Zusammenfassung Algorithmische Mathematik II

24. Februar 2013

0.1 Unabhängigkeit von Ereignissen

Definition. Zwei Ereignisse heissen unabhängig, falls

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

gilt.
Eine beliebige (nicht notwendig endlich oder abzählbar!) Kollektion von Ereignissen A_i $(i \in I)$ heisst unabhängig, falls

$$P[A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_n}] = \prod_{k=1}^{n} P[A_{i_k}] \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle paarweise verschiedenen } i_1, ..., i_n \in I$$

gilt.

Satz. *Sind die Ereignisse $A_1, ..., A_n \in A$ unabhängig und $B_j = A_j$ oder $B_j = {A_j}^C$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$, so sind auch die Ereignisse $B_1, ..., B_n$ unabhängig.*

Seien $A_1, A_2, ...$ unabhängige Ereignisse mit jeweils Wahrscheinlichkeit p. Wir definieren die Wartezeit auf das erste Eintreten eines Ereignisses durch

$$T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\}$$

.
Es gilt $P[T = n] = p \cdot (1 - p)^{n-1}$.

Definition. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}$ mit Massenfunktion

$$p(n) = p \cdot (1 - p)^{n-1}$$

heisst geometrische Verteilung zum Parameter p.

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Ereignissen k eintreten ist gleich der Binomialverteilung. Sei S_n gleich der Anzahl der eingetretenen Ereignisse innerhalb der ersten n Ereignisse.

Satz. *(Bernstein-Ungleichung)*

$$\forall \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} P[\tfrac{S_n}{n} \geq p + \epsilon] \leq e^{-2\epsilon^2 n}$$

(analog für $\geq p - \epsilon$)