Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій.

Лабораторна робота №2

Теорія ймовірності та математична статистика

Тема: «Інтервальні оцінки параметрів розподілу»

Виконали
студенти групи ІА – 11:
Спускан Д. М.
Момот А. Р.
Старовойтов В.П.
Юрченко В.І.

Перевірив:
Цимбал С.І.

Київ 2023

Мета роботи: ознайомитись з методикою визначення інтервальних оцінок параметрів розподілу та дослідити, що впливає на якість інтервальних оцінок.

Хід роботи

Завдання

Продовжити роботу зі згенерованими вибірками у л/р No1 та:

1. Побудувати 95% двосторонні довірчі інтервали на математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення.

2. Дослідити залежність оцінок від рівня довіри та обсягу вибірки.

Реалізація

Формула для знаходження довірчого інтервалу на математичне сподівання:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Формула для знаходження довірчого інтервалу на середньоквадратичне відхилення:

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}}$$

```
import numpy as np
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
import lb_1



def confidence_interval_mean(sample, confidence_level):
    # Обчислення середнього вибіркового та стандартного відхилення
    sample_mean = np.mean(sample)
    sample_std = np.std(sample)

    # Обчислення z
    z_value = stats.norm.ppf((1 + confidence_level) / 2, loc=0, scale=1)
```

```
    # Обчислення довірчого інтервалу
    lower_bound = sample_mean - z_value * sample_std / np.sqrt(len(sample))
    upper_bound = sample_mean + z_value * sample_std / np.sqrt(len(sample))

    return lower_bound, upper_bound


def confidence_interval_std(sample, confidence_level):
    # Середньоквадратичне відхилення
    sample_std = np.std(sample)

    # Обчислення ступенів свободи
    dof = len(sample) - 1

    # Обчислення значень chi-квадрата
    chi2_lower = stats.chi2.ppf((1 - confidence_level) / 2, dof)
    chi2_upper = stats.chi2.ppf(confidence_level / 2, dof)

    # Обчислення довірчого інтервалу
    lower_bound = np.sqrt((dof * (sample_std ** 2)) / chi2_upper)
    upper_bound = np.sqrt((dof * (sample_std ** 2)) / chi2_lower)

    return lower_bound, upper_bound

def plot_curve_with_shaded_area(ax,conf, sample, lower_limit, upper_limit):
    # Крива
    sample=dict(sorted(sample.items()))
    x = np.array(list(sample.keys()))
    y = np.array(list(sample.values()))
    # Заливка під кривою
    ax.fill_between(x, y, color='orange', alpha=0.5)
    ax.fill_between(x, y, where=((x >= lower_limit) & (x <= upper_limit)),
color='blue', alpha=0.5)

    # Налаштування відображення
    ax.set_xlabel('Значення')
    ax.set_ylabel('Частота')
    ax.set_title('Крива з рівнем довірчості '+ str(conf)+' та обсягом вибірки
'+str(len(sample)))



confidence_levels = [0.8, 0.9, 0.95, 0.99]
sample_sizes = [10, 50, 80, 112]

mean_v=[[],[],[],[]]
std_v=[[],[],[],[]]
for i in range(len(confidence_levels)):

    for j in sample_sizes:
        print('Рівень довіри:', confidence_levels[i], ' для вибірки
розміром:', j)
        mean=confidence_interval_mean(lb_1.sample[:j],confidence_levels[i])
        print("Довірчий інтервал на математичне сподівання: ", mean)
        std=confidence_interval_std(lb_1.sample[:j],confidence_levels[i])
        print("Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення: ", std)

print('=======================================================================
==========================')
        mean_v[i].append(mean)
        std_v[i].append(std)
```

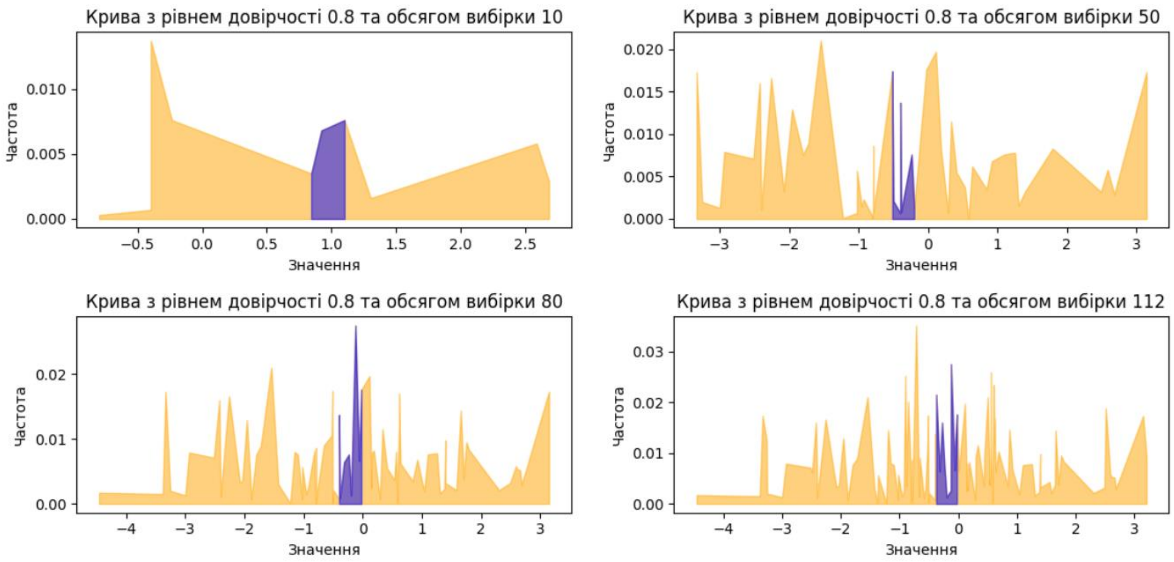
```
for k in range(len(mean_v)):
    fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(12, 6))
    plt.tight_layout(pad=4)
    plot_curve_with_shaded_area(axs[0,
0],confidence_levels[k],dict(list(lb_1.sample_dict.items())[:10]),
mean_v[k][0][0], mean_v[k][0][1])
    plot_curve_with_shaded_area(axs[0, 1],
confidence_levels[k],dict(list(lb_1.sample_dict.items())[:50]),
mean_v[k][1][0], mean_v[k][1][1])
    plot_curve_with_shaded_area(axs[1, 0],confidence_levels[k],
dict(list(lb_1.sample_dict.items())[:80]), mean_v[k][2][0], mean_v[k][2][1])
    plot_curve_with_shaded_area(axs[1, 1],confidence_levels[k],
dict(list(lb_1.sample_dict.items())[:112]), mean_v[k][3][0], mean_v[k][3][1])
    plt.show()


for k in range(len(std_v)):
    fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(12, 6))
    plt.tight_layout(pad=4)
    plot_curve_with_shaded_area(axs[0,
0],confidence_levels[k],dict(list(lb_1.sample_dict.items())[:10]),
std_v[k][0][0], std_v[k][0][1])
    plot_curve_with_shaded_area(axs[0, 1],
confidence_levels[k],dict(list(lb_1.sample_dict.items())[:50]),std_v[k][1][0]
, std_v[k][1][1])
    plot_curve_with_shaded_area(axs[1, 0],confidence_levels[k],
dict(list(lb_1.sample_dict.items())[:80]), std_v[k][2][0], std_v[k][2][1])
    plot_curve_with_shaded_area(axs[1, 1],confidence_levels[k],
dict(list(lb_1.sample_dict.items())[:112]), std_v[k][3][0], std_v[k][3][1])
    plt.show()
```

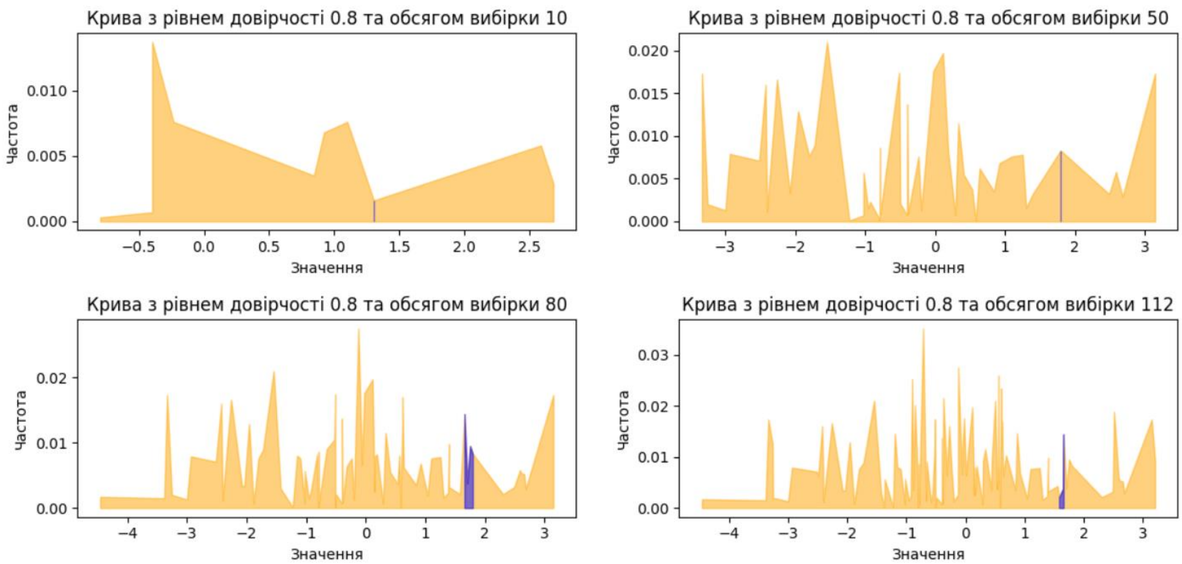
Результати

```
Рівень довіри: 0.8  для вибірки розміром: 10
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (0.28916432332967024, 1.2342756766703298)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.2896942317747047, 1.7134286117485962)
==========================================================================================
Рівень довіри: 0.8  для вибірки розміром: 50
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.6680786715919598, -0.09852132840804012)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.6236704723553383, 1.8126879109997773)
==========================================================================================
Рівень довіри: 0.8  для вибірки розміром: 80
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.4422890498063624, 0.021234049806362315)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.6577973209198613, 1.8058772025105632)
==========================================================================================
Рівень довіри: 0.8  для вибірки розміром: 112
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.38096453094543314, -0.008344397625995342)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.5698612785949824, 1.686440201280916)
==========================================================================================
```

На математичне сподівання

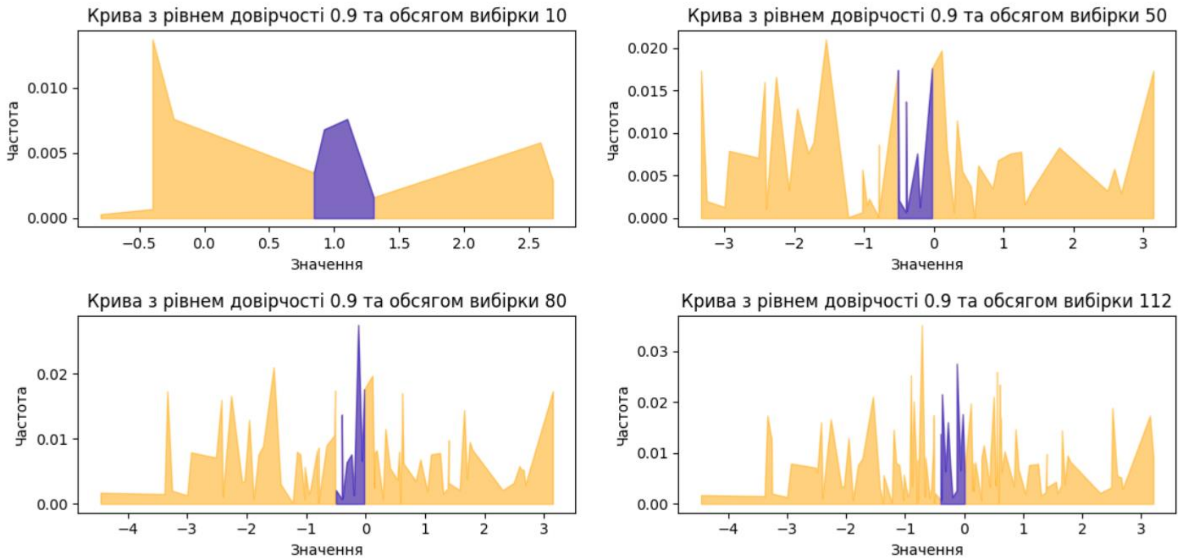


На середньоквадратичне відхилення

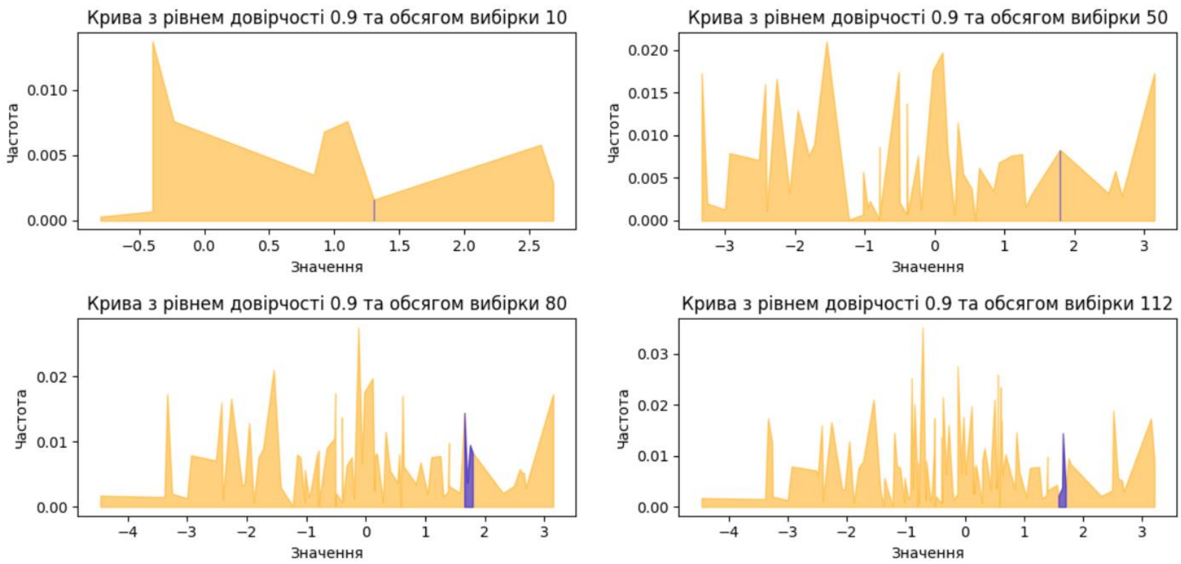


```
Рівень довіри: 0.9  для вибірки розміром: 10
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (0.15520135525285017, 1.3682386447471497)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.2490663838767195, 1.9183814204219158)
===============================================================================================
Рівень довіри: 0.9  для вибірки розміром: 50
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.7488094679295254, -0.017790532070474485)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.6024759714164039, 1.8882545105743644)
===============================================================================================
Рівень довіри: 0.9  для вибірки розміром: 80
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.5079902288016235, 0.08693522880162341)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.64081387656249, 1.8634768852675039)
===============================================================================================
Рівень довіри: 0.9  для вибірки розміром: 112
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.43378084602641376, 0.044471917454985244)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.556317772419024, 1.7310858100037285)
===============================================================================================
```

На математичне сподівання

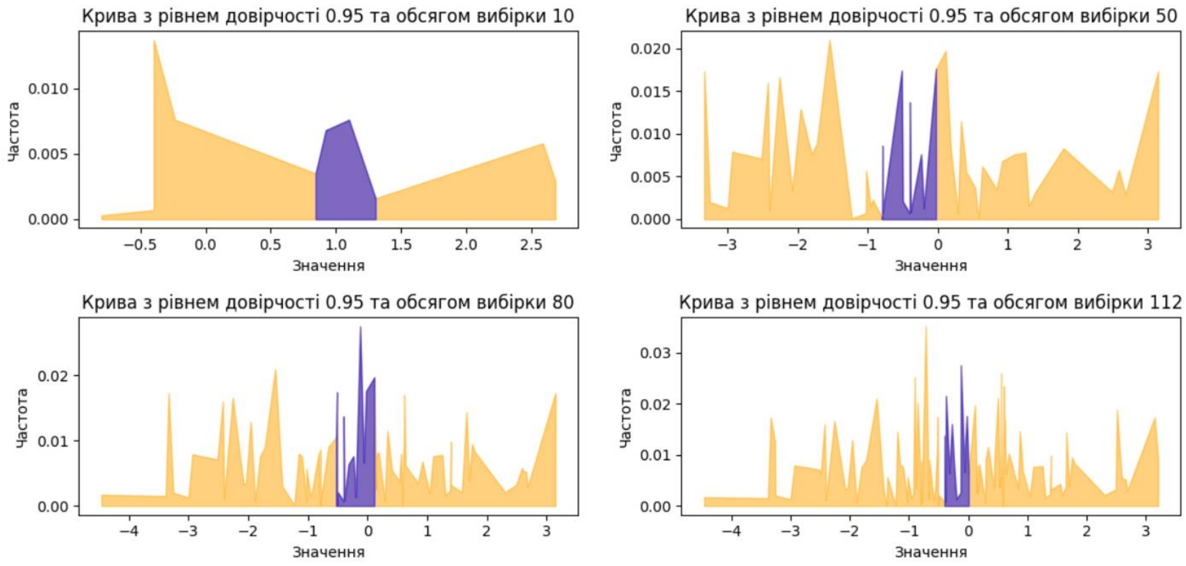


На середньоквадратичне відхилення

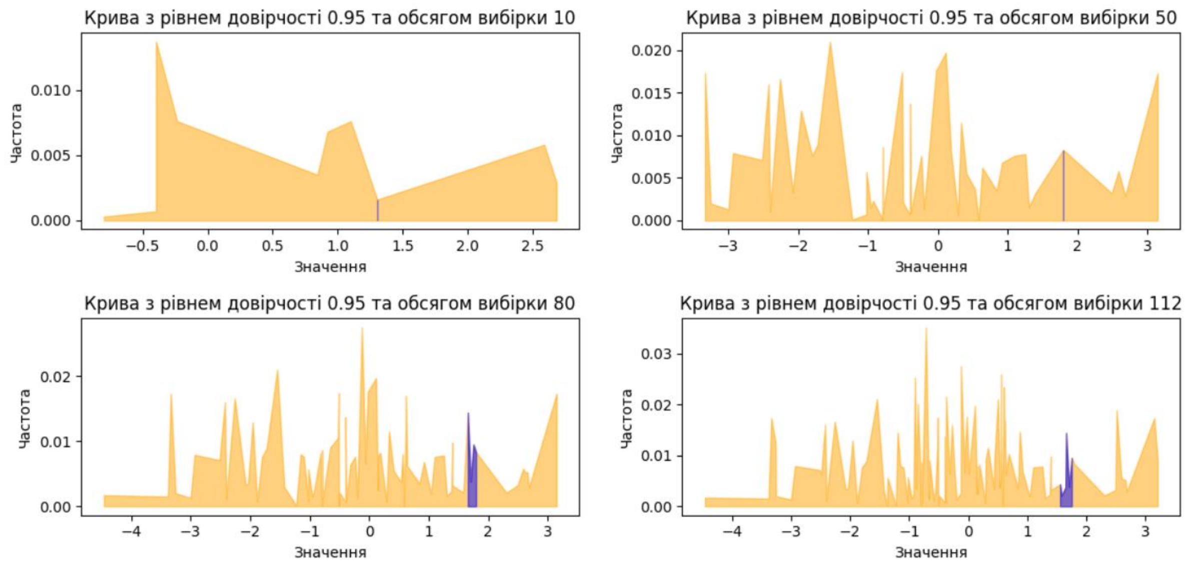



```
Рівень довіри: 0.95  для вибірки розміром: 10
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (0.03900845887663362, 1.4844315411233664)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.229805516067721, 2.1287514093060613)
===============================================================================================
Рівень довіри: 0.95  для вибірки розміром: 50
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.818831394047504, 0.0522313940475041)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.5921947862935055, 1.9580370223341719)
===============================================================================================
Рівень довіри: 0.95  для вибірки розміром: 80
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.5649762033017851, 0.14392120330178504)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.6325465134140789, 1.9159108962268327)
===============================================================================================
Рівень довіри: 0.95  для вибірки розміром: 112
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.4795911226519573, 0.09028219408052879)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.5497116252893444, 1.7714020881562982)
===============================================================================================
```

На математичне сподівання

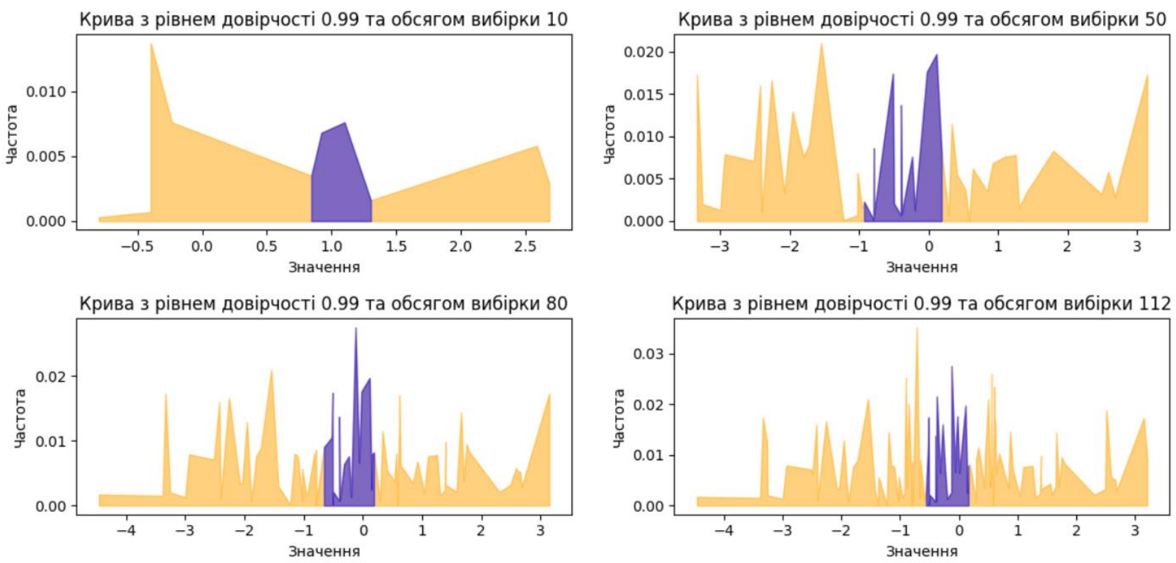


На середньоквадратичне відхилення

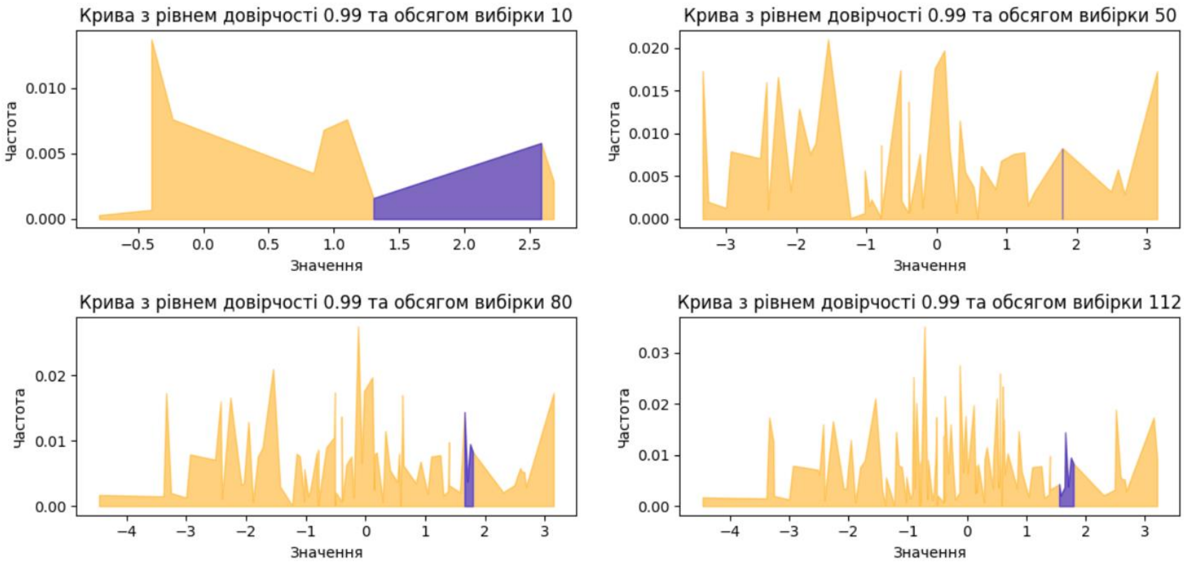


```
Рівень довіри: 0.99  для вибірки розміром: 10
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.18808396595165588, 1.7115239659516557)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.214804027085231, 2.655808837970704)
================================================================================
Рівень довіри: 0.99  для вибірки розміром: 50
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.9556852765928913, 0.18908527659289132)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.5840792432641178, 2.1070573205587992)
================================================================================
Рівень довіри: 0.99  для вибірки розміром: 80
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.6763520578853848, 0.25529705788538476)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.6260071417901394, 2.0255897908671314)
================================================================================
Рівень довіри: 0.99  для вибірки розміром: 112
Довірчий інтервал на математичне сподівання:  (-0.5691247096904056, 0.1798157811189771)
Довірчий інтервал на середньоквадратичне відхилення:  (1.5444800413003756, 1.8547695516764982)
================================================================================
```

На математичне сподівання



На середньоквадратичне відхилення



Висновок: ми ознайомились з методикою визначення інтервальних оцінок параметрів розподілу та дослідили, що впливає на якість інтервальних оцінок.