחישוב הנומרי.
מי מהם צודק? הסבירו את התוצאה בהקשר של בחירת איבר ה-pivot בפירוק.
לצורך כך, חזרו על הסעיפים הקודמים כאשר נתיר שימוש בפרמוטציה, כלומר, מצאו פירוק **PA=LU** והציגו את המטריצות **P,L,U,P*A,L*U** שמתקבלות (גם כאן בדקו את ערכו של כל איבר במטריצה בנפרד).
הסבירו את התוצאה.
לצורך פירוק עם פרמוטציה השתמשו בפקודה:

```
[L, U, P] = lu(A);
```

L

```
>> L(1,1)
L(1,2)
L(2,1)
L(2,2)

ans =

     1

ans =

     0

ans =

   1.0000e-20

ans =

     1

>>
```

U

```
>> U(1,1)
U(1,2)
U(2,1)
U(2,2)

ans =

     1

ans =

     1

ans =

     0

ans =

     1
```

P

```
>> P(1,1)
P(1,2)
P(2,1)
P(2,2)

ans =

     0

ans =

     1

ans =

     1

ans =

     0
```

PA

```
>> PA = P*A;
>> PA(1,1)
PA(1,2)
PA(2,1)
PA(2,2)

ans =

     1

ans =

     1

ans =

   1.0000e-20

ans =

     1
```

LU

```
>> LU = L*U;
>> LU(1,1)
LU(1,2)
LU(2,1)
LU(2,2)

ans =

     1

ans =

     1

ans =

   1.0000e-20

ans =

     1
```

ניתן לראות שאכן הפרמוטציה הועילה בחישוב הנומרי.
כעת באמת מתקיים השוויון $PA = LU$ כפי שניתן לראות מהתוצאות.
זה נובע מכך שכאשר מבצעים החלפה בין השורות, לא נדרש להכפיל ב-10^{20} כדי לאפס את האיבר שמתחת ל-pivot (אלא לכפול ב-10^{-20}), מה שמונע את השגיאה שנוצרה.
הכפלה במספר גדול מגדילה את השגיאות הנומריות, ולכן לקיחת האיבר הגדול ביותר בעמודה כ-pivot מונעת זאת.