金融建模 项目报告

谢嘉薪 2020111142

目录

一、引言

期权是一种极为特殊的衍生产品，它能使买方有能力避免坏的结果，而从好的结果中获益，同时，它也能使卖方产生巨大的损失。当然，期权不是免费的，这就产生了期权定价问题。期权定价理论是现代金融理论最为重要的成果之一，它集中体现了金融理论的许多核心问题，其理论之深，方法之多，应用之广，令人惊叹。 期权的标的资产也由股票、指数、期货合约、商品 （金属、黄金、石油等），外汇增加到了利率，可转换债券、认股权证、掉期和期权本身等许多可交易证券和不可交易证券。期权是一种企业、银行和投资者等进行风险管理的有力工具。

目前关于期权定价方法研究的主要成果有：（1） 传统期权定价方法，（2） Black-Scholes 期权定价方法，（3） 二叉树期权定价方法，（4） 有限差分方法，（5） 蒙特卡罗模拟方法，（6） 确定性套利方法，（7） ε-套利定价方法，（8） 区间定价方法。我经过一学期《金融建模》课程的学习，在老师的带领下了解了其中几种定价方法，走进了期权定价的世界，本项目则聚焦于蒙特卡罗模拟方法，利用 Python 为欧式看涨期权、普通障碍期权、雪球期权进行定价，同时考察随机波动率下的欧式看涨期权和普通障碍期权，并且皆与 Black-Scholes formula 进行对比，得出结论。

二、欧式看涨期权

期权表示在规定（行权期）日期（欧式期权）或者规定时期（美式期权）内，以规定价格（所谓行权价）购买（看涨期权）或者出售（看跌期权）指定金融工具。我们首先考虑估值较为简单的情况——欧式看涨期权。

（一）蒙特卡罗模拟

蒙特卡洛模拟的最重要应用之一是未定权益（期权，衍生品，混合型工具等）的估值。简单地说，在风险中立的世界中，未定权益的价值是风险中立（鞅）测度下的折现后预期收益。这是所有风险因素（股票、指数等）偏离无风险短期利率的概率测度。根据资产定价基本定理，这种概率测度的存在等价于套利机会的缺失。

1. 理论基础与建模思路

在期权定价中，著名的 BS-PDE 方程如下：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

其中，S 服从几何布朗运动：

$$dS_t=rS_tdt+\sigma S_tdW_t$$

根据伊藤引理，进一步推导可得：

$$S_T = S_t \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma Z \sqrt{T - t}\right]$$

$$Z \sim N(0,1)$$

根据上式，利用蒙特卡罗模拟可生成多组S_T。根据期权性质，可计算S_T对应的 payoff，然后计算 payoff 的平均值并对其贴现，即：

$$C_0 = e^{-rT}\mathrm{E}[(S_T - K)^+]$$

从而得到 t 时刻期权的价值。

2. 代码实现

2.1 参数设置

对于欧式看涨期权，需要设置如下参数：

表 2-1 欧式看涨期权参数表

符号	解释
S_0	标的资产期初价格
K	执行价格
r	无风险利率
σ	波动率
T	时间跨度
M	模拟标的资产路径数
N	模拟次数

```
S0 = 111
K = 142
r = 0.02
sigma = 0.42
T = 1.0
M = 100
N = 10000
```

2.2 运行结果

通过编写代码，绘制出 100 条标的资产价格路径，如下图所示：

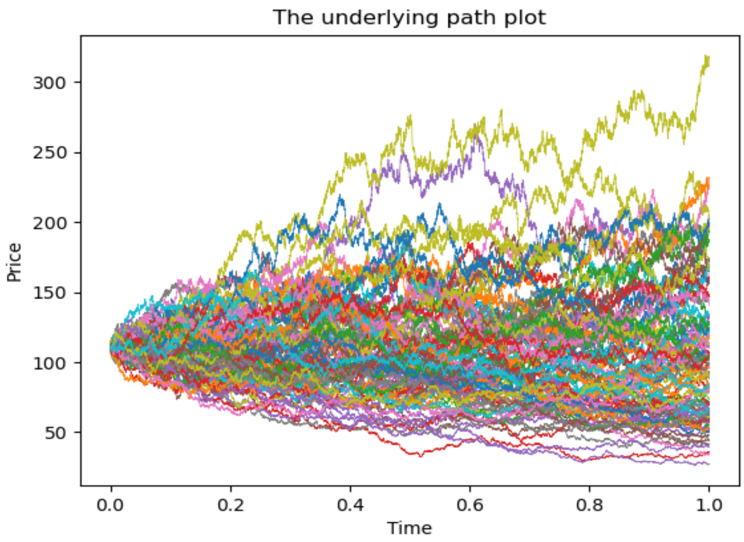

图 2-1 标的资产价格路径

10 次重复实验得到期权价格：

表 2-2 M=100 时 10 次模拟期权价格

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平均值
12.53	9.30	7.24	11.29	10.28	10.39	11.63	8.15	12.26	9.33	10.24

不难发现，每次重复实验的结果差别较大，可以通过调整路径数和节点数加以优化，此处模拟 M=1000 的结果如下：

表 2-3 M=1000 时 10 次模拟期权价格

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平均值
9.96	10.27	10.48	8.94	10.00	10.46	10.75	10.26	9.86	9.72	10.07

计算两者标准差分别为：1.747762 和 0.507517，可以发现，模拟路径数增多时可以有效降低模拟误差，使结果更收敛。

（二）与 B-S formula 对比分析

由于时间离散引起的数值误差，当蒙特卡罗模拟次数趋近无穷时，其拟合就更接近几何布朗运动，也就更接近 B-S 公式所求出的解析解。本项目中，为了将两者结果进行对比，我用分析性欧式看涨期权定价公式生成一定范围行权价的对应期权估值，并将蒙特卡罗模拟结果与其合并，计算百分比差异，可以得到下图的结果：

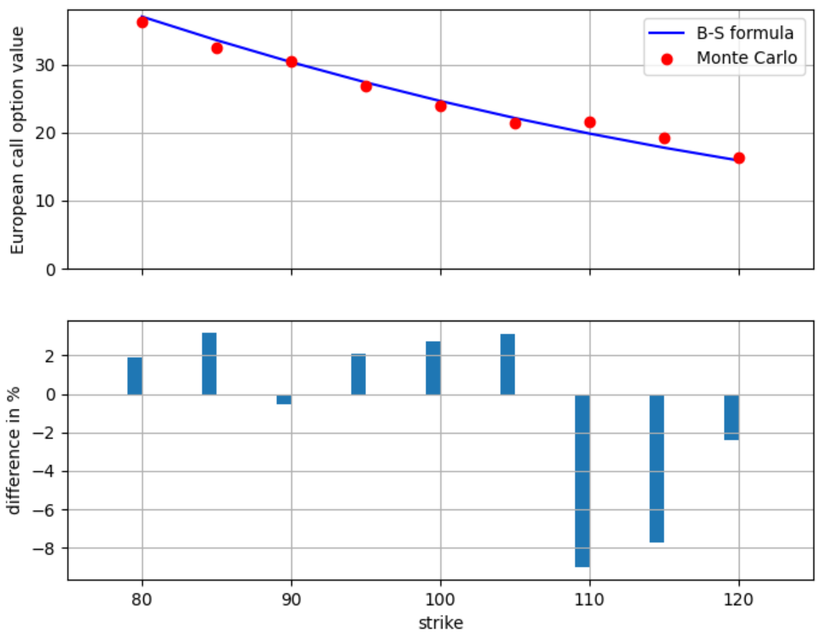

图 2-2 M=1000，N=10000

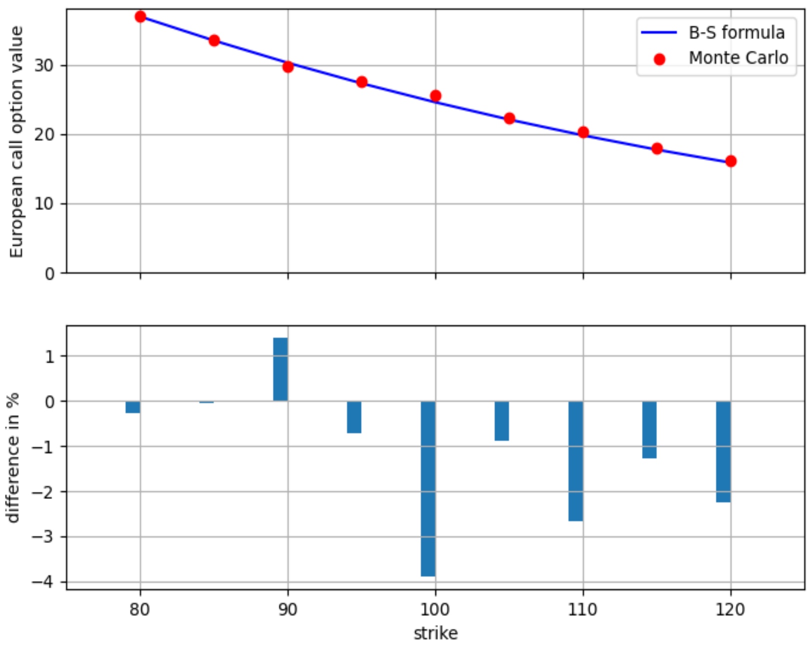

图 2-3 M=10000，N=10000

可以发现，将路径数增多后估值差异明显减小，作为一般原则，蒙特卡罗估算函数的质量可以通过调整使用的路径数和节点数控制。

三、障碍期权

随着经济全球化和金融业管制的放松，投资者规避风险的需求更加细化，金融衍生工具的创新层出不穷，衍生出了奇异期权，其中最常见的就是障碍期权。障碍期权是一种路径依赖期权，其收益不仅依赖于到期日的标的资产价格，而且与整个期权有效期内标的资产价格是否到达某一规定障碍值有关。本项目中，通过蒙特卡罗模拟复现 PPT 中的多条件障碍期权，并考虑连续监测和离散监测两种情况。

（一）连续监测

连续监测即在整个价格路径中任一时刻触碰到障碍条件期权就失效

1. 理论基础与建模思路

我们假设标的资产价格服从几何布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

在风险中性条件下，为了模拟价格变化的路径，我们将时间周期[0, T]划分为长度$\Delta t=T/N$ 的 N 个小区间，并用 Euler 近似对上述 SDE 离散化，得到：

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} Z_t$$

$$Z_t \sim N(0,1)$$

算法思路：

①初始化 S0

②利用上述公式计算$S_{t+\Delta t}$

③为方便绘图，当S_t遇到障碍时将S_t设置为 0 并停止迭代，否则返回期权价格 max{$S_t - K$，0}

④重复上述步骤 M 次，得到 M 条价格路径，计算平均值后贴现。

2. 代码实现

1.1 参数设置

对于该障碍期权，需要设置如下参数：

表 3-1 障碍期权参数表（连续）

符号	解释
S_0	标的资产期初价格
K	执行价格
r	贴现率
σ	波动率
T	时间跨度
M	模拟标的资产路径数
N	模拟次数
U	向上敲出价格边界
L	向下敲出价格边界
U2	敲出区间上界
L2	敲出区间下界

```
S0 = 1.5
K = 1.4
r = 0.03
sigma = 0.12
T = 1.0
M = 10
N = 1200
U = 1.71
L = 1.29
U2 = 1.8
L2 = 1.3
```

1.2 运行结果

通过编写代码，绘制出 10 条价格路径，其中包含各类障碍条件下失效的例子，如图所示：

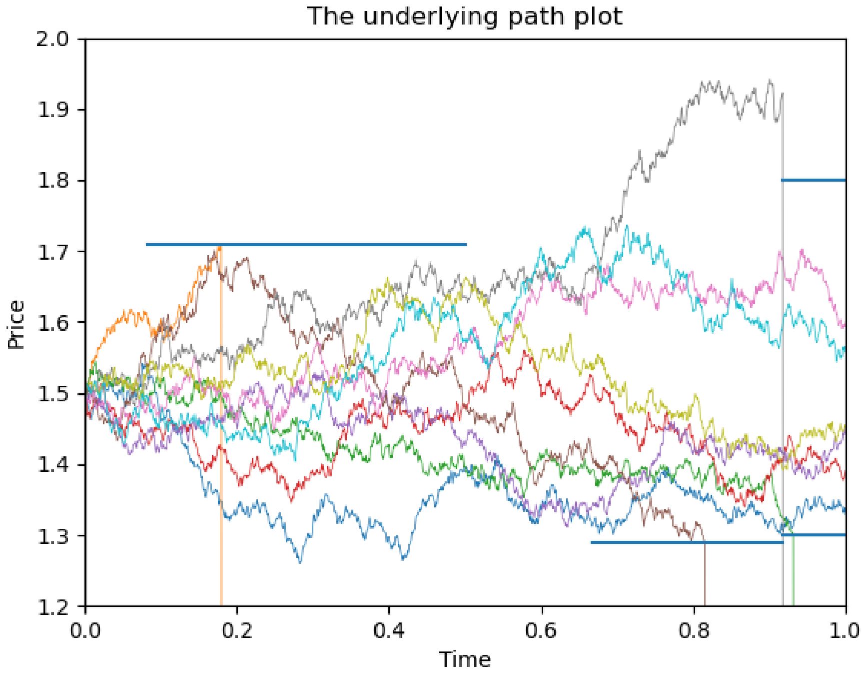

图 3-2 障碍期权价格路径

为了更准确地模拟出期权价格，接下来令 N=1200，M=10000，并且进行 10 次重复实验，运行结果如下表所示：

表 3-2 N=1200，M=1000 时 10 次模拟期权价格

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.09052	0.08823	0.08799	0.08270	0.08180	0.08524	0.09179	0.08539	0.08460	0.09056

对以上数据求平均值，可以得到期权价格为：0.08688

（二）离散监测

离散监测即在整个价格路径中特定几个时间节点触碰到障碍条件期权才会失效，本项目中分别设定为每月初监测和每个交易日监测，进而比较监测频率对期权价格的影响。

1. 建模思路

大体与连续监测类似，只需将判断条件加以修改即可，即先判断该节点是否为月初或日初，再判断是否敲出。

2. 代码实现

2.1 参数设置

为了便于判断是否为监测时间点，N 取 12 和 250 的公倍数，设为 3000。

表 3-3 障碍期权参数表（离散）

符号	解释
S_0	标的资产期初价格
K	执行价格
r	贴现率
σ	波动率
T	时间跨度
M	模拟标的资产路径数
N	模拟次数
U	向上敲出价格边界
L	向下敲出价格边界
U2	敲出区间上界
L2	敲出区间下界

```
S0 = 1.5
K = 1.4
r = 0.03
sigma = 0.12
T = 1.0
M = 10
N = 3000
U = 1.71
L = 1.29
U2 = 1.8
L2 = 1.3
```

2.2 运行结果

通过修改判断条件，绘制出如下两幅监测频率不同的价格路径：

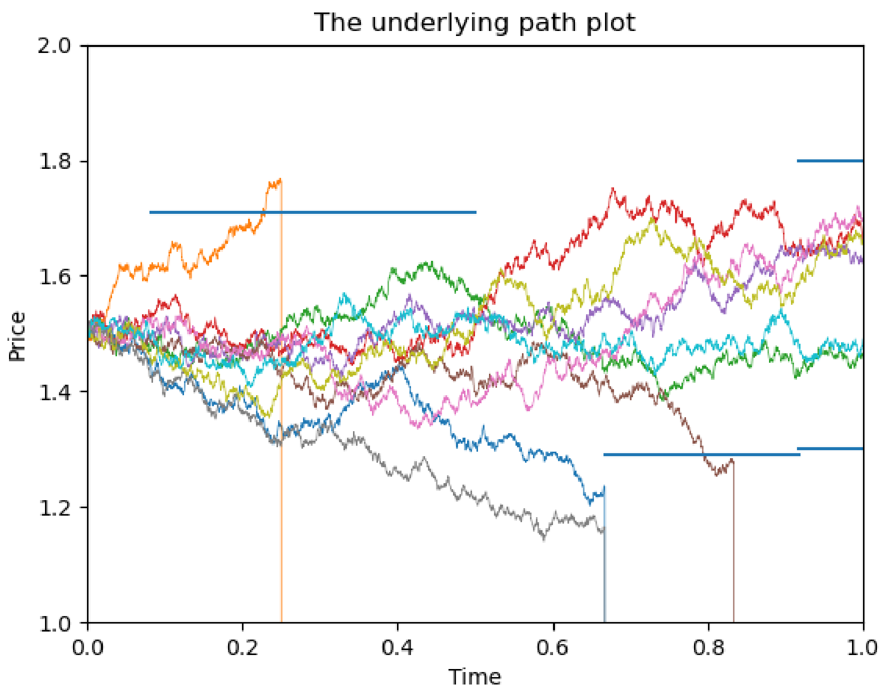

图 3-3 每月监测一次

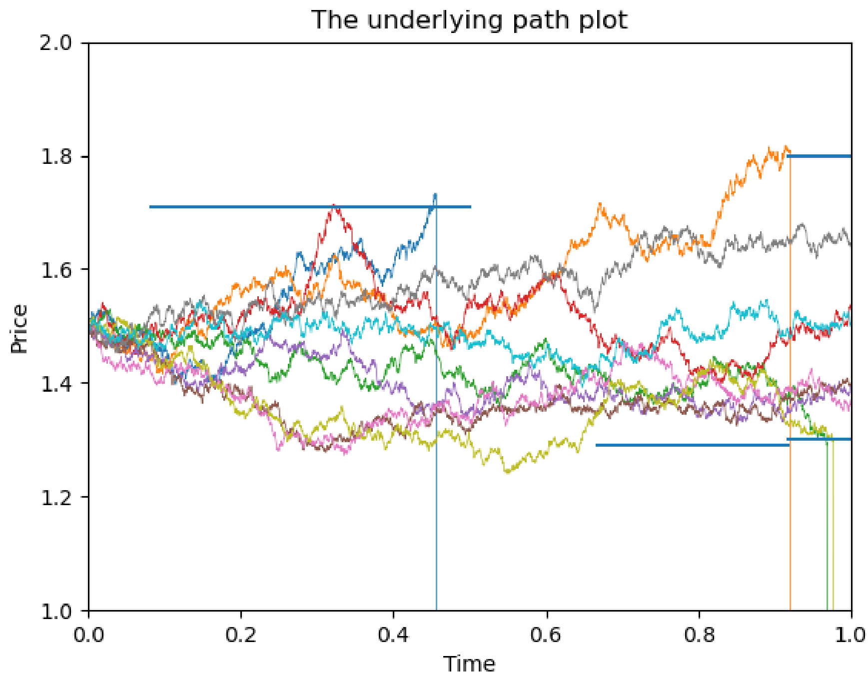

图 3-4 每个交易日监测一次

同样，为了更准确地模拟出期权价格，接下来令 M=10000，并且进行 10 次重复实验，运行结果如下表所示：

表 3-4 M=1000，N=3000 时三种监测条件下 10 次模拟期权价格

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平均值
月监测	0.11043	0.11121	0.10946	0.11365	0.10972	0.11282	0.11062	0.11128	0.11074	0.10979	0.11097
日监测	0.08960	0.09034	0.08960	0.08996	0.08903	0.09008	0.09163	0.08680	0.09096	0.09052	0.08985
连续	0.08873	0.08565	0.08338	0.08844	0.08582	0.08929	0.08342	0.08433	0.08517	0.08691	0.08612

可以看出，随着监测频率提高，期权价格也随之降低，这是因为监测次数越多，价格触碰障碍的概率也就越高，即期权失效的概率增大，价格自然应该降低。

四、随机波动率下的期权定价

在 Black-Scholes 模型中，最重要的简化假设之一便是波动率恒定不变。而在市场中，波动率不是恒定不变的，而是随着时间的变化而变化，是具有随机性的。因此随机波动率过程的提出对之前的几何布朗运动进行了改进。本项目中利用 Heston 模型来模拟波动率，进而对欧式看涨期权和障碍期权定价。

（一）理论基础

我们假设标的资产价格服从布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v(t)} S_t dW_t^{\,1}$$

且波动率服从 Ornstein-Uhlenbeck 过程：

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)}dt + \delta dW_t^2$$

经系列数学推导，得到如下递推式：

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \mu S_t\Delta t + \sqrt{v(t)}S_t\sqrt{\Delta t}Z_t + \frac{1}{2}v(t)S_t\Delta t(Z_t^2 - 1)$$

$$\sqrt{v(t+\Delta t)} = \sqrt{v(t)} - \beta\sqrt{v(t)}\Delta t + \delta\sqrt{\Delta t}dZ_t'$$

其中Z_t与Z_t'的相关系数为ρ，在编程过程中采用 cholesky 分解后的相关性矩阵来构造联系。

（二）代码实现

对于相关性矩阵，代码处理如下：

```
cor = np.zeros((2,2))
cor[0,0], cor[1,1] = 1,1
cor[0,1], cor[1,0] = rho, rho
u = np.linalg.cholesky(cor) #奇异值分解
```

```
z = random.randn(2,1)
z1 = np.zeros((2,1))
z1[0,0] = z[0,0] * u[0,0] + z[1,0] * u[0,1]
z1[1,0] = z[0,0] * u[1,0] + z[1,0] * u[1,1]
```

1. 欧式看涨期权

参数设置与前文相同，绘制 10 条价格路径与波动率路径如下图所示：

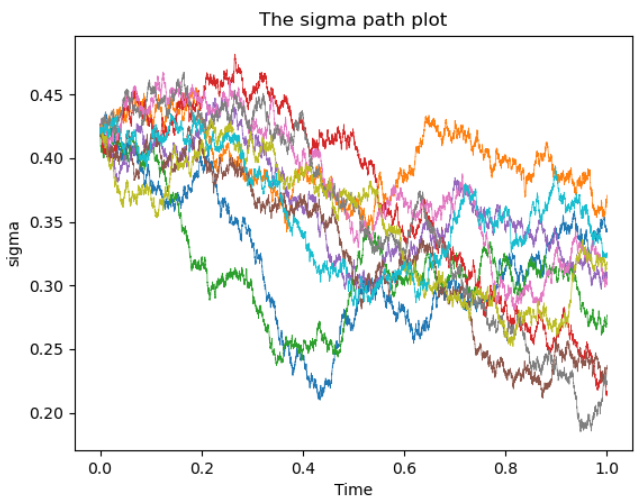

图 4-1 随机波动率路径

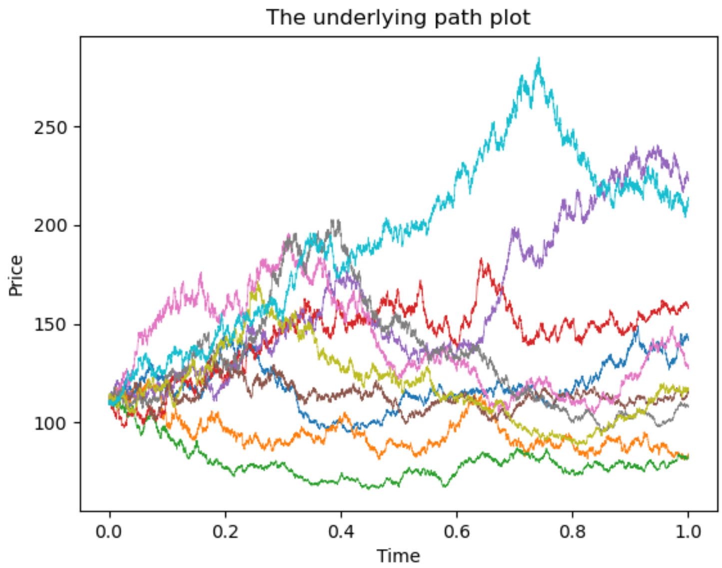

图 4-2 标的资产价格路径

令 M=1000 后计算期权价格为：`5.847045747495669`

2. 障碍期权（连续监测）

参数设置与前文相同，绘制 10 条价格路径与波动率路径如下图所示（包含触碰障碍和未触碰障碍的路径）：

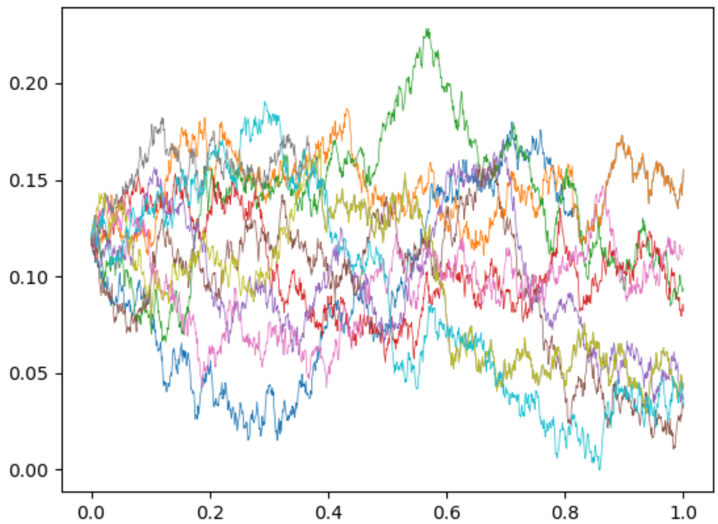

图 4-3 波动率路径

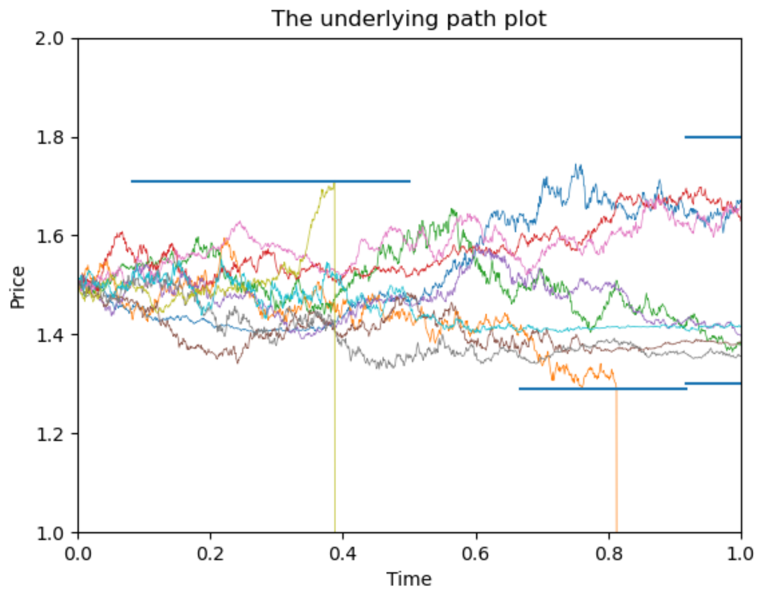

图 4-4 标的资产价格路径

令 M=1000 后计算期权价格为：0.08214890862263025

五、雪球期权——以茅台为标的资产

（一）雪球期权简介

雪球期权作为奇异期权的一种，是一种多条件的障碍期权。雪球产品是一类典型的自动赎回结构化产品，当标的资产的价格在特定日期超过某约定的水平时，产品触发自动赎回，因为雪球产品通常能提供较高的票息，所以近年来得到了广大投资者的青睐，市场规模不断扩张。我们首先对雪球结构化产品进行简单的介绍，雪球结构属于路径依赖的产品，每一个产品都有挂钩的标的资产（可以是个股、股票指数或者指定的一篮子股票)且每个产品都有一定的观察期限，标的资产的价格变化路径以及最终表现决定了投资者的收益。

（二）收益结构

首先，仅在观察日会触发敲出，敲入则每天监测，可视为连续的。一般存在以下几种收益情况：

①敲出，未敲入：返还敲出时的票息收益

②敲出，曾敲入：返还敲出时的票息收益

③未敲出，未敲入：返还所有票息收益

④敲入，未敲出，标的物期末价格高于期初价格：返还本金

⑤敲入，未敲出，标的物期末价格低于期初价格：承担标的物价格下降的亏损

（三）实例分析：以茅台股票为标的资产

1. 产品简介

表 5-1 产品简介表

产品要素	要素性质
标的资产	茅台（600519.SH）
观察期限	2021.6.1-2022.6.1，每月 15 号观察敲出+每日观察敲入
期权结构	自动敲入敲出结构
敲出水平	期初价格*103%
敲入水平	期初价格*80%
敲出票息	20%
敲出事件（每月观察）	在敲出观察日，标的资产收盘价大于等于敲出水平
敲入事件（每日观察）	在敲入观察日，标的资产收盘价小于敲入水平
收益计算（除去本金）	敲出：20%*名义本金*计息天数/365
	未敲入未敲出：20%*名义本金
	敲入且未敲出（期末价格小于期初价格）：（期末价格/期初价格-1）*名义本金
	敲入且未敲出（期末价格大于期初价格）：0

2. 数据来源

本例中以茅台股票作为标的资产，为保证数据真实性，波动率和期望收益率均取自历史回测数据，数据来源于 Tushare 大数据社区，在 Python 中通过调用 tushare 库中的 ts.set_token（token）函数创建接口，调取茅台（600519.SH）从 2021 年 6 月 1 日到 2022 年 6 月 1 日中所有交易日的日线行情数据，存入本地 CSV 文件，数据实例如下：

表 5-2 茅台股票数据（部分）

	ts_code	trade_date	open	high	low	close	pre_close	change	pct_chg	vol
0	600519.SH	20220601	1802	1814.78	1779	1788.25	1804.03	-15.78	-0.875	21760.01
1	600519.SH	20220531	1774.77	1814.9	1766.98	1804.03	1778.41	25.62	1.4406	40750.82
2	600519.SH	20220530	1766	1790.55	1766	1778.41	1755.16	23.25	1.3247	34465.69
3	600519.SH	20220527	1759.99	1780	1753.01	1755.16	1742.8	12.36	0.7092	25119.58
4	600519.SH	20220526	1761	1761	1730	1742.8	1755.51	-12.71	-0.724	28053.44
5	600519.SH	20220525	1765.27	1772	1747	1755.51	1760	-4.49	-0.255	22388.69
6	600519.SH	20220524	1786	1787	1755.5	1760	1781	-21	-1.179	27342.22
7	600519.SH	20220523	1800	1803.89	1772	1781	1800.01	-19.01	-1.056	22157.13
8	600519.SH	20220520	1759.99	1801.15	1752	1800.01	1756	44.01	2.5063	41949.6
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

3. 代码实现

建模思路为：首先读取数据，检验股票数据的正态性，然后根据历史数据计算波动率，接着用蒙特卡罗模拟出价格路径，在每月 15 号判断敲出，每天判断敲入，按照收益结构计算收益率，按欧式看跌期权计算产品价格。

参数设置如下：

```
times = 10000  # 蒙特卡洛模拟次数
getin_rate = 0.8  # 敲入
getout_rate = 1.03  # 敲出
ann_rate = 0.2  # 年化收益率
r = 0.038  # 无风险利率
T = 1  # 行权时间 1年
```

运行结果如下：

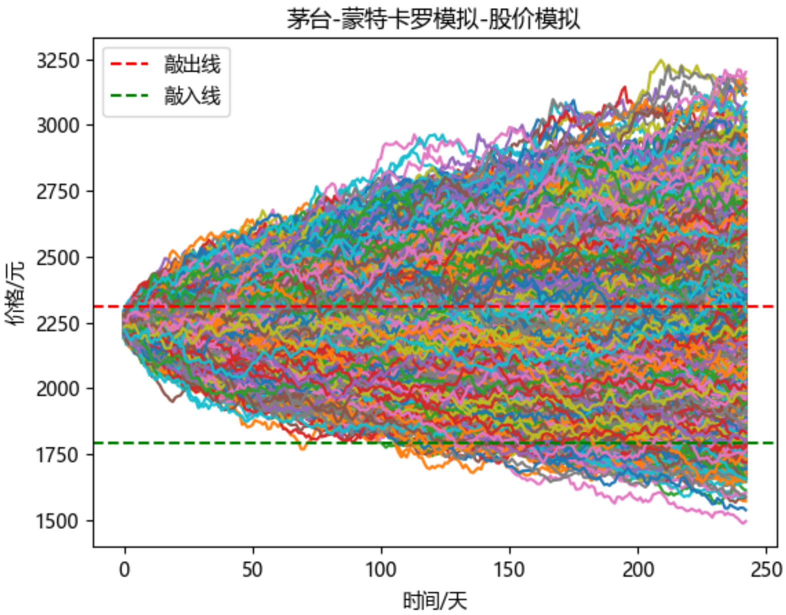

图 4-5 茅台股价模拟路径

```
雪球产品初始参数设置:
蒙特卡洛模拟次数: 10000
敲入: 0.80
敲出: 1.03
年化收益率: 0.20
行权时间: 1
敲出观察日: 每月15号
进行股票数据正态分布检验:
标准试验p值为0.000，表示不为正态分布是显著的，就是在误差允许范围内可以认为该收益率数据服从正态分布
股票历史回测波动率为 2.16%
蒙特卡洛模拟结果如下：
按欧式看跌期权计算的期权价格为 13.71
雪球产品的预期收益率是11.79%
```

六、总结

通过该项目，我有以下几点收获和反思：

收获：

①Python 从 0 到 1，学习了很多相关代码，并且学会如何从 Tushare 大数据社区获取金融数据，为以后相关课程学习奠定基础。

②巩固了课堂所学的期权知识，并且自行查阅文献和视频，学习了 Heston 模型和雪球期权定价，同时在学习的过程中还发现了其他的期权定价方法和各种各样的奇异期权。

③得以将所学实践，当绘制出好看的图时有满满的成就感。

反思：

①虽然学习了很多代码，但是自己动手时还是会卡壳，往往需要 CSDN 和 Github 的帮助，理解后写出的代码还是存在时间复杂度过高的情况，跑起来相对较慢，由此导致在尝试绘制障碍期权价格随路径数和节点数的变化图像时电脑几次卡死，不得不放弃，希望之后可以优化代码，尝试学习业界的代码策略。

②随机波动率和雪球期权相关的文献和视频良莠不齐，缺乏甄别能力，导致对于模拟结果并不自信是对的，希望能够通过更专业的学习深入了解。

③雪球期权定价时尝试将所有情况所占百分比计算出来未果，以及在前面几个期权定价时的很多想法难以通过代码实现，因此还是要加强代码学习。