Generatory liczb pseudolosowych - rozkłady skorelowane w 2D - sprawozdanie

Wojciech Orłowski

11 marca 2024

1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studenta z generowaniem liczb pseudolosowych o danym rozkładzie dwuwymiarowym. Rozkłady te będą skorelowane (rozkłady po transformacji) i nieskorelowane (rozkład normalny).

Rozkład normalny zostanie wygenerowany za pomocą metody Boxa-Mullera. Metoda ta polega na zamianie zmiennych z układu kartezjańskiego na zmienne biegunowe. Następnie w tym układzie jesteśmy w stanie obliczyć dystrybuantę i skorzystać z metody odwracania dystrybuanty. Ostateczny wzór na parę zmiennych o rozkładzie normalnym w 2D ma postać

$$X = \sqrt{-2\ln(1-U_1)}\cos(2\pi U_2),$$

$$Y = \sqrt{-2\ln(1-U_1)}\sin(2\pi U_2),$$

gdzie U_1, U_2 oznaczają zmienne wylosowane o rozkładzie normalnym.

Następnie zmienne wylosowane w ten sposób są normalizowane. Ich odległość od układu współłrzędnych ma wynosić 1. Zostało to wykonane w celu uzyskania rozkładu jednorodnego na okręgu

$$X' = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

$$Y' = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Za pomocą pary zmiennych X', Y' tworzymy rozkład jednorodny w kole, odpowiednio je skalując. W tym celu skorzystamy z kolejnej zmiennej losowej, będącej pierwiastkiem z liczby o rozkładzie jednorodnym $U(0,1)$.

$$R = \sqrt{U}$$

$$X'' = RX'$$

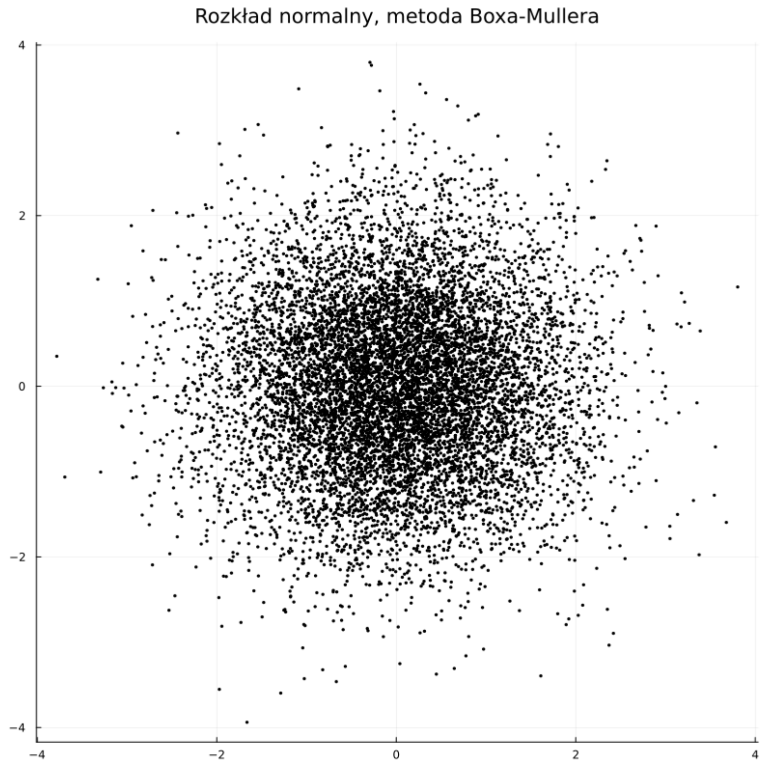
$$Y'' = RY'$$

W kolejnym etapie zajęć została wykonana transformacja algebraiczna, zamieniająca rozkłady kuliste na rozkłady elipsoidalne. W transformacji tej korzystamy z macierzy obrotu oraz odpowiedniego skalowania.

2 Wyniki

Rozkład normalny

Wygenerowany za pomocą metody Boxa-Müllera zestaw liczb $\{X_i, Y_i\}$ można nanieść na wykres (wykres 1).

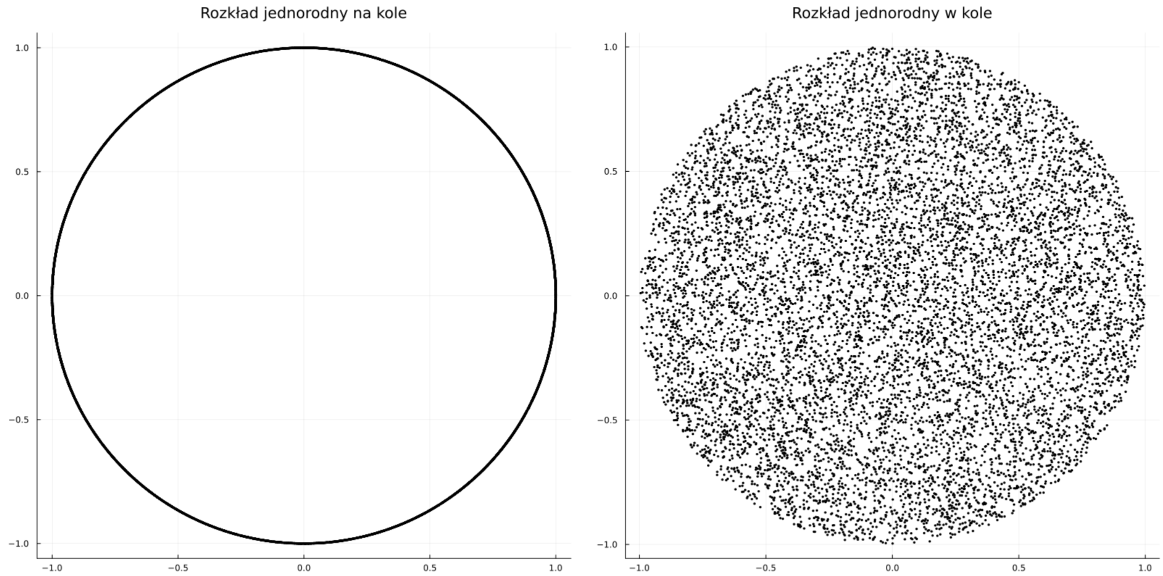


Rysunek 1: Pary liczb $\{X_i, Y_i\}$ wygenerowane metodą Boxa-Müllera, $N = 1\text{e}4$ wygenerowanych liczb.

Punkty przedstawione na rys. 1 przypominają rozkład normalny dwuwymiarowy. Bez wykonania jednak testów statystycznych ciężko sprawdzić dokładnośc wygenerowanych liczb. Warto też dodać, że wygenerowany zestaw liczb reprezentuje rozkład $N(0, 1)$, czyli mający wartość oczekiwaną w (0,0), a odchylenie standardowe równe jest 1.

Rozkład jednorodny w kole

Dokonując operacji przedstawionych w wstępie normalizujemy odległość punktów od środka układu współrzędnych. W kolejnym etapie losowo skalujemy punkty, tak że uzyskujemy rozkład jednorodny w środku koła jednostkowego.



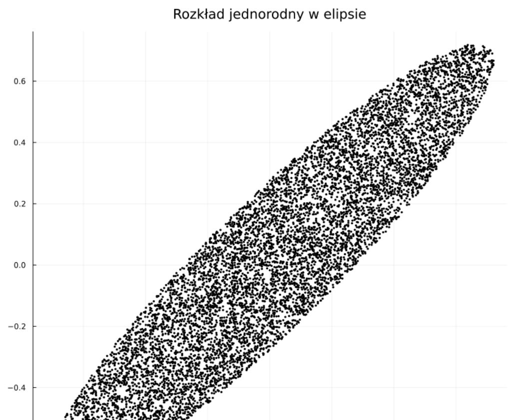
(a) (b)

Rysunek 2: Wygenerowane pary liczb $\{X_i, Y_i\}$ o rozkładzie jednorodnym (a) na kole, (b) w kole.

Ponownie dokonując analizy jakościowej (rys. 2) można stwierdzić, że udało się wygenerować liczby w kole o rozkładzie jednorodnym. Jednak generowanie w ten sposób liczb o rozkładzie jednorodnym na kole może się wydawać nieefektowne. Wystarczyłoby wylosować liczbę o rozkładzie jednorodnym z przedziału kątowego (od 0 do 2π). Ta liczba i tak jest losowana w sposób jednorodny podczas losowania kąta w metodzie Boxa-Müllera.

Rozkład jednorodny w elipsie

Dokonując transformacji punktów wylosowanych wcześniej (rys. 2 (b)) przekształcany jest rozkład jednorodny w kole na rozkład jednorodny w elipsie (rys. 3).

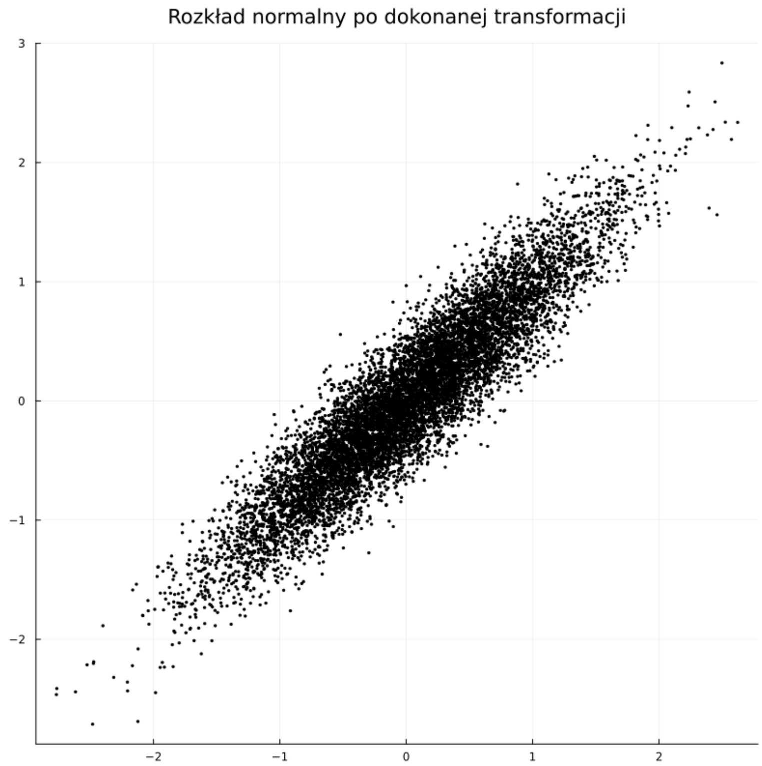


Rysunek 3: Pary liczb $\{X_i, Y_i\}$ uzyskane poprzez obrót i skalowanie liczb wylosowanych w kole.

Elipsa przedstawiona na rys. 3 została wykonana poprzez obrócenie punktów wygenerowanych na kole o kąt $\pi/4$, które wcześniej zostały odpowiednio przeskalowane. Można już zauważyć, że występuję pewna korelacja między punktami. Jeżeli X jest duże, to Y też jest raczej duże, natomiast gdy X jest małe Y też jest małe. Taką zależność można zmierzyć współczynnikiem korelacji, który w tym przypadku wynosi 0.9214.

Transformacja rozkładu normalnego

Podobnej transformacji możemy wykonać na zestawie danych o rozkładzie normalnym przedstawionym na rys. 1.



Rysunek 4: Pary liczb $\{X_i, Y_i\}$ uzyskane poprzez transformacje par o rozkładzie normalnym.

Tym razem można znaleźć punkt, który jest dalej od centrum elipsy, jednak jednocześnie w jej centrum jest dużo większe zagęszczenie. Ponownie można zauważyć wysoką korelacje między zmiennymi X_i i Y_i. Tym razem możemy porównać także analityczne rozważania dotyczące korelacji tych zmiennych. Według rozważań analitycznych, macierz kowariancji dla rozkładu normalnego po transformacji daje się zapisać jako

$$\Sigma = AA^T,$$

gdzie A to macierz transformacji. Za pomocą tej macierzy jesteśmy w stanie obliczyć współczynnik korelacji, który wyniósł 0.9231. Natomiast licząc ten sam współczynnik z estymatorów dla wylosowanej próbki otrzymano 0.9235. Te dwie wartości są sobie bardzo bliskie. Może to być sposobem walidacji metody generowania liczb pseudolosowych.

3 Podsumowanie

Podczas ćwiczenia udało się wygenerować liczby o zadanym rozkładzie w dwóch wymiarach. Sprawdzono także korelacje między wygenerowanymi zestawami. Już dla niskiej ilości wylosowanych liczb wartości korelacji są bliskie do teoretycznych.