
Capítulo 7: TEORIA DE CONJUNTOS

7.1 Introducción

El término **conjunto** es bastante primitivo y fundamental en toda la estructura matemática. Generalmente, esta palabra se acepta en matemáticas como un término indefinido, tal como en geometría que toma, entre otros, los términos punto, línea, plano, que sin definición pero sí de manera intuitiva. Similarmente sucede con el término **elemento**.

La teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas que tiene un objeto de estudio propio; con métodos propios, con ciertas relaciones con otras teorías matemáticas, en particular, con todas las teorías matemáticas tradicionales y a partir de sus principios se mantiene la existencia, estructura y relaciones mutuas entre ellos. Es decir, que el resto de la matemática puede expresarse en términos de conjuntos.



Georg Cantor (1845-1918)

Georg Cantor (1845-1918) matemático, físico y filósofo alemán de origen ruso. Se doctoró en 1867 y empezó a trabajar como profesor adjunto en la Universidad de Halle. En 1874 publicó su primer trabajo sobre teoría de conjuntos. Es considerado como el padre de “la teoría de conjuntos”.

Cantor operó con conjuntos infinitos, transformando unos en otros mediante reglas precisas, los comparó respecto a su cardinalidad y mostró cómo asignar un número cardinal a cada conjunto. Entre sus primeros resultados encontró que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, si tienen correspondencia biunívoca entre ellos. Si dos conjuntos no tienen la

misma cardinalidad, pero tienen correspondencia biunívoca con un subconjunto de otro, la cardinalidad del primero es menor que la del segundo.

Su mente luchó contra varias paradojas de la teoría de conjuntos, en otras la paradoja de Bertrand Russell, que parecían invalidar toda su teoría; es decir, la hacía inconsistente o contradictoria, en el sentido de que una cierta propiedad podría ser a la vez cierta y falsa.

A fines de mayo de 1884 Cantor tuvo su primer ataque registrado de depresión. Se recuperó después de unas cuantas semanas, pero aparecía menos confiado. En junio de 1917 ingresó una institución mental de Halle (ciudad del centro de Alemania) por última vez; de allí le escribía continuamente a su esposa pidiendo que le permitiera regresar a casa. Murió en un ataque cardíaco, el 6 de enero de 1918, cuando tenía 73 años de edad.

7.2 Concepto de conjunto

Se llama conjunto a toda agrupación, colección o reunión de individuos (cosas, animales, personas o números) bien definidos que cumplen una propiedad determinada. A los objetos del conjunto se denominan “**elementos**”.

Ejemplo 7.1: Los siguientes son algunos ejemplos de conjunto:

- El conjunto formado por los colores de la bandera de Colombia.
- La colección de letras de la palabra “murciélago”.
- El conjunto formado por los dígitos del número 345923238.
- La agrupación de números naturales menores que 10
- La agrupación de números primos entre 0 y 20.

7.3 Notación de conjuntos

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas de nuestro alfabeto (A, B, C, D, E, F, . . . , X, Y, Z) o algunas veces con letras del alfabeto griego (α , β , ∂ , Υ , χ , ι , ε , γ , η , φ , λ , μ , ω , ψ , σ , . . etc.), como en geometría. Los elementos simplemente se escriben dentro de llaves, separados por comas.

Ejemplo 7.2: utilice la notación correcta para escribir los conjuntos dados en el ejemplo 7.1.

A= El conjunto formado por los colores de la bandera de Colombia.

B= La colección de letras de la palabra “murciélago”

C= El conjunto formado por los dígitos del número 345923238

D= La agrupación de números naturales menores que 10

E= La agrupación de números primos entre 0 y 20

7.4 Determinación de conjuntos

La determinación de un conjunto corresponde a la manera como éste puede expresarse. Para determinar un conjunto se utilizan dos formas: determinación por extensión y la determinación por comprensión.

7.4.1 Determinación de conjuntos por extensión

Un conjunto se determina por extensión cuando se enumeran o se nombran los elementos del conjunto. Cuando el conjunto es finito se escriben entre llaves, separados por comas. Cuando el conjunto es infinito se escriben entre llaves algunos elementos y se ponen puntos suspensivos.

Ejemplo 7.3: Determine por extensión los conjuntos del ejemplo 7.2

$A = \{\text{amarillo, azul, rojo}\}$
 $B = \{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o\}$
 $C = \{3, 4, 5, 9, 2, 8\}$, no se repiten elementos
 $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $E = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

7.4.2 Determinación de conjuntos por comprensión

Un conjunto se determina por comprensión enunciando la propiedad o cualidad que distingue a los elementos. Para tal fin se utiliza lo siguiente:

$\{x/x \text{ cumple la propiedad}\}$,

que se lee: el conjunto de las x tal que x cumple la propiedad

Ejemplo 7.3: Determine por comprensión los conjuntos del ejemplo 7.2

$A = \{x/ x \text{ es un color de la bandera de Colombia}\}$
 $B = \{x/ x \text{ es una letra de la palabra "murciélago"}\}$
 $C = \{x/ x \text{ es un dígito del número 345923238}\}$
 $D = \{x/ x \text{ es un número natural menor que 10}\}$
 $E = \{x/ x \text{ es número primo entre 0 y 20}\}$

7.5 Representación de conjuntos

Existen varias formas de representar los conjuntos: representación gráfica y representación en la computadora.

7.5.1 Representación gráfica de conjuntos

Los conjuntos se pueden representar gráficamente mediante diagramas de Venn y por diagramas de Carroll.

Diagramas de Venn (figura 7.1). Estos diagramas fueron descubiertos por el lógico y matemático británico John Venn (1834-1923). El sistema de representación que hoy conocemos fue desarrollado en julio de 1880 con la publicación titulada "De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y razonamientos" en el Philosophical Magazine and Journal of Science, lo cual provocó cierto revuelo en el mundo de la lógica formal. Esta representación más conocida como "diagramas de Venn", consisten en figuras geométricas planas y cerradas; dentro de cada figura se ponen los elementos que le corresponden. Estos diagramas serán los utilizados en el desarrollo de este texto.

Diagramas de Carroll (figura 7.2). Son bastante útiles para el estudio de las propiedades de los complementos de conjuntos. Consisten en líneas

perpendiculares que se cortan (una horizontal y otra perpendicular) tal que un plano cartesiano; en la parte superior e inferior de la línea horizontal se ponen los elementos que cumplen una propiedad y de manera similar al lado izquierdo y derecho de la línea vertical. De tal manera se pueden realizar las operaciones entre conjuntos.

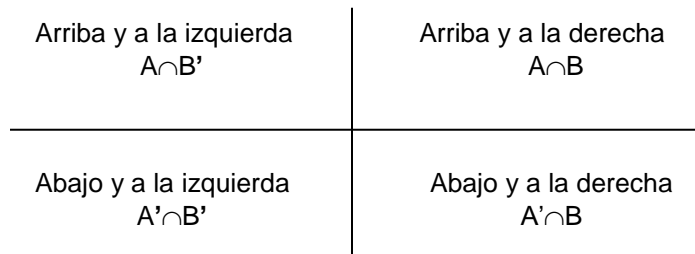


Figura 7.2: Diagrama de Carroll

7.5.2 Representación de conjuntos en la computadora

Un conjunto se puede representar en la computadora como arreglo unidimensional de longitud n (n número de elementos de A) que en el argot de la computación se denomina “vector” y por lo tanto, se pueden realizar las operaciones que hacen con conjuntos: intersección (datos repetidos de los vectores, eliminando los repetidos), unión (poniendo los elementos de los vectores, pero eliminando los repetidos) y así sucesivamente con la diferencia y el complemento.

Este tema se tratará al final de este capítulo. Se recomienda para su estudio recordar los conceptos acerca del manejo de arreglos en computación.

7.6 Relaciones de conjuntos

Las relaciones que se pueden dar entre conjuntos son: pertenencia, inclusión e igualdad.

7.6.1 Relación de pertenencia

El signo que representa la relación de pertenencia es \in , que fue descubierto por el matemático y filósofo italiano, Giuseppe Peano (1858 –1932), quien es conocido por sus contribuciones a la Teoría de conjuntos.

En efecto, sea A un conjunto cualquiera y x un elemento, para indicar que x es elemento de A o simplemente que, x está en A se simboliza

$$x \in A \Leftrightarrow Ax$$

Si x no es elemento de A o x no está en A , es decir, $\neg(x \in A)$ se simboliza

$$x \notin A \Leftrightarrow \neg Ax$$

La relación de pertenencia se da entre elementos y conjuntos; pero no entre conjuntos, exceptuando el caso del conjunto potencia, esto es, $A \in \mathbf{P}(A)$ como se

verá en la sección 6.9; tampoco se da entre elementos. Por lo tanto, es incorrecto escribir $x \in x$ o $A \in A$.

Ejemplo 6.4: Sea A el conjunto de los colores de la bandera de Colombia. Por consiguiente, $\text{amarillo} \in A$, $\text{azul} \in A$, $\text{rojo} \in A$.

Si B es el Conjunto de las letras de la palabra “murciélago”, entonces $m \in B$, $u \in B$, $r \in B$, $c \in B$, $i \in B$, $e \in B$, $l \in B$, $a \in B$, $g \in B$, $o \in B$.

7.6.2 Relación de Inclusión de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B , esta relación se utiliza para indicar que el conjunto A es subconjunto del conjunto B , lo cual se escribe:

$$A \subseteq B$$

y se lee: A es subconjunto de B , A está incluido en B , A está contenido en B , B incluye a A .

Si A no es subconjunto de B , esto es, $\neg(A \subseteq B)$ se simboliza

$$A \not\subseteq B.$$

Se dice que A es subconjunto de B si todos los elementos de A también están en B . Simbólicamente es:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Si A es un subconjunto de B y existen elementos de B que no están en A , entonces A es un **subconjunto propio** de B y se simboliza

$$A \subset B,$$

Y se lee: A es subconjunto propio de B o también A está incluido propiamente en B . Por lo tanto,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$$

7.6.3 Propiedades de la inclusión

Para cualquier conjunto A se tiene:

- $A \subseteq A$. Esta propiedad señala que todo conjunto es subconjunto de si mismo.
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Sus demostraciones son sencillas; basta con utilizar las propiedades las definiciones de inclusión y pertenencia, además, de las propiedades de cuantificadores. En efecto veamos,

$x \in A$ Por hipótesis

| | |
|--|---------------------------------|
| $x \notin A \vee x \in A$ | Regla de adición |
| $x \in A \rightarrow x \in A$ | Ley alternativa Del condicional |
| $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in A)$ | Cuantificando |
| $A \subseteq A$ | Definición de inclusión |

Ejemplo 7.5: dados los conjuntos $A=\{3,5,6,9,4\}$, $B=\{3,4,7,9,6,5\}$ y $C=\{3,9,5,7,4,6,8\}$ ponga entre el paréntesis V o F si los siguientes enunciados son verdadero o falso, respectivamente y justifique el por qué de los falsos.

- a) (F) $B \subset A$, porque $7 \notin A$
- b) (F) $B \subseteq A$, porque $9 \notin A$
- c) (F) $C \subseteq A$, porque $7 \notin A$
- d) (V) $A \subset C$
- e) (V) $B \subset C$
- f) (F) $C \subseteq B$, porque $8 \notin B$

Según el ejemplo se puede observar que A es subconjunto propio de B y a la vez éste de C.

7.6.4 Relación de igualdad de conjuntos

La igualdad de dos conjuntos A y B denotada

$$A=B$$

se da cuando todos los elementos de A están en B y viceversa. Simbólicamente,

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Esta equivalencia se conoce como axioma de extensionalidad. La igualdad de conjuntos intuitivamente dice: “dos conjuntos son iguales si y solo tienen los mismos elementos (no importa el orden)”. Tenga en cuenta que este concepto es diferente a decir: “dos conjuntos son iguales si y solo tienen la misma cantidad de elementos”.

Si algún elemento x de A no está en B o algún elemento x de B no está en A se dice que A es diferente de B y se simboliza

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$$

Ejemplo 7.6: dados los conjuntos

$$A=\{x/x \text{ es un número primo positivo menor que } 8\},$$

$$B=\{x/x \text{ es un factor de } 210\}$$

¿ $A=B$? Compruébelo.

$$A=\{2,3,5,7\}$$

$$B=\{2,3,5,7\}$$

Luego, los conjuntos son iguales

Ejemplo 7.7: demuestre $A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Demostración:

| | | |
|-------|--|----------------------------------|
| $A=B$ | $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ | Definición igualdad de conjuntos |
| | $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$ | Definición bicondicional |
| | $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$ | Propiedad de cuantificadores |
| | $\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ | Definición de inclusión |

7.7 Clases de conjuntos

7.7.1 Conjunto finito

Es aquel conjunto cuya cantidad de elemento se puede contar; es decir, es aquel conjunto en que sus elementos se pueden nombrar o enumerar.

Ejemplo 7.9: $A=\{x/x \text{ es un número entero mayor o igual que } -3 \text{ y menor que } 5\}$. Este conjunto está formado por 8 elementos. En efecto, $A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

7.7.2 Conjunto vacío

Existe un conjunto especial denominado “**conjunto vacío**” o “**conjunto nulo**” y algunos definen como un conjunto sin elementos. Este último concepto se presta para confusiones cuando se dice “conjunto sin elementos”; pues se sabe que un conjunto es una agrupación de objetos que cumplen una propiedad determinada.

Esta confusión se aclara definiendo el conjunto vacío como aquel en que ningún elemento cumple con la propiedad conocida como “**regla de elegibilidad**”.

El conjunto vacío se denota por la letra \emptyset o simplemente $\{ \}$.

No es correcto decir, “*un conjunto vacío*”; debe decirse siempre “*el conjunto vacío*” porque este conjunto es único.

Nota: no confunda \emptyset con $\{\emptyset\}$, pues este último es un conjunto unitario.

7.7.3 Propiedades del conjunto vacío

- $\emptyset \subseteq A$. Indica que todo conjunto contiene al conjunto vacío.
- $A \subseteq \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$

Ejemplo 7.10: los siguientes ejemplos ayudan a conceptualizar el conjunto vacío:

- $A=\{x/x\neq x\}\Leftrightarrow A=\emptyset$, ningún objeto es diferente de sí mismo.
- $(\forall x)(x\in A\rightarrow x\neq x)\Rightarrow A=\emptyset$
- $A=\{x/x\notin A\}\Leftrightarrow A=\emptyset$

Esta regla es muy importante:

$$A\neq\emptyset\Leftrightarrow (\exists x)(x\in A)$$

7.7.4 Conjunto unitario

El conjunto unitario es aquel solamente tiene un elemento.

Ejemplo 7.11: Los conjuntos $A=\{x/x \text{ es un pontífice entre los años 1985 y 2005}\}=\{\text{Juan Pablo II}\}$ y $B=\{x\in\mathbb{N} / x^2 - 4=0\}=\{2\}$ son unitarios.

7.7.5 Conjunto binario

El conjunto binario es aquel que está formado por dos elementos.

Ejemplo 7.12: $A=\{x\in\mathbb{Z}/x^2 - 4=0\}=\{2, -2\}$, es un conjunto binario

7.7.6 Conjunto universal

Sean A y U conjuntos cualesquiera. Se dice que U es un conjunto universal o referencial respecto al conjunto A , si $A\subseteq U$.

No puede decirse el conjunto universal o referencial U a secas, porque este no es único; pues la relación $\neg(\exists U)(\forall x)(x\in U)$ es cierta. Trate de demostrar esta consecuencia por reducción al absurdo.

Según lo anterior, el conjunto universal el cual contiene todos los elementos en estudio es un ente que solo puede ser tratado rigurosamente; es decir, con referencia a otro conjunto, para no llegar a contradicciones dentro de la teoría axiomática de conjuntos.

Ejemplo 7.13: dados los conjuntos $U=\{1,3,5,7,9,11\}$, $A=\{3,9,11\}$, $B=\{2,5,7,9\}$, $C=\{1,6\}$ y $D=\{1,7,11,5\}$, determine si U es conjunto universal respecto a los demás conjuntos.

En efecto, U es un conjunto universal respecto a los conjuntos A y D , pero no con respecto a los conjuntos B y C . ¿Por qué?

7.7.7 Conjunto infinito

Es aquel conjunto cuya cantidad de elemento no se puede contar; es decir, es aquel conjunto en que sus elementos no se pueden nombrar o enumerar. Son

ejemplos de conjuntos infinitos, los conjuntos numéricos: los naturales (\mathbb{N}), los enteros (\mathbb{Z}), los reales (\mathbb{R}), los racionales (\mathbb{Q}), los imaginarios (\mathbb{I}), los complejos (\mathbb{C})

Ejemplo 7.14: el conjunto $A=\{x \in \mathbb{R}/x>100 \text{ y } x<0\}=(-\infty,0) \cup (100,\infty)$ es infinito.

7.8 Operaciones entre conjuntos

Las operaciones que pueden realizar con conjuntos son: la intersección, la unión, la diferencia, la diferencia simétrica y el complemento.

7.8.1 Intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes de ambos conjuntos (sin repetir elementos), es decir, es el conjunto formado por todos los elementos repetidos y se denota

$$A \cap B$$

Simbólicamente,

$$A \cap B = \{x/ x \in A \wedge x \in B\}$$

O también

$$A \cap B = \{x/Ax \wedge Bx\},$$

donde Ax y Bx son proposiciones abiertas equivalentes a $x \in A$ y $x \in B$, respectivamente.

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A$ y B son conjuntos disjuntos¹⁰.

La representación gráfica mediante diagramas de Venn es: (vea figura 7.2)

Si se tienen n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, la intersección entre estos conjuntos denotada

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

O simplemente

$$\bigcap_{i=1}^n A_i$$

Se define como el conjunto formado por los elementos comunes de todos los conjuntos.

Simbólicamente,

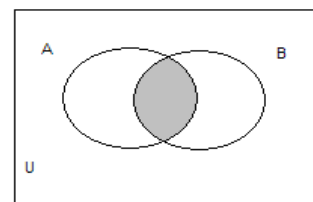


Figura 7.2: Intersección de conjuntos

¹⁰ Tómesese como disjuntos en adelante

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x/ x \in A_i, \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Ejemplo 7.15: determine gráficamente y por simple inspección los conjuntos $A \cap B \cap C$ dado que $A = \{1, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 9, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 9\}$ y $U = \{1, 2, 9, 5, 4, 6, 8, 7\}$

La solución por simple inspección se determina buscando los elementos comunes que tienen los conjuntos A, B y C; en efecto:

$$A \cap B \cap C = \{9\}$$

Ahora, para determinar la solución gráfica proceda así:

1. Busque los elementos comunes de los tres conjuntos; en este caso, $A \cap B \cap C = \{9\}$
2. Busque los comunes entre pares de conjuntos, así: $A \cap B = \{1, 9\}$, $A \cap C = \{4, 6, 9\}$ y $B \cap C = \{2, 9\}$. Observe que el 9 se repite en las intersecciones, entonces ponga este **dato en la intersección de los tres y complete las intersecciones de pares de conjuntos** con los datos faltantes de esas intersecciones.
3. Complete los conjuntos dados con los datos faltantes.
4. Subraye el área correspondiente, esto es, donde están los elementos obtenidos por simple inspección y esta será la respuesta (vea figura 7.3)

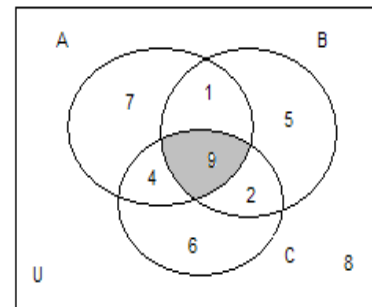


Figura 7.3: gráfica resultante del problema 7.14

7.8.2 Unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes y no comunes de ambos conjuntos (sin repetir elementos) y se denota

$$A \cup B$$

Simbólicamente,

$$A \cup B = \{x/ x \in A \vee x \in B\}$$

O también

$$A \cup B = \{x/ Ax \vee Bx\},$$

donde Ax y Bx son proposiciones abiertas equivalentes a $x \in A$ y $x \in B$, respectivamente.

La representación gráfica mediante diagramas de Venn es: (vea figura 6.4)

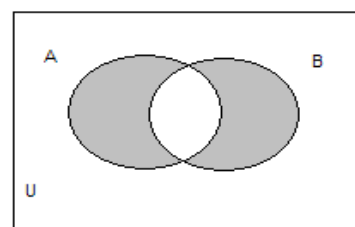


Figura 7.4: unión de conjuntos

Si se tienen n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, la unión entre estos conjuntos denotada

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

O simplemente

$$\bigcup_{i=1}^n A_i$$

Se define como el conjunto formado por los elementos que están en alguno de los conjuntos.

Simbólicamente,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x / x \in A_i, \text{ para algún } i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Ejemplo 7.16: determine gráficamente y por simple inspección los conjuntos $A \cup B \cup C$ dado que $A = \{1, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 9, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 9\}$ y $U = \{1, 2, 9, 5, 4, 6, 8, 7\}$.

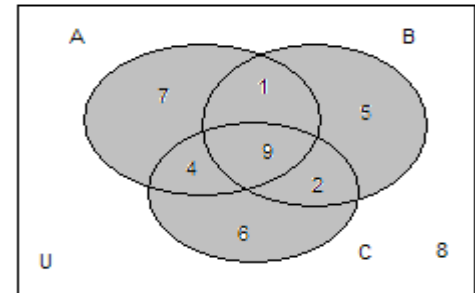


Figura 7.5: gráfica resultante del problema 7.16

Por simple inspección la solución se obtiene poniendo primero los elementos comunes y luego se ponen los no comunes, sin repetir elementos. En efecto,

$$A \cup B \cup C = \{9, 1, 4, 6, 7, 2, 3\}$$

Para la solución gráfica proceda tal como se halló la intersección del ejemplo 6.14 (vea figura 6.5)

7.8.3 Diferencia de conjuntos

La diferencia entre de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos no comunes del conjunto B respecto al conjunto A ; es decir, los elementos que están en A , pero no están en B y se denota $A - B$

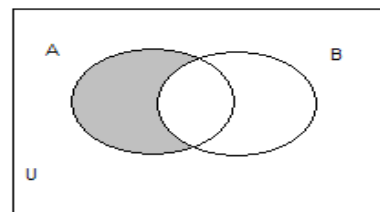


Figura 7.6: diferencia de conjuntos

Simbólicamente,

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

O también

$$A - B = \{x / Ax \wedge \neg Bx\},$$

donde Ax y Bx son proposiciones abiertas equivalentes a $x \in A$ y $x \in B$, respectivamente.

La representación gráfica mediante diagramas de Venn es: (vea figura 7.6)

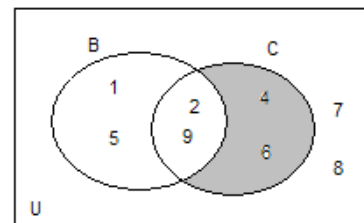


Figura 7.7: gráfica resultante del problema 6.17

Ejemplo 7.17: determine gráficamente y por simple inspección los conjuntos $C-B$ dado que $B=\{1,2,9,5\}$, $C=\{2,4,6,9\}$ y $U=\{1,2,9,5,4,6,8,7\}$.

Por simple inspección $C-B=\{4,6\}$ y gráficamente vea figura 7.7.

7.8.4 Diferencia simétrica de conjuntos

La diferencia simétrica entre de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos no comunes de ambos conjuntos; es decir, los elementos que no están repetidos entre los conjuntos y se denota

$$A \oplus B$$

Simbólicamente,

$$A \oplus B = \{x / x \in (A-B) \vee x \in (B-A)\}$$

O también

$$A \oplus B = \{x / (Ax - Bx) \vee (Bx - Ax)\},$$

donde Ax y Bx son proposiciones abiertas equivalentes a $x \in A$ y $x \in B$, respectivamente; su representación gráfica mediante diagramas de Venn se ve en la figura 7.8

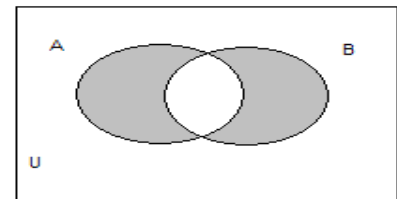


Figura 7.8: diferencia simétrica de conjuntos

Ejemplo 7.18: determine gráficamente y por simple inspección los conjuntos $B \oplus C$ dado que $B=\{1,2,9,5\}$, $C=\{2,4,6,9\}$ y $U=\{1,2,9,5,4,6,8,7\}$.

Por simple inspección

$$B-C=\{1,5\} \text{ y } C-B=\{4,6\}$$

Por lo tanto,

$$B \oplus C = \{1,4,5,6\}.$$

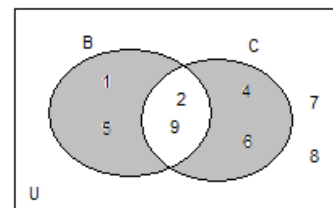


Figura 7.9: gráfica problema 6.18

La solución gráfica se tiene en la figura 7.9.

7.8.5 Complemento de conjuntos

Sea U un conjunto universal respecto a un conjunto A ($A \subseteq U$). El complemento de A es el conjunto formado por los elementos de U que no están en A y se denota

$$A' \text{ o también } \bar{A}.$$

Simbólicamente, <az

$$A' = \{x / x \in U \wedge x \notin A, A \subseteq U\}$$

Similarmente,

$$A' = \{x / Ux \wedge \neg Ax, A \subseteq U\}$$

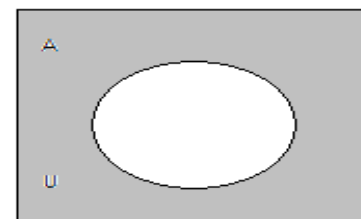


Figura 7.10: complemento de un conjunto

donde Ax y Bx son proposiciones abiertas equivalentes a $x \in A$ y $x \in B$, respectivamente. Observe que,

$$x \notin A \Leftrightarrow \neg(x \in A)^{11}$$

La representación gráfica mediante diagramas de Venn es: (vea figura 6.10)

Ejemplo 7.19: determine gráficamente y por simple inspección los conjuntos $(B \cap C)'$ dado que $B = \{1, 2, 9, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 9\}$ y $U = \{1, 2, 9, 5, 4, 6, 8, 7\}$. Para obtener la solución por simple inspección determine primero la intersección entre B y C:

$$B \cap C = \{2, 9\}$$

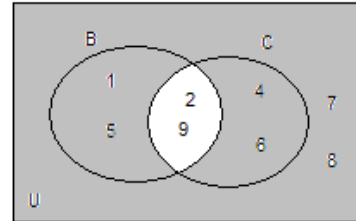


Figura 7.11: gráfica problema 7.19

Ahora, halle el complemento $B \cap C$ respecto a U:

$$(B \cap C)' = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

La solución gráfica se tiene en la figura 7.11

Ejemplo 7.20: dados los conjuntos $A = \{1, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 9, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 9\}$ y $U = \{1, 2, 9, 5, 4, 6, 8, 7\}$, halle por simple inspección y represente gráficamente el conjunto solución de $(A \cap C)' \cup ((B \cap A) \oplus C)$.

Para obtener la solución por simple inspección halle paso la solución de los conjuntos

$$A \cap C = \{4, 9\}$$

Ahora, halle el complemento $A \cap C$ respecto a U:

$$(A \cap C)' = \{7, 1, 5, 2, 8, 6\}$$

Calculemos $B \cap A$:

$$B \cap A = \{1, 9\}$$

Determine la diferencia simétrica $B \cap A$ con C:

$$(B \cap A) \oplus C = \{1, 2, 4, 6\}$$

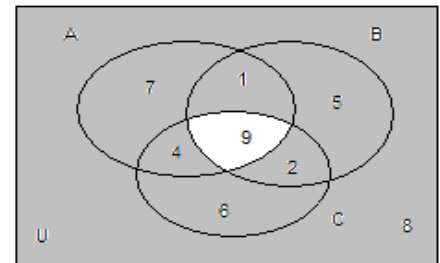


Figura 7.12: gráfica resultante del problema 6.20

Finalmente, obtenga los elementos de la unión entre el conjunto $(A \cap C)'$ y el conjunto $(B \cap A) \oplus C$:

$$(A \cap C)' \cup ((B \cap A) \oplus C) = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 5\}$$

Para obtener la solución gráfica basta con aplicar el método dado en el ejemplo 7.14. (vea figura 7.12).

¹¹ Indica: si un elemento de un conjunto no está dentro de él, entonces tiene que estar por fuera.

7.9 Álgebra de conjuntos

El álgebra de conjuntos tal como la de proposiciones es un sistema axiomático consistente, completo e independiente; se utiliza básicamente para demostrar la igualdad entre conjuntos o construir y simplificar conjuntos complejos y siempre que tengan determinadas propiedades.

Signos lógicos. Corresponde a los conectivos que se trataron en el capítulo de lógica proposicional y cuantificacional, son ellos: \neg , \vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow , \forall , \exists .

Signos específicos. Estos signos también se reconocen como signos de relación en la teoría de conjuntos y se utilizan tres: \in , \subseteq , $=$.

Letras. Se usan letras mayúsculas y minúsculas con o sin índices y subíndices.

Signos de agrupación. Se usan paréntesis “(” y “)”, además, las llaves “{” y “}”.

Signos de operación. Llamados también operadores de conjuntos; ellos son: \cap (intersección), \cup (unión), $-$ (Diferencia) y $'$ (complemento).

7.9.1 Postulados del álgebra de conjuntos

Sea U un conjunto universal, se tiene:

$$U \cap U = U \quad U \cap \emptyset = \emptyset \quad U \cup U = U \quad U \cup \emptyset = U \quad \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \quad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

7.9.2 Leyes del álgebra de conjuntos

Sean A , B y C conjuntos cualesquiera; x elemento de los conjuntos dados y los signos de los operadores de conjuntos: $'$ como complemento; \cap , la intersección; \cup , la unión; \subseteq , inclusión o subconjunto; \in , pertenencia.

| NOMBRE DE LA LEY | CONJUNTOS |
|----------------------------|--|
| 1. Idempotencia | <ul style="list-style-type: none"> $A \cap A = A$ $A \cup A = A$ |
| 2. Identidad | <ul style="list-style-type: none"> $A \cap U = A$ $A \cup \phi = A$ |
| 3. Dominación | <ul style="list-style-type: none"> $A \cap \phi = \phi$ $A \cup U = U$ |
| 4. Conmutativa | <ul style="list-style-type: none"> $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$ |
| 5. Asociativa | <ul style="list-style-type: none"> $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| 6. Distributiva | <ul style="list-style-type: none"> $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| 7. Complementación: | |

| NOMBRE DE LA LEY | CONJUNTOS |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Contradicción • Tercero excluido | <ul style="list-style-type: none"> • $A \cap A' = \emptyset$ • $A \cup A' = U$ |
| 8. Involución | <ul style="list-style-type: none"> • $(A')' = A$ • $((A')')' = A'$ |
| 9. D' Morgan | <ul style="list-style-type: none"> • $(A \cap B)' = A' \cup B'$ • $(A \cup B)' = A' \cap B'$ |
| 10. Absorción | <ul style="list-style-type: none"> • $A \cap (A \cup B) = A$ • $A \cup (A \cap B) = A$ |
| 11. ley de conjuntos | <ul style="list-style-type: none"> • $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$ • $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$ |

Tabla 7.1: Leyes del álgebra de conjuntos

Las leyes del álgebra de conjuntos se utilizan para demostrar igualdades entre conjuntos. En efecto, haga p: $x \in A$, q: $x \in B$, r: $x \in C$, V(verdad) : $x \in U$ (U: conjunto universal), F(falsedad): $x \in \emptyset$ y además haga que los conectivos lógicos se relacionan con las operaciones de conjuntos así:

\neg : complemento de conjuntos; \wedge : intersección \cap ; \vee : unión \cup

Ejemplo 7.21: demuestre las inclusiones o las igualdades siguientes:

1. $A \subseteq A \cup B$
2. $A \cap B \subseteq A$
3. $A - B = A \cap B'$
4. $(A \cup B) - B = A - B$
5. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Las demostraciones pueden realizar por cualquiera de los métodos ya estudiados; en este caso el método directo.

Prueba:

1. $A \subseteq (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B$

| PROPOSICIÓN | JUSTIFICACIÓN |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| $x \in A$ | Por hipótesis |
| $x \in A \vee x \in B$ | RA y MPP |
| $x \in A \cup B$ | Definición de unión y MPP |
| $x \in A \rightarrow x \in A \cup B$ | RSH y MPP |
| $A \subseteq (A \cup B)$ | Definición de inclusión y MPP |

2. $A \cap B \subseteq A \Leftrightarrow x \in A \cap B \rightarrow x \in A$

| PROPOSICIÓN | JUSTIFICACIÓN |
|--------------------------|----------------------------------|
| $x \in A \cap B$ | Por hipótesis |
| $x \in A \wedge x \in B$ | Definición de intersección y MPP |
| $x \in A$ | RS y MPP |

| | |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ | RSH y MPP |
| $A \cap B \subseteq A$ | Definición de inclusión y MPP |

3. $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$ Definición de diferencia
 $= \{x/x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$ Definición no pertenencia
 $= \{x/x \in A \wedge x \in B'\}$ Propiedad de complemento de conjuntos
 $= A \cap B'$ Definición de complemento de conjuntos
4. $(A \cup B) - B = \{x/(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B\}$ Definición de unión y diferencia
 $= \{x/(x \in A \wedge x \notin B)\}$ Propiedad de conjuntos
 $= A - B$ Definición de diferencia
5. $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ Definición diferencia simétrica
 $= \{x/x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$ Definición de unión
 $= \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$ Definición diferencia
 $= \{x/((x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B) \wedge ((x \in A \wedge x \notin B) \vee x \notin A)\}$ Ley distributiva
 $= \{x/(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B \vee x \notin A)\}$ Ley de conjuntos
 $= \{x/(x \in (A \cup B) \wedge x \notin (B \cap A))\}$ Definición no pertenencia y ley de D'Morgan y definición de intersección
 $= (A \cup B) - (B \cap A)$ Definición diferencia

Ejemplo 7.22: dados los conjuntos $A \cap B' = \{2, 3, 7\}$, $B \cap A' = \{5, 6\}$, $U - (A \cup B) = \{4, 9\}$ y $A - (A - B) = \{8, 1\}$, determine los elementos de A, B y U (conjunto universal de A y B).

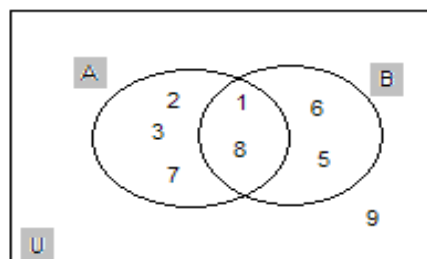


Figura 7.13: gráfica de ejemplo 7,22

Para su solución ayúdese del diagrama de Venn, de las operaciones y leyes de conjuntos. En efecto, según la gráfica figura 7.13, $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{1, 5, 6, 8\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7.10 Conjunto potencia

El nombre de conjunto potencia proviene del hecho de que si un conjunto A tiene n elementos, la cantidad de subconjuntos que se pueden formar con los elementos de A es 2^n . Este conjunto también se conoce como conjunto de partes de un conjunto.

7.10.1 Concepto de conjunto potencia

Sean A y X conjuntos cualesquiera; el conjunto formado por todos los subconjuntos de A se denomina conjunto potencia y se denota por $\mathcal{P}(A)$. Simbólicamente,

$$\mathcal{P}(A) = \{X / X \subseteq A\}$$

Ejemplo 7.23: Sean A y B conjuntos definidos como $A=\{2\}$, $B=\{1,2,3\}$ y $C=\{\}$. Halle $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ y $\mathcal{P}(C)$. En efecto,

$$\mathcal{P}(A)=\{\{2\}, \emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(B)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(C)=\{\emptyset\}$$

7.10.2 Propiedades del conjunto potencia

Sean A, B, X conjuntos cualesquiera, entonces se tiene:

- $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow X \subseteq A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
- $\mathcal{P}(A - B) \subseteq (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$

Ejemplo 7.24: Demuestre que

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))=\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$$

Por propiedad $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$. Ahora, $\{\emptyset\}$ es un conjunto unitario que tiene como único elemento el conjunto vacío, entonces, sus subconjuntos son: \emptyset y el mismo conjunto, $\{\emptyset\}$; por lo tanto, $\mathcal{P}\{\emptyset\}=\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$

7.11 Número de elementos de un conjunto

Sea A un conjunto finito; el número de elementos de un conjunto denotado $n(A)$ corresponde a un número natural que indica la cantidad de elementos del conjunto dado.

El cálculo del número de elementos de un conjunto consiste en contar los elementos del conjunto; por lo tanto, se considerarán conjuntos finitos.

Se denominará $n(A)$ al número cardinal de elementos de A o clase de A. Así que los conjuntos que tengan igual número de elementos se podrá llamar conjuntos coordinables o equipotentes, porque se puede establecer una biyección entre sus elementos.

Si se dan conjuntos finitos y se determina el número de elementos de esos conjuntos, también se podrá hallar de otros conjuntos tales como: la unión la intersección, la diferencia y el complemento de dichos conjuntos.

Ejemplo 7.25: sean $A=\{a,b,f\}$ y $B=\emptyset$, entonces $n(A)=3$ y $n(B)=0$

Ejemplo 7.26: dados los conjuntos $A=\{b, f, d\}$ y $B=\{2,6,8\}$, determine la clase a la cuál pertenecen dichos conjuntos.

Los conjunto A y B pertenecen a la clase 3, porque tienen la misma cantidad de elementos: $n(A)=3$, $n(B)=3$ y en efecto, son equipotentes o coordinables (forman relación biunívoca).

7.11.1 Número de elementos de la unión de dos conjuntos

Sean A y B conjuntos cualesquiera, el número de elementos de $A \cup B$ denotado $n(A \cup B)$ es

$$n(A)+n(B), \text{ si los conjuntos son disyuntos}$$

o también

$$n(A)+n(B) - n(A \cap B), \text{ si los conjuntos no son disyuntos}$$

En general se puede tener:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Esto sucede, porque al juntar los elementos de los conjuntos en uno solo (conjunto unión) aparecen elementos repetidos (que corresponden a la intersección) y, entonces no deben contarse (se tienen que restar).

Ejemplo 7.27: dados los conjuntos $A=\{2,3,5,7\}$ y $B=\{2,4,6,8\}$ y $C=\{1,9\}$, halle $n(A \cup B)$ y $n(A \cup C)$.

En efecto,

$$A \cup B = \{2,3,5,7,4,6,8\} \text{ y } A \cap B = \{2\}$$

Luego, como los conjuntos A y B no son disyuntos

$$n(A \cup B) = 7$$

Ahora hallemos $n(A \cup C)$:

$$A \cup C = \{2,3,5,7,1,9\} \text{ y } A \cap C = \{ \}$$

Por consiguiente, como A y C son disyuntos $n(A \cup C) = 6$

7.11.2 Número de elementos de la unión de tres conjuntos

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, el número de elementos de $A \cup B \cup C$ denotado $n(A \cup B \cup C)$ es

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Su demostración es bastante extensa sin embargo puede analizarla la igualdad de manera intuitiva con la ayuda de diagramas de Venn. Se podría creer que la igualdad debiese ser

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B \cap C),$$

pero esta identidad tiene sus contraejemplos. Presente algunos casos.

Ejemplo 7.28: una encuesta realizada a excursionistas de la ciudad de Medellín entre los últimos 4 años acerca de los que habían visitado a Argentina, Bolivia y Canadá arrojó la siguiente información:

- 48% había ido a Argentina
- 46% había ido a Bolivia
- 30% había ido a Canadá
- 26% había ido a Argentina y Bolivia
- 15% había ido a Bolivia y Canadá
- 13% había ido a Argentina y Canadá
- 10% había ido a los tres países

Se quiere saber:

- a) El porcentaje que no ha ido a ninguno de los tres países
- b) El porcentaje que ha ido a los sumo a dos países
- c) El porcentaje que ha ido al menos a dos de estos países
- d) El porcentaje que ha ido exactamente a un país
- e) El porcentaje que ha ido a Argentina y no a Canadá
- f) El porcentaje que ha ido a Bolivia o a Canadá, pero no a Argentina

Para hallar solución al problema se toma como recurso el diagrama de Venn para graficar el problema; luego, utilizando las leyes del álgebra proposicional (en algunos casos) y las operaciones de conjuntos lograremos la solución.

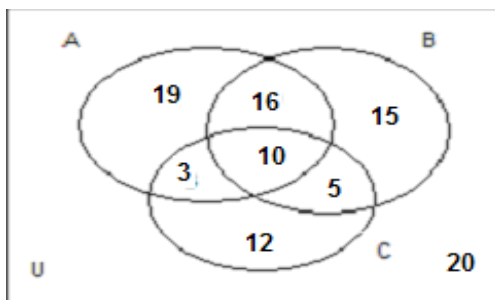


Figura 7.14: gráfica ejemplo 7.28

En efecto, veamos la gráfica del problema:

Designemos A: Argentina, B: Bolivia y C: Canadá y U: 100% de los encuestados (figura 7.14)

Para graficar tenga en cuenta, que se inicia primeramente con las instrucciones que indican intersección (de pares de conjuntos y de los tres); que se completan los conjuntos dados y que el total, por ningún motivo, debe

ser mayor que 100.

Solución de a: según la gráfica, el porcentaje que no ha ido a ninguno de los tres países es 20%. Observe que está ubicado por fuera de los tres conjuntos.

Solución de b: La palabra “a lo sumo” significa “máximo”; en nuestro problema, donde se pide hallar los que máximo han ido a dos países, es similar a que estén pidiendo los que han ido a 1 ó a 2 países:

$$3\%+15\%+5\%+16\%+19\%+12\%=70\%$$

Solución de c: La palabra “al menos” significa “mínimo”; en nuestro problema, donde se pide hallar los que mínimo han ido a dos país, es similar a que estén solicitando los que han ido a 2 ó 3 países:

$$10\%+16\%+3\%+5\%=34\%$$

Solución de d: Los que han ido exactamente a uno de estos países son aquellos que viajado únicamente a Argentina o únicamente a Bolivia o únicamente a Canadá. En efecto son:

$$15\%+19\%+12\%=46\%$$

Solución de e: el porcentaje que ha ido a Argentina y no a Canadá corresponde a la sección que está en A, pero no está en C. Por consiguiente, es:

$$19\%+16\%=35\%$$

Solución de f: transcrito el problema al lenguaje simbólico la expresión queda:

$$(Bx \vee Cx) \wedge \neg Ax$$

Transcribiendo la expresión de este enunciado a la teoría de conjuntos se tiene:

$$(B \cup C) \cap A'$$

La solución se puede ver en el diagrama de la figura 7.15 se tiene: $15\%+5\%+12\%=32\%$

Otra forma de resolver este problema es: se utilizan los correspondientes valores de verdad de los conectivos lógicos de la expresión dada en lenguaje simbólico, así: seleccione el conectivo principal de cada paréntesis y el de la expresión escrita y ponga verdadero a esos conectivos. Por lo tanto, para que cada paréntesis sea verdadero, escriba la tabla de valores de verdad de cada proposición según el conectivo lógico; entonces, las proposiciones verdaderas las deja como están y las de valores falso, las niega. En efecto,

$$\begin{array}{ccc} (Bx \vee Cx) \wedge \neg Ax & & \\ \vee & & \vee \end{array}$$

Como la proposición $Bx \vee Cx$ es compuesta, determine cuáles son los posibles que toma Bx y Cx para que su disyunción sea verdadera.



Figura 7.15: diagrama solución del ejemplo 7.28

| | |
|---|--------------|
| | $Bx \vee Cx$ |
| V | V |
| V | F |
| F | V |

Trascriba la expresión en forma normal disyuntiva, pues en estos casos la proposición $Bx \vee Cx$ es verdadera:

$$(Bx \wedge Cx) \vee (Bx \wedge \neg Cx) \vee (\neg Bx \wedge Cx)$$

Ahora, conjuntemos esta proposición con $\neg Ax$:

$$((Bx \wedge Cx) \vee (Bx \wedge \neg Cx) \vee (\neg Bx \wedge Cx)) \wedge \neg Ax$$

Trascribiendo luego este enunciado a la teoría de conjuntos se tiene:

$$((B \cap C) \cup (B \cap C') \cup (B' \cap C)) \cap A'$$

Observe que este conjunto es igual a

$$((B \cap C) \cup (B \oplus C)) - A,$$

según las leyes de la teoría de conjuntos

Según el diagrama de la figura 7.14 se tiene:

$$(\{10\%, 5\% \} \cup \{16\%, 15\% \} \cup \{12\%, 3\% \} = \{10\%, 5\%, 16\%, 15\%, 12\%, 3\% \})$$

Para hallar la respuesta basta con sumar los elementos del conjunto, lo que implica que la respuesta es:

$$10\% + 5\% + 16\% + 15\% + 12\% + 3\% = 61\%$$

De tal manera verifica identidad con la respuesta obtenida por el otro método.

AUTOEVALUCION 7

1. Seleccione la respuesta correcta según las siguientes situaciones:

- A. Si 1 y 2 son correctas
- B. Si 2 y 3 son correctas
- C. Si 3 y 4 son correctas
- D. Si 2 y 4 son correctas
- E. Si 1 y 3 son correctas

1.1 Dado que el vínculo corresponde al complemento de un conjunto, el conjunto $\overline{((\overline{A \cup B}) \cap C) \cap C} \cup (A \cap \overline{B})$ cuales de estos conjuntos lo representan:

$$1) \overline{A} \cap B$$

$$2) B - A$$

$$3) \overline{A} \cup B$$

$$4) \overline{A - B}$$

1.2 Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el conjunto de referencia de los conjuntos A, B, M, X . Se sabe que: $A \subset B, B \not\subset M, A \subset M, X \not\subset M$ y $X \subset B$, entonces

$$(1) A = \{5\}, B = \{1, 2, 5\}, M = \{4, 3, 1, 5\}, X = \{4, 2\}$$

$$(2) A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 5\}, M = \{2, 3, 1, 4\}, X = \{5\}$$

Figura 7.24 del problema 1.1

- (3) $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,6\}$, $M=\{4,2,1,5\}$, $X=\{3\}$
 (4) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $M=\{2,3,1,5\}$, $X=\{4,1\}$

2) Sean A y B conjuntos cualesquiera. La diferencia simétrica entre A y B es (figura 7.25):

3) Sean A y B conjuntos cualesquiera. El conjunto potencia de la unión de los conjuntos A y B denotado por $\mathcal{P}(A \cup B)$ es:

- A) $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{B \cup A})$
 B) $\overline{(A \cup B) \cup (B \cup A)}$
 C) $\overline{(A \cap B) \cap (B \cap A)}$
 D) $\overline{(A \cup B) \cap (A \cup B)}$
 E) $\overline{\overline{A \cup B} \cap \overline{B \cap A}}$

Figura 7.25 del problema 2

- A) Igual a $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
 B) Subconjunto de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
 C) Contiene a $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
 D) Igual a $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) - \{\{\}\}$
 E) Subconjunto de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) - \{\{\}\}$

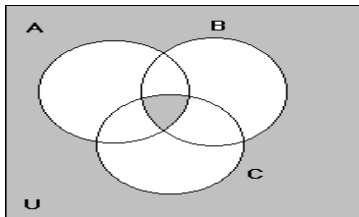


Figura 7.25: problema 4

4) La región coloreada del diagrama de Venn en la figura 7.25 corresponde al conjunto

- A) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
 B) $\overline{(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)}$
 C) $\overline{(A \cap B \cap C) \oplus (A \cup B \cup C)}$
 D) $\overline{(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)}$

5) Seleccione los elementos de los conjuntos A , B y su conjunto universal U , dados los conjuntos de la figura 7.27 son:

- A) $A=\{3,7,1,2,8\}$, $B=\{1,5,6,8\}$ y $U=\{9,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
 B) $A=\{1,2,3,7,8\}$, $B=\{1,5,6,8\}$ y $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
 C) $A=\{2,3,7,1\}$, $B=\{1,5,6,8\}$ y $U=\{9,1,2,3,4,5,6\}$
 D) $A=\{1,5,6,8\}$, $B=\{3,7,1,2\}$, y $U=\{9,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
 E) $A=\{5,6,8\}$, $B=\{3,7,2\}$, y $U=\{9,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$$A \cap \overline{B} = \{2,3,7\}$$

$$B \cap \overline{A} = \{6,5\}$$

$$U \cap \overline{(A \cup B)} = \{4,9\}$$

$$A - (A - B) = \{8,1\}$$

Figura 7.27 del problema 8

TALLER 7

- 1) Si se sabe que A, B, C son conjuntos cualesquiera tales que:

$$i)(A \subset B) \vee (B \subset C)$$

$$ii)m \in A, n \in B, q \in C, r \notin A, s \notin B, t \notin C$$

determine justificando las respuestas, si cada uno de los enunciados dados en la figura 7.21 son verdaderos (V) o falsos (F) o contingencias (C):

$$a) m \in C$$

$$b) n \in A$$

$$c) q \notin A$$

$$d) r \in B$$

$$e) s \in A$$

$$f) t \notin A$$

$$g) t \in B$$

$$h) n \in C$$

$$i) m \in C$$

- 2) Sean A, B, C subconjuntos de $U=\{1,2,3\}$. Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq B$ entonces ¿ $A=C$? Determine, que el enunciado es verdadero (V) o falso (F), dando un contraejemplo o incierto (I), dando un ejemplo para el caso verdadero o un contraejemplo para el caso falso.

Figura 7.26: enunciado del problema 1

- 3) Dada la definición de cada conjunto, determine qué clase de conjunto son:

$$A=\{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es un número par primo diferente de } 2\}$$

$$B=\{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un número par primo diferente de } 2\}$$

$$C=\{x \in \mathbb{Z} / 2x+3=0\}$$

$$D=\{x \in \mathbb{N} / x+2=1\}$$

$$E=\{x \in \mathbb{R} / x+1=0\}$$

$$F=\{x \in \mathbb{C} / x+1=0\}$$

- 4) Dados tres conjuntos cualesquiera A, B, C, según las siguientes situaciones escriba I, si el enunciado es incorrecto o C, si es correcto:

$$b. A \not\subset C \Rightarrow A \not\subset B \text{ o } B \not\subset C$$

$$c. A \neq B \text{ y } B \neq C \Rightarrow A \neq C$$

$$d. A \not\subset B \text{ y } B \not\subset C \Rightarrow A \not\subset C$$

$$e. 1A \neq C \Rightarrow A \neq B \text{ o } B \neq C$$

$$f. A \neq C \Rightarrow A \neq B \text{ y } B \neq C$$

$$g. A \not\subset C \Rightarrow A \neq B \text{ y } B \neq C$$

- 5) Dados los conjuntos $A=\{3,2,4\}$ y $B=\{\{3\},\{2\},2,4,\{4\}\{3,4\},\{2,4\},\{2,3,4\},\{\}\}$ determine cuáles son correctas i cuales son incorrectas:

$$a) 2 \in A$$

$$e) 2 \in B$$

$$i) \{2,3\} \in B$$

$$m) A \subset B$$

$$b) 3 \in B$$

$$f) \{4,2\} \in B$$

$$j) \{3,4\} \subset A$$

$$n) A \in B$$

$$c) \{4\} \in B$$

$$g) \emptyset \in B$$

$$k) \{3,4\} \in A$$

$$o) \{3\} \subset B$$

$$d) \{3,2\} \in A$$

$$h) \emptyset \subset A$$

$$l) \{4,2\} \subset B$$

$$p) \{3\} \not\subset A$$

- 6) Dados los conjuntos $A=\{1,3,5,a, b, d\}$, $B=\{2,5,6,a, e, f\}$, $C=\{1,2,4,7, a, e, g\}$ y $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9, a, b, c, d, e, f, g, h\}$ halle y represente gráficamente los conjuntos

$$6.1 (A-B) \cap A'$$

$$6.2 (C' - A) \cup A$$

$$6.3 B' \oplus C$$

$$6.4 (A' \oplus C) - (A \cap B)'$$

$$6.5 (B \cup C') \cap (A - C)$$

7) Demuestre que:

a) $(A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A - B) \cup (B - A)$

b) $(A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A - B) \cup (B - A)$

c) $A \oplus B = (A' \cup B)' \cup (B' \cup A)'$

d) $(A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A - B) \cup (B - A)$

e) $A \subseteq B \Leftrightarrow B \subseteq \bar{A}$

8) Sean A y B conjuntos cualesquiera. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes igualdades así: si es verdadera demuéstrela justificando cada paso; si es falsa, refútela; si es incierta, de un ejemplo para la parte verdadera y un contraejemplo para la parte falsa:

a) $(A - B)' = A \cup B'$

b) $(A - B)' \subseteq B' \cup A$

c) $B' \cup A \subseteq (B - A)'$

d) $A \cup B' \not\subseteq (B - A)'$

e) $(B - A)' \subseteq B' \cup A$

f) $(B - A)' \not\subseteq B' \cup A$

g) $A - (A - B) = A \cap B$

h) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

i) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

9) Dados los conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{2, 4, 8, 9\}$, $D = \{4, 5\}$, $E = \{2, 4\}$ y $F = \{2\}$, Si X es un conjunto desconocido, escriba en el paréntesis el número correspondiente al conjunto X, para las siguientes situaciones:

() a) $X \not\subseteq B$ y $X \subset C$

() b) $X \subseteq A$ y $X \subset B$

() c) $X \not\subseteq A$ y $X \not\subseteq C$

() d) $X \subset B$ y $X \not\subseteq C$

() e) $X \subset E$ y $X \not\subseteq D$

1. $X = B$

2. $X = D$

3. $X = E$

4. $X = F$

5. $X = A$

6. $X = C$

10) Sea $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ y $C = \{1, 4, 6, 8, 9\}$. Si P, Q, R son propiedades definidas por P: "ser número primo", Q: "ser número impar" y R: "ser número primo relativo con". Determine falso/verdadero para cada afirmación:

_____ $(\exists x \in A)(\neg Px)$

_____ $(\exists x \in A)(Qx)$

_____ $(\forall x \in A)(\neg Px)$

_____ $(\exists x \in B)(Px)$

_____ $(\exists x \in B)(Qx)$

_____ $(\forall x \in B)(\neg Px)$

_____ $(\exists x \in C)(Px)$

_____ $(\exists x \in C)(Qx)$

_____ $(\forall x \in C)(Rx)$

_____ $(\forall x \in A)(Px)$

_____ $(\forall x \in A)(\neg Qx)$

_____ $(\exists x \in A)(Px)$

_____ $(\forall x \in B)(Px)$

_____ $(\forall x \in B)(\neg Qx)$

_____ $(\exists x \in B)(\neg Px)$

_____ $(\forall x \in C)(\neg Px)$

_____ $(\forall x \in C)(\neg Qx)$

_____ $(\exists x \in C)(\neg Px)$

_____ $(\exists x \in C)(\forall y \in A)(xRy)$

_____ $(\exists x \in B)(\forall y \in A)(xRy)$

_____ $(\forall x \in A)(\forall y \in C)(xRy)$

_____ $(\exists x \in B)(\exists y \in A)(xRy)$

11) Escriba el conjunto correspondiente al área subrayada de las figura 7.28.

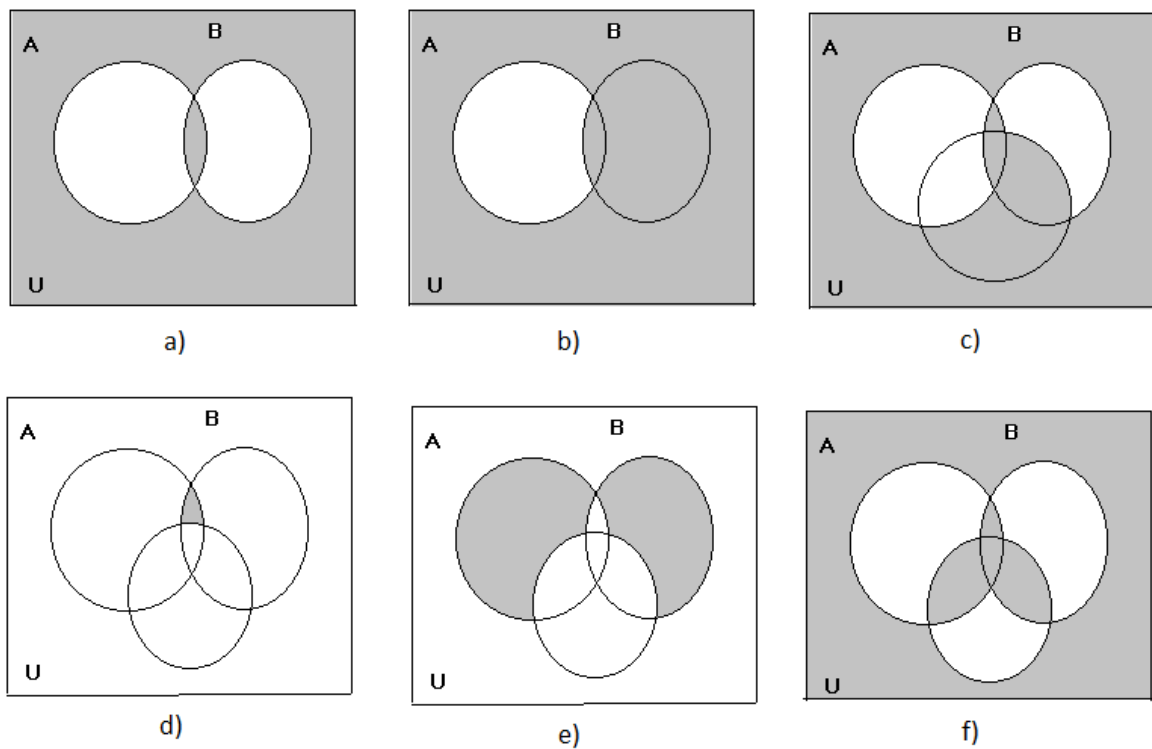


Figura 7.28: problema 11

12) Sea U un conjunto universal, respecto a los conjuntos A y B , determine el conjunto $(A' \oplus B') \cap (A - B)'$ por extensión, si se dan las siguientes situaciones:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 6\}$, $(A \cup B) - (B \oplus A) = \{3, 6, 9\}$, $A' \cap B' = \{4\}$ y $A - B = \{7, 2\}$
- $(A \cup B)' = \{6, 8, 9\}$, $A \cap B' = \{7, 5\}$, $B \cap (B \oplus A) = \{4\}$ y $(A \cup B) - (B \oplus A) = \{1, 2, 3\}$
- $(B' \cup A)' = \{6, 4\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $B \oplus A = \{2, 4, 6, 5\}$ y $A' \cap B' = \{8, 10\}$
- $A \cup B - (B - A) = \{1, 2, 5, 9\}$, $(A \cap B)' = \{1, 5, 4, 6, 8, 7\}$, $(A \oplus B)' = \{2, 8, 9, 7\}$ y $(A \cup B)' = \{7, 8\}$
- $(A \cup B) - (B \cap A) = \{2, 3, 6, 7, 9\}$, $B' \cap A' = \{4\}$, $A \cup B = \{3, 5, 7, 1, 9, 6, 2\}$, $B' \cap A = \{2, 7\}$
- $B \oplus A = \{2, 3, 5, 7, 1\}$, $A \cup B = \{3, 5, 7, 1, 10, 4, 2\}$, $B - A = \{1, 3, 7\}$, $(B \cup A)' = \{6, 8\}$
- $(B - A)' = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$, $A - B = \{7, 2\}$, $(A \oplus B) = \{5, 6, 7, 2\}$, $(A \cup B) - (A \oplus B) = \{3, 9, 1\}$
- $A \cup B = \{2, 3, 5, 7\}$, $B' = \{1, 5, 8\}$, $a' = \{1, 7, 8\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $A \cap B' = \{2, 1\}$, $A \cup B' = \{2, 1\}$, $A \oplus B = \{2, 5, 9, 1\}$

13) Calcule $N(A)$, $N(B)$ y $N(U)$, si

- $N(A \cap B') = 7$, $N(B \cap A') = 4$, $N(A \cup B)' = 2$ y $N(A \oplus B)' = 5$
- $N(A \cap (A - B)') = 4$, $N((A \cup B) \cap B') = 5$, $N(A \cup B) = 15$ y $N(A') = 8$
- $N(B \cap (A \cap B)') = 8$, $N((B \cap A)' \cap B') = 9$, $N((A \cup B)') = 6$ y $N((A \cup B) \cap (A \oplus B)') = 4$
- $N((A \oplus B) \cup (A \cap B)) = 127$, $N(A' \cap (B - A)) = 41$, $N(A' \oplus B)' = 60$
 $N(((A \cap B)' \cap (A \oplus B)') = 34$, $N((A \oplus B) \oplus (A \cup B')) = 101$. Calcule: $N((A \cap B)')'$ y $N(B - A)'$, si $N(A \cap (A \oplus B)) = 13$; $N((A \cup B)') = 7$; $N(A \cap (B \cap A')) = 8$; $N((A \oplus B)') = 13$

14) Dados los siguientes enunciados escriba I, si éste es incorrecto o C, si es correcto:

- a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
- b) $A = B \Rightarrow \mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$
- c) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\} = \mathcal{P}(A - B)$
- d) $A = B \Rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
- e) $A = B \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- f) $\mathcal{P}(A - B) \subset \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$

15) Se da la siguiente información acerca del número de elementos de los subconjuntos A, B, C de cierto conjunto de referencia U, tal que $n(U)=150$:

| | | |
|---------------------|----------------------------|-------------|
| $N(A \cup B) = 120$ | $N(A \cap B) = 35$ | $N(C) = 55$ |
| $N(C \cup B) = 100$ | $N(A \cap B' \cap C) = 10$ | |
| $N(A) = 85$ | $N(A' \cap B \cap C) = 5$ | |

Halle (justificando su respuesta):

- a) $N(B)$
- b) $N(A \cap B \cap C)$
- c) $N(A' \cup C' \cup B')$
- d) $N((A' \cap B') \cup (A' \cap C') \cup (B' \cap C'))$

16) Resuelva el problema del ejemplo 7.28 las siguientes situaciones

- a) El porcentaje que si ha ido a Canadá o a Argentina, entonces no ha ido a Bolivia.
- b) El porcentaje que ha ido a Argentina y no a do a Canadá si, y sólo no ido a Bolivia.

17) La revista de la universidad desea incrementar su tiraje y encarga a los estudiantes de comunicación realizar una encuesta entre sus lectores. Esta, tras el correspondiente sondeo, procesa los datos y entrega a la revista las siguientes condiciones sobre sus lectores actuales: 53% son varones, 48% son estudiantes universitarios, 37% viven en Medellín, 8 % son universitarios varones, 16% son varones que viven en Medellín, 10% son universitarios que viven en Medellín, 5% son universitarios varones que viven en Medellín.

El director de la revista, tras examinar los datos, concluye que no son ciertos y se niega a aceptarla. ¿El tiene razón? ¿Por qué?

18) Se da la siguiente información referente al número de elementos de los subconjuntos A, B, C de cierto conjunto universal U. Determine el número de elementos de los conjuntos:

$$\begin{aligned}
 N(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) &= 6 \\
 N(A \cap B \cap \overline{C}) &= 5 \\
 N(A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) &= 7 \\
 N((B \cap \overline{C}) - A) &= 8 \\
 N(\overline{(A \rightarrow (B \rightarrow \overline{C})))} &= 15 \\
 N(A) &= 40 \\
 N(\overline{A} - B - C) &= 9 \\
 N(\overline{A} \cap (\overline{B} \rightarrow C)) &= 24
 \end{aligned}$$

- a) $n(a \text{ lo sumo están en dos conjuntos})$
- b) $n(\text{mínimo están en dos conjuntos})$
- c) $n(U)$

19) En la facultad de administración de una universidad 145 estudiantes del primer nivel toman matemática moderna, 136 administración, 138 economía, 94 toman matemática y administración, 78 economía y matemática, 85 administración y economía, 49 las tres materias y 54 ninguna de las tres materias.

- a) Cuántos estudiantes hay en el primer nivel?
- b) Cuántos estudian exactamente dos materias?
- c) Cuántos estudian al menos una materia?
- d) Cuántos estudian máximo una materia?
- e) Cuántos estudian administración, pero no matemática?
- f) Cuántos estudian economía si y solo si no estudian administración?

20) En una universidad 145 estudiantes presentaron el primer parcial de matemática moderna, en el que 52 perdieron dicho examen. Luego del segundo parcial el resultado fue muy favorable a los estudiantes, habiéndolo ganado 104. Si 34 estudiantes perdieron ambos exámenes ¿Cuántos alumnos aprobaron dichos exámenes? **R/. 86**

21) En un grupo de 200 atletas hay 148 que tienen sudadera con chaqueta y 66 que tienen pantaloneta con camiseta. ¿Cuántos hay que tienen pantaloneta y camiseta y pantaloneta con camiseta, sabiendo que 28 ni pantaloneta con camiseta ni sudadera con chaqueta? ¿Cuántos tienen únicamente sudadera con chaqueta? ¿Cuántos tienen únicamente pantaloneta con camiseta? **R/. 14; 134; 52**

22) En una encuesta hecha a 120 deportistas acerca de los que practicaban fútbol, voleibol y baloncesto, se encontró: únicamente fútbol 14; voleibol, pero no baloncesto ni fútbol 9; únicamente baloncesto 17; fútbol y voleibol, pero no baloncesto 15; fútbol y baloncesto, pero no voleibol 3; voleibol y baloncesto, pero no fútbol 6; ninguno de estos deportes 42.

- a) Cuántos practican los 3 deportes?
- b) Cuántos si practican fútbol y baloncesto entonces no practican voleibol?
- c) Cuántos practican voleibol si y solo si no practican fútbol pero si baloncesto?
- d) Cuántos practican al menos 2 deportes?
- e) Cuántos practican a lo sumo 1 deporte?

23) Haga un programa en cualquier lenguaje, que calcule las operaciones de conjuntos (unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica de conjuntos cualesquiera y complemento de un conjunto dado) y muestre gráficamente los conjuntos.

- 24) En la universidad se realizó una encuesta a 420 estudiantes de las facultades ingeniería y de administración y se consiguió la información dada en la tabla 7.2, acerca de los que hablaban francés e inglés.

| Facultad | Inglés | Francés | TOTAL |
|----------------|--------|---------|-------|
| Administración | 49 | 84 | 133 |
| Ingeniería | 101 | 96 | 197 |
| TOTAL | 150 | 180 | 330 |

Tabla 7.2: problema 24

Se quiere conocer:

24.1 La cantidad de estudiantes que son de ingeniería que hablan inglés o hablan francés.

24.2 La cantidad de estudiantes que son de ingeniería pero no hablan inglés o hablan francés pero no son de administración.

24.3 La cantidad de estudiantes que si son de administración entonces no hablan francés. Entiéndase que esto es diferente a decir: son de administración pero no hablan francés.

25. En la universidad se realizó una encuesta a 420 estudiantes de las facultades ingeniería y de administración y se consiguió la información dada en la tabla 6.3, acerca de los que hablaban francés e inglés.

| Facultad | Fútbol | Voleibol | Baloncesto | TOTAL |
|----------------|--------|----------|------------|-------|
| Administración | 35 | 48 | 32 | 115 |
| Ingeniería | 45 | 57 | 48 | 150 |
| TOTAL | 80 | 105 | 80 | 265 |

Tabla 7.3: problema 25

Se quiere conocer cuántos estudiantes,

25.1 si son de Administración no juegan Baloncesto ni Fútbol

25.2 de Ingeniería juegan Baloncesto o Fútbol

25.3 de administración o de Ingeniería juegan Voleibol pero no juegan Fútbol