



דינמיקה ובקרה של מערכות

פרויקטון 1

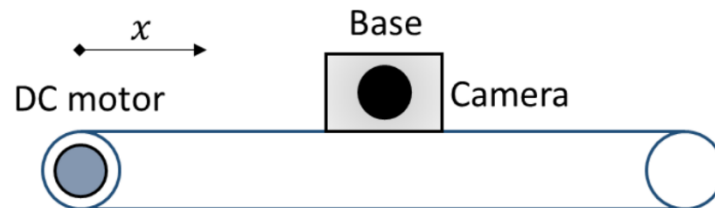
תכנון מערכת בקרה למיקום מצלמה בשיטת עיצוב החוג

מגיש : אורון בנימין 208306274

תאריך- 6.12.22



חלק א – מצלמה מקובעת לבסיס



א. נמצא את פונקציית התמסורת המקשרת בין מתח הכניסה למנוע ה-DC לבין מיקום המצלמה על המסוע.

משוואת המעגל שנוצר במנוע ה-DC :

$$(1) U = Ri + e_b$$

הקשר בין הזרם לבין המומנט שנוצר הינו :

$$(2) T_L = K_T i$$

הקשר בין הכא"ם לבין מהירות הסיבוב הינו :

$$(3) e_b = K_b \omega$$

נציב את הקשרים של (2), (3) ובנוסף נבודד את הזרם :

$$(4) i = \frac{U - K_b \omega}{R}$$

סכום המומנטים מורכב ממומנט שמפעיל החיכוך הויסקוזי, מומנט העומס והמומנט שמפעיל מנוע ה-DC. כמו כן האינרציה זניחה ולכן $J=0$. להלן משוואת המומנטים בהנחת האינרציה :

$$(5) T - T_L - c\omega = 0$$

המומנט שנוצא כתוצאה מהמסות במערכת (בהנחת תנאי אי החלקה) :

$$(6) T = F \cdot a = a \cdot (M + m)\ddot{x}$$

תחת הנחת זוויות קטנות ($\theta \rightarrow \sin(\theta)$) , הקשר בין המהירות הקווית למהירות הסיבובית הינו :



$$(7) \frac{\dot{x}}{a} = \omega$$

נציב כעת את הקשרים במשוואה (4) ונקבל כי :

$$i = \frac{U - K_b \omega}{R} = \frac{a \cdot U - K_b \dot{x}}{a \cdot R}$$

נציב קשר זה ואת שאר הקשרים במשוואה 5, ולאחר סידור נקבל כי :

$$(8) (M + m) \ddot{x} + \left(\frac{K_b \cdot K_T + c \cdot R}{a^2 \cdot R} \right) \cdot \dot{x} = \frac{K_T}{a \cdot R} \cdot U$$

כעת נעביר את המשוואה לצורת לפלס ונחליף את פונקציית התמסורת :

$$(M + m) \cdot s^2 \cdot X(s) + \left(\frac{K_b \cdot K_T + c \cdot R}{a^2 \cdot R} \right) \cdot s \cdot X(s) = \frac{K_T}{a \cdot R} \cdot U(s)$$

נחליף את פונקציית התמסורת המקשרת בין מיקום המצלמה למתח הנכנס :

$$G_{ux} = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{a \cdot K_T}{a^2 \cdot R(M + m) \cdot s^2 + (K_b \cdot K_T + c \cdot R) \cdot s}$$

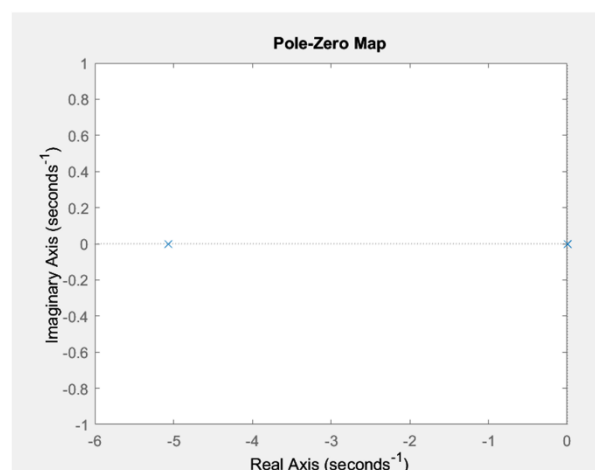
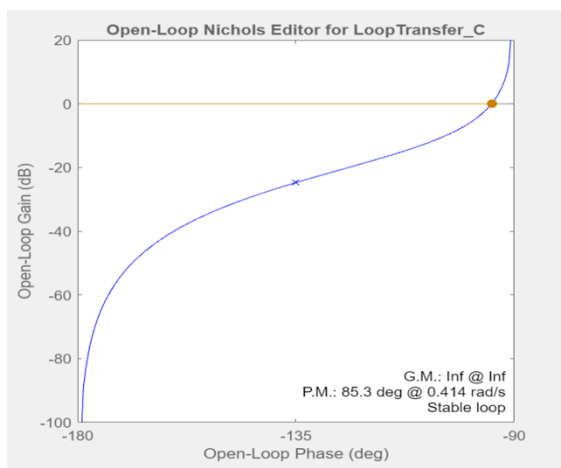
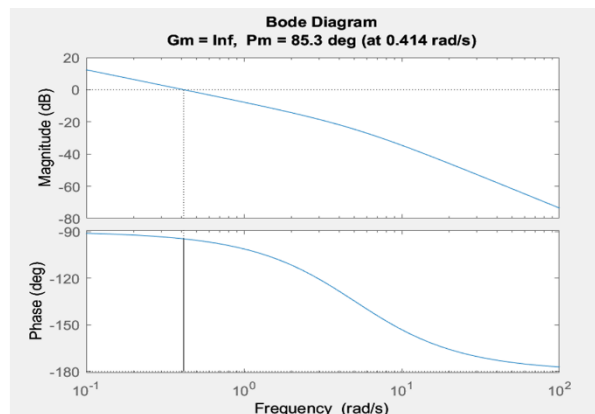
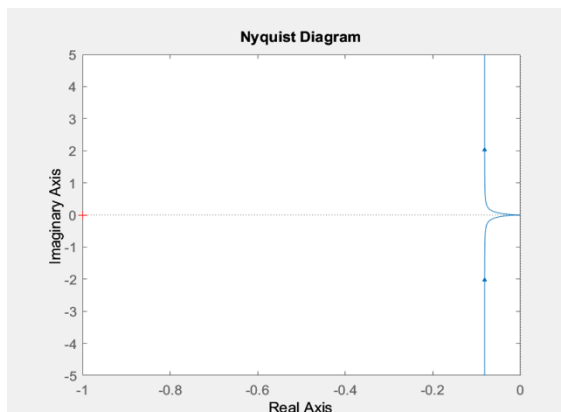
נחלק ב- $a \cdot K_T$ ולאחר מכן נציב את הפרמטרים בבעיה אשר נתונים לנו :

$K_T \left[\frac{N \cdot m}{A} \right]$	$K_b \left[\frac{V \cdot s}{rad} \right]$	$c \left[\frac{kg \cdot m^2}{s} \right]$	$R [\Omega]$	$a [m]$	$M [kg]$	$m [kg]$
0.0301	0.0301	$8.35 \cdot 10^{-5}$	6.5	0.02	0.1	0.01

לאחר הצבה נקבל את פונקציית התמסורת :

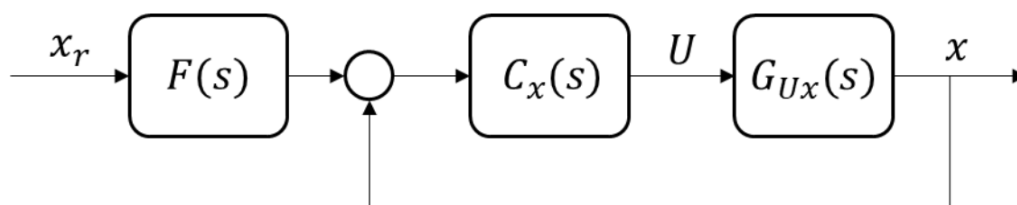
$$G_{ux} = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s \cdot (0.475 \cdot s + 2.406)}$$

להלן הגרפים עבור המערכת G_{ux} : מג"ש, בודה, ניקוויסט וניקולס :



גרף 1-4 – עקומות בודה, ניקויסט, ניקולס ומפת קטבים ואפסים של פונק' התמסורת.

בקרה בחוג סגור :



ב. על מנת לבדוק את יציבות החוג הסגור נבחן את הביטוי שמתקבל מ: $\Delta C.L$. לאחר הצבת ערכי הפרמטרים מתקבל הביטוי הבא :

$$\Delta C.L = 0.475 \cdot s^2 + 2.406 \cdot s + K$$



מכיוון שמתקבלת משוואה ריבועית מסדר 2, על מנת שהחוג הסגור יהיה יציב יש לדרוש כי כל המקדמים של החזקות של s יהיו בעלי אותו סימן, לכן ניתן לראות כי החוג יציב עבור כל $K > 0$.

דרך נוספת שבה ניתן לראות זאת הינה בעקום נייקוויסט בסעיף 1, שכן עבור כל K חיובי לא נקבל הקפות סביב הנקודה הקריטית.

כעת נתכנן בקר שיענה על הדרישות הבאות :

- תגובת המיקום לכניסת מדרגה באות היחוס הינה ללא שגיאת מצב מתמיד.
- תגובת היתר של המיקום לא עולה על 1% מהערך הסופי.
- מתח הכניסה למנוע לא עולה בשום שלב על 5 וולט בערכו המוחלט.
- תגובת המיקום נכנסת למעטפת של 2% מהערך הסופי לא יאחר מ 1.4 שניות.

דרישה a:

על מנת לקבל שגיאת מצב מתמיד עבור כניסת מדרגה באות הייחוס נצטרך לבחון את פונקציית התמסורת של היציאה חלקי הכניסה :

$$\frac{x}{xr} = F \cdot \frac{C \cdot G}{1 + C \cdot G} = \frac{55 \cdot K}{(s + 55) \cdot (0.475 \cdot s^2 + 2.406 \cdot s + K)}$$

ממשפט הערך הסופי ניתן לראות כי כאשר $s \rightarrow 0$ הערך הסופי של $x \rightarrow 1$ עבור כניסת מדרגה באות הייחוס, ולכן דרישה a מתקבלת באופן ישיר.

דרישה b:

על מנת לקבלת תגובת יתר של המיקום שלא עולה על 1% מהערך הסופי נדרוש יחס ריסון מקסימלי של :

$$\xi \geq \sqrt{\frac{\ln(O.S(max))^2}{\pi^2 + \ln(O.S(max))^2}} \geq \sqrt{\frac{\ln^2 0.01}{\pi^2 + \ln^2 0.01}} = 0.826$$

כבר מדרישה זו (b) נוכל להגיע לערך תיאורטי של בקר K שיענה כרגע על דרישות (a), (b).
נבצע חישוב תאורטי עבור K כך שיתקבל הריסון הנדרש על ידי קביעת התדר הטבעי, לאחר מכן נבצע ניסויים במטלב על מנת לקבל את ההגבר המדויק שיניב את הדרישות.
תמסורת החוג הסגור ללא הבקר המפצה הינה :

$$P = \frac{CG}{1 + CG} = \frac{K}{0.475 \cdot s^2 + 2.407 \cdot s + K} = \frac{K/0.475}{s^2 + 5.066 \cdot s + K/0.475}$$



המכנה של פונקציית התמסורת מתנהג כמערכת מסדר שני, לכן :

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 5.066 \rightarrow \omega_n = \frac{5.066}{2 \cdot 0.826} = 3.066 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

כעת נוכל לחלץ את ערכו של K :

$$\frac{K}{0.475} = \omega_n^2 \rightarrow K = 0.475 \cdot (3.066)^2 = 4.465 \rightarrow K = 4.465$$

נתייחס להמשך הדרישות עם בקר זה, ונראה האם יש לשנות את הבחירה בו או לא.

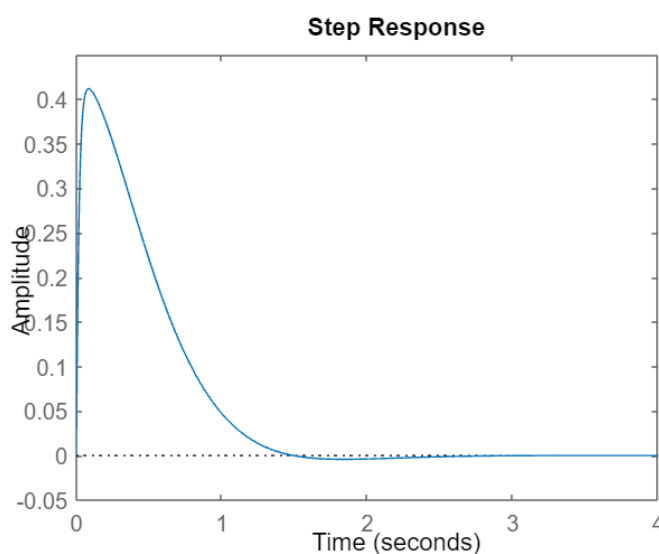
דרישה c:

ניתן לראות מדיאגרמת הבלוקים באיור 2 כי פונקציית התמסורת המתארת את המתח כתלות באות הייחוס הינה :

$$\frac{U}{xr} = \frac{F \cdot C}{1 + C \cdot G} = \frac{F \cdot K}{1 + K \cdot G} = \frac{55 \cdot (0.475s^2 + 2.406s)}{(s + 55) \cdot (0.475s^2 + 2.406s + K)}$$

על מנת לבחון את דרישה c נוציא מהמטלב את הביצועים בזמן ונבדוק האם בזמן מסוים מתקבל מתח שעולה בערך מוחלט על 5 וולט. (נצפה לכך שבעבור זמן רב המתח יירד ל-0 וולט – המנוע כבר לא יעבוד).

$$\text{להלן אות המתח } U(t) \text{ כתלות בכניסת הייחוס } : Xr(s) = \frac{0.095}{s}$$



גרף 2- תגובת המתח בזמן לאות הייחוס עבור בקר $K=4.465$



ניתן לראות מהגרף כי אכן הציפיות שהמתח לאחר זמן מה מתאפס, וכמו כן ניתן להבחין כי דרישה c מתקיימת עבור בקר פרופורציונלי זה שכן המתח לא עובר בערך מוחלט ערך של 5 וולט.

דרישה d:

על מנת לעמוד בדרישה בה תגובת המיקום נכנסת למעטפת של 2% מהערך הסופי לא יאוחר מ-1.4 שניות נסתכל על הנוסחה לחישוב זמן ההתייצבות:

$$t_s = \frac{-\ln(0.02)}{\zeta \cdot \omega_n} = \frac{3.912}{\zeta \cdot \omega_n} \leq 1.4[\text{sec}]$$

ניתן לראות כי ככל שהמכפלה $\zeta \cdot \omega_n$ גדולה יותר, כך זמן ההתייצבות יהיה קטן יותר.

נבדוק האם הבקר שיש לנו כעת $K = 4.465$ עומד בדרישה לפי תיאוריה:

$$\zeta \cdot \omega_n = \frac{5.066}{2} = 2.533$$

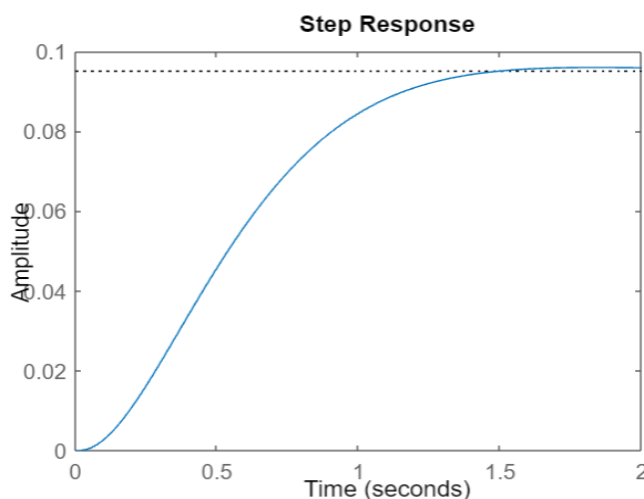
ולכן כעת זמן ההתייצבות עומד על:

$$t_s = \frac{3.912}{2.533} = 1.544 > 1.4[\text{sec}]$$

לכן ניתן לראות כי לפי הנוסחה התיאורטית לחישוב זמן ההתייצבות, הבקר שתכננו לא עומד בדרישה הנ"ל.

נבדוק במטלב האם אכן כך הדבר, או שמא הבקר שתכננו עומד בדרישה (d), מכיוון שהנוסחה לחישוב זמן ההתייצבות מהווה קירוב ולא תמיד מדויקת.

להלן תגובת המיקום בזמן עבור הבקר $K = 4.465$ ו- $\zeta = 0.826$:

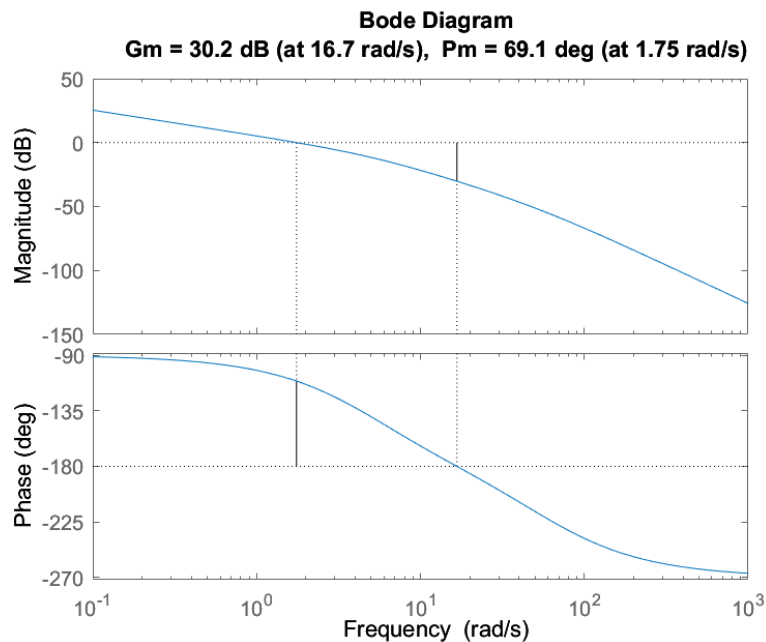


inf1 = struct with fields:

```
RiseTime: 0.8394
TransientTime: 1.3149
SettlingTime: 1.3149
SettlingMin: 0.0859
SettlingMax: 0.0959
Overshoot: 0.9967
Undershoot: 0
Peak: 0.0959
PeakTime: 1.8364
```



בגרף ניתן לראות כי דרישה (b) אכן מתקיימת שכן האובר-שוט נמוך מאחוז.
כמו כן, ניתן לראות בצד ימין כי זמן ההתייצבות (settling time) נמוך מ-1.4 שניות.
ולכן קיבלנו סה"כ כי הבקר הפרופורציונלי $K = 4.465$ עומד בכלל הדרישות לעיל.
את עודפי היציבות נוציא בעזרת גרף בודה :



ניתן לראות כי עודפי היציבות הינם :

$$G.M = 30.2[dB] \text{ at } \omega_p = 16.7 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

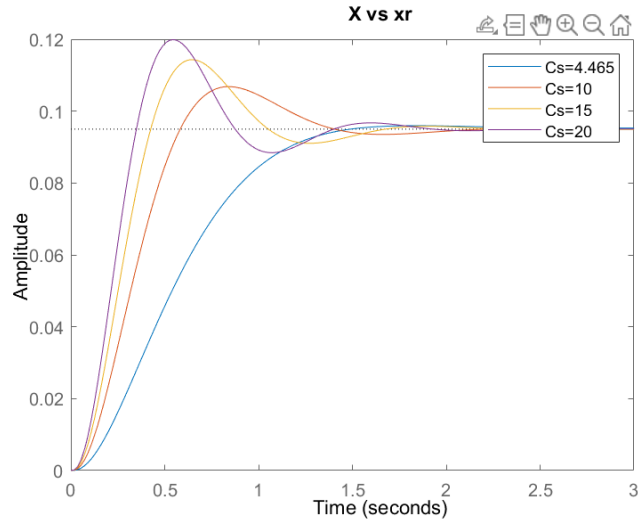
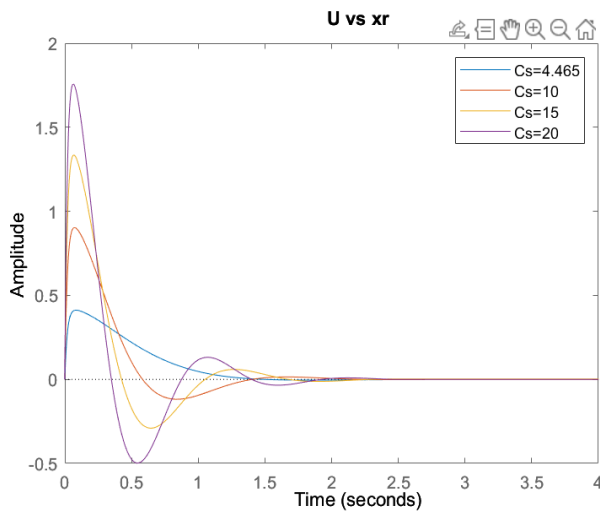
$$P.M = 69.1[deg] \text{ at } \omega_c = 1.75 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

ג. תכנון בקר פרופורציונלי יחד עם בקר קידום

כעת הדרישות מהבקר זהות לסעיף ב' למעט דרישה d שהשתנתה לכך שתגובת המיקום נכנסת למעטפת של 2% מהערך הסופי לא יאוחר מ-0.3 שניות.

ישנו קשר ישיר בין זמן ההתייצבות לבין רוחב הסרט ω_b כך שככל שנגדיל את רוחב הסרט, כך זמן ההתייצבות יקטן.

לכן, ננסה להגדיל את רוחב הסרט על ידי השימוש בכלל האצבע המקובל $\omega_b \approx \omega_c (1.2 \rightarrow 1.5)$.
לכן נגדיל את ω_c על ידי תכנון בקר פרופורציונלי, נבדוק מה קורה לדרישות c כתוצאה מהגדלת הבקר (דרישה a מתקיימת בכל מקרה) :



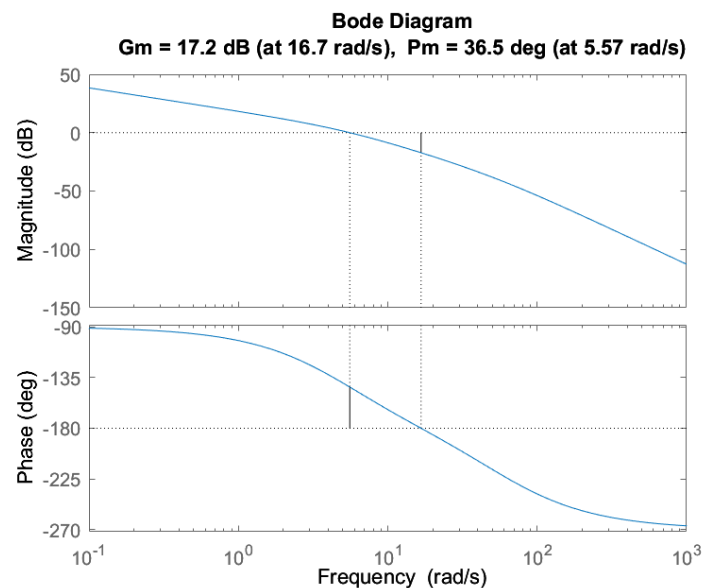
גרפים ____ – תגובות מדרגה של אותות המתח והמיקום כתלות באות הייחוס עם ערכי בקר פרופ' שונים.

ניתן לראות מהגרפים לעיל כי המגמה הינה שהגדלת ערכי מביא לזמן עלייה קטן יותר, אך לזמן התייצבות גדול יותר ואובר-שוט משמעותי יותר.

נוסף על כך ניתן לראות כי עבור כל ערך של בקר שבחרנו, דרישה c מתקיימת שכן המתח לא עובר בערכו המוחלט 5 וולט בשום שלב של התגובה בזמן.

לכן, למרות שהגדלנו את ערכו של ω_c כאשר הגדלנו את ההגבר, פגענו בדרישה b שכן האובר-שוט גבוה גבוה ב- 1% כנדרש.

להלן עודפי היציבות של בקר פרופורציונלי בגודל 20 :



ניתן לראות כי כאשר



לכן, נוסיף בקר קידום לבקר הפרופורציונלי אשר יביא לעודף הפאזה שהיה בסוף סעיף ב אך עם תדר החצייה שיש כעת :

$$P.M_{des} = 69.1[deg] \text{ at } \omega_c = 5.57 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$P.M_{real} = 35.6[deg] \text{ at } \omega_c = 5.57 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

בקר קידום נראה מהצורה הבאה :

$$D_{lead} = \frac{\sqrt{\alpha} \cdot s + \omega_c}{s + \sqrt{\alpha} \cdot \omega_c}$$

כאשר נחשב את α בעזרת נוסחה לחישוב :

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

כאשר ϕ תחושב לפי ההפרש בין עודף הפאזה הרצוי למצוי.

נקבל כי : $\phi = 33.5^\circ$, $\alpha = 3.463$, ולכן נקבל כי בקר הקידום שלנו הינו :

$$D_{lead} = \frac{1.86 \cdot s + 5.57}{s + 10.36}$$

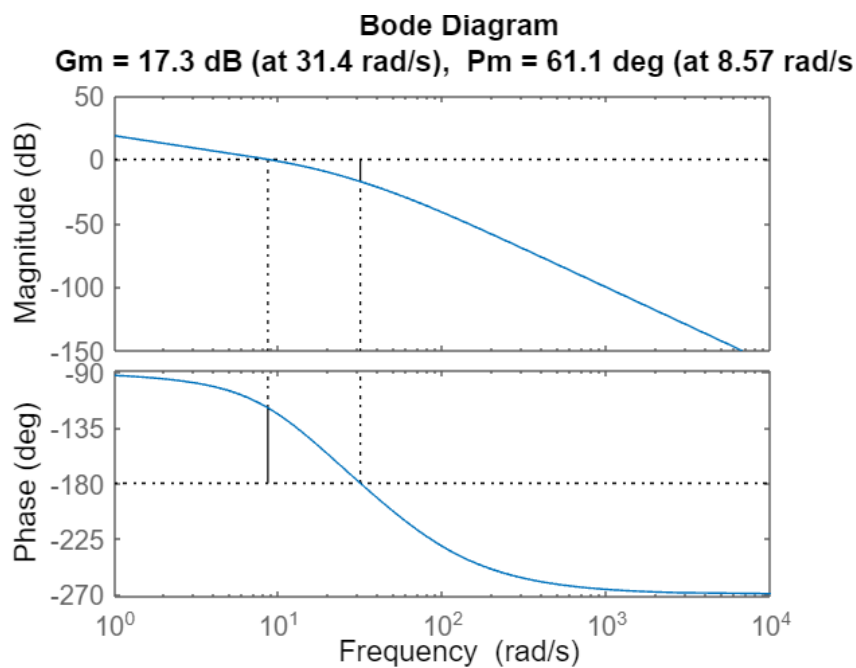
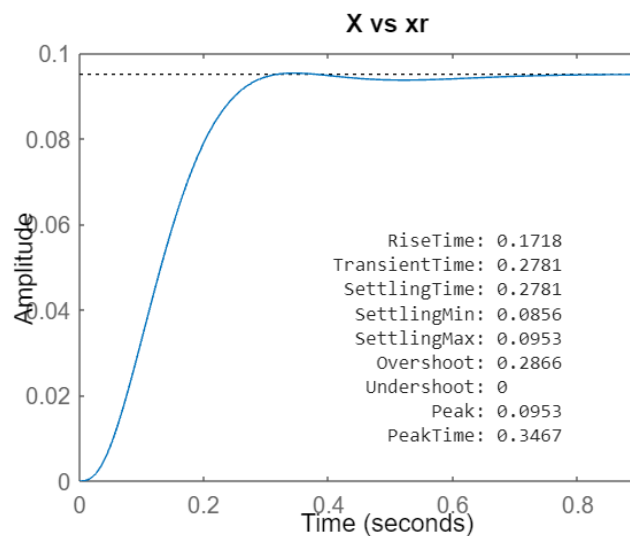
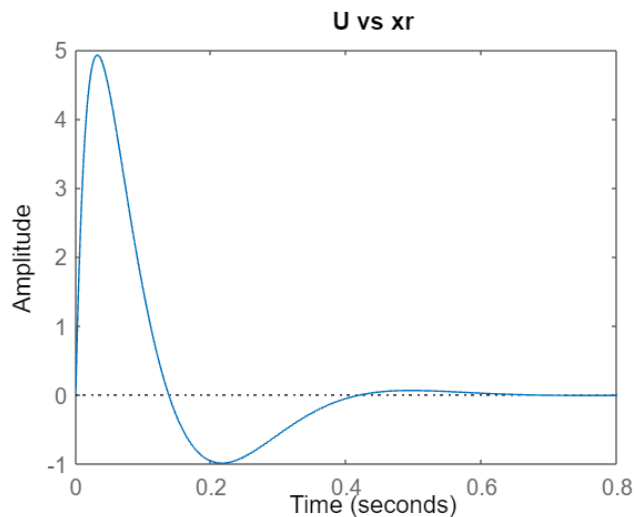
סה"כ הבקר הכולל הינו :

$$C(s) = D_{lead} \cdot C_S = 20 \cdot \frac{1.86 \cdot s + 5.57}{s + 10.36}$$

לאחר בדיקה של הבקר הנ"ל והמון איטרציות הכוללות ניסוי וטעייה במטלב, הבנתי שעל מנת לשמור על הדרישות אצטרך להגדיל את ההגבר לבערך 40 ולהשתמש בשני בקרי קידום. ישנו טווח גבוה של הגברים שדרישת המתח לא מתקיימת כיוון שעובר את ה 5 וולט, וישנו טווח של הגברים נמוכים בהם רוחב הפס אינו מספיק בשביל להקטין את זמן ההתייבבות. לבסוף לאחר ניסויים רבים הבקר הסופי הינו :

$$C_{-}t(s) = D_{lead} \cdot C_S = 41 \cdot \left(\frac{1.42 \cdot s + 8.57}{s + 12.16} \right)^2$$

כאשר כל בקר קידום מקיים : $\phi = 10^\circ$, ותדר החצייה בהגבר של 41 הינו $\omega_c = 8.57 \left[\frac{rad}{s} \right]$.



ניתן לראות בשלושת הגרפים שלעיל כי זמן ההתייצבות הינו 0.2781 שניות ועומד בדרישה, האובר-שוט קטן מ-1% (0.2866) וכי המתח לא עולה בערך מוחלט מעל 5 וולט. עודפי היציבות עם בקר זה הינם :

$$G.M = 17.3[dB] \text{ at } \omega_p = 31.4 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

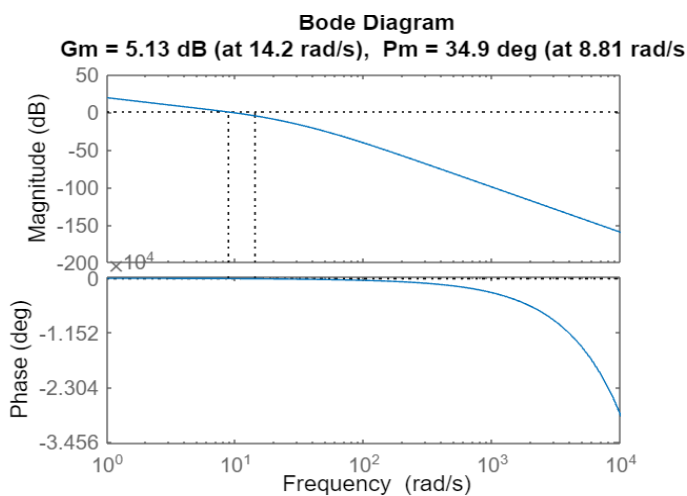
$$P.M = 61.1[deg] \text{ at } \omega_c = 8.57 \left[\frac{rad}{s} \right]$$



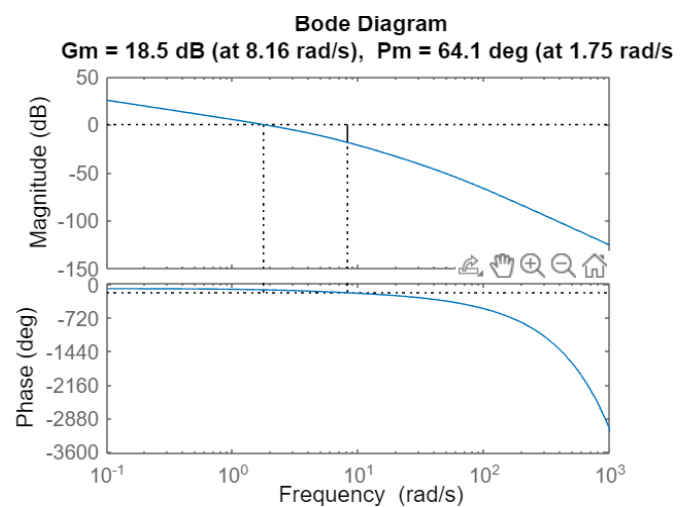
ד. לאחר ההשהייה, פונקציית התמסורת החדשה בין המיקום למתח הינה :

$$G_{ux_new} = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s \cdot (0.475 \cdot s + 2.406)} \cdot e^{-0.05 \cdot s}$$

להלן עודפי היציבות של המערכת בסעיפים ב' וג':



עודפי יציבות מסעיף ג' עם השהייה

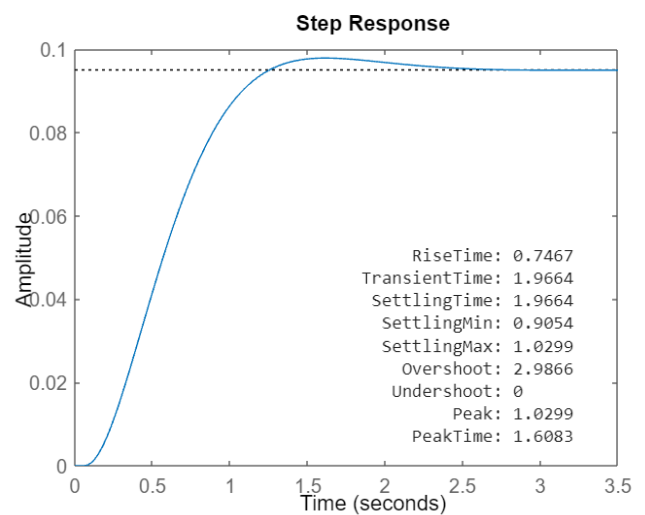
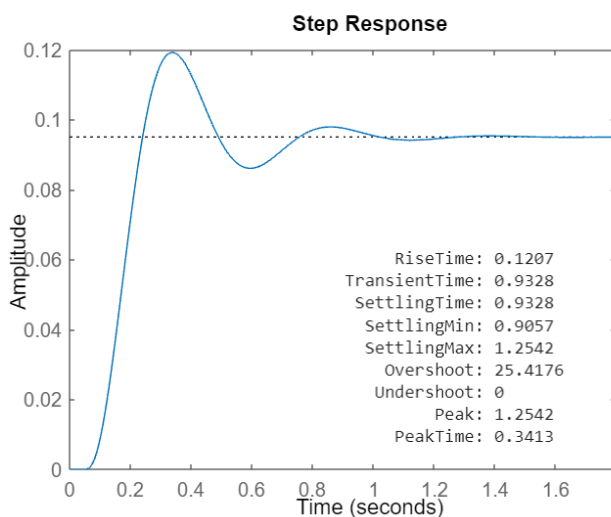


עודפי יציבות מסעיף ב' עם השהייה

עבור סעיף ב' עודפי היציבות קטנו, וכצפוי תדר החצייה נשאר זהה (ω_c).

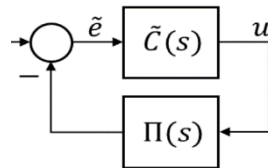
עבור סעיף ג' עודפי היציבות קטנו בצורה משמעותית יותר, אך שוב כצפוי תדר החצייה נשאר זהה.

ביצועי החוג הסגור :





ביצועי חוג סגור מסעיף ג' ביצועי חוג סגור מסעיף ב' ניתן לראות כי בשני הסעיפים ההשהייה משפיעה משמעותית על ביצועי החוג הסגור הן בהגדלת ה- s והן בהגדלת זמן ההתייצבות של המערכת. ה. נתכנן בקר מסוג מפצה זמנים מתים כאשר הבקר הראשי הינו הבקר מסעיף ג' :



$$C_t(s) = K \cdot D_{lead}^2 = 41 \cdot \left(\frac{1.42 \cdot s + 8.57}{s + 12.16} \right)^2$$

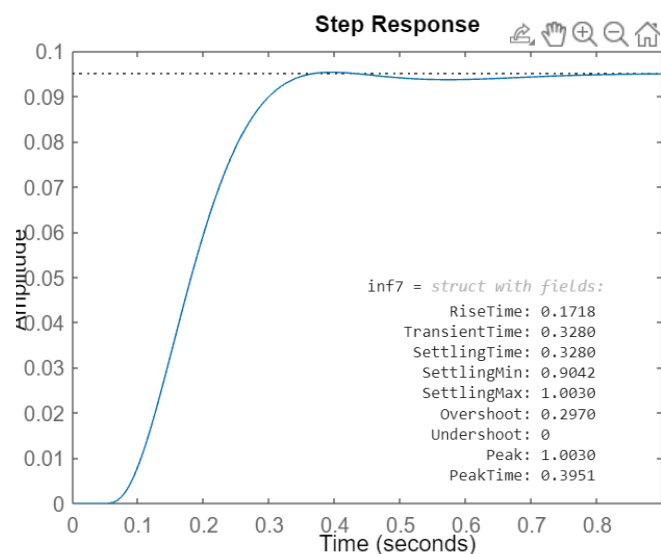
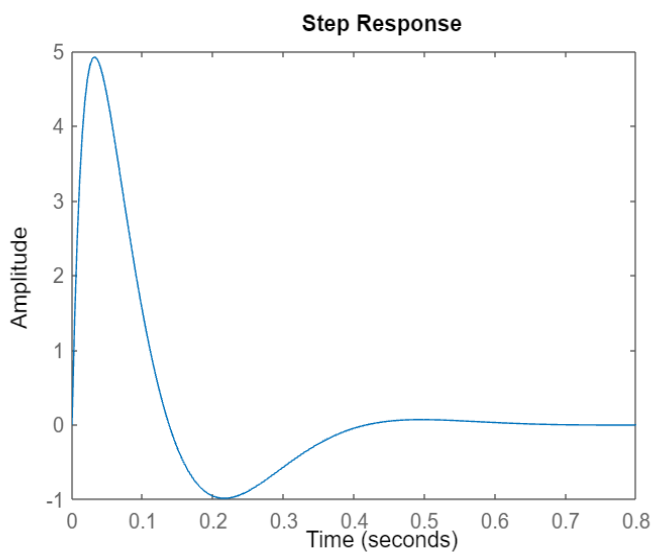
בקר פאי :

$$\pi(s) = G(s) \cdot (1 - e^{-0.05 \cdot s}) = \frac{1}{s \cdot (0.475 \cdot s + 2.406)} \cdot (1 - e^{-0.05 \cdot s})$$

הבקר החדש הינו מפצה זמנים מתים מהתצורה :

$$C_{DTC} = \frac{C_t(s)}{1 + C_t(s) \cdot \pi(s)}$$

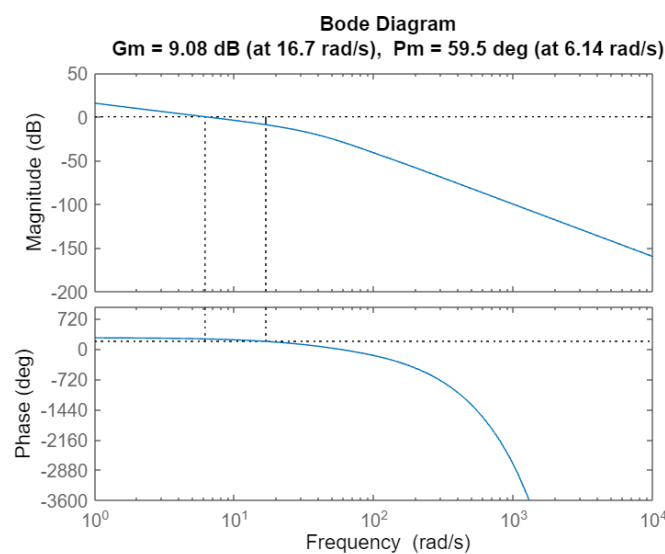
להלן ביצועי החוג הסגור של בקר זה עם הדרישות מסעיף ג' :





נשים לב משני הגרפים ומהנתונים לעיל, כי אכן המתח לא עולה על ערך של 5 וולט, אך בתגובת המדרגה לאות הייחוס, כמצופה, נוסף לזמן ההתייבבות בסעיף ג' את ההשהייה של 0.05 שניות, ולכן זמן ההתייבבות עולה על הדרישה מסעיף ג' של 0.3 שניות.
כמו כן כצפוי, מכיוון שכל תמסורת החוג הפתוח כעת השתנתה, גם עודפי היציבות השתנו.

להלן עודפי היציבות עם בקר זה :



1. אי ודאות במסת המצלמה

תחילה, ניתן לומר שהנתאי הראשון ליציבות רובסטית מתקיים שכן הבקרים מסעיף ג' וה' מייצבים את התהליך הנומינלי.

אי הודאות הינה במסת המצלמה ולכן :

$$m = m_0 + \delta_m, \quad \delta_m \in [-\delta_{max}, \delta_{max}]$$

כאשר m_0 הינה המסה הידועה במצב הנומינלי, ו- δ_m הינה אי הודאות במסה.

הערה : לצורכי נוחות החישוב נסמן את פרמטרי פונקציית התמסורת מסעיף א' כך :

$$A = \frac{K_T}{a \cdot R}, \quad B = \left(\frac{K_b \cdot K_T + c \cdot R}{a^2 \cdot R} \right)$$

נמצא כעת את רדיוס אי הודאות המכפלתית :



$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{P_0(s)} - 1 &= \frac{\frac{1}{\frac{M+m}{A} \cdot s^2 + \frac{B}{A} \cdot s} \cdot e^{-0.05 \cdot s}}{\frac{1}{\frac{M+m_0}{A} \cdot s^2 + \frac{B}{A} \cdot s} \cdot e^{-0.05 \cdot s}} - 1 = \frac{\frac{M+m_0}{A} \cdot s^2 + \frac{B}{A} \cdot s - \frac{M+m}{A} \cdot s^2 - \frac{B}{A} \cdot s}{\frac{M+m}{A} \cdot s^2 + \frac{B}{A} \cdot s} \\ &= \frac{(m_0 - m) \cdot s}{(M+m) \cdot s + B} = \frac{(-\delta_m) \cdot s}{(M+m_0 + \delta_m) \cdot s + B} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{P(i\omega)}{P_0(i\omega)} - 1 \right| = \left| \frac{(-\delta_m) \cdot i\omega}{(M+m_0 + \delta_m) \cdot i\omega + B} \right| = \frac{|\delta_m| \cdot \omega}{\sqrt{(M+m_0 + \delta_m)^2 \cdot \omega^2 + B^2}} \leq l_m(\omega)$$

ולכן :

$$l_m(\omega) = \frac{\delta_{m,max} \cdot \omega}{\sqrt{(M+m_0 - \delta_{m,max})^2 \cdot \omega^2 + B^2}}$$

כעת, נבדוק במטלב את תנאי הרובסטריות :

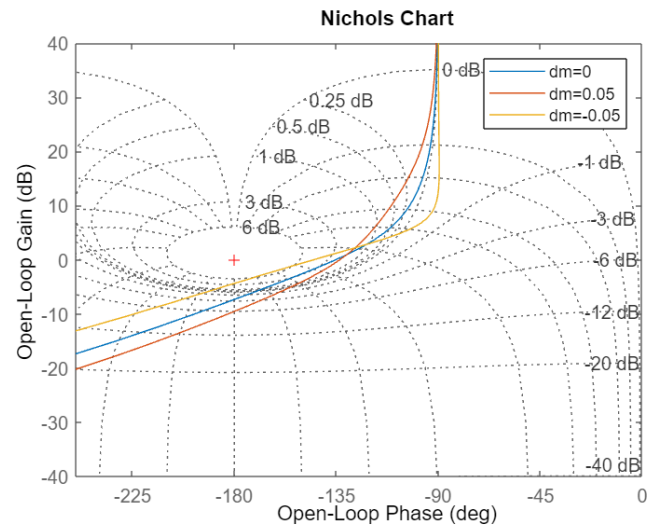
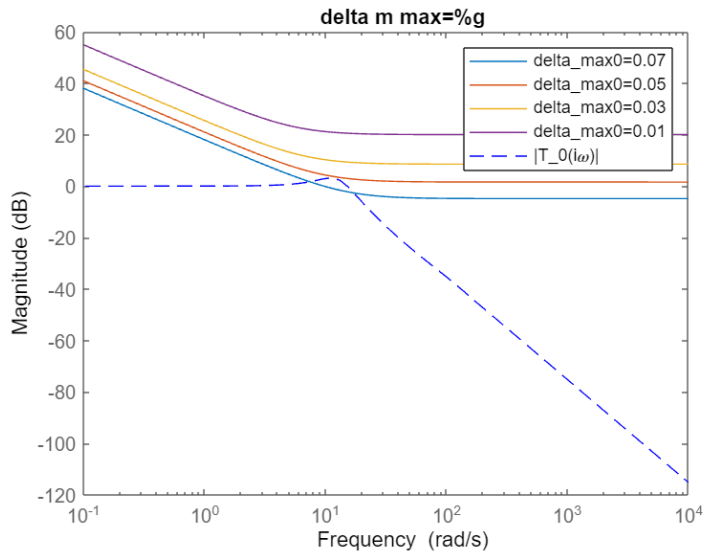
$$|T_0(i\omega)| = \left| \frac{C(i\omega) \cdot P_0(i\omega)}{1 + C(i\omega) \cdot P_0(i\omega)} \right| < \frac{1}{l_m(\omega)}$$

נצייר במטלב את $T_0(i\omega)$ ועל גבי זה את $\frac{1}{l_m(\omega)}$ עבור השערות שונות של ערכי $\delta_{m,max}$, ונחפש השקה שתבטא לנו את אי הודאות המירבית עבורה הבקר מייצב את החוג הסגור באופן רובסטי.

עבור הבקר מסעיף ג' :

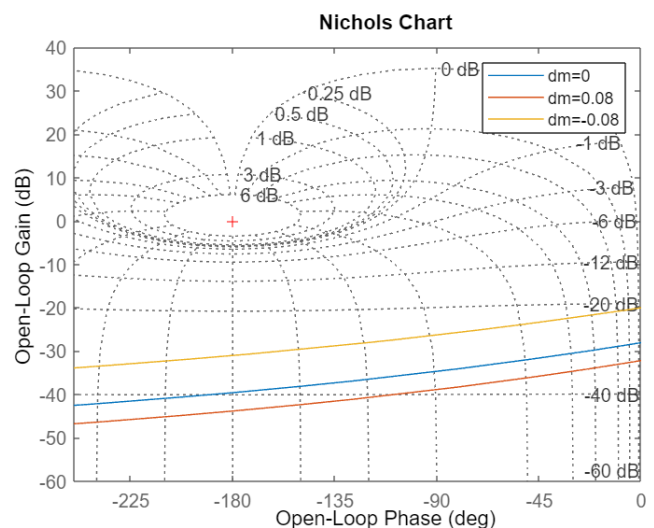
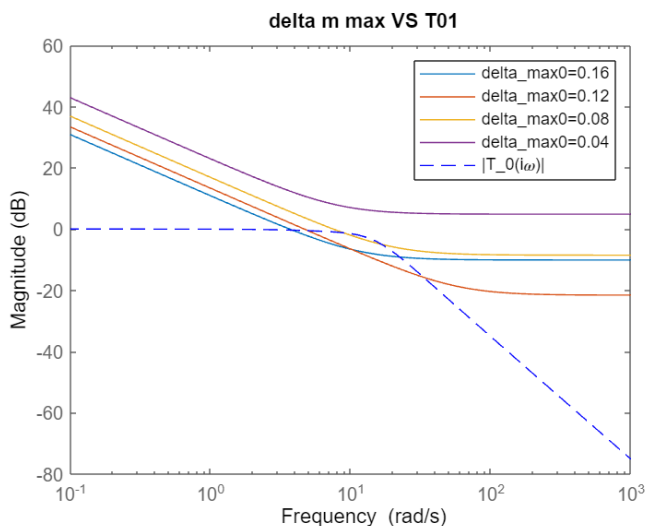
$$C_t(s) = D_{lead} \cdot C_s = 41 \cdot \left(\frac{1.42 \cdot s + 8.57}{s + 12.16} \right)^2$$

מתקבל שלאחר ניסוי וטעייה ההשקה מתקבלת כאשר $\delta_{m,max} = 0.05 \text{ kg}$. נראה זאת :



מכיוון שאי הודאות שקיבלנו גדולה יותר מהערך הנומינלי של המסה, ניתן להסיק כי המערכת יציבה לכל גודל של אי-ודאות, שכן, אי הודאות יכולה להיות במקסימום הערך הנומינלי עצמו.
עבור הבקר מסעיף ה':

חזרנו על אותו התהליך האיטרטיבי וחיפשנו את ההשקה :



ניתן לראות כי כאשר $\delta_{m,max} = 0.08 \text{ kg}$ מתקבלת השקה.

ולכן, עבור הבקר מסעיף ה' אי הודאות המקסימלית אשר מייצבת את החוג בצורה רובסטית גדולה יותר מאשר הבקר בסעיף ג', אך מכיוון שאי הודאות המקסימלית יכולה להיות הערך הנומינלי עצמו, אזי המערכת יציבה לכל אי ודאות.



ז. אי ודאות בהשהיית המערכת:

כעת:

$$h = h_0 + \delta_h \quad \delta_h \in [0, \delta_{h,max}]$$

תחילה נחשב את עודף הזמן המת התאורטי, כלומר החישוב המדויק של אי הודאות על ידי עודפי היציבות מסעיף ה':

$$DM = \frac{PM \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right)}{\omega_c} = \frac{59.5 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right)}{6.14} = 0.169[sec]$$

גם כאן ניתן לומר שהתנאי הראשון ליציבות רובסטית מתקיים שכן הבקר מסעיף ה' מייצב את התהליך הנומינלי.

נפעל באופן דומה לסעיף הקודם ונשתמש בזהויות טריגונומטריות שנלמדו גם בהרצאות:

$$\frac{P(s)}{P_0(s)} - 1 = \frac{\frac{1}{\frac{Mt}{A} \cdot s^2 + \frac{B}{A} \cdot s} \cdot e^{-h \cdot s}}{\frac{1}{\frac{Mt}{A} \cdot s^2 + \frac{B}{A} \cdot s} \cdot e^{-h_0 \cdot s}} - 1 = \frac{e^{-h \cdot s}}{e^{-h_0 \cdot s}} - 1$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{P(i\omega)}{P_0(i\omega)} - 1 \right| &= \left| \frac{e^{-h \cdot i\omega}}{e^{-h_0 \cdot i\omega}} - 1 \right| = |e^{h_0 \cdot i\omega - h \cdot i\omega} - 1| \\ &= |\cos(\omega(h - h_0)) - i \cdot \sin(\omega(h - h_0)) - 1| \\ &= \sqrt{(\cos(\omega(h - h_0)) - 1)^2 + \sin^2(\omega(h - h_0))} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos(\omega\delta_h))^2} = \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\omega\delta_h}{2}\right)} = 2 \left| \sin\left(\frac{\omega\delta_h}{2}\right) \right| \leq l_m(\omega) \end{aligned}$$

החסם שמתקבל הינו:

$$l_m(\omega) = \begin{cases} 2 \left| \sin\left(\frac{\omega\delta_{h,max}}{2}\right) \right|, & 0 < \omega < \frac{\pi}{\delta_{h,max}} \\ 2, & \frac{\pi}{\delta_{h,max}} < \omega \end{cases}$$

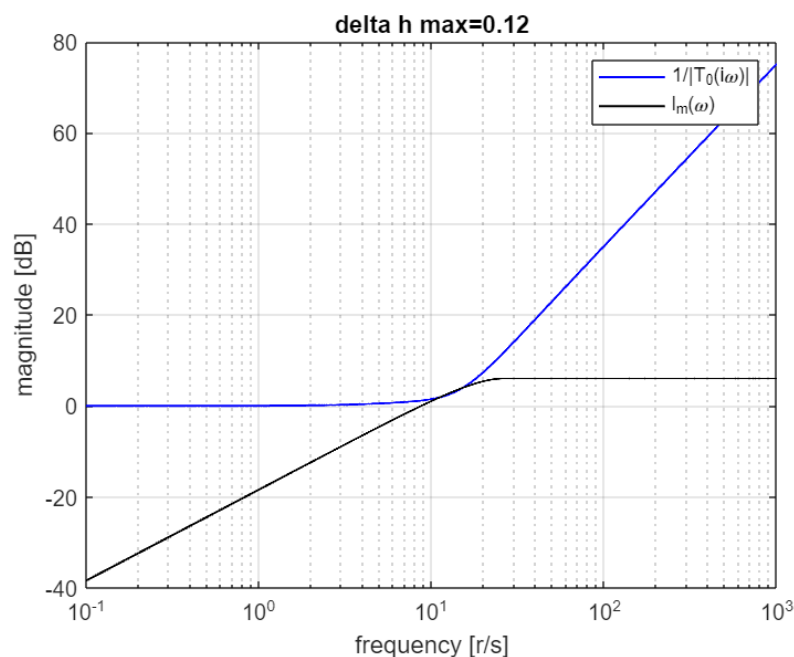
נבדוק במטלב את תנאי הרובסטיות עבור בקר מסעיף ה':



$$|T_0(i\omega)| = \left| \frac{C(i\omega) \cdot P_0(i\omega)}{1 + C(i\omega) \cdot P_0(i\omega)} \right| < \frac{1}{l(\omega)}$$

בדומה לסעיף הקודם, נצייר במטלב את $T_0(i\omega)$ ועל גבי זה את $\frac{1}{l_m(\omega)}$ עבור השערות שונות של ערכי $\delta_{h,max}$, ונחפש השקה שתבטא לנו את אי הודאות המירבית עבורה הבקר מייצב את החוג הסגור באופן רובסטי.

מתקבל שלאחר ניסוי וטעייה ההשקה מתקבלת כאשר $\delta_{h,max} = 0.12[sec]$. נראה זאת:



בשני המקרים, גם בתחום הרובסטי וגם בחישוב המדויק, קיבלנו כי אי הודאות המקסימלית גדולה מהערך הנומינלי, שהינו הגדול של ההשהייה עצמה. לכן, נוכל להסיק כי אי הודאות המירבית עבורה הבקר מסעיף ה' מייצב את החוג הסגור באופן רובסטי הינה:

$$\delta_{h,max} = h_0 = 0.05[sec]$$

כלומר, המערכת יציבה לכל אי ודאות בתחום:

$$\delta_h \in [0, h_0]$$

נבדוק את עודפי היציבות עבור שני מקרים:

$$h = h_0 \pm \delta_{h,max} = \begin{cases} (א) & 0.05 + 0.12 \\ (ב) & 0.05 - 0.12 \end{cases} = \begin{cases} (א) & 0.1 \\ (ב) & 0 \end{cases}$$

עבור מקרה (א):



$$G.M = 1.31[dB] \text{ at } \omega_p = 9.81 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$P.M = 11.9[deg] \text{ at } \omega_c = 8.57 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

עבור מקרה (ב) (כמו מערכת ללא השהיה, מה שקצת חסר הגיון בעיני):

$$G.M = 17.3[dB] \text{ at } \omega_p = 31.4 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

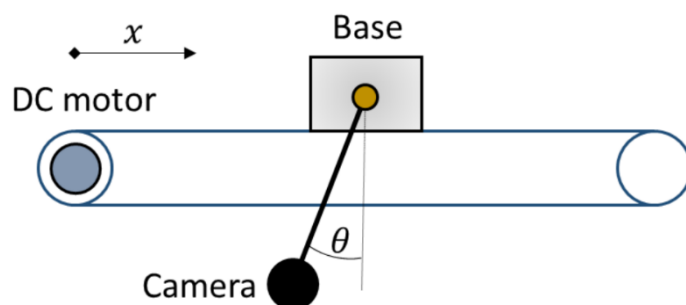
$$P.M = 61.1[deg] \text{ at } \omega_c = 8.57 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

ח. בונס – ייצוב החוג בכניסת אות הרמוני:

לא הצלחתי לאחר נסיונות רבים. הקוד מופיע בקובץ המטלב שאצרף.



חלק ב – מצלמה מחוברת דרך מוט



משתנים נוספים במערכת החדשה:

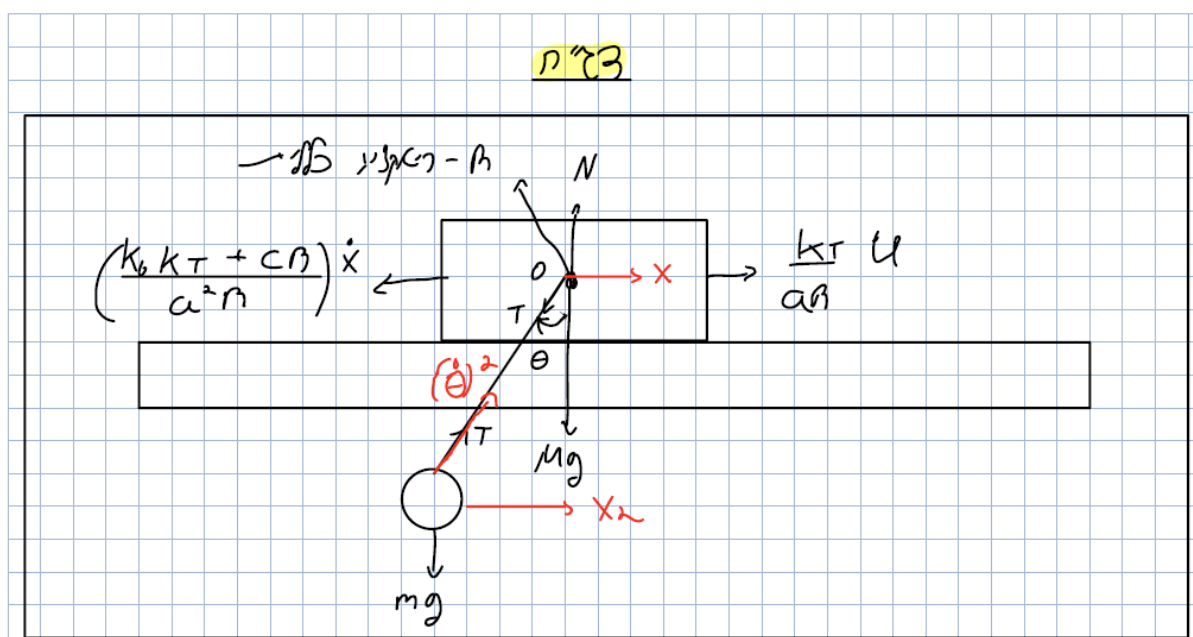
 θ [rad] זווית המצלמה (מופיע באיור).

פרמטרים נוספים של המערכת	
0.2	אורך המוט $l[m]$
9.81	תאוצת הגרביטציה $g \left[\frac{m}{s^2} \right]$

ט. משוואות התנועה של המערכת:

נמצא את משוואות התנועה של המערכת החדשה בעלת 2 דרגות החופש, כאשר ניעזר במשוואות שפיתחנו בסעיף א.

להלן הדג"ח של המערכת החדשה:





להלן משוואת הכוחות בציר x :

$$\sum F_x : M\ddot{x} + m\ddot{x}_2 = \left(\frac{K_T}{aR}\right)U - \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2}\right)\dot{x}$$

נשתמש בקשר הבא :

$$x_2 = x - l\sin(\theta) \rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x} + l\sin(\theta)\ddot{\theta} - l\cos(\theta)\dot{\theta}^2$$

ולכן :

$$(1) (M + m)\ddot{x} + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2}\right)\dot{x} - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = \left(\frac{K_T}{aR}\right)U$$

משוואת המומנטים סביב מרכז המסה של הבסיס (נקודה 0 בדג"ח) :

$$\sum \text{Moment}_o = \dot{H}_o = I_o\ddot{\theta} + m \cdot \vec{r}_m \cdot \vec{a}_o = \pm mgl\sin(\theta)$$

נשתמש בקשרים הבאים :

$$I_o = -ml^2$$

$$\vec{r}_m = l \cdot \hat{e}$$

$$\vec{a}_o = \ddot{x}$$

כאשר קשרים אלו הינם מומנט האינרציה של המטוטלת ביחס לציר הסיבוב, המיקום של מסת המצלמה ביחס לנקודה O , והתאוצה של הבסיס. מקשרים אלו נבנה את משוואת המומנטים והיא :

$$(2) m\ddot{x} l\cos \theta - ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta$$

סה"כ קיבלנו כי משוואות התנועה של המערכת הן :

$$(1) (M + m)\ddot{x} + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2}\right)\dot{x} - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = \left(\frac{K_T}{aR}\right)U$$

$$(2) m\ddot{x} l\cos \theta - ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta$$



י. מודל לינארי של המערכת:

נכתוב את המודל הלינארי סביב נקודת שיווי משקל יציב ($\theta_e = 0$). בשיווי משקל יציב, כלומר הנחת זוויות קטנות ההנחות הן:

$$\cos \theta \rightarrow 1; \sin \theta \rightarrow \theta; \dot{\theta}^2 \rightarrow 0.$$

עבור הנחות אלו נקבל את משוואות התנועה הבאות:

$$(1) (M + m)\ddot{x} + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2}\right)\dot{x} - ml\ddot{\theta} = \left(\frac{K_T}{aR}\right)U$$

$$(2) m\ddot{x}l - ml^2\ddot{\theta} = mgl\theta$$

נעבור למישור לפלס ונקבל:

$$(1) (M + m)s^2X + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2}\right)sX - mls^2\theta = \left(\frac{K_T}{aR}\right)U$$

$$(2) ms^2lX - ml^2s^2\theta = mgl\theta$$

ממשוואה 2 נוציא גורם משותף, נחלק ב- l ונגיע לתמסורת המיקום האופקי של הבסיס אל זווית המצלמה:

$$s^2X = \theta(g + ls^2) \rightarrow G_{X\theta} = \frac{\theta}{X} = \frac{s^2}{ls^2 + g}$$

נציב אורך מוט של $l = 0.23[m]$ ונקבל כי:

$$G_{X\theta} = \frac{\theta}{X} = \frac{s^2}{ls^2 \pm g} = \frac{s^2}{0.23s^2 + 9.81}$$

ניתן לראות כי תמסורת זו אינה יציבה, שכן ישנם שני קטבים על הציר המדומה.

עבור התמסורת $U \rightarrow X$ נעזר בשתי המשוואות נבדד את θ ממשוואה 2 ונציב במשוואה 1:

$$\theta = X \frac{s^2}{g \pm ls^2} \rightarrow (M + m)s^2X + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2}\right)sX - mls^2X \frac{s^2}{g \pm ls^2} = \left(\frac{K_T}{aR}\right)U$$

$$X \left((M + m)s^2 + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2}\right)s - mls^2 \frac{s^2}{g \pm ls^2} \right) \left(\frac{aR}{K_T}\right) = U$$

משתני העזר כמו שהוגדרו בשאלה:



$$\alpha = \left(\frac{Ra}{K_T} \right); \beta = \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2} \right) \left(\frac{aR}{K_T} \right) = \left(\frac{K_b K_T + RC}{a K_T} \right).$$

נציב את המשתנים ונקבל:

$$X \left(\alpha(M+m)s^2 + \beta s - \alpha m l \frac{s^4}{g + ls^2} \right) = U$$

נסדר את המשוואה ונקבל את פונקציית התמסורת:

$$G_{UX} = \frac{X}{U} = \left(\frac{ls^2 + g}{s(\alpha M l s^3 + \beta l s^2 + \alpha(M+m)gs + \beta g)} \right)$$

גם ללא הצבת הערכים, ניתן לראות בבירור שגם תמסורת זו אינה יציבה, שכן היא מכילה קוטב בראשית.

כעת נחשב את המודל הלינארי של המערכת סביב שיווי משקל לא יציב $(\theta_e = \pi)$. עבור שיווי משקל לא יציב נבצע ההנחות הבאות:

$$\cos(\theta + \pi) \rightarrow -1; \sin(\theta + \pi) \rightarrow -\theta; \dot{\theta}^2 \rightarrow 0.$$

עבור הנחות אלו נקבל את משוואות התנועה הבאות:

$$(1) (M+m)\ddot{x} + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2} \right) \dot{x} + m l \ddot{\theta} = \left(\frac{K_T}{aR} \right) U$$

$$(2) -m l \ddot{x} - m l^2 \ddot{\theta} = -m g l \theta$$

נעבור למישור לפלס:

$$(1) (M+m)s^2 X + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2} \right) s X + m l s^2 \theta = \left(\frac{K_T}{aR} \right) U$$

$$(2) -m s^2 l X - m l s^2 \theta = -m g l \theta$$

עבור התמסורת $X \rightarrow \theta$ נעזר המשוואה 2:

$$s^2 X = \theta(g - ls^2) \rightarrow G_{X\theta} = \frac{\theta}{X} = \frac{s^2}{ls^2 - g}$$

נציב אורך מוט של $l = 0.23[m]$ ונקבל כי:

$$G_{X\theta} = \frac{\theta}{X} = \frac{s^2}{ls^2 \pm g} = \frac{s^2}{0.23s^2 - 9.81}$$



גם תמסורת זו אינה יציבה, מכיוון שמכילה קוטב בחצי המישור הימני.

עבור התמסורת $U \rightarrow X$ נעזר בשתי המשוואות נבדד את θ ממשוואה 2 ונציב במשוואה 1:

$$\theta = X \frac{s^2}{ls^2 - g} \rightarrow (M + m)s^2 X + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2} \right) sX + mls^2 X \frac{s^2}{ls^2 - g} = \left(\frac{K_T}{aR} \right) U$$

$$X \left((M + m)s^2 + \left(\frac{K_T K_b}{a^2 R} + \frac{C}{a^2} \right) s + mls^2 \frac{s^2}{ls^2 - g} \right) \left(\frac{aR}{K_T} \right) = U$$

נציב את אותם משתני העזר ונקבל:

$$X \left(\alpha(M + m)s^2 + \beta s + \alpha ml \frac{s^4}{ls^2 - g} \right) = U$$

נסדר את המשוואה ונקבל את פונקציית התמסורת:

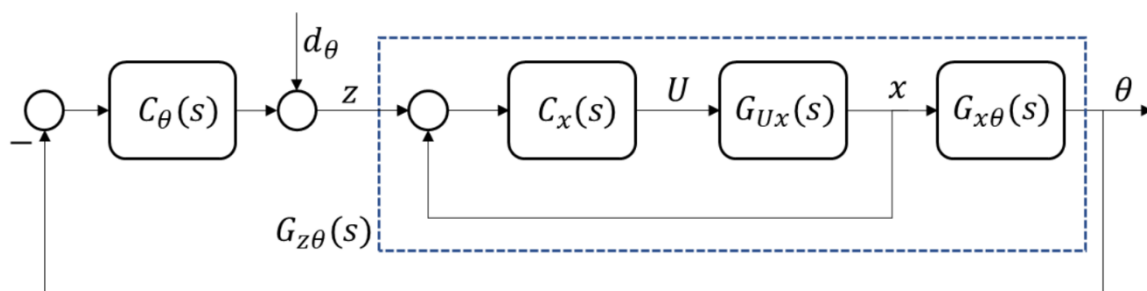
$$G_{UX} = \frac{X}{U} = \left(\frac{ls^2 - g}{s(\alpha Mls^3 + \beta ls^2 - \alpha(M + m)gs - \beta g)} \right)$$

גם כאן, ללא תלות בהצבת המספרים, ניתן לראות כי תמסורת זו אינה יציבה, שכן היא מכילה קוטב בראשית.

לסיכום: הוכחנו בסעיף זה כי אכן התמסורות נראות בצורה שבה ביקשו מאיתנו להוכיח, כאשר הנחנו את ההנחות המתאימות לכל סוג שיווי משקל, פיתחנו את התמסורות בצורת לפלס, הצבנו את משתני העזר שהוגדרו בשאלה והגענו לתמסורות המבוקשות. הראינו כי המערכות אינן יציבות.

יא. תכנון בקר עבור המערכת סביב מצב שיווי משקל יציב:

להלן דיאגרמת הבלוקים עבור סעיף זה:





להלן התמסורות שמתקבלות לאחר הצבת הפרמטרים סביב שיווי משקל יציב :

$$G_{UX} = \left(\frac{0.23s^2 - 9.81}{s(0.09934s^3 + 0.5535s^2 - 4.661s - 23.61)} \right)$$

$$G_{X\theta} = \frac{s^2}{0.23s^2 - 9.81}$$

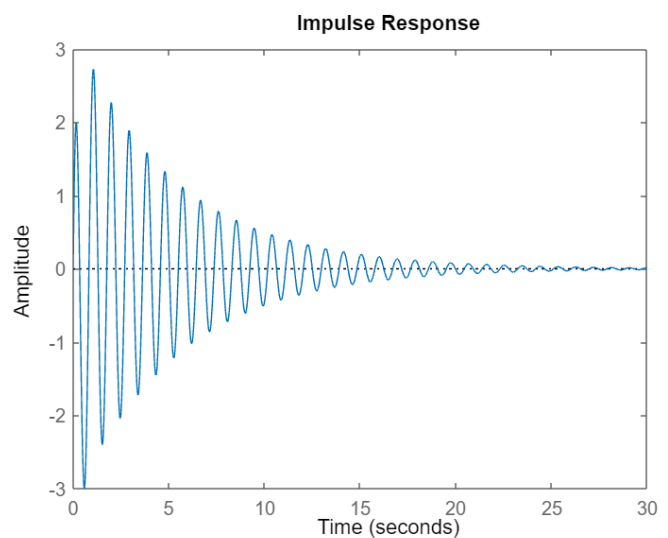
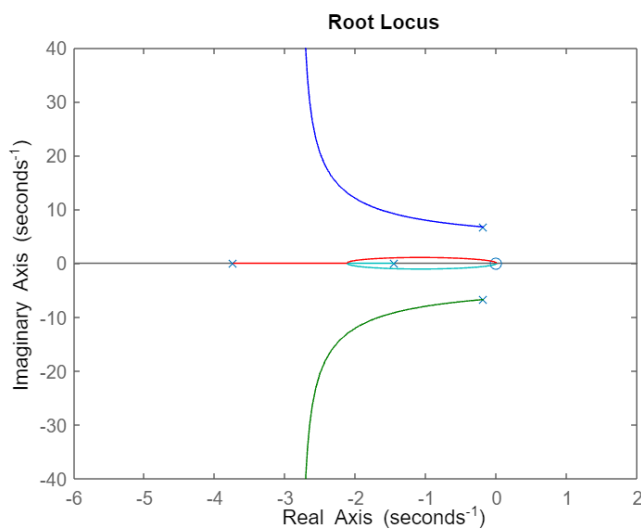
התמסורת החדשה $G_{z\theta}$ תחושב כך :

$$G_{z\theta} = \frac{C_X \cdot G_{UX}}{1 + C_X \cdot G_{UX}} \cdot G_{X\theta}$$

נציב את התמסורות, ונקבל כי :

$$G_{z\theta} = \left(\frac{25.17s^2}{(s^4 + 5.572s^3 + 52.71s^2 + 237.75s + 246.9)} \right)$$

להלן שרטוט המג"ש ותגובת ההלם של תמסורת זו :



נתכנן בקר C_θ כך שיענה על הדרישות הבאות להפרעת הלם :

- אמפליטודת התגובה לא גבוהה בערכה המוחלט מ 1.15 רדיאן.
- זמן התכנסות למעטפת של 10 מעלות (0.174 ראדיאן) לא עולה על 0.6 שניות.
- אות הבקרה לא עולה בשום שלב על 12 וולט בערכו המוחלט.



לפי תגובת ההלם, בכדי לעמוד בדרישה a יש להוריד הגבר בתדרים נמוכים.
סעיף זה היה לי הקשה ביותר, וניסיתי עשרות פעמים לבנות בקר שיעמוד בכל הדרישות.
לבסוף אציג את הבקר שענה בצורה המיטבית ביותר ממה שהשגתי.
הבקר שבניתי הינו בקר pd מהצורה הבאה :

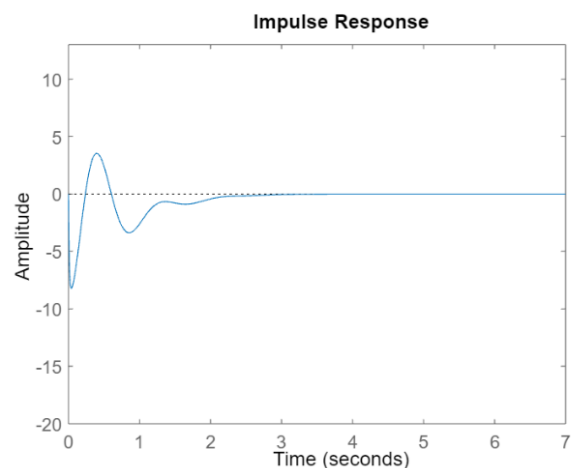
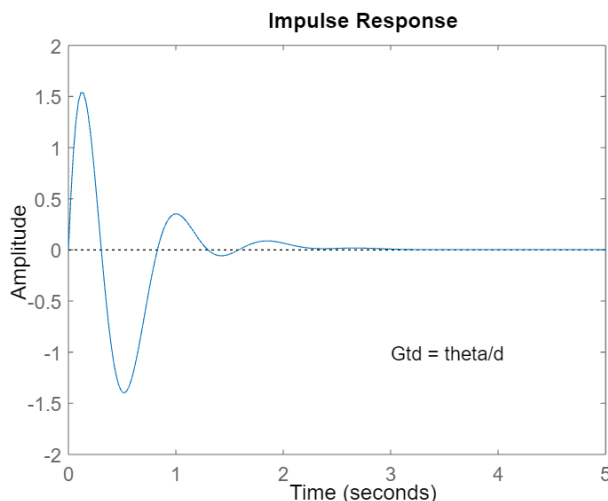
$$K_p = 2.05; K_d = 0.24; T_f = 0.01.$$

$$C_{pd} = K_p + K_d \cdot \frac{s}{T_f \cdot s + 1} = 2.05 + 0.24 \cdot \frac{s}{0.01 \cdot s + 1}$$

ולכן :

$$C_\theta = \frac{2.6 \cdot s + 20}{0.2 \cdot s + 20}$$

להלן התוצאות של בקר זה :

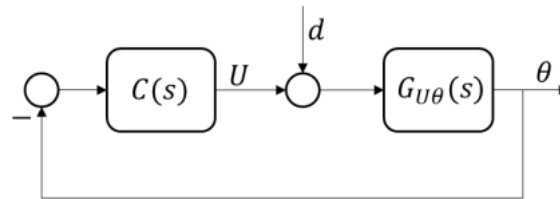


מימין, ניתן לראות כי דרישה b מתקיימת שכן המתח בערך מוחלט לא עובר 12 וולט, אך עם זאת משמאל ניתן לראות כי איננו מצליחים לרדת מאמפליטודה של 1.5 רדיאן ואפילו לא קרוב ל1.15.
הצלחתי ליצור בקר שכן יירד באמפליטודה קטנה מ1.15, אך ה"תשלום" היה שעברתי מתח של 12 וולט בערך מוחלט, והחלטתי לקחת את בקר זה כטוב מבין האחרים.
דרישה c לא הצלחתי לקיים לצערי הרב, מקווה להתחשבות בעקבות הקושי של הסעיף.



יב. תכנון בקר עבור המערכת סביב מצב שיווי משקל לא יציב:

בסעיף זה המוט פונה כלפי מעלה, כלומר עובדים סביב שיווי משקל של $\theta_e = \pi$.
להלן



איור 6: מערכת הבקרה בסעיף י"ב

הדרישה בסעיף זה הינה לייצב את החוג הסגור.

פונקציית התמסורת שחושבה על ידי מטלב הבקר הינה:

$$G_{d\theta} = \frac{G_{U\theta}}{1 + G_{U\theta} \cdot C}$$

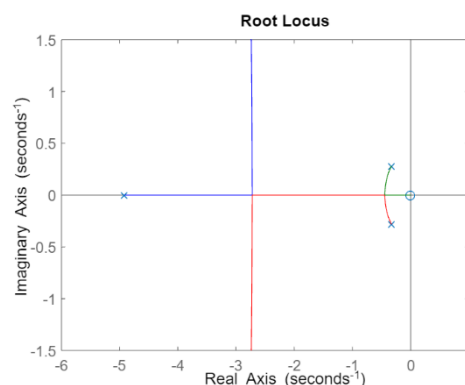
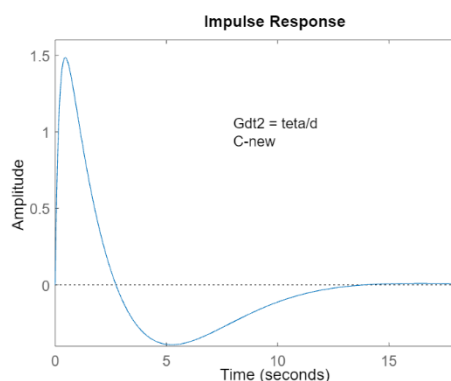
הרעיון היה לבנות בקר שיגרום לכך שבמכנה של פונקציית התמסורת כל הקטבים יהיו בחצי המישור השמאלי, ובכך נקבל מערכת יציבה.

לאחר כמה וכמה נסיונות, הבקר הני"ל:

$$C_{new} = \frac{5s + 23.7}{s}$$

בקר זה מביא את כלל הקטבים להיות בחצי המישור השמאלי ובכך לייצב את המערכת בחוג סגור. התמסורת המתקבלת עם בקר זה הינה:

$$G_{d\theta} = \frac{10.07s}{s^3 + 5.572s^2 - 53.96s + 3.417s + 0.09208}$$



ניתן לראות מהמג"ש כי אכן כל הקטבים נמצאים בחצי המישור השמאלי, ומהתגובה להלם כי המערכת מתייצבת במצב המתמיד.