

MONTE CARLO: PROSTE CAŁKOWANIE Z SZACOWANIEM WARIANCJI - sprawozdanie

Wojciech Orłowski

24 marca 2024

1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest oszacowanie metodą Monte Carlo pola wspólnego dwóch przekrywających się pól. Problem ten może być trudny do rozwiązania, a rozważania Monte Carlo pozwolą w łatwy sposób uzyskać podobne wyniki dla większej ilości wymiarów, gdzie rozważania geometryczne stają się jeszcze cięższe. W celu rozwiązania tego problemu metodą Monte Carlo należy generować jednorodnie punkty w kole. Taki generator został napisany na poprzednich zajęciach, a jego procedura jest następująca:

1. losowanie pary punktów (x, y) o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ korzystając z rozkładu jednorodnego $U_1, U_2 = U(0, 1)$,

$$x = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2),$$

$$y = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2),$$

2. normalizację wylosowanych punktów do okręgu

$$x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

3. przeskalowanie do rozkładu normalnego na kole

$$q = \sqrt{U(0, 1)},$$

$$x = x \cdot q,$$

$$y = y \cdot q,$$

4. przesunięcie oraz przeskalowanie do koła o innym promieniu

$$x = x \cdot R_\alpha + x_\alpha,$$

$$y = y \cdot R_\alpha + y_\alpha,$$

gdzie $R_\alpha, x_\alpha, y_\alpha$ oznaczają promień oraz współrzędne koła końcowego.

Rozkład jednorodny w kole musi spełniać warunek normalizacji. Dla rozkładu jednorodnego funkcja gęstości prawdopodobieństwa (fgp) jest stała. Zatem fgp jest stała na całym kole i wynosi

$$f_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{\pi R_{\alpha}^2}.$$

Całkę (czyli powierzchnię) części wspólnej definiujemy jako

$$S_{\alpha, \beta} = \pi R_{\alpha}^2 \iint_{x, y \in K_{\alpha}} \theta_{\alpha, \beta}(x, y) \, dx dy,$$

gdzie θ , zależna jest od pary punktów (x, y) , i definiowana jest jako

$$\theta_{\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in K_{\alpha} \wedge (x, y) \in K_{\beta} \\ 0, & (x, y) \notin K_{\alpha} \vee (x, y) \notin K_{\beta} \end{cases}$$

Gdzie właściwie wiedząc, że (x, y) są przynależne do K_{α} , wystarczy sprawdzić przynależność do K_{β} . W ten sposób możemy skonstruować metodę Monte Carlo - losując (x, y) z K_{α} , i sprawdzając czy punkt ten przynależy do K_{β} . Pole powierzchni można obliczyć licząc tą całkę metodą Monte Carlo:

$$\mu^{(1)} = \bar{S}_{\alpha, \beta} = \frac{\pi R_{\alpha}^2}{N} \sum_{i=1}^N \theta_{\alpha, \beta}(x_i, y_i). \quad (1)$$

Drugi moment, który będzie potrzebny do obliczenia drugiego momentu centralnego (wariancji) obliczymy poprzez:

$$\mu^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\pi R_{\alpha}^2 \theta_{\alpha, \beta}(x_i, y_i) \right)^2,$$

korzystając z faktu, że funkcja θ przyjmuje tylko wartości 0 i 1, powyższe wyrażenie można przepisać jako

$$\mu^{(2)} = \pi R_{\alpha}^2 \mu^{(1)}. \quad (2)$$

Odchylenie standardowe jako parametr dokładności wyników zostaje policzone jako (za jego pomocą możemy podać dokładność zgodnie z testem statystycznym):

$$\sigma_{\bar{S}_{\alpha, \beta}} = \sqrt{\frac{\mu^{(2)} - (\mu^{(1)})^2}{N}} \quad (3)$$

Podczas wykonywanego ćwiczenia pole wspólne będzie liczone losując z koła K_{α} , a także K_{β} , co może wpłynąć na dokładność wyników.

2 Wyniki

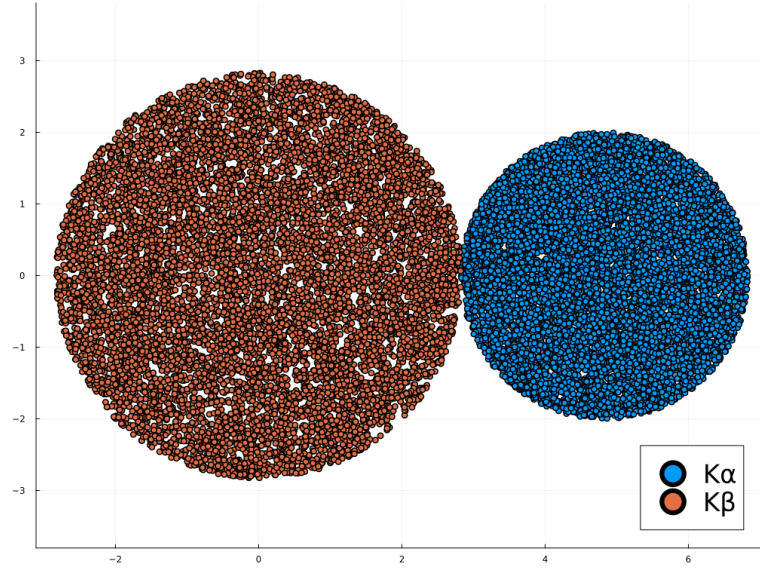
Dla generowanych punktów w kołach zostały założone wartości:

- $R_{\alpha} = 2$,
- $R_{\beta} = 2\sqrt{2}$,
- $\mathbf{r}_{\alpha} = [x_{\alpha}, 0]$,
- $\mathbf{r}_{\beta} = [0, 0]$,

x_{α} jest parametrem i będzie zmieniany w zależności od przeprowadzanego doświadczenia numerycznego.

Test generatora

Dla testu wygenerowano $N = 10000$ punktów w dwóch kołach. Parametr x_α został ustawiony na $R_\alpha + R_\beta$. Wygenerowane punkty zostały przedstawione na rys. 1.

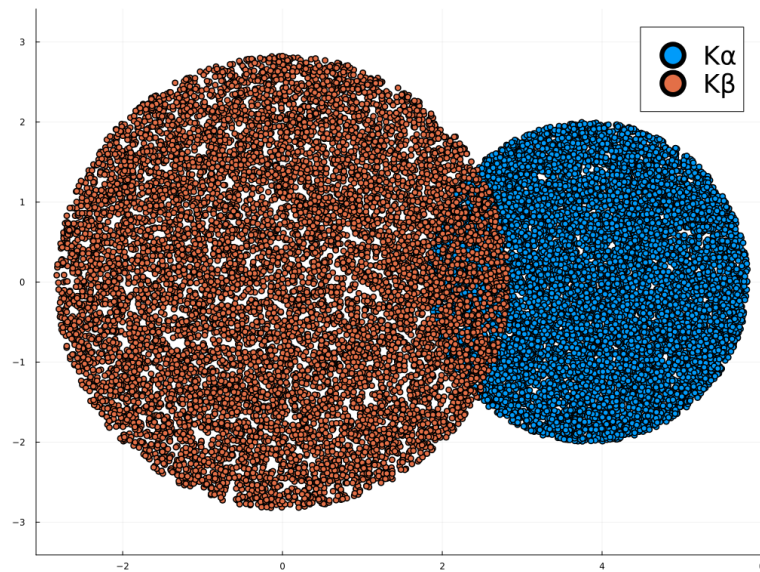


Rysunek 1: $N = 10^4$ punktów wygenerowanych w każdym kole. $x_\alpha = R_\alpha + R_\beta$.

Wygenerowane koła są do siebie styczne i nie mają części wspólnej. Zgodnie z oczekiwaniami, powierzchnia części wspólnej wynosi 0. Na podstawie analizy jakościowej, można stwierdzić, że rozkład w kole jest zbliżony do jednorodnego.

Koła częściowo się przekrywające

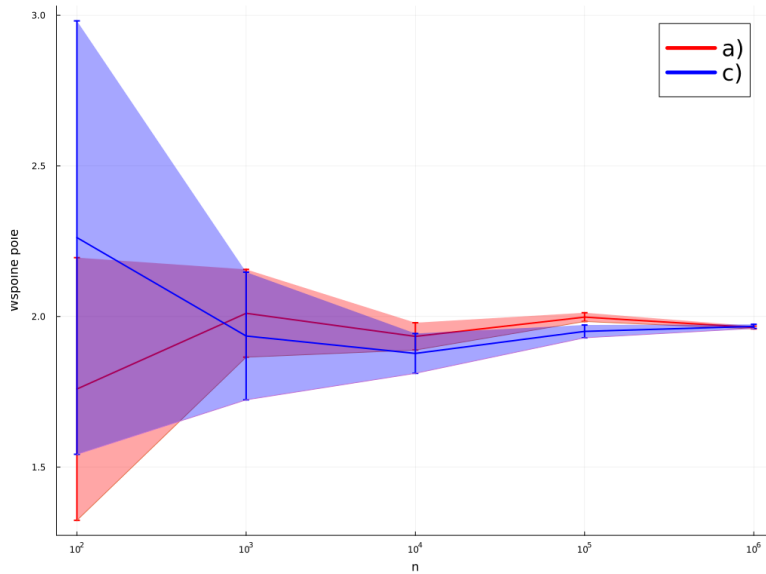
Wygenerowane koła się przekrywają, tak że wartość parametru x_α została ustawiona na $R_\beta + 0.5R_\alpha$. Milion wygenerowanych pseudolosowo punktów w każdym kole zostało przedstawionych na rys. 2.



Rysunek 2: $N = 10^6$ punktów wygenerowanych w każdym kole. $x_\alpha = R_\beta + 0.5R_\alpha$.

Koła przekrywają się w taki sposób, że szerokość części wspólnej wynosi $0.5R_\alpha$. Prostym wnioskiem jest także fakt, że powierzchnia koła K_β jest większa, co skutkuje mniejszą gęstością

wylosowanych punktów. Dlatego więcej punktów z koła K_α znalazło się w części wspólnej, niż punktów z koła K_β . Wyniki dla obliczeń pola części wspólnej metodą Monte Carlo były zapisywane dla $\{10^k : k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$ losowań i przedstawione na rys. 3.

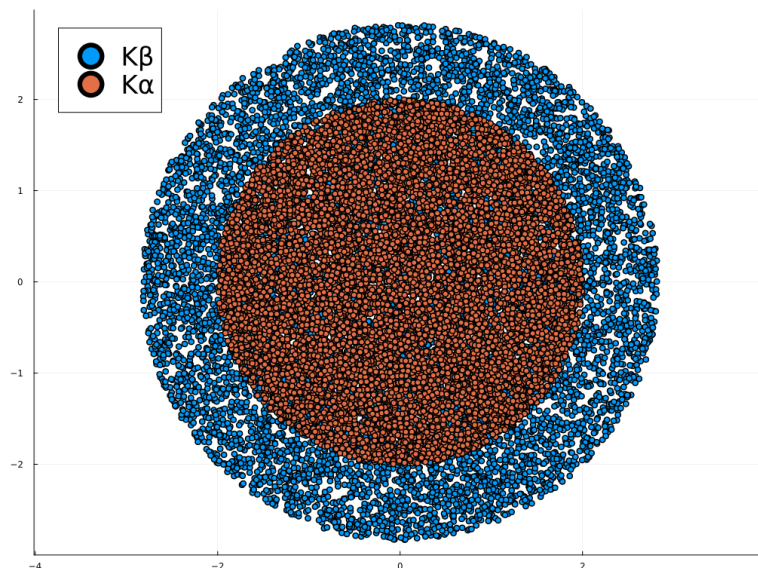


Rysunek 3: Wartości pola wspólnego wraz z niepewnościami dla $x_\alpha = R_\beta + 0.5R_\alpha$, gdy: (a) losowane są punkty z koła K_α , (c) losowane są punkty z koła K_β .

Widoczne jest, że losowanie z koła o większym polu K_β generuje większe niepewności i generalnie wolniej zbiega do wartości dokładnej. Oczywiście, aby udowodnić tą tezę należałoby wykonać całą serię eksperymentów numerycznych. Proste rozumowanie jednak prowadzi do wniosku, że większa gęstość wygenerowanych punktów oznacza większą liczbę punktów w części wspólnej. Generując punkty z mniejszego koła istnieje też większe prawdopodobieństwo, że wylosowany punkt będzie należał do części wspólnej.

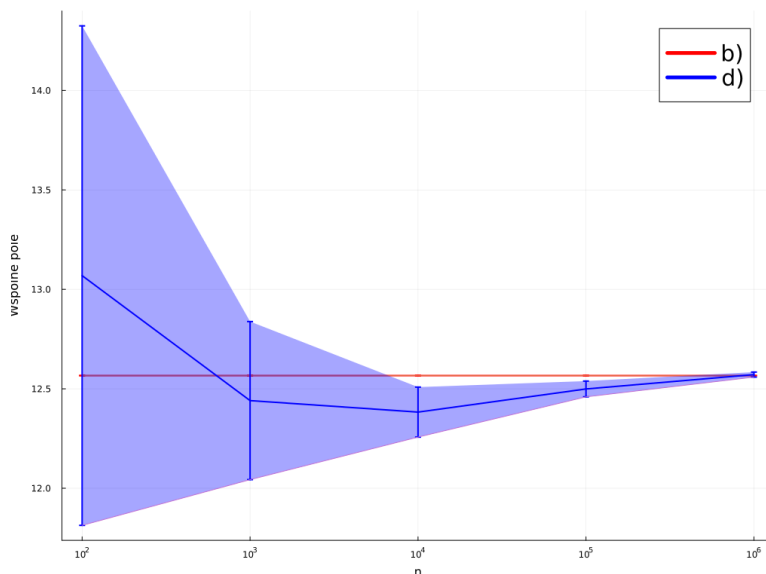
Koła całkowicie się przekrywające

W drugim przypadku obydwa koła miały ten sam środek ($x_\alpha = 0$), przez co w całości się pokrywają. Koło K_α należy do koła K_β . Wygenerowane punkty zostały przedstawione na rys.



Rysunek 4: $N = 10^6$ punktów wygenerowanych w każdym kole. $x_\alpha = 0$.

Ponownie można zauważyć, że większa gęstość punktów (na jednostkę powierzchni) jest w mniejszym kole. Ponadto każdy punkt należący do pola mniejszego, należy także do pola większego. W tym przypadku obliczenie pola wspólnego jest proste i polega na obliczeniu pola K_α . Wyniki obliczeń zostały przedstawione na rys. 5.



Rysunek 5: Wartości pola wspólnego wraz z niepewnościami dla $x_\alpha = 0$, gdy: (b) losowane są punkty z koła K_α , (d) losowane są punkty z koła K_β .

Prostym wnioskiem jest, że dla losowania punktów z koła K_α uzyskiwana jest od razu wartość dokładna. Wynika to z faktu, że funkcja θ będzie zawsze przyjmowała wartość 1. Przez to wartość sumy w równaniu (1) będzie równa N , a całe wyrażenie będzie zawsze wynosiło πR_α^2 . Z kolei wartość drugiego momentu wyrażonego zwykłym wzorem (2) będzie w takim razie wynosić kwadrat tej wielkości $(\pi R_\alpha^2)^2$. Dwa kwadraty się wykasują podczas obliczania odchylenia standardowego zgodnie z (3).

3 Podsumowanie

Na podstawie uzyskanych wyników można postawić tezę, że mniejszy okrąg stanowi lepsze ograniczenie do losowania punktów. Przez to większa ilość punktów będzie generowana w części wspólnej, tak jak w metodzie eliminacji. Dodatkowo warto się także zastanowić, czy używanie metody Monte Carlo ma sens. W przypadku kół się przekrywających znana jest dokładna odpowiedź. Uzyskanie jej w sposób obliczeniowy stanowi jedynie metodę weryfikacji sposobu liczenia.