Abschlussprüfung Sommer 2010

Lösungshinweise

IHK

Mathematisch-technischer Softwareentwickler
Mathematisch-technische Softwareentwicklerin
6511

1 Mathematische Modelle und Methoden

Allgemeine Korrekturhinweise

Die Lösungs- und Bewertungshinweise zu den einzelnen Aufgaben sind nicht in jedem Fall Musterlösungen, sondern als Korrekturhilfen zu verstehen. Sie sollen nur den Rahmen der zu erwartenden Prüfungsleistungen abstecken. Der Bewertungsspielraum des Korrektors (z. B. hinsichtlich der Berücksichtigung regionaler, branchen- oder betriebsspezifischer Gegebenheiten) bleibt unberührt.

Zu beachten ist die unterschiedliche Dimension der Aufgabenstellung (nennen – erklären – beschreiben – usw.).

Für die Bewertung gilt folgender Punkte-Noten-Schlüssel:

Note 1	=		100 – 92 Punkte	Note 2	=	unter	92 – 81 Punkte
Note 3	=	unter	81 – 67 Punkte	Note 4	=	unter	67 – 50 Punkte
Note 5	=	unter	50 – 30 Punkte	Note 6	=	unter	30 – 0 Punkte

1. Aufgabe (20 Punkte)

a) Aus der Aufgabenstellung ergibt sich:
$P(A) = 0{,}02$, $P(A|H1) = 0{,}01$, $P(A|H2) = 0{,}02$, $P(H1) = 0{,}5$, $P(H2) = 0{,}3$ und $P(H3) = 0{,}2$

Da nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
$P(A) = P(A|H1) \cdot P(H1) + P(A|H2) \cdot P(H2) + P(A|H3) \cdot P(H3)$
ist, also
$0{,}02 = 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}02 \cdot 0{,}3 + P(A|H3) \cdot (1 - 0{,}5 - 0{,}3)$
folgt
$P(A|H3) = (0{,}02 - 0{,}005 - 0{,}006) / 0{,}2 = 0{,}009 / 0{,}2 = 0{,}045$.

Der Hersteller 3 liefert also 4,5 % defekte DVDs, Hersteller 4 garantiert maximal 3,5 %; es lohnt sich also zu wechseln.

Der neue Gesamtausschussanteil ist nach dem Wechsel
$P(A) = 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}035 \cdot 0{,}2 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}007 = 0{,}018$. 15 Punkte

b) Nach Folgerung aus der Bayes-Formel gilt
$P(H2|A) = P(A|H2) \cdot P(H2) / P(A) = 0{,}02 \cdot 0{,}3 / 0{,}018 = 1/3$

Die Wahrscheinlichkeit für eine zufällig gewählte defekte DVD von Hersteller 2 zu stammen ist gleich ein Drittel. 5 Punkte

2. Aufgabe (20 Punkte)

a) Die Aufgabenstellung ist nur sinnvoll für $r, h > 0$.
Zylinderoberfläche: $O(r,h) = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$
Zylindervolumen: $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 880$, also $h = 880/(\pi \cdot r^2)$
(*)

Die Oberfläche soll minimiert werden:

Mit (*) ist
$O(r) = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot 880/(\pi \cdot r^2) = 2\pi \cdot r^2 + 1.760 / r$

Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum: O'(r) = 0 prüfen:
$O'(r) = 4\pi \cdot r - 1.760 / r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$
$r^3 = 440/\pi \quad \Leftrightarrow$
$r \approx 5{,}193$

Hinreichende Bedingung prüfen:
$O''(r) = 4\pi + 2 \cdot 1.760/r^3$
$O''(5{,}193) = 4\pi + 2 \cdot 1.760/(5{,}193)^3 > 0 \rightarrow$ relatives Minimum bei $r = 5{,}193$ cm.

Die zugehörige Höhe h ist $h = 880 / (\pi \cdot (5{,}193)^2)$ cm $\approx 10{,}4$ cm. 10 Punkte

b) Die Füllhöhe ist technisch bedingt nur bis 9,4 cm möglich, damit ist das Füllvolumen
$V_{tats} = \pi \cdot 5{,}193 \cdot 9{,}4 \text{ cm}^3 \approx 253{,}2\, \pi \text{ cm}^3 \approx 795{,}45 \text{ cm}^3 = 795{,}45$ ml.

Also werden von den möglichen 880 ml nur $795{,}45/880 \cdot 100\ \% \approx 90{,}39\ \%$ gefüllt,
d. h. es bleiben ca. 9,61 % des Volumens ungenutzt. 5 Punkte

c) Kosten K pro Monat, p sei der Preis pro Dose:
K = Fixkosten + variable Kosten = 50.000 EUR + 0,8 · 1.000.000 EUR = 850.000 EUR
Gewinn G = 15 % von K, also G = 850.000 EUR · 0.15 EUR = 127.500 EUR.
Es gilt: G = Anzahl Dosen · Preis – Kosten = 1.000.000 · p – 850.000 EUR = 127.500 EUR $\Leftrightarrow$
1.000.000 p = 977.500 EUR $\Leftrightarrow$ $p \approx 0{,}98$ EUR.

Ab einem Preis von ca. 0,98 EUR pro Dose wird ein Gewinn von 15 % erzielt. 5 Punkte

3. Aufgabe (20 Punkte)

a) Sechs Elemente vom Typ B1 haben zusammen die Länge 9 m, also verbleiben noch 9 m für den Typ B2 und damit neun Elemente vom Typ B2. Beispiel für einen solchen Zaun:

B1a – B2-B2-B2 – **B1b-B1a** – B2-B2-B2 – **B1b-B1a** – B2-B2-B2 – **B1b** 10 Punkte

b) Die Fläche beträgt also $F = 6 \cdot F_{B1} + 9 \cdot F_{B2}$.

Bauteil B1: $F_{B1} = \int_0^{1,5} (\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{5}{4})dx = \tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{5}{4}x \Big|_0^{1,5} = \tfrac{27}{8 \cdot 9} + \tfrac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \tfrac{3}{8} + \tfrac{15}{8} = \tfrac{9}{4} = 2,25$

Bauteil B2: F_{B2} = Rechteckfläche + Halbkreisfläche

$= 1 \cdot 1,25 + 0,5 \cdot \pi \cdot 0,5^2 = 1,25 + 0.125\,\pi \approx 1,64$

Gesamtfläche $F \approx 6 \cdot 2,25 + 9 \cdot 1,64 = 13,5 + 14,76 = 28,26$

Es sind als ca. 28,26 m² zu streichen, dazu benötigt man drei der 5l-Kanister. 10 Punkte

4. Aufgabe (20 Punkte)

a) Anzahl a_1 der Möglichkeiten, aus obigem Zeichenvorrat ein 10-stelliges Kennwort zu bilden (Permutationen mit Wiederholung):
$a_1 = (26 + 26 + 10 + 30)^{10} = 92^{10}$. 3 Punkte

b) Anzahl a_2 der Kennwörter mit zehn verschiedenen Zeichen (Permutationen ohne Wiederholung):

$$a_2 = \binom{92}{10} \cdot 10! = 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83$$

4 Punkte

c) Anzahl a_3 der Möglichkeiten, <u>ohne</u> Sonderzeichen ein Kennwort zu bilden:
$a_3 = (26 + 26 + 10)^{10} = 62^{10} = 8,393 \cdot 10^{17}$ 3 Punkte

d) Anzahl a_4 der Möglichkeiten, Kennwörter mit <u>mindestens einem</u> Sonderzeichen zu bilden:
$a_4 = 92^{10} - 62^{10} = 4,344 \cdot 10^{19} - 8,393 \cdot 10^{17}$ (alle möglichen nach a) – Kennwörter nach c)) 3 Punkte

e) Anzahl a_5 der Möglichkeiten zur Bildung von Kennwörtern aus genau zwei und zwar verschiedenen Ziffern, Rest beliebig:

$$a_5 = \binom{10}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 82^8$$

3 Punkte

f) Anzahl a_6 Möglichkeiten für Kennwörter aus zwei verschiedenen Ziffern und mindestens einem Sonderzeichen:

$$a_6 = \binom{10}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot (82^8 - 52^8)$$

4 Punkte

5. Aufgabe (20 Punkte)

a)

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right\}$$

4 Punkte

b)

$$g=\{\vec{v}\mid\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\wedge\mu\in[0;1]\}$$

4 Punkte

c) Bestimmung einer Ebene F parallel zur Hinderniskante, welche g enthält:

$F=\{\vec{w}\mid\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}\wedge\mu,\tau\in IR\}$ hat als aufspannende Vektoren die Richtungsvektoren von g und von der durch die Hinderniskante bestimmten Geraden.

Es genügt also aufgrund der Parallelität, den Abstand eines Punktes der Hinderniskante zur Ebene F zu bestimmen.

$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ ist ein Punkt der Hinderniskante.

Bestimme eine Gerade h durch diesen Punkt, die senkrecht zur Ebene F ist:

Der Richtungsvektor von h ergibt sich als Kreuzprodukt der die Ebene aufspannenden Vektoren, also mit

$$\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-4\\10\end{pmatrix}$$

ergibt sich h zu:

$$h=\{\vec{v}\mid\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}12\\-4\\10\end{pmatrix}\wedge\delta\in IR\}$$

Bestimmung von $h\cap F$:

	$1+\mu-3\tau=1+12\delta$	I
	$-1+3\mu+\tau=2-4\delta$	II
	$3+4\tau=2+10\delta$	III
I + 3II	$-2+10\mu=7 <=> \mu=\frac{9}{10}$	IV
3I–II	$4-10\tau=1+40\delta$	V
4III–V	$8+26\tau=7\Leftrightarrow\tau=-\frac{1}{26}$	VI

τ,μ in I: $1+\frac{9}{10}-3\cdot\frac{-1}{26}=1+12\delta\Leftrightarrow 12\delta=\frac{9}{10}+\frac{3}{26}\Leftrightarrow 12\delta=\frac{264}{260}\Leftrightarrow\delta=\frac{11}{130}$

Somit beträgt der Abstand:

$$\left|\delta\begin{pmatrix}12\\-4\\10\end{pmatrix}\right|=\frac{11}{130}\sqrt{260}\approx 1{,}364$$

12 Punkte

6. Aufgabe (20 Punkte)

a) Für die boolschen Variablen B_i ist

$$(B_1 \wedge B_2) \vee (B_1 \wedge B_3) \vee B_2 \Leftrightarrow ((B_1 \wedge B_2) \vee B_2) \vee (B_1 \wedge B_3) \Leftrightarrow B_2 \vee (B_1 \wedge B_3) \text{ da } (B_1 \wedge B_2) \vee B_2 \Leftrightarrow B_2 .$$

Vereinfacht lautet der Ausdruck also

```
if (B2 || (B1 && B3)) then.
```

5 Punkte

ba) Für $q = 2$ (siehe Programm) ist s in Abhängigkeit von n: $s(n) = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$

Mit dem Tipp folgt

$s(n) = 2 \cdot s(n) - s(n) =$

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{n} 2^i - \sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2 \cdot 2^i - \sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i - \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2^0 = 2^{n+1} - 1$$

also $s(n) = 2^{n+1} - 1$

6 Punkte

bb) **Beweis durch vollständige Induktion**

Induktionsanfang: n=0 $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2 - 1$

Induktionsvoraussetzung: Gelte $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$

Induktionsbehauptung: dann gilt auch $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 * 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

6 Punkte

Die Schleife kann also in Abhängigkeit von n durch

```
s=Math.pow(q,n+1)-1;
```

ersetzt werden (dies wird nicht bewertet, da nicht gefordert).

bc) Für $q = 1$ ist $q^i = 1$ daher gilt trivialerweise $s(n) = n + 1$.

3 Punkte