Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра математической теории интеллектуальных систем

Отчет по практикуму на ЭВМ

Задача 1 вариант 4

Выполнил студент 411 группы
Орлов Г.В.

Москва 2022

1 Постановка задачи

Необходимо построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации и найти ее решение при разных значениях h:

$$u''' + cosx \cdot u' + u = e^{x^2}$$

$$u(0) = u'(0) = 0,\ u(1) = a;\ a = 1, 10$$

2 Метод решения

Разбиваем отрезок [0, 1] на N равных частей, тогда $h = \frac{1}{N}$. Далее строим аппроксимацию u''' и u' второго порядка с помощью метода неопределенных коэффициентов. Получаем:

$$u' = \frac{3u_{i+1} - 4u_i + u_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$u''' = \frac{u_{i+1} - 3u_i + 3u_{i-1} - u_{i-2}}{h^3} + O(h^2)$$

Далее, задаем значения на границах:

$$u_0 = 0,\ 3u_0 - 4u_1 + u_2 = 0,\ u_N = a$$

После подстановки приближенных значений производных в уравнение получаем следующую систему:

$$\begin{cases} u_{i+1} \cdot (1 + 3\frac{h^2}{2}cosx_i) + u_i \cdot (h^3 - 3 - 2h^2 cosx_i) + u_{i-1} \cdot (3 + \frac{h^2}{2}cosx_i) - u_{i-2} = h^3 e^{x_i^2} \\ u_0 = 0,\ 3u_0 - 4u_1 + u_2 = 0,\ u_N = a \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$q_i = 1 + 3\frac{h^2}{2}cosx_i$$

$$p_i = h^3 - 3 - 2h^2 cosx_i$$

$$r_i = 3 + \frac{h^2}{2}cosx_i$$

$$l_i = -1$$

$$d_i = h^3 e^{x_i^2}$$

Теперь напишем матричное уравнение, которое рашает нашу задачу:

$$AX = D$$

где

$$A_{N+1,N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & r_2 & p_2 & q_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} & q_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{X} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} \text{ - матрица для ответа, } \text{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ a \end{pmatrix}$$

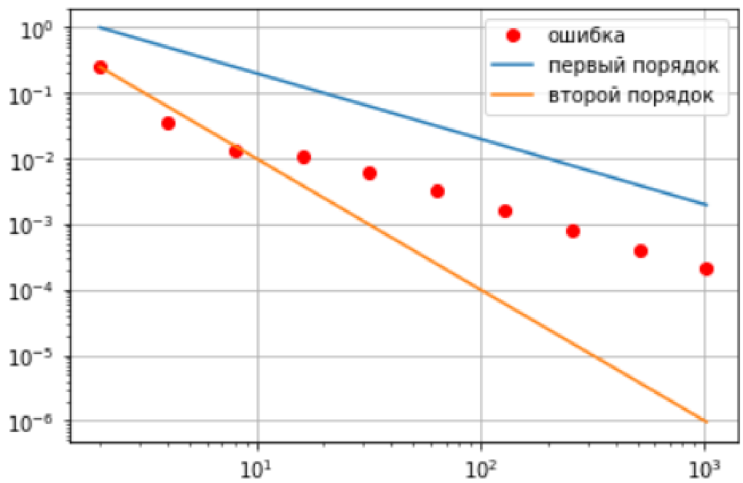
Решение этой системы будет решением нашей разностной схемы.

3 Аппроксимация, устойчивость и сходимость

Так как в данном нам уравнении не удается найти точное решение, то для проверки сходимости подберем функцию, которая удовлетворяет краевым условиям. В качестве такой функции можно взять, например, $asin^2(\frac{\pi x}{2})$. Получаем, что правая часть будет равна

$$\frac{1}{2}asin^2(\frac{\pi x}{2}) + \frac{1}{2}\pi asin(\pi x) \cdot cos(x) - \frac{1}{2}\pi^3 asin(\pi x)$$

Уравнение с такой правой частью решим численно и будем смотреть как меняется ошибка в зависимости от шага разбиения отрезка [0, 1]. Ниже приведена зависимость ошибки от числа точек разбиения.



4 Результаты

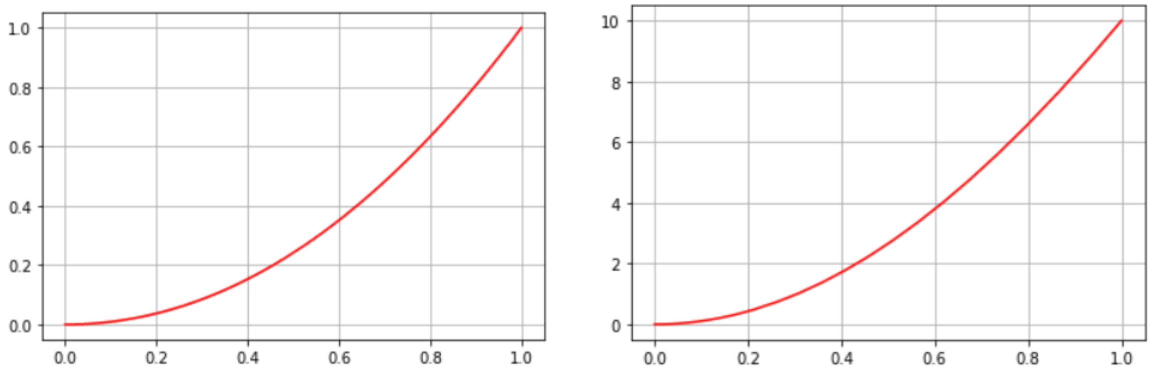


Рис.1: Графики решения исходной задачи при N=1000 и a=1,10 .

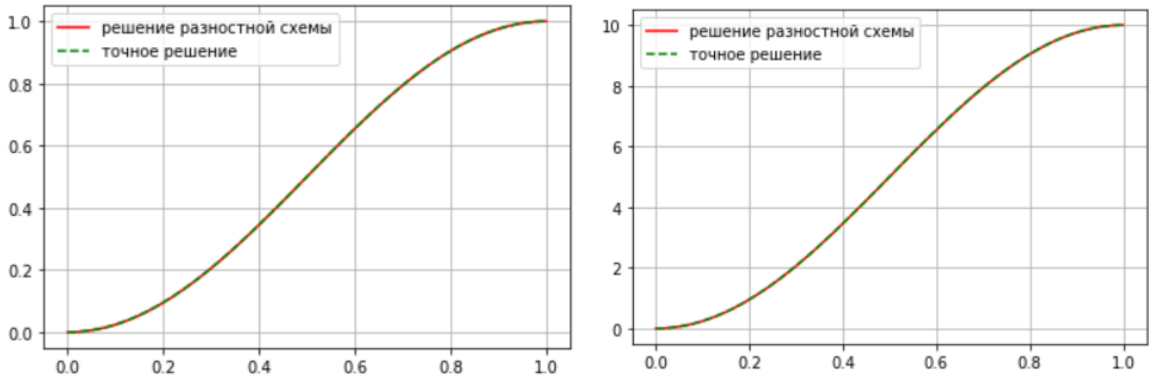


Рис.2: Сравнение точного решения и численного метода при N=1000 и a=1,10 .