

# Kopplade svängningar och harmoniska approximationer hos mekaniska system

Jonathan Nguyen (nguyenjo) & Carl Örnberg (carlorn) Program: Teknisk Fysik.  
Kurs: Experimentell fysik 1 - mätteknik, TIF083, del A.

## Sammandrag

Syftet med laborationen var att undersöka oscillerande system och således har två olika uppställningar utformats. Målet var att matematiskt analysera systemens rörelser baserat på olika parametrar såsom pendlarnas massa och längd. I den första delen av laborationen tillämpades Fouriertransform för att analysera rörelser i frekvensdomän och det kunde visas att systemet svängde som en superposition av olika egenfrekvenser korresponderande mot normalmoder. I den andra delen av laborationen analyserades hur väl ett system svängde harmoniskt och det påvisades att längre avvikelse från jämviktsläget medförde till mindre harmoniska rörelser. Detta samband gick att approximera matematiskt och visade sig vara proportionellt mot  $\theta_{max}^2$ , där  $\theta_{max}$  är utslagsvinkeln. Slutligen, har laborationen kunnat visa att svängningar går att analysera matematiskt och att dessa kan bekräftas experimentellt.

## Abstract

The aim of the experiment was to investigate the dynamics of oscillating systems through two distinct setups, each designed to enable a mathematical analysis of the motion based on various parameters, such as the length and mass of a pendulum. The first phase of the experiment made use of Fourier transformation techniques in order to examine the motion in the frequency domain. The system's motion was shown to be described as a superposition of two distinct eigenfrequencies, each corresponding to a normal mode. The second phase of the experiment was to analyze to which extent a system could be described as harmonic. It was observed that as the system's displacement from the equilibrium increased, the oscillatory motion became less harmonic. The deviation from an ideal harmonic motion was mathematically approximated to be proportional to  $\theta_{max}^2$ , where  $\theta_{max}$  was the maximum angular. The experiment indicated that oscillations could be analyzed mathematically which in turn could be verified experimentally.

Keywords: Harmonic oscillators, coupled system , coupled harmonic oscillators, pendulums, springs

## Innehåll

<b>1 Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2 Teori</b>	<b>1</b>
2.1 Kopplade mekaniska svängningar . . . . .	1
2.2 Harmoniska oscillationer . . . . .	1
<b>3 Metod</b>	<b>2</b>
3.1 Utrustning och uppställning . . . . .	2
3.2 Utförande . . . . .	3
3.3 Dataanalys . . . . .	4
<b>4 Resultat</b>	<b>4</b>
<b>5 Diskussion</b>	<b>6</b>
5.1 Tolkning av resultat . . . . .	6
5.2 Osäkerhet i uppmätta parametrar . . . . .	7
5.3 Analys av Metod . . . . .	7
<b>6 Slutsats</b>	<b>8</b>
<b>7 Referenser</b>	<b>8</b>

# 1 Inledning

Svängningsfenomen är fundamentala inom fysiken och spelar en avgörande roll i flertalet mekaniska system. Exempel är när byggnader eller broar utsätts för jordbävningar eller andra markrörelser och börjar oscilla. Anmärkningsvärt är emellertid att många andra icke-mekaniska system också uppvisar vibrationsbeteenden, allt från elektriska vågor och kretsar, till sambandet mellan rovdjur och bytesdjur i naturen och kvantmekaniska svängningar. Det är således motiverat att undersöka metodiken och teorin bakom oscillerande system, både matematiskt och fysikaliskt.

Mot bakgrunden av detta har inledningsvis kopplade svängningar analyserats med hjälp av två identiska pendlar, kopplade ihop med en fjäder. Syftet var att experimentellt observera systemets rörelser och hitta matematiska förklaringar till hur massorna i pendlarna rörde sig. Därefter betraktades enbart en simpel pendel. Målet med uppställningen var att undersöka hur väl de approximativa rörelseekvationerna för små vinklar gällde för pendeln allmänt. Hypotesen var att differensen mellan de matematiskt härledda frekvenserna och experimentellt observerade skulle öka desto längre pendeln förflyttades från sitt jämviktsläge.

# 2 Teori

## 2.1 Kopplade mekaniska svängningar

Kopplade mekaniska svängningar uppstår när två eller flera oscillatorer, som exempelvis pendlar eller massor på fjädrar, är mekaniskt sammanlänkade så att deras rörelser påverkar varandra. Denna koppling kan leda till komplexa rörelsemönster där energi kontinuerligt överförs mellan oscillatorerna. Om små svängningar för systemets oscillatorer studeras kan både trigonometriska funktioner och fjäderpotentialer approximeras genom Taylorutvecklingar som resulterar i linjära differentialekvationer. Vidare kan detta system uttryckas matematiskt genom att ta reda på normalmoder och egenfrekvenser. En normalmod är en lösning till systemets differentialekvationer med tillhörande egenfrekvens. Sambandet mellan periodtiden  $T$  för normalmoden och egenfrekvensen  $\omega$  ges enligt  $T = 2\pi/\omega$ . Den totala lösningen till hur systemet rör sig kan sedan ges som en superposition av alla dessa normalmoder. Systemet som kommer att analyseras i denna laboration, bestående av två identiska pendlar kopplade ihop med en fjäder enligt figur 1 a), kan analyseras på detta sätt. För de generaliserade koordinaterna  $\theta_x$  och  $\theta_y$ , där  $\theta_x$  och  $\theta_y$  i detta fall är vinklarna mellan respektive pendel och den vertikala axeln, ges rörelseekvationerna av

$$\theta_x = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + A_2 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (1)$$

$$\theta_y = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_0) - A_2 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (2)$$

där  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\phi_0$  och  $\phi_1$  bestäms av intialvillkoren. De motsvarande egenfrekvenserna är givna av

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \text{och} \quad \omega_1 = \sqrt{2\frac{k}{m} + \frac{g}{l}} \quad (3)$$

där  $g \approx 9,82 \text{ m/s}^2$  är tyngdaccelerationen,  $l$  är pendlarnas längd,  $k$  är k-värdet av fjädern och  $m$  är vadera pendels massa [1].

## 2.2 Harmoniska oscillationer

Harmoniska svängningar beskriver rörelser som följer en sinus- eller cosinusfunktion, där rörelsen uppstår på grund av en återförande kraft, proportionerlig mot avvikelsen från

jämviktsläget. Rent matematiskt kan detta uttryckas som

$$\ddot{q}(t) + Aq(t) = B, \quad (4)$$

där A och B är reella konstanter och  $q$  är en generaliserad koordinat. Genom att begränsa analysen till små vinklar för en enkel pendel kan följande differentialekvation härledas

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (5)$$

Denna ekvation motsvarar den karakteristiska differentialekvationen för harmoniska svängningar. Periodtiden för ett sådant system kan uttryckas enligt

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (6)$$

Uttrycket är således endast en approximation för små vinklar och överensstämmer väl med harmoniska oscillatorer. För att beräkna periodtiden för större vinklar är det nödvändigt att betrakta systemet ur ett energi-perspektiv och därav kan

$$T = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_{max})}} \iff T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left( \frac{\theta_{max}}{4} \right)^2 + \dots \right] \quad (7)$$

erhållas [3] [4, sida 189]. Notera att första termen i ekvation (7) är precis periodtiden för en harmonisk pendel. Differensen mellan ekvation (7) och (6) ger uttrycket  $\Delta T \approx \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{l}{g}}\theta_{max}^2$ , vilket representerar ett samband för hur väl en enkel pendel kan approximeras som harmonisk.  $\Delta T$  kan även uttryckas logaritmiskt enligt

$$\ln \frac{\Delta T}{1_s} = 2 \ln (\theta_{max}) + \ln C \quad (8)$$

där  $C = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

### 3 Metod

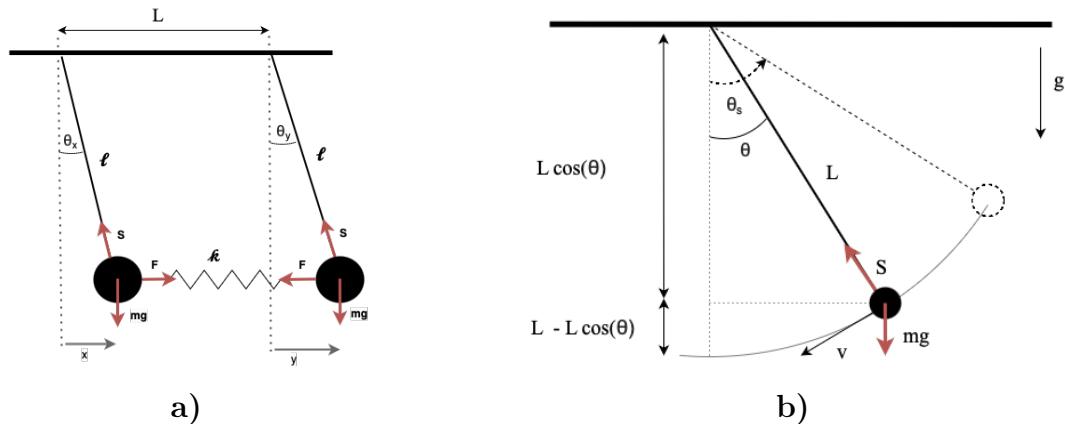
I denna sektion presenteras metoden för experimentet. Metoden har utformats för att säkerställa noggrannhet och tillförlitlighet i experimenten. Detta gjordes genom att variera olika parametrar i uppställningarna och noga betrakta felkällor.

#### 3.1 Utrustning och uppställning

Utrustningen för de kopplade svängningarna inkluderade tre massor: två 1 kg och en 0,2047 kg. För att justera den totala vikten och uppnå önskade mätningar användes tilläggsmassor i form av puckar. Det användes tolv puckar, varav två stycken med massan 0,470 kg och resterande med massan 0,107 kg var. Därutöver användes två olika fjädrar, snöre, tejp och en våg. Uppställningen för den enkla pendeln använde samma utrustning med undantag för fjädrarna och vissa vikter. Mätutrustningen som utnyttjades för båda uppställningarna var Qualysis IR-kameror.

Experimentuppställningen visas schematiskt i figur 1. För kopplade svängningar som illustreras i figur 1 a) gjordes två olika uppställningar. En uppställning för mätningar av k-värdet för fjädrar och den andra för det kopplade systemet. Uppställningen för fjädrarna bestod av en fjäder placerad på en ställning med massan 0,204 kg enligt figur 6 som finns i appendix. För de kopplade svängningarna placerades två identiska pendlar på en

ställning med hjälp av snören. Därefter kopplades en fjäder till båda massorna enligt figur 1 a). Pendlarna placerades med ett avstånd på  $L$  meter mellan dem, där  $L$  är fjäderns naturliga längd. Detta avstånd  $L$  justerades med varje ny fjäder. Uppställningen för den andra delen av experimentet visas i samma figur 1 b). Där monteras en simpel pendel på ställningen med massan 2.204 kg och en längd  $L$  på hävarmen. I just denna laboration justerades uppställningen en bit enligt figur 9 som finns i appendix. Här monterades två snören istället till massan och vardera snöre fästes på ställningen. Pendeln fick sedan svänga vinkelrät mot snörena för att minimera rörelser i andra led.



Figur 1: a) beskriver uppställning för de kopplade svängningarna. Den består av två identiska pendlar kopplade med en fjäder med en naturlig längd  $L$ . b) beskriver uppställningen av en simpel pendel. Notera att det inte är samma  $L$  i a) som i b). I a) är det fjäderns naturliga längd medan i b) är det snörets längd som kan variera. Utslagsvinkel i b)  $\theta_s = \theta_{max}$

### 3.2 Utförande

Datainsamlingsmomentet gjordes på tre olika uppställningar. Första uppställning var avsedd för mätningar av  $k$ -värdet för fjädrarna. En massa på 0,207 kg placerades på fjädern, som sedan sattes i oscillation, och mätningarna pågick under 20 sekunder. Sju stycken mätserier gjordes för att säkerställa noggrannhet och detta gjordes för båda fjädrarna som användes.  $K$ -värdet beräknades enligt

$$k = (2\pi f)^2 m, \quad (9)$$

[4, sida 188]. Uppställning för de kopplade svängningar enligt figur 1 a) sattes sedan upp, samtidigt som mätningstiden ändrades till 40 sekunder. Varje mätning gjordes på följande sätt: systemet sattes i vila innan mätningarna påbörjades och detta gjordes för att beräkna vinkeln mellan pendlarna och z-axeln. Någon sekund efter att mätningarna började sattes systemet i svängning genom initialvillkoren  $\theta_x(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}_x(0) = 0$ ,  $\theta_y(0) = 0$  och  $\dot{\theta}_y(0) = 0$  där  $\theta_0$  var en godtycklig vinkel. För att undersöka hur systemets varierande parametrar påverkade vinkelfrekvensen upprepades proceduren flera gånger. I varje procedur varierades en specifik parameter medan övriga hölls konstanta. Parametrar som undersöktes i detta experiment var  $k$ ,  $m$  och  $l$ , se ekvation (3)

För den sista uppställningen med den enkla pendeln ställdes systemet upp enligt figur 9 i appendix. Istället för att mäta pendelns rörelser i x-led som i figur 1 b), mätttes det i y-led eftersom pendeln oscillerade vinkelrät mot snörena. Mätningarna följde samma tillvägagångssätt som ovan, där pendeln först sattes i vila innan mätningarna. Någon sekund efter att mätningarna startat placerades pendeln vid en specifik vinkel för att sedan

släppas. Detta upprepades flera gånger, där vinkeln pendeln släpptes från var ungefär  $5 - 75^\circ$ , och totalt utfördes cirka 20 mätningar. Samma metodik tillämpades för två olika pendellängder, 0,45m och 0,7m för att säkerställa noggrannheten.

### 3.3 Dataanalys

Den omfattande dataanalysen utfördes i Python med hjälp av biblioteken NumPy, Matplotlib och SciPy. För att enklare analysera rörelserna i första delen av laborationen applicerades en Hamming-fönsterfunktion i följd av transformation av kartesiska koordinater från tidsdomän till frekvensdomän med hjälp av Fast Fourier Transformation, (FFT) [2]. Den intresserade läsaren kan se exempel på grafer i appendix såsom figur 11.

Fjäderkonstanten bestämdes genom att uppmäta systemets frekvens med hjälp av FFT. Den frekvens som motsvarade den högsta amplituden identifierades med hjälp av funktionen findpeaks i SciPy, och Fouriertransformen plottades för att verifiera att resultaten var rimliga. Den nyfikne läsaren hänvisas till figur 10 i appendix. Med hjälp av frekvensen kunde det uppmätta  $k$ -värdet för fjädern beräknas enligt ekvation (9)

Vidare beräknades frekvenser för uppställningen i figur 1 a). Denna process, precis som den föregående, analyserades i frekvensdomänen genom användning av samma algoritm. Här krävdes dock en lista över vinklar istället för kartesiska koordinater. Listan med vinklar för respektive pendel beräknas med samma ekvation enligt

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{x[k] - x[0]}{l}\right), \quad (10)$$

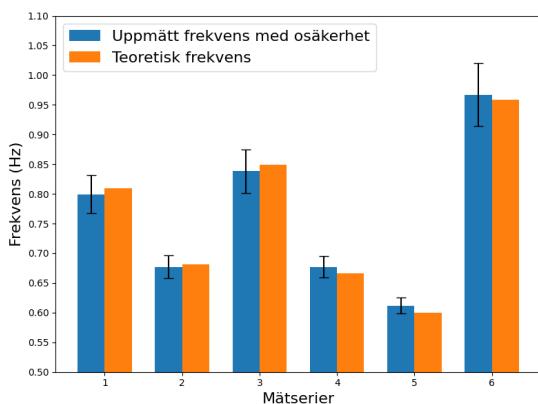
där  $k$  är ett index som går från 0 till den (kartesiska listans längd  $-1$ ). Här representerar  $\theta_k$  vinklarna i den nya listan, där varje vinkel  $\theta_k$  beräknades utifrån den korresponderande kartesiska koordinaten  $x[k]$ . Pendlarnas koordinat vid vila är  $x[0]$  och  $l$  är pendlarnas längd. Därefter genomfördes Fouriertransformering på de nya listorna och lokala maximivärden på amplituden identifierades för båda pendlarna. Teoretiska frekvenser beräknades och jämfördes med de experimentella värdena, som framgår i figur 2 och 3. Liknande metodik användes för systemet med olika massor.

Slutligen, gjordes en dataanalys för experiment enligt uppställningen i figur 1 b). Precis som ovanstående uppställning krävdes en lista över vinklar. Vinkeln räknades ut enligt ekvation (10). Periodtiden beräknades genom att hitta lokala positiva maximivärden för vinkeln och dess korresponderande tidskoordinater, med hjälp av findpeaks funktionen. Tidskoordinater subtraherades med varandra och medelvärdet av differensen  $T$  returnerades. Då det skulle undersökas hur väl en pendel kunde beskrivas som harmonisk subtraherades periodtiden med den längsta uppmätta periodtiden som korresponderade till en liten vinkel och  $\Delta T$  utvanns. Sedan plottades  $\Delta T$  mot  $\theta_{max}$  logaritmiskt för att kunna utvinna ett linjärt samband enligt ekvation (8) där lutningen indikerade vilken potens som  $\theta_{max}$  påverkade  $\Delta T$ .

## 4 Resultat

Syftet med den inledande delen av laborationen var att undersöka hur ett kopplat system bestående av två pendlar ihopkopplade med en fjäder kan beskrivas matematiskt. Således har de två olika frekvenserna som beräknats i ekvation (3) jämförts med de teoretiskt beräknade.

I figur 2 visas den längsta uppmätta frekvensen av systemet mot den längsta teoretiska frekvensen  $\sqrt{g/l}$ . I dessa mätningar hölls kvoten  $k/m$  konstant medan längden på pendeln varierades, detta för att kunna bekräfta att pendelns längd ändrar systemets längsta frekvens. Enligt figur 2 borde det vara så att frekvensen  $\sqrt{g/l}$  stämmer för systemet.



Figur 2: Visar de uppmätta frekvenserna mot de teoretiskt beräknade frekvenserna enligt  $f = \sqrt{g/l}/2\pi$ . Olika mätserier motsvarar olika värden på pendelns längd  $l$ . De svarta hakarna visar osäkerheten i varje mätning.

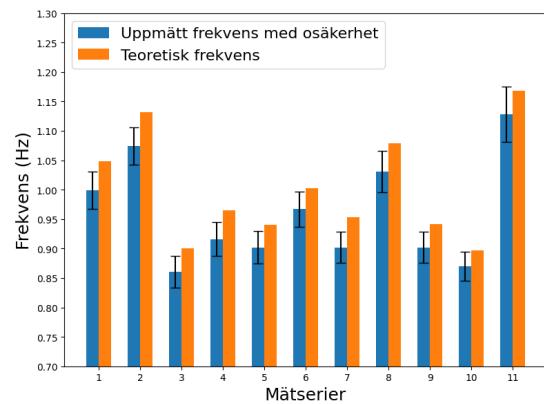
I figur 3 visas den högsta uppmätta frekvensen för systemet mot den teoretiska frekvensen  $\sqrt{g/l + 2k/m}$ . I de sex första mätserierna har enbart kvoten på  $k/m$  varierats för att kunna bekräfta att pendelnas massor och k-värdet på fjädern faktiskt påverkar den högsta frekvensen för systemet. Därefter ändrades även  $l$ . Enligt figur 3 går det att se att den teoretiska frekvensen konsekvent ligger något högre än den uppmätta. Detta bör inte indikera att  $\omega_1$  i ekvation (3) inte stämmer utan anses vara en bieffekt av systemuppställningen och diskuteras under avsnitt 5.1.

Syftet med uppställningen i figur 1 b) av laborationen var att undersöka hur vinkelns som pendeln släpps ifrån  $\theta_{max}$  påverkar hur pendeln kan beskrivas som harmonisk. Således har periodtider för olika maxvinklar undersökts för två olika pendlar enligt figur 1 b). Genom att logaritmera datapunkterna kunde ett linjärt samband enligt ekvation (8) utvinnas.

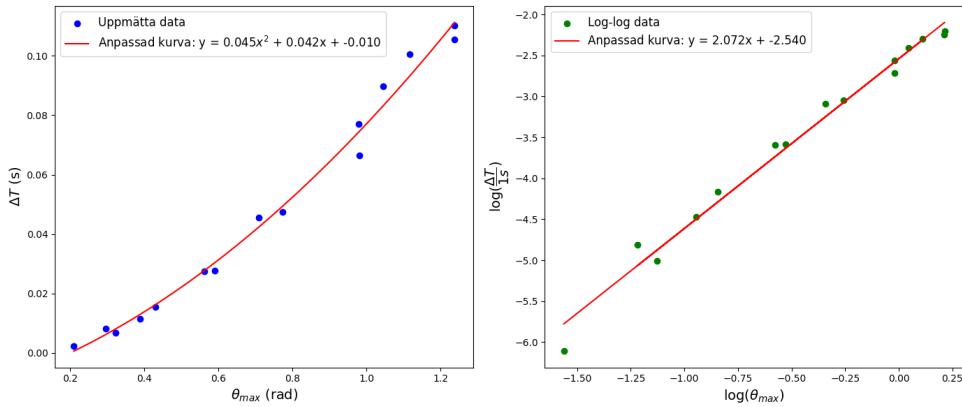
I figur 4 visas hur differensen mellan periodtiden för pendeln och periodtiden för när pendeln släpptes från väldigt liten vinkel ( $\Delta T$ ), beror på vinkelns som pendeln släpptes från ( $\theta_{max}$ ). I grafen där datapunkterna har plottats ut har även en anpassad andragradskurva baserat på datapunkterna ritats ut. Där de logaritmerade datapunkterna har plottats ut har även en rät linje anpassats. Det väsentliga i figur 4 är lutningen på den räta linjen som är 2,072. Denna lutning är en experimentell framtagning av konstanten i ekvation (8). På liknande sätt analyserades den andra pendeln och lutningen för det logaritmerade sambandet blev 1,714, den intresserade läsaren kan se figur 18 i appendix. Med hänsyn till de stora osäkerheterna som fanns i experimentet som diskuteras i avsnitt 5.1, anses det vara rimligt att anta att

$$\Delta T = \alpha \theta_{max}^2, \quad (11)$$

där  $\alpha$  är någon konstant med dimension tid.



Figur 3: Visar de uppmätta frekvenserna mot de teoretiskt beräknade frekvenserna enligt  $f = \sqrt{g/l + 2k/m}/2\pi$ . Mätningar 1-6 har värdet på kvoten  $k/m$  ändrats medan 7-11 har kvoten  $g/l$  ändrats. De svarta hakarna visar osäkerheten i varje mätning.



Figur 4: Datan i figurerna kommer från en pendel med massa 2.204 kg med en längd på 0.45 m till masscentrum. Till vänster i figuren visas hur periodtiden för pendeln beror på vilken vinkel den släpps ifrån och en anpassad andragradskurva. Till höger visas samma data logaritmerad och en rät linje anpassad. Det väsentliga i figuren är lutningen på den anpassade räta linjen som är 2,072.

## 5 Diskussion

### 5.1 Tolkning av resultat

Den generella matematiska teorin om att beskriva en kopplad svängning som superposition av olika frekvenser korresponderande till olika normalmodar anses vara mycket rimlig. I varje mätning visade Fouriertransformationen tydligt två lokala toppar korresponderande till två frekvenser. Den lägre frekvensen för systemet i figur 1 a) stämde mycket bra överens med  $\omega_0/2\pi$ , där  $\omega_0$  är definierad i ekvation (3).

Frekvensen  $\omega_1/2\pi$  ( $\omega_1$  definierad i ekvation (3)), skiljde sig kontinuerligt med ungefär 0,02-0,04 Hz, detta går att se i figur 3. Förklaringen till dessa skillnader beror på systems uppställning. Fjädern mellan vikterna satt ungefär 0,03-0,06 m över masscentrum (beroende på vilka vikter som användes). Detta innebar att det blev en mindre återförande kraft från fjädern på pendlarna eftersom utdragningen av fjädern i horisontell led inte blev lika stor som masscentrums förflyttning från jämviktsläget. Detta lösades genom att införa ett slags k-värde ( $k_{mc}$ ) som är kopplat till avståndet mellan vikternas masscentrum i horisontell led enligt

$$k_{mc}l (\sin(\theta_x) - \sin(\theta_y)) = k(l - \Delta l) (\sin(\theta_x) - \sin(\theta_y)) \iff k_{mc} = k \frac{l - \Delta l}{l}, \quad (12)$$

där,  $\theta_x$  och  $\theta_y$  är definierade enligt figur 1 a) och  $\Delta l$  är avståndet från masscentrum till fjäderns fäspunkt. En viktig anmärkning är att  $k_{mc}$  inte är något riktigt k-värde utan en matematisk parameter för att komma runt uppställningen som gjordes i laborationen. Om exempelvis  $k_{mc}$  sätts in i ekvation (3) för  $\omega_0$  istället för  $k$  fås i mätning 1 i figur 3 en 0,028 Hz lägre teoretisk frekvens. Det anses vara på grund av detta fenomen som de teoretiska frekvenserna i figur 3 är lite högre än de experimentellt uppmätta. Vidare, antas det då vara rimligt att de matematiskt beräknade frekvenserna i ekvation (3) stämmer överens med observationerna från laborationen.

I delen av laborationen när uppställningen i figur 1 b) användes kunde potensen i ekvation (8) uppskattas i två försök. De två värden som erhölls var 1,714 och 2,072. Med tanke på de osäkerheter som diskuteras under avsnitt 5.2 och att fysikaliska samband ofta

beskrivs med heltalsexponenter är det rimligt att potensen är 2. Konstanten  $\alpha$  i ekvation (11) har dimension tid och det hade kunnat vara troligt att  $\alpha = C\sqrt{g/l}$ , där  $C$  är någon konstant.

## 5.2 Osäkerhet i uppmätta parametrar

För att beräkna osäkerheten för varje mätpunkt användes felfortplantningsformeln

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial C}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2}, \quad (13)$$

där  $x_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$  är de oberoende parametrar som påverkar storheten  $y$ .

Den delen av laborationen som utnyttjade kopplade svängningar bestämdes k-värdena på två fjädrar. K-värdet på fjädern var beroende av två parametrar, frekvensen och massan som hängde i fjädern. Osäkerheten på massan var 0,0001 kg på grund av vågen och osäkerheten för frekvensen sattes till frekvensupplösningen som var 0,05 för fjädrarna. Enligt ekvation (13) gav det att osäkerheten för respektive k-värde blev  $\Delta k_1 = 1,009$  och  $\Delta k_2 = 0,848$ . Ytterligare hade fjädrarna en massa mellan 0,017 – 0,022 kg, vilket var mellan 0,4% – 1,0% av systemets totala massa, och försummades därför.

För de kopplade svängningarna krävdes identiska massor, vilket inte var praktiskt möjligt. Därför användes medelvärdet av de två massorna och osäkerheten i massorna sattes till  $|m_1 - m_2|$ . Det fanns också osäkerheter i längden på pendlarna, då masscentrumets position var osäker. När extra massor lades till förändrades masscentrumets position ytterligare, vilket motiverade en ökad osäkerhet i längden till 0,03 m. Genom ekvation (13) gick det att beräkna osäkerheten för de uppmätta frekvenserna vilket kan ses i figur 2 och 3.

I delen av laborationen som analyserade den enkla pendeln var det uppenbart att pendeln ej var ideal. Pendeln påverkades av icke-konservativa krafter i pendelns fästpunkter och därav bevarades inte energin. Resultatet blev att pendelns amplitud minskade över tid, det vill säga att pendeln nådde en vinkel som var lite mindre än  $\theta_{max}$ . I och med att medelvärdet av alla periodtider togs i dataanalysen gjorde det att den uppmätta periodtiden egentligen korresponderade till en mindre  $\theta_{max}$ . Det är förmodligen detta fenomen som gjorde att lutningen på den räta linjen i figur 18 blev 1,714, vilket är lägre än förväntat enligt ekvation (8).

## 5.3 Analys av Metod

Det finns flera metoder för att undersöka kopplade svängningar. En alternativ metod för att mäta k-värdet hade varit att hänga en vikt i fjädern, mäta sträckningen och beräkna k-värdet från jämviktsekvationerna. Fördelen med den metod som valdes i denna laboration var att Fouriertransformationen kunde testas på ett trivialt problem, för att säkerställa noggrannheten på senare mätningar. Därefter, fanns det en uppenbar brist i uppställningen som mätte kopplade svängningar. Fjädrarna var monterade mellan 0,03–0,06 m över masscentrum men på grund av brist på utrustning fanns inga ytterligare alternativ. Det skulle även vara fördelaktigt att kunna variera massan på uppställningen utan att ändra volymen och därav masscentrum, något som inte var möjligt i denna laboration. Dessa problem löstes däremot genom att betrakta fjärdens k-värde enligt ekvation (12) och ändra längden av pendeln.

För uppställningen av den enkla pendeln kopplades två snören till massan. Vardera snöre kopplades separat till uppställningen och sedan fick pendeln svänga i vinkelrät

riktning mot snörena. Fördelen med denna uppställning gentemot uppställningen med ett snöre och en massa var att det minimerade rörelser i andra led. Utöver det underlättade det att variera längden på pendeln genom att fästa snörena längre ifrån varandra på ställningen. En nackdel med uppställningen var att massan inte var uniform och kompakt. Detta gjorde att för stora avvikelser från jämviktsläget började massan att oscilera.

## 6 Slutsats

Studien av kopplade mekaniska svängningar med en dubbelpendel undersökte de komplexa dynamiska interaktionerna mellan pendlarna. Genom att bryta ner rörelserna i frekvenskomponenter med Fouriertransform förenklades analysen av systemet. Teorin förutser att varje rörelse kan beskrivas som en superposition av systemets normalmoder och motsvarande frekvenser, vilket stämde väl överens med resultaten. Trots vissa osäkerheter stämde resultaten överens med de teoretiska förutsägelserna, vilket bekräftar att de matematiska modellerna för dubbelpendeln speglar verkligheten på ett tillförlitligt sätt.

I studiens del om hur väl en pendel kan approximeras som harmonisk undersöktes skillnaden i periodtid mellan godtyckliga och små vinklar. Resultaten visade att periodtidsskillnaden  $\Delta T \propto \theta_{max}^2$ , vilket stämde väl med ekvation (7). På grund av vissa praktiska brister, synliga i figur 18 som finns i appendix, fanns det vissa avvikelser i resultaten. Men med antagandet att fysikaliska samband ofta beskrivs med heltalsexponenter kunde resultatet ses som tillförlitligt. Slutsatsen är att en pendel kan approximeras som harmonisk, så länge  $\theta_{max}^2$  förblir relativt liten i förhållande till konstanten framför  $\theta_{max}^2$  i ekvation (7).

## 7 Referenser

### Referenser

- [1] Timon Idema. Coupled oscillators. LibreTexts, Delft University of Technology, 2023. Hämtad: 2024-10-03. URL: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University\\_Physics/Mechanics\\_and\\_Relativity\\_\(Idema\)/08%3A\\_Oscillations/8.04%3A\\_Coupled\\_Oscillators](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Mechanics_and_Relativity_(Idema)/08%3A_Oscillations/8.04%3A_Coupled_Oscillators).
- [2] National Instruments. Understanding ffts and windowing, 2024. Hämtad: 2024-10-07. URL: <https://download.ni.com/evaluation/pxi/Understanding%20FFTs%20and%20Windowing.pdf>.
- [3] F. M. S. Lima and P. Arun. An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime. *Instituto de Física, Universidade de Brasília*, 2006. Received 29 September 2005; accepted 25 May 2006. URL: <https://fy.chalmers.se/~f7xiz/TIF080/Period.pdf>.
- [4] Carl Nordling och Jonny Österman. *Physics Handbook for Science and Engineering*. 9th edition. Oscillatory Motion.

## Appendix

### Peer-granskning

#### Kommentarer

Rapporten är i det stora hela bra skriven och det finns en klar röd tråd med bra upplägg. Dessvärre är rapporten alldeles för lång. Det ska vara 10 sidor inkluderat de två första sidorna, inte 10 sidor exkluderat. Sammandraget ger ett bra intryck av vad rapporten kommer handla om men det skulle kunna önskas mer fokus på vad resultatet och slutsatserna blev. Inledningen är förhållandevis bra men det hade kunnat varit mer bakgrund om hur vart svängningsrörelser förekommer och varför de är viktiga. Teoridelen är väldigt bra och skapar klar förståelse för läsaren. Metoden hade kunnat varit lite klarare och figurtexten under uppställningarna mer beskrivande. Men i det stora hela borde undersökningen kunnat upprepats av andra personer då bilderna i appendix är bra tagna. Dataanalysen rekommenderas göras lite mindre då all den informationen inte är särskilt relevanat för laborationen. Figurtexterna bör nog revideras, då det är alldeles för lite beskrivning av vad figurerna visar och vissa figurer saknar enheter på axlarna. Diskussionen är bra, om något lite lång och analysen av metoden kanske skulle vara lite mer kritisk med tanke på att uppställningen gjorde att en frekvens kontinuerligt hamnade under felmarginalen. Slutsatsen är bra och det finns en innehållsförteckning som är bra skriven.

#### Vidtagna åtgärder

Rapporten har kortats ned två sidor för att uppfylla de formaliekrav på rapportens längd. Figurtexter har skrivits tydligare med mer information. Dessutom har figur 2 och 3 lagts brevid varandra för att göra mer plats. Inledningen har breddats en aning och dataanalysen kortats ned väsentligt. Diskussionen har också den kortats ned samt lagt lite mer fokus på självkritik i analysen av metoden.

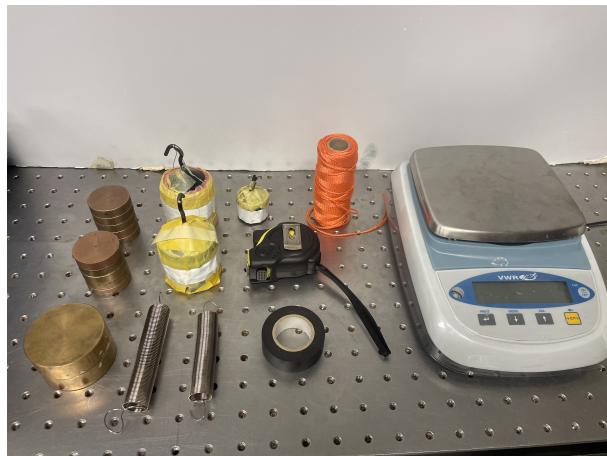
### Instruktioner för att återskapa dataanalysen

Det gjordes en omfattande dataanalys efter laborationen. För att analysera och plotta grafer användes Jupyter-notebooks och exporterad data från mätningar. Länken till dessa filer och notebooks finns här: [https://1drv.ms/f/c/2dc3e5f06c813b9/E1-eP\\_8231ZBh\\_B7Lg11TDMBmmmbIo0RIT6D00YdQDmYcIQ?e=c6pGzG](https://1drv.ms/f/c/2dc3e5f06c813b9/E1-eP_8231ZBh_B7Lg11TDMBmmmbIo0RIT6D00YdQDmYcIQ?e=c6pGzG).

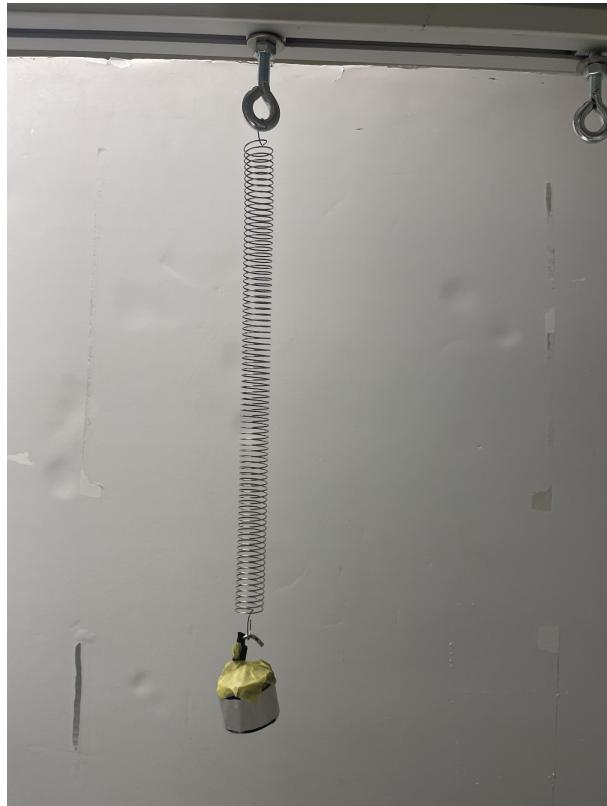
För att återskapa analysen behöver dessa filer laddas ned och Jupyter-notebooksen startas. Simuleringen för kopplade svängningar finns under "labbplottar" och resultatet från dessa plottas i "Plott\_frekvenser". Analysen av harmoniska svängningar finns under "Analys\_Pendel".

### Bilder från uppställningar

Här visas bilder från de faktiska uppställningarna under laborationen.



Figur 5: Bilden visar materialet som används under laborationen. Från vänster är det tilläggsvikter, 10 stycken som väger cirka 0.1 kg och 2 st som väger cirka 0.470 kg. Bredvid de är de två fjädrar och två massor som användes i samband med en liten massa för mätningar av  $k$ -värdet. Snören, tejp och våg också användes också för uppställningen.



Figur 6: Uppställningen för mätningar av  $k$ -värdet för fjädrar. Massan som användes var cirka 0.2047 kg



Figur 7: *Uppställningen för första delen av laborationen. Två pendlar är kopplade ihop med en fjäder. Massorna väger ungefär 1,015 kg vardera.*



Figur 8: *Bilden beskriver hur tilläggsmassorna fästes på massorna. Det gjordes med hjälp av att tejpa fast puckarna under massorna.*



Figur 9: *Uppställningen för andra delen av laborationen. Detta är en enkel pendel, där två snören fästes på massan. Här svänger massan vinkelrät mot snörena, alltså in i bilden.*

## Tabeller med osäkerheter

Här visas en tabell för de osäkerheterna hos de olika parametrarna som användes för att analysera fjäderns rörelseekvationer.

Tabell 1: Osäkerheter för  $k = (2\pi f)^2 m$

Storhet	Osäkerhet
$f$	0.05 (hz)
$m$	0.00001 (kg)

Tabell 2: Osäkerheter för  $2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}}$

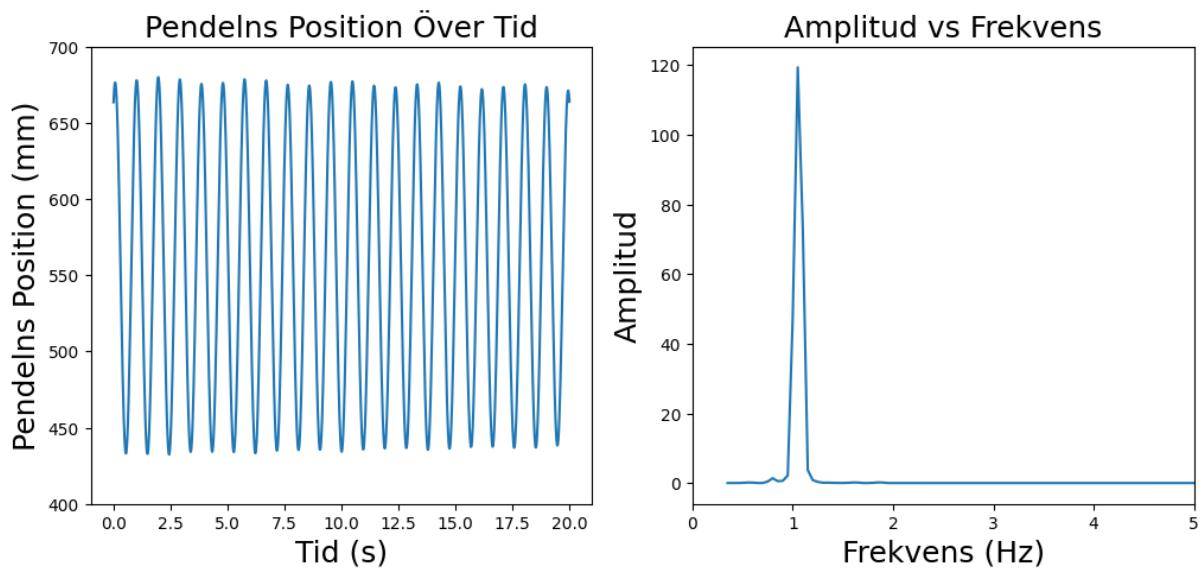
Storhet	Osäkerhet
$g$	0.01 ( $\text{m/s}^2$ )
$l$	0.03 (m)

Tabell 3: Osäkerheter för  $2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$ 

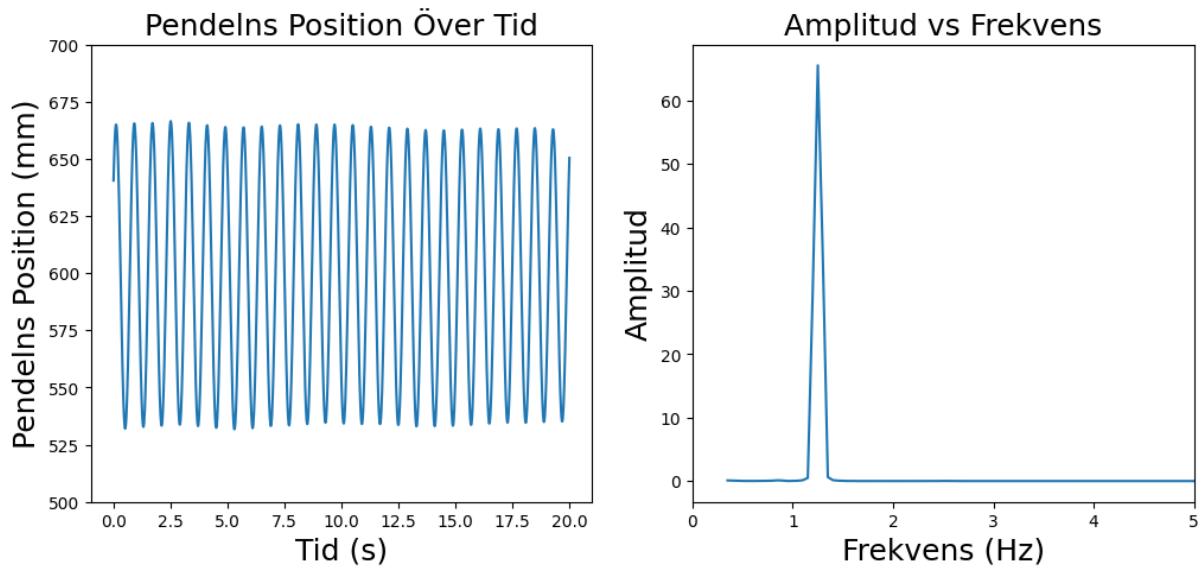
Storhet	Osäkerhet
$g$	0.01 ( $\text{m/s}^2$ )
$l$	0.03 (m)
$k_1$	0.848 ( $\text{kg/s}^2$ )
$k_2$	1.009 ( $\text{kg/s}^2$ )
$m$	0.01 (kg)

## Grafer från data

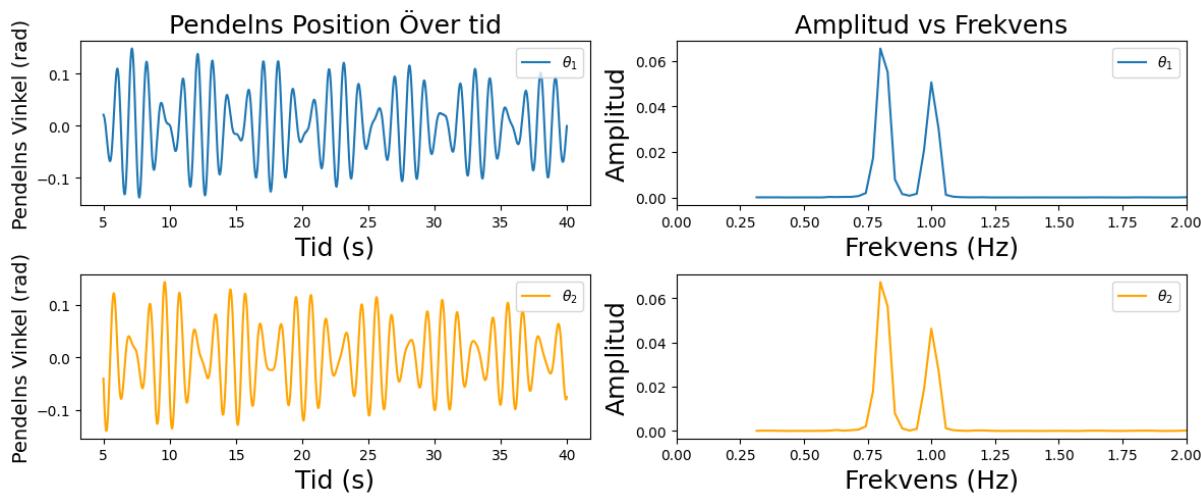
Här visas några av de grafer som användes för att analysera datan och sammanställa resultatet. För att se alla grafer finns det länkat separat till python koder och filer.



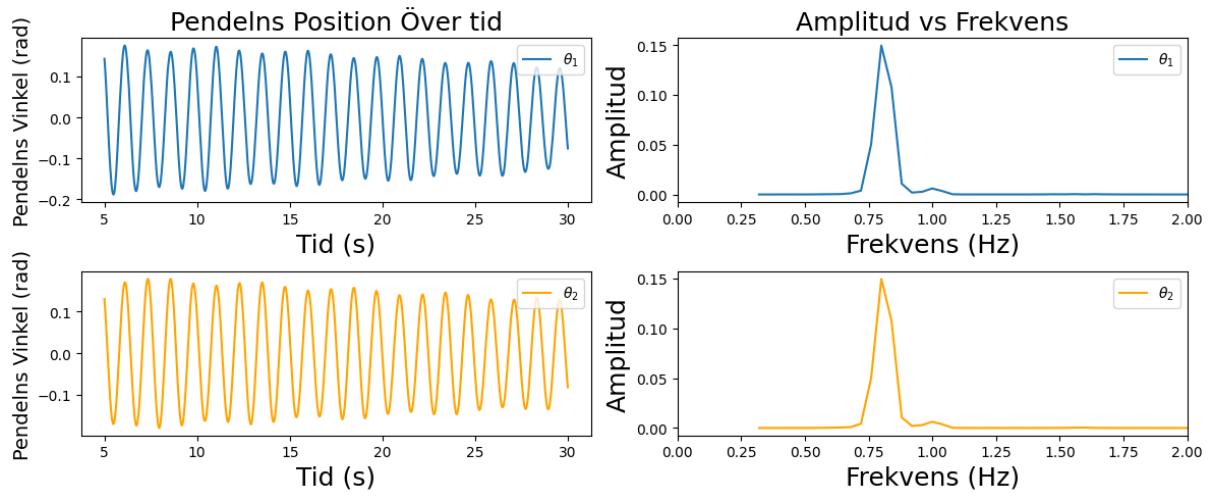
Figur 10: Till vänster i figuren visas en fjäderns position över tid när den satts i svängning med en massa kopplad på 0,2047 kg. Till höger visas Fast-Fouriertransformetionen av datamängden och den har ett maxvärde vid  $f=1,045$  Hz. Genom ekvation (9) blir det resulterande  $k$ -värdet 8,900 N/m.



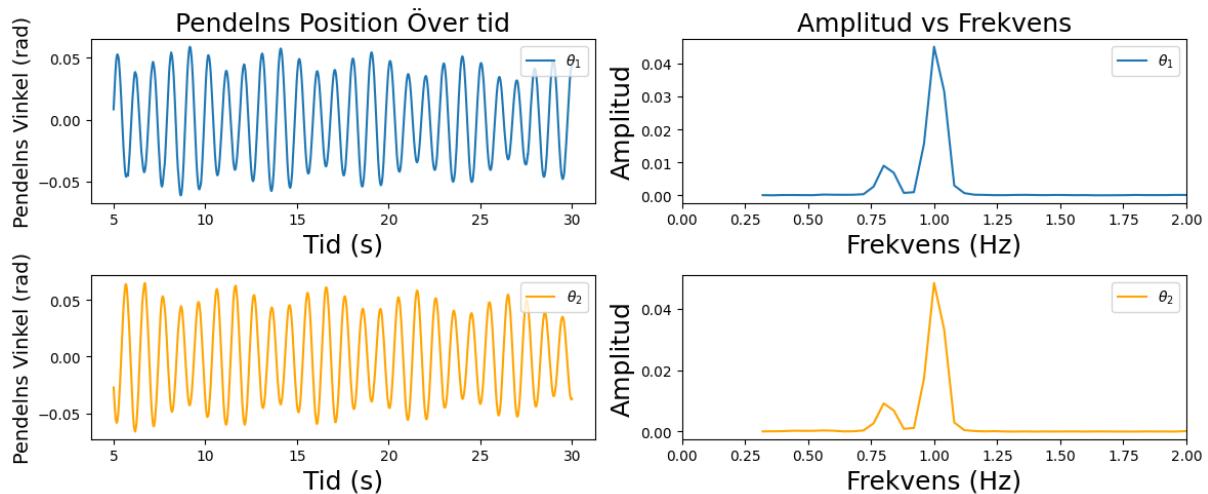
Figur 11: Till vänster i figuren visas en fjäderns position över tid när den satts i svängning med en massa kopplad på 0,2047 kg. Till höger visas FFT av datamängden och den har ett maxvärde vid  $f=1,249$  Hz. Genom ekvation (9) blir det resulterande  $k$ -värdet 12,614 N/m.



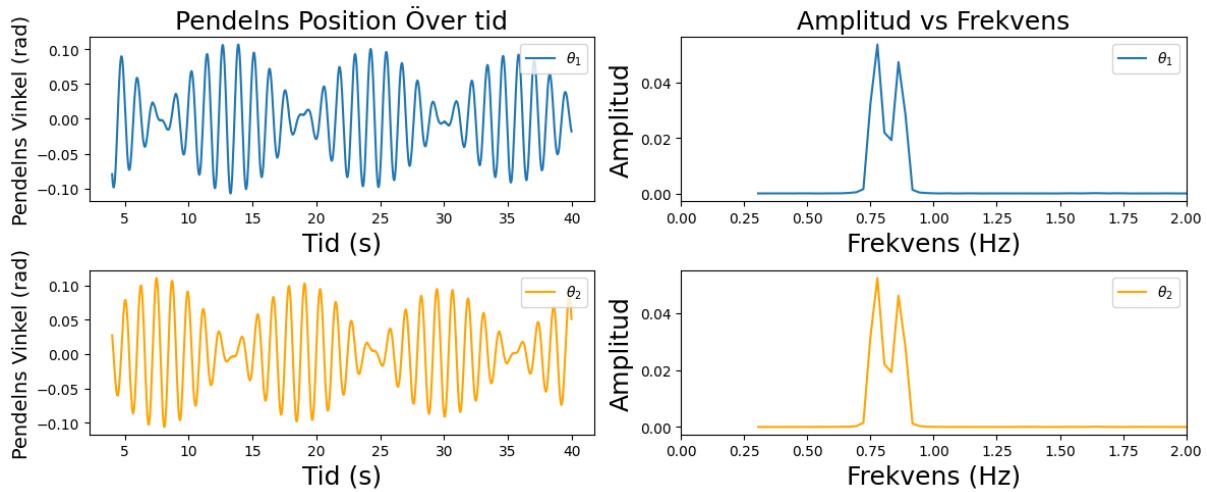
Figur 12: Till vänster i figuren visas pendelarnas position med (längder 0,38 m och medelvärde av massor 1,015 kg) över tid när en pendel släpptes från en startvinkel och den andra startade från vila. På högersidan är en FFT transformation av dataen där de lokala topparna för amplituderna inträffar för  $f = 0,800$  Hz och  $f = 0,999$  Hz



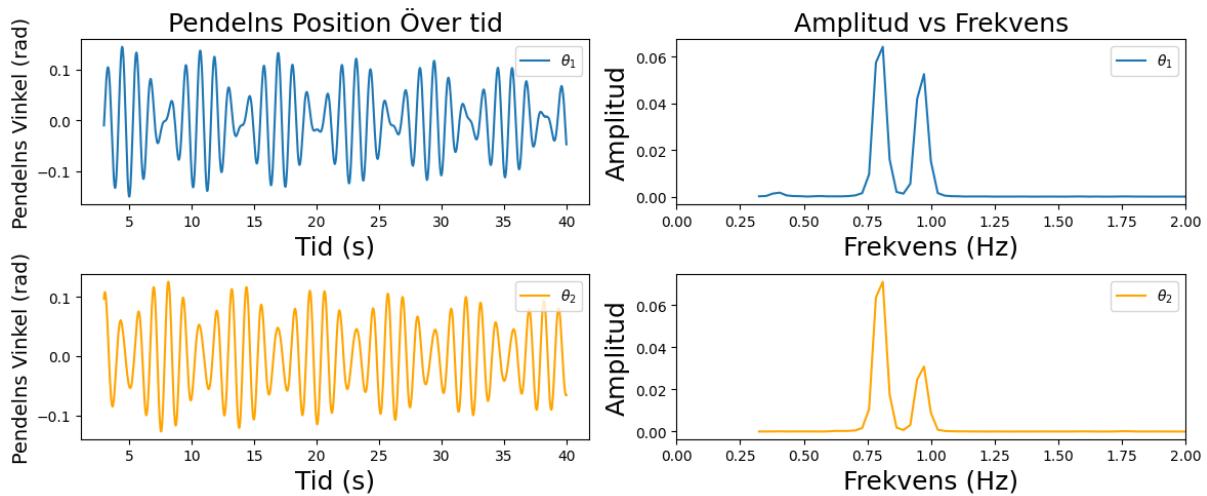
Figur 13: Till vänster i figuren visas pendelarnas position med (längder 0,38 m och medelvärde av massor 1,015 kg) över tid när båda pendlarna släpptes från samma vinkel. På högersidan är en FFT transformation av datan där de lokala topparna för amplituderna inträffar för  $f = 0,800 \text{ Hz}$  och  $f = 0,999 \text{ Hz}$ . För denna typ av svängning domineras frekvensen som korresponderar mot  $\sqrt{g/l}/2\pi$



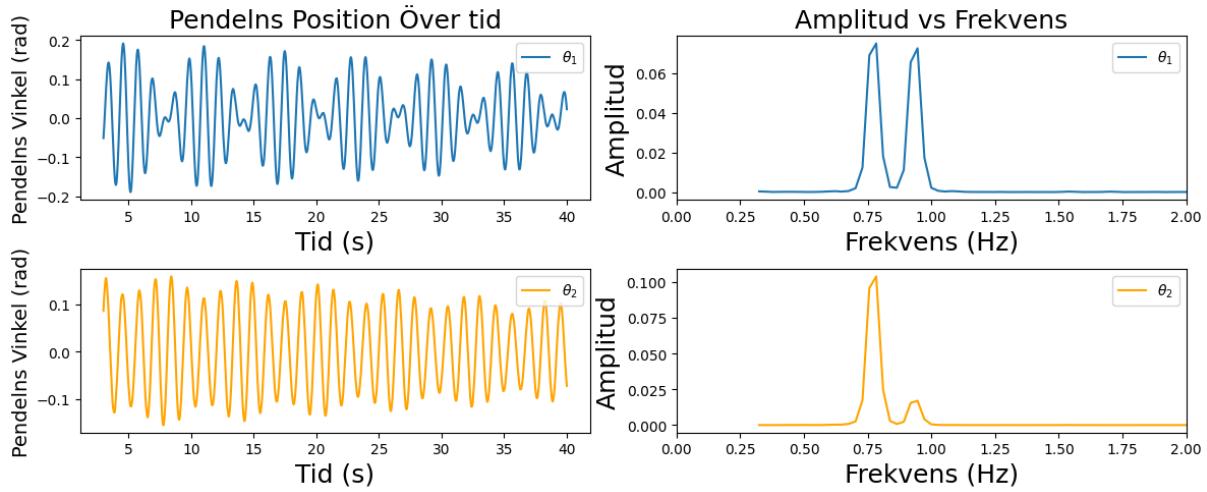
Figur 14: Till vänster i figuren visas pendelarnas position med (längder 0,38 m och medelvärde av massor 1,015 kg) över tid när pendlarna släpptes från motsatta vinklar. På högersidan är en FFT transformation av datan där de lokala topparna för amplituderna inträffar för  $f = 0,800 \text{ Hz}$  och  $f = 0,999 \text{ Hz}$ . För denna typ av svängning domineras frekvensen som korresponderar mot  $\sqrt{g/l + 2k/m}/2\pi$



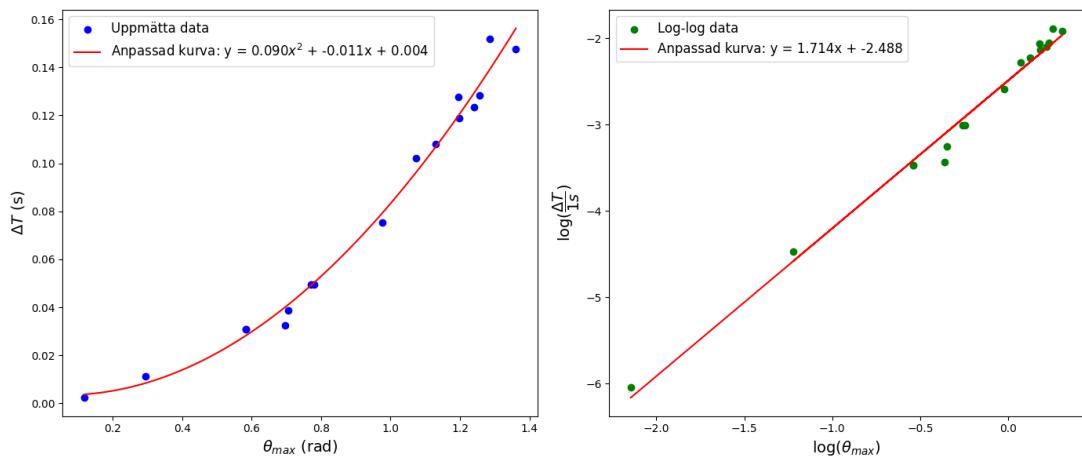
Figur 15: Till vänster i figuren visas pendelarnas position med (längder 0,38 m och medelvärde av massor 2,204 kg) över tid när en pendel släpptes från en startvinkel och den andra startade från vila. På högersidan är en FFT transformation av datan där de lokala topparna för amplituderna inträffar för  $f = 0,800 \text{ Hz}$  och  $f = 0,999 \text{ Hz}$



Figur 16: Till vänster i figuren visas två pendlars position över tid. Den översta pendeln har massa 1,013 kg och den understa har massa 1,492 kg, båda har längd 0,38 m. På högersidan är en FFT transformation av datan där de lokala topparna för amplituderna inträffar för  $f = 0,810 \text{ Hz}$  och  $f = 0,973 \text{ Hz}$ .



Figur 17: Till vänster i figuren visas två pendlars position över tid. Den översta pendeln har massa 1,013 kg och den understa har massa 2,516 kg, båda har längd 0,38 m. På högersidan är en FFT transformation av datan där de lokala topparna för amplituderna inträffar för  $f = 0,782$  Hz och  $f = 0,945$  Hz.



Figur 18: Datan i figurerna kommer från en pendel med massa 2.204 kg med en längd på 0.70 m masscentrum. Till vänster i figuren visas hur periodtiden för pendeln beror på vilken vinkel den släpps ifrån och en anpassad andragradskurva. Till höger visas samma data logaritmerad och en rät linje anpassad. Det väsentliga i figurer är konstanten lutningen på den anpassade räta linjen som är 1.714.