Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра математической теории интеллектуальных систем

Отчет по практикуму на ЭВМ

Задача 2 вариант 6

Выполнил студент 411 группы
Орлов Г.В.

Москва 2022

1 Постановка задачи

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to inf, \quad \ddot{x} + xe^{-\alpha t} = u,$$

$$x(\frac{\pi}{2}) = \dot{x}(0) = 0, \ \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\alpha = \{0.0; \ 0.1; \ 1.5; \ 10\}.$$

1.1 Формализация задачи

Введём обозначения: $x_1 := x, \ x_2 := \dot{x}$, тогда рассматриваемая задача представляется в виде:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to inf,$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = u - x_1 e^{-\alpha t}, \end{cases}$$

$$x_1(\frac{\pi}{2}) = 0, \ x_2(0) = 0, \ x_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\alpha = \{0.0; \ 0.1; \ 1.5; \ 10\}.$$

2 Необходимые условия принципа максимума

$$\mathcal{L} := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} L dt + l,$$

$$L := \lambda_0 u^2 + p_1(\dot{x_1} - x_2) + p_2(\dot{x_2} - u + x_1 e^{-\alpha t}),$$

$$l := \lambda_1 x_1(\frac{\pi}{2}) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_2(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}).$$

Необходимые уловия оптимальности:

1. Уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} -\dot{p}_1 + p_2 e^{-\alpha t} = 0 \\ \dot{p}_2 + p_1 = 0 \end{cases}$$

2. Условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \underset{u \in \mathrm{R}}{argmin}(\lambda_0 u^2 - p_2 u),$$

Отсюда получаем, что

$$\hat{u} = \frac{p_2}{2\lambda_0}$$

3. Условия трансвенсальности:

$$\begin{cases} p_1(0) = 0, \\ p_1(\frac{\pi}{2}) = -\lambda_1, \\ p_2(0) = \lambda_2, \\ p_2(\frac{\pi}{2}) = -\lambda_3. \end{cases}$$

4. Условия неотрицательности:

$$\lambda_0 \geqslant 0.$$

3 Сведение задачи оптимального управления к краевой

Если $\lambda_0 = 0$, то $p_i(t) \equiv 0$ и $\lambda_i = 0$. Значит, случай $\lambda_0 = 0$ невозможен. Тогда пусть $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.

Таким образом, на основе принципа максимума решение задачи Лагранжа сводится к решению краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x_2} + x_1 e^{-\alpha t} = p_2, \\ \dot{p}_2 + p_1 = 0, \\ -\dot{p}_1 + p_2 e^{-\alpha t} = 0, \\ x_1(\frac{\pi}{2}) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2},\ p_1(0) = 0. \end{cases}$$

4 Решение краевой задачи

Для начала найдем решение при $\alpha = 0$. Тогда из системы

$$\begin{cases} -\dot{p}_1 + p_2 = 0, \\ \dot{p}_2 + p_1 = 0. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} p_1(t) = c_1 cost + c_2 sint, \\ p_2(t) = -c_1 sint + c_2 cost. \end{cases}$$

Зная, что $p_1(0) = 0$, получаем $c_1 = 0$, а значит

$$\begin{cases} p_1(t) = csint, \\ p_2(t) = ccost. \end{cases}$$

Теперь из уравнения $\ddot{x} + x = \dot{x}_2 + x_1 e^{-\alpha t} = p_2 = ccost$ находим x:

$$x = x_1 = \frac{1}{2} ctsint + c_1 sint + c_2 cost$$

Подставляя граничные условия, находим все три константы: $c = c_1 = 0,\ c_2 = \frac{\pi}{2}$. Итак:

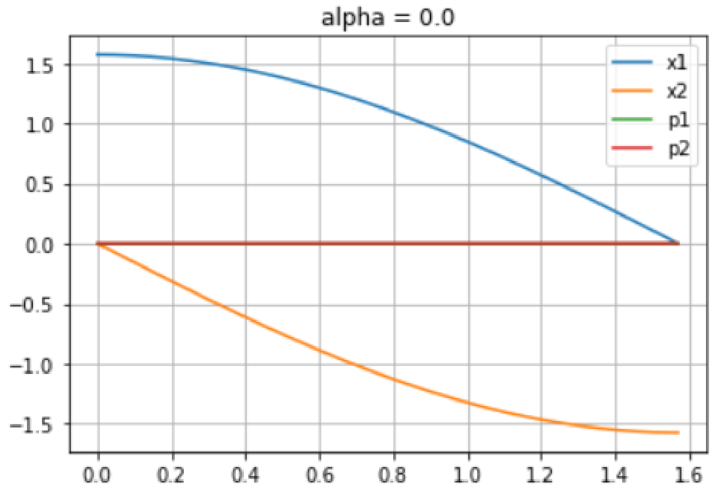
$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{\pi}{2} cost, \\ x_2(t) = -\frac{\pi}{2} sint, \\ p_1(t) = p_2(t) = 0 \end{cases}$$

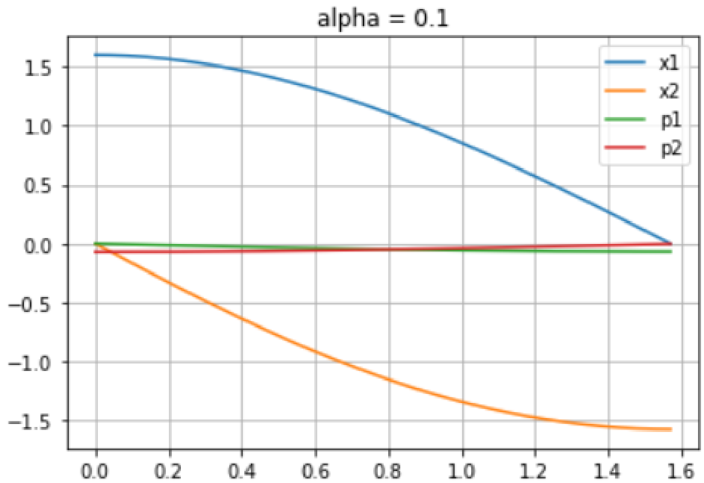
Итак, остается численно решить задачу для остальных α. Будем решать методом Рунге-Кутта, используя данные при $\alpha = 0$ как начальные. Начальные условия, которые могут меняться - $x_1(0)$ и $p_2(0)$. При $\alpha = 0 : x_1(0) = \frac{\pi}{2}$, $p_2(0) = 0$.

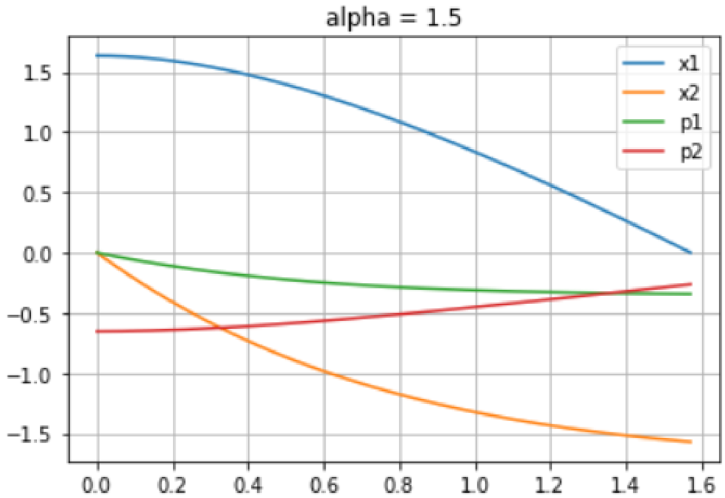
5 Результаты

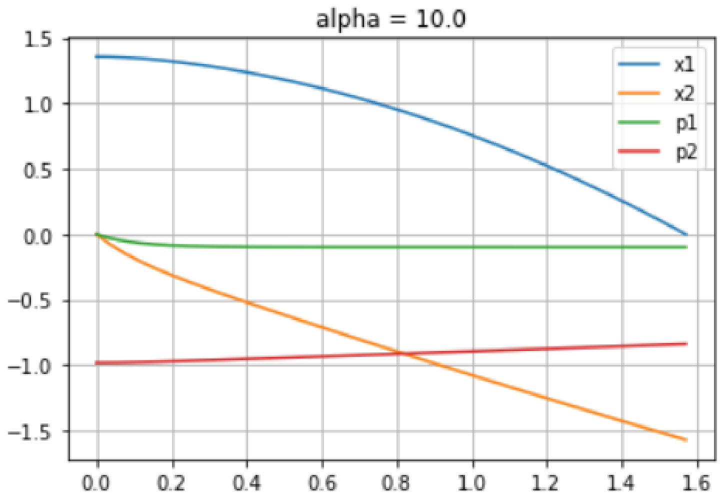
α	$x_1(0)$	$p_2(0)$	error	value
0	$\frac{\pi}{2}$	0	6.156760148118029e-14	0
0.1	1.593396612	-0.070951229	4.16392958717653e-11	0.000913734
1.5	1.63484959	-0.654098303	1.534598406500603e-10	0.027808055
10	1.356765756	-0.982358444	5.249881640098711e-10	0.003396431

Таблица зависимости переменных от α.






alpha = 1.5
x1
x2
p1
p2
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6


alpha = 10.0
x1
x2
p1
p2
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6