Iby and Aladar Fleischman
Faculty of Engineering
Tel Aviv University

הפקולטה להנדסה
ע"ש איבי ואלדר פליישמן
אוניברסיטת תל-אביב

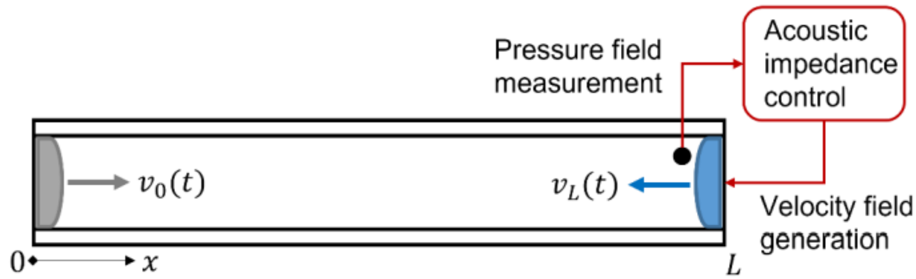
<u>דינמיקה ובקרה של מערכות</u>

פרויקטון 3

תכן מערכת בקרה לגלי קול במוליך אקוסטי חד מימדי

מגיש : אורון בנימין 208306274
תאריך : 12.1.23

מערכת הניסוי



איור 1: מוליך גלים אקוסטי חד-מימדי

באיור 1 נתון מוליך אקוסטי חד מימדי באורך L, כאשר בקצה $x = 0$ מופעל מקור מהירות אקוסטי אידיאלי $v_0(t)$. עקב כך, מתפתח שדה לחץ $p(x,t)$ ומהירות $v(x,t)$.

בקצה השני $x = L$ מופעל מקור מהירות אחר המתפקד כמקור בקרה $v_L(t)$ אשר מקבל משוב לחץ אקוסטי הנמדד ב-L, ומוגדר על ידי חוק הבקרה:

$$v_L(s) = -C(s) \cdot p(L,s)$$

ידוע לנו כי התווך במוליך האקוסטי הינו אוויר, להלן נתוני המערכת:

$$\rho_0 = 1.2 \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

$$b_0 = 1.42 \cdot 10^5 \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$$L = 60\ [cm]$$

$$t_s = 5 \cdot 10^{-4} [sec]$$

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$$

$$\tau = \frac{L}{c}$$

$$v_0(t) = \frac{2}{\pi^{0.25}\sqrt{3\sigma}}\ \left(1 - \left(\frac{t - t_s}{\sigma}\right)^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{t-t_s}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

בסעיפים הבאים נבצע סימולציה במשך זמן של 6τ יחידות זמן עבור מצבים שונים עם דרישות שונות, על מנת לבחון התקדמות והחזרה של הגל האקוסטי בתווך בעל הפרמטרים הידועים שלעיל. חשוב לציין שההנחות הן שהתווך אחיד, הזורם דחיס, הוזנח כוח הגרביטציה וכוחות גוף, וכן הנגזרת השנייה של המהירות במרחב זניחה. כמו כן, ההתייחסות לבעיה היא כבעיה חד מימדית.

להלן סקירה של התהליך הכללי שעשיתי :

ראשית, לאחר שימוש במשוואות הרציפות ונוויה סטוקס בכיוון איקס, מקבלים את משוואת הגלים.

המשוואה תחת תנאי התחלה 0, ותנאי השפה של הבעיה מתוארים כך :

$$c^2 p_{xx}(x,t) = p_{tt}(x,t)$$

$$-p_x(0,t) = \rho_0 \dot{v_0}(t)$$

$$p_x(L,t) = \rho_0 \dot{v_L}(t)$$

כאשר :

$$c^2 = \frac{b_0}{\rho_0}$$

לאחר ביצוע התמרת לפלס לבעיה, נקבל מד"ר במשתנה x בלבד.

לאחר פתירת המד"ר עם הצבת תנאי ההתחלה, ופיתוח הביטוי שבמכנה לטור אינסופי, אשר יעזור לנו לבצע התמרה הפוכה, נקבל כי הפתרון נראה בצורה הבאה :

$$\frac{P(x,s)}{z_0} = v_0(s)(e^{-\tau_x s} + e^{-(2\tau-\tau_x)s} + e^{-(2\tau+\tau_x)s} + e^{-(4\tau-\tau_x)s} + \cdots)$$

כלומר, הפתרון תלוי גם במרחב וגם בזמן.

לכן,לצורך ביצוע סימולציות נומריות, עלינו לבצע דיסקרטיזציה לבעיה.

נשתמש בהגדרת הנגזרת על מנת להפוך את המד"ח שיש לנו כעת למד"ר בכיוון איקס בלבד.

נבצע דיסקרטיזציה לאיקס על ידי הגדרת Δ ונקבל N נקודות איקס שונות. נקבל כי :

$$p_{tt} = \frac{b_0}{\rho_0} \cdot \frac{p(n+1) - 2p(n) + p(n-1)}{\Delta^2}$$

נגדיר את הקבועים :

$$K_0 = \frac{b_0}{\Delta}, M_0 = \rho_0 \cdot \Delta$$

ונקבל :

$$K_0\big(p(n+1) - 2p(n) + p(n-1)\big) = M_0 p_{tt}$$

בסופו של דבר המערכת שנרצה לפתור הינה מהצורה :

$$\ddot{\bar{p}} = -M^{-1}K\bar{P} + M^{-1}F_0\dot{v_0} + M^{-1}F_l\dot{v_L}$$

כאשר כלל המטריצות והוקטורים המופיעים לעיל הוגדרו בצורה מפורשת בקוד המטלב.

על ידי הגדרת וקטור מצב מתאים, נוכל לפתור את המשוואה הבאה:

$$\bar{x} = [\bar{p}\ \dot{p}]^T$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ M^{-1}K & 0 \end{pmatrix} [\bar{p}\ \dot{p}]^T + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}\ F_0 \end{pmatrix} \dot{v_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}\ F_L \end{pmatrix} \dot{v_L}$$

כלל המטריצות הרלוונטיות לפתרון המשוואה נמצאות בקובץ המטלב שאצרף לתרגיל.

א. ללא בקרה:

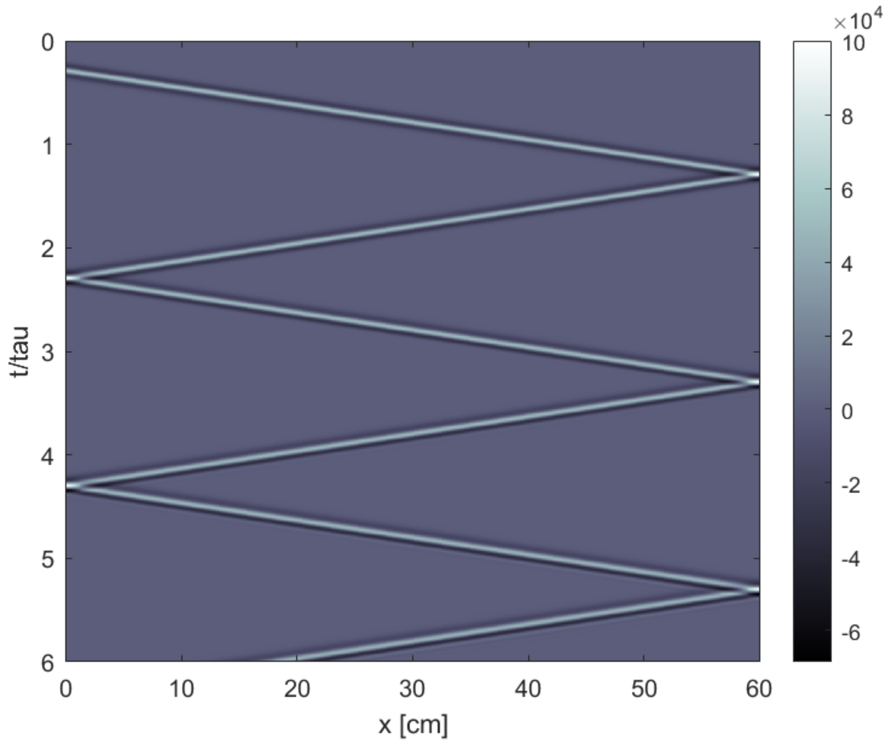
הפתרון בחוג פתוח מוגדר בצורה הכללית:

$$\bar{P}(S) = P_0(S) \cdot s \cdot v_0(s) + P_l(S) \cdot s \cdot v_L(s)$$

מכיוון שאצלנו הבקר מתאפס, אזי הפתרון הינו:

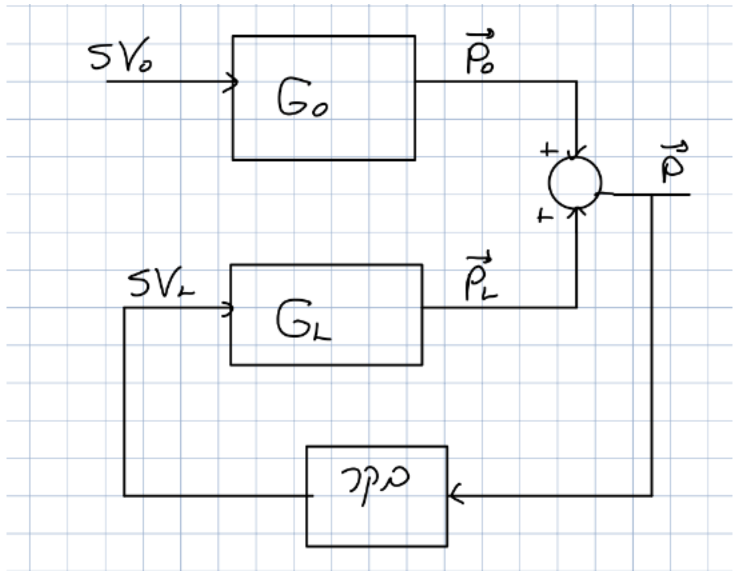
$$\bar{P}(S) = P_0(S) \cdot s \cdot v_0(s)$$

להלן הסימולציה בזמן המבוקש בחוג פתוח עבור $N = 300$:



ב. בקר המבטל לחלוטין את החזרת הגל מדופן $x = L$:

להלן תיאור סכמטי המתאר כיצד הבקר מבצע משוב למערכת:



בחלק זה , אנו רוצים לבקר את התהליך, כאשר אנו שולטים בכניסה בדופן x=L.
חוק הבקרה מוגדר כך:

$$(1)\ v_L(s) = -C(s) \cdot p(L,s)$$

כלומר הלחץ בדופן הינו מהצורה הבאה:

$$(2)\ P(L,s) = P_N(s) = P_{0-N}(s) \cdot s \cdot v_0(s) + P_{L-N}(s) \cdot s \cdot v_L(s)$$

לאחר התבה של משוואה 2 במשוואה 1 נקבל כי הפתרון בחוג הסגור מוגדר כך:

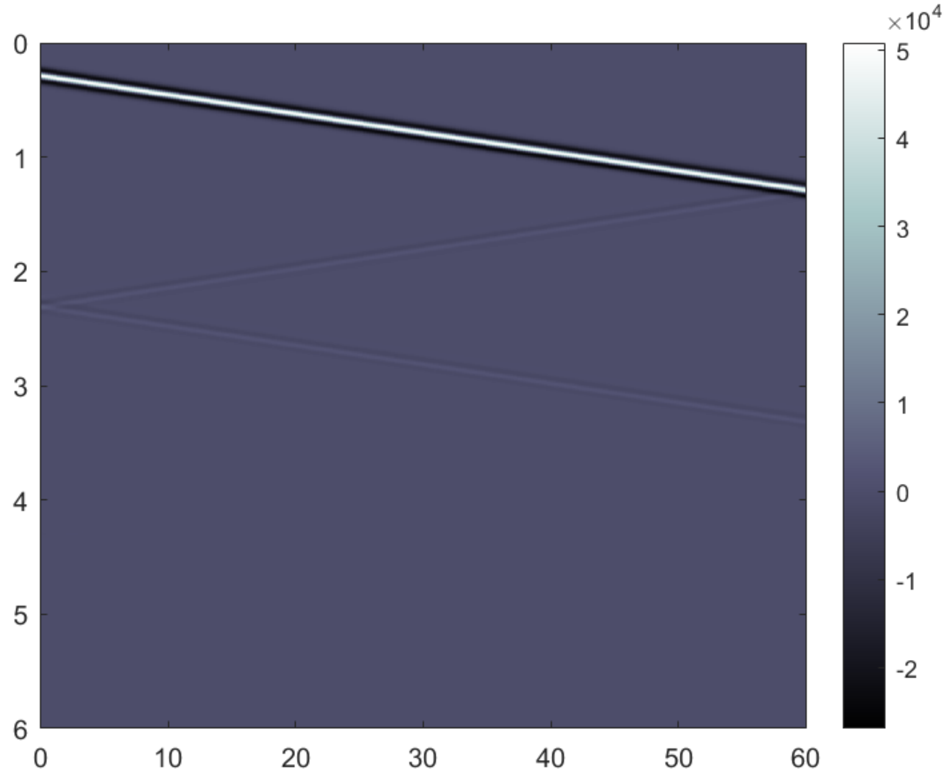
$$\bar{P}(S) = [P_0(s) \cdot s - P_L(s) \cdot s \cdot \frac{C(s)P_{0-N}(s)s}{1 + C(s)P_{L-N}(s)s}]v_0(s)$$

אנו מעוניינים לבקר את התהליך כך שיבטל לחלוטין את החזרת הגל מהדופן. לצורך כך ניעזר בהגדרת מקדם ההחזרה.
מקדם ההחזרה מוגדר כך:

$$R_L = \frac{Z_L - z_0}{Z_L + z_0}$$

ולכן, כאשר R_L מתאפס למעשה אין החזרה של הגל, והדבר מחייב כי $Z_L(s) = z_0$.

נגדיר את הבקר שלנו להיות $C(s) = 1/z_0$ על מנת שיעמוד בדרישה.
כלל הגדרות המטריצות החדשות בסעיף זה נמצאות בקובץ המטלב שהכנתי.
להלן הסימולציה בזמן :



ניתן לראות כי אכן אין החזרה של הגל בדופן.
הערה : כן ניתן לראות בקו בהיר יחסית החזרות של הגל, אך אני מניח כי הדבר נובע מכיוון שמספר האיטרציות שביצענו הוא לא אינסופי ולכן אף פעם לא יתאר בצורה מדויקת את פתרון המשוואה, שכן פתרוננו מתבצע בצורה נומרית.

ג. החוג הסגור עם בקר המדמה מוליך גלים באורך של $90cm$:

עבור מוליך גלים באורך L פונקציית התמסורת הינה:

$$\frac{P(x,s)}{v_0(s)} = z_0 \cdot \frac{e^{-\tau_x s} + R_L e^{-(2\tau - \tau_x)s}}{1 - R_L e^{-2\tau s}}$$

כאשר τ הוא הזמן שלוקח לגל לעבור מרחק L.

עבור מוליך גלים באורך $L_2 = 90cm$, פונקציית התמסורת הינה:

$$\frac{P(x,s)}{v_0(s)} = z_0 \cdot \frac{e^{-\tau_x s} + R_2 e^{-(2\tau_2 - \tau_x)s}}{1 - R_2 e^{-2\tau_2 s}}$$

כאשר R_2 הינו מקדם ההחזרה עבור מוליך גלים באורך L_2.

מטרתנו בסעיף זה הינה לדמות מוליך גל באורך $L_2 = 90cm$ ולכן אנו מצפים שבמידה והגל היה אכן באורך זה נקבל החזרה מלאה של הגל, כאשר כשנבצע את הסימולציה באורך הגל המקורי נראה קיטום בקצה ולאחר מכן החזרת הגל.

למעשה סעיף זה בנוי על מה צריך לשנות בתמסורת השנייה על מנת שהתמסורת של $L2$ תהיה כמו המקורית.

על מנת לעשות זאת עלינו לבחור את מקדם ההחזרה המקורי כך:

$$R_L = R_2 \cdot e^{-2\tau_\delta s}$$

כאשר: $\tau_\delta = \tau_2 - \tau$

האקספוננט משמש פה כמעין השהיה למערכת, על מנת שתדמה מוליך גלים באורך L_2 אך שנראה את ההתנהגות באורך הגל המקורי L.

R_2 הוא כאמור מקדם ההחזרה של הגל באורך L_2, ומכיוון שעלינו לדמות מוליך גלים באורך זה, נקבע את ערך זה להיות 1, על מנת לקבל החזרה מלאה של הגל, כלומר נבחר:

$$R_L = e^{-2\tau_\delta s}$$

כעת נוכל להשתמש בקשר הבא של R_L:

$$R_L = \frac{Z_L - z_0}{Z_L + z_0}$$

לאחר שנציב את המשוואה הראשונה בשנייה נקבל כי ערכו של Z_L על מנת לעמוד בדרישה הינו:

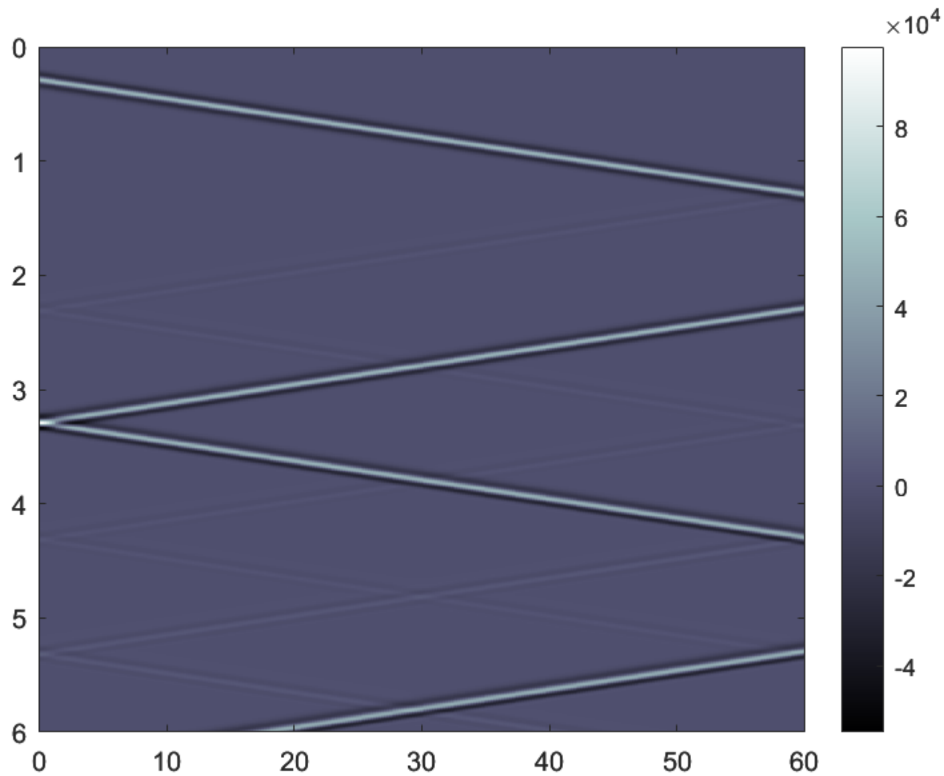
$$Z_L = \frac{z_0 \cdot (1 + e^{-2\tau_\delta s} 1)}{1 - e^{-2\tau_\delta s}}$$

כמו בסעיף הקודם, נבחר את הבקר שלנו להיות:

$$C(s) = \frac{1}{Z_L} = \frac{1 - e^{-2\tau_\delta s}}{z_0 \cdot (1 + e^{-2\tau_\delta s} 1)}$$

על מנת לעמוד בדרישה.

להלן הסימולציה בזמן של סעיף זה:



ואכן ניתן לראות מגרף הסימולציה כי אם היינו מבצעים לו המשכה עד לאורך L_2 היינו מקבלים החזרה מלאה של הגל, וכן קיבלנו את הקיטום הנדרש ודימינו למעשה את מוליך הגלים הארוך יותר.