Tarea 2

Entrega viernes 8 de octubre a las 00:00 por U-Campus.

Indicaciones: Junto a sus respuestas y figuras, adjunte los códigos que utilizó para resolver los problemas.

P1. Modelo de Lotka-Volterra

El modelo

$$\dot{C} = aC - bCZ,$$
$$\dot{Z} = -cZ + dCZ$$

es el *Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra*. Aquí $C(t)$ es el número de conejos, $Z(t)$ es el número de zorros y a, b, c, $d \geq 0$ son parámetros.

a) Analice el significado biológico de cada uno de los términos del modelo. Comente sobre las suposiciones que puedan ser poco realistas.
b) Encuentre los puntos de equilibrio y dibuje el diagrama de fases del sistema si $a = 0.5$, $b = 0.012$, $c = 1.0$ y $d = 0.033$. Describa sus principales características.
c) Usando estos mismos parámetros, muestre el comportamiento de $Z(t)$ y $C(t)$ para distintas condiciones iniciales que considere interesantes. Comente.
d) Debido a que los depredadores comen presas, uno podría esperar que la existencia de una gran cantidad de depredadores condujera a la caza de una gran cantidad de presas. Explique por qué los máximos en la población de depredadores y los mínimos en la población de presas no ocurren al mismo tiempo.
e) Muestre que el modelo predice ciclos en las poblaciones de ambas especies, para casi todas las condiciones iniciales.

Este modelo si bien es muy popular en la comunidad científica, los biólogos-matemáticos descartan el modelo Lotka-Volterra porque no es estructuralmente estable y porque los ciclos reales depredador-presa suelen tener una amplitud característica. En otras palabras, los modelos realistas deberían predecir una sola órbita cerrada, o quizás un número finito, pero no una familia continua de ciclos neutrales estables.

P2. Atractor de Lorenz. Considere el sistema de Lorenz descrito por:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

a) Para cada uno de los valores de r dados a continuación, explore la dinámica del sistema de Lorenz, asumiendo $\sigma = 10$ y $b = 8/3$ como de costumbre. En cada caso, grafique $x(t)$, $y(t)$ y x versus z. Debe investigar las consecuencias de elegir diferentes condiciones iniciales y longitudes de integración. Además, en algunos casos, es posible que desee ignorar el comportamiento transiente (tiempos cortos) y graficar solo el comportamiento sostenido a largo plazo. Qué ocurre al ir variando r? Comente lo que crea pertinente de explorar el sistema.

   i) $r = 10$ ii) $r = 22$ iii) $r = 24.5$ iv) $r = 100$ v) $r = 126.52$ vi) $r = 400$

b) Considere las ecuaciones de Lorenz con $\sigma = 10$ y $b = 8/3$. Suponga que lentamente "giramos la perilla de r" hacia arriba y hacia abajo. Específicamente, sea $r = 24.4 + \sin \omega t$, donde ω es pequeño en comparación con las frecuencias orbitales típicas del atractor. Integre numéricamente las ecuaciones y grafique las soluciones de la manera que parezca más reveladora. Debería ver un efecto de histéresis sorprendente entre un estado de equilibrio y un estado caótico.