Capítulo 9: FUNCIONES

9.1 Introducción

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830)

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), Matemático y físico francés. Hizo grandes aportes al cálculo con las llamadas series de Fourier con lo cual consiguió solucionar la ecuación del calor; de ahí que fue el primero en dar explicación científica al efecto invernadero.

Aunque el concepto mismo de función nació con las primeras relaciones observadas entre dos variables, hecho que seguramente surgió desde los inicios de la matemática en la humanidad, con civilizaciones como la babilónica, la egipcia y la china. Para los historiadores de las matemáticas, el concepto moderno de función lo dio el matemático suizo Leonhard Euler. Sin embargo, antes que Euler, el matemático y filósofo francés Rene Descartes (1596-1650) mostró en sus trabajos de geometría que tenía una idea muy clara de los conceptos de ``variable'' y ``función'', realizando una clasificación de las curvas algebraicas según sus grados, reconociendo que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo, en forma simultánea, las ecuaciones que las representan.

Esta noción de función permaneció sin cambio hasta los inicios de 1800 cuando Fourier en su trabajo sobre las series trigonométricas, encontró relaciones más generales entre las variables. La definición de Fourier es: “En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sea positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única” (Rüting, 1984).

En 1829 matemático alemán **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859) se atribuyó la definición "formal" moderna de una función. El formuló por primera vez el concepto moderno de función $y = f(x)$ de una variable independiente en un intervalo $a<x< b$. Definió función de la siguiente forma:

“y es una función de una variable x, definida en el intervalo $a<x<b$, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia” (Kleiner, 1989).

En este texto concepto de función se asumirá similar al de correspondencia o aplicación. Muchos matemáticos diferencian el concepto de correspondencia con el de aplicación y el de aplicación con el de función, veamos:

- Una correspondencia f entre dos conjuntos A y B, siendo A conjunto de partida y B conjunto de llegada, es un subconjunto del producto cartesiano AxB; es decir, es correspondencia entre A y B $\Leftrightarrow$ $f \subset AxB$.
- Una aplicación es una correspondencia unívoca (que tiene una sola imagen) cuyo conjunto de partida coincide con el conjunto formado por los elementos del conjunto de partida que están relacionados.
- Una función es una aplicación entre dos conjuntos numéricos A y B.

El estudio de las funciones se hará desde el punto de variables discretas; su propósito no será estudiar funciones definidas bajo variables continuas. Sin embargo, se presentarán algunos ejemplos con aplicaciones continuas, como información.

9.2 Concepto de función

Sean A y B conjuntos numéricos. Si cada elemento de A está relacionado con uno y solo un elemento del conjunto B se dice que f es una función y se escribe $f: A \rightarrow B$. Así que $f(x)=y$ si y es el único elemento de B asignado por f al elemento x de A. La notación f(x) para una función de x se debe a se debe al matemático suizo Leonhard Euler. Si A=Conjunto de los números reales=R, se hablará de función real.

Ejemplo 9.1: Sea $f:R \rightarrow R$ una relación definida por $f=\{(x,y)/\ 7xy-4x+2y=5\}$. ¿es f una función? En caso de no serla, redefina f para que la sea.

En efecto, despeje y:

$$y=(5+4x)/(7x+2)$$

Para que la expresión quede definida en los reales se debe cumplir que

$$7x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2/7$$

Por lo tanto, f no es función, porque no está definida en todo el conjunto de los reales. Así que $f:R-\{2/7\} \rightarrow R$ es una función definida por

$$y=f(x)= (5+4x)/(7x+2).$$

Ejemplo 9.2: en una estación de gasolina venden a $6400/ galón de gasolina corriente y a $12400/ galón de gasolina extra. Si x= el número de galones vendidos de gasolina corriente y y= el número de galones vendidos de gasolina extra, en determinado día. La función que representa las ventas totales en la gasolinera en ese día es:

$$f(x,y)=6400x+8400y$$

9.3 Conjuntos dominio e imágenes de funciones

De una función f se pueden definir conjuntos de gran importancia en el desarrollo de las matemáticas y de las ciencias y la tecnología: dominio e imágenes de f. Por ejemplo, en las aplicaciones de lenguajes de programación se utiliza para evaluar la variable de control de un condicional o ciclo.

9.3.1 Conjunto dominio de una función

Sean A y B conjuntos cualesquiera y f una función definida de A en B. El *dominio* de una función f, denotado $\mathfrak{D}(f)$ es el conjunto de partida; así que,

$$\mathfrak{D}(f)=\{x/xfy\}=A$$

Al dominio también se llama conjunto de "*pre-imágenes".* En efecto, despeje y para observar los valores de x para los cuales está definida y.

Ejemplo 9.3: Sea $A=\{1,2,4,7\}$ y $B=\{2,4,8,14\}$ y la función $f:A\to B$ una relación definida por $f(x)=2x$. Determine el $\mathfrak{D}(f)$.

La relación estará definida como sigue:

$$f=\{(1,2),(2,4),(4,8),(7,14)\}$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{D}(f)=\{1,2,4,7\}$$

9.3.2 Conjunto de imágenes de una función

Sean A y B conjuntos cualesquiera y f una función definida de A en B. Las *Imágenes* de una función f, denotado $\mathrm{Im}(f)$ es el conjunto formado por todos los segundos elementos o segundas componentes de la función; así que,

$$\mathrm{Im}(f)=\{y/xfy\}$$

En efecto, despeje x para observar los valores de y para los cuales está definida x.

El conjunto de imágenes también es llamado "codominio o rango" por algunos matemáticos.

Ejemplo 9.4: dados los conjuntos y la relación del ejemplo 9.2, el rango de f es,

$$\mathrm{Im}(f)=\{2,4,8,14\}$$

9.3.3 Técnica para hallar el dominio y las imágenes de una función real

Para hallar el domino o las imágenes para una función $f:R\to R$ se presentan entre otros, los siguientes casos:

- La variable x está en el denominador. En este caso se restringe a x para que no haga que el denominador sea cero.

- La variable está en la cantidad subradical de índice par. Restrinja a x para que haga que la cantidad subradical sea no negativa.

- La variable está como denominador en la cantidad subradical de índice par. En efecto, haga que el denominador sea diferente de cero y que la cantidad subradical sea no negativa.

- La variable no está ni como denominador ni como parte de la cantidad subradical de índice par. En este caso, la función estará definida para todo el conjunto de los reales.

Ejemplo 9.5: dada la relación f definida en los reales por

$$f=\{(x,y)\in RxR/3xy - 4x + 3y - 4 = 0\},$$

halle el dominio y las imágenes de f. En efecto,

$f:R\rightarrow R$ no es función, porque al despejar la y de f se tienen valores para x que no definen la función. En efecto, $x\neq 4/3 \Leftrightarrow x\in R-\{-1\}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(f)= R-\{-1\}$$

Para hallar el conjunto imagen despeje x de f para encontrar los valores de y que definen a f. Por consiguiente,

$$\mathrm{Im}(f)= R-\{4/3\}$$

Por lo tanto, redefinida f como $f: R-\{-1\}\rightarrow R$ es una función. También es función

cuando se da $f:R-\{-1\}\rightarrow R-\{4/3\}$

9.4 Funciones especiales

Las funciones tienen gran aplicación en matemáticas, para el estudio del cálculo (límites, derivadas e integrales). Estas funciones se denominan funciones reales; entre otras se tienen:

- Función constante
- Función lineal
- Función idéntica
- Función segmentada o por tramos

Se conocen otras funciones muy utilizadas en el cálculo, tales como:

- Función trigonométrica
- función cuadrática

- Función exponencial
- Función logarítmica
- Función valor absoluto
- Función mayor entero

9.4.1 Función lineal

Es una función cuyo dominio y rango son todos los números reales y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado. Son aquellas funciones de la forma f()=ax+b siendo a, b constantes

Ejemplo 9.10: si A={1, 3, 4} y B={2, 4, 5} y f(x)=x+1 para f:A→B. Determine f y represéntela gráficamente.
f(1)=2, f(3)=4 y f(4)=5

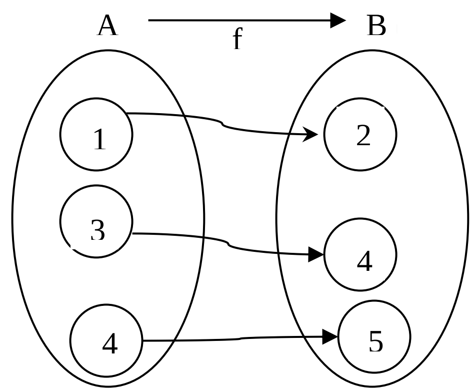

Figura 7.1: f es función

Su representación gráfica está en la figura 9.1.

9.4.2 Función Idéntica

Es cuando cada elemento del dominio tiene como imagen a él mismo. Es decir, $f(x) = x$.

9.4.3 Funciones Inversas

Dos funciones son inversa si su compuesta es igual a la función inversa. Es decir, sea $f : A \to A$ una función decimos que f^{-1} es la inversa si y sólo si $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

Una función f:A→B se dice que tiene función inversa, si f es biyectiva y se denota por f^{-1}:B→A. Es decir, para todo y∈B existe un x∈A tal que la función inversa $f^{-1}(y)=x$.

Ejemplo 9.11: según el ejemplo 9.7, existe función inversa. En efecto, la función inversa corresponde a

$$f^{-1}(y)=(y+1)/3$$

9.4.4 Función por tramos

Es una función formada por la unión de dos o más funciones. Son de la forma $f(x)=f_1(x) \cup f_2(x) \cup f_3(x) \cup \ldots \cup f_n(x)$ Tal que

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{ para } x<a \\ f_2(x) \text{ para } a\le x<b \\ f_3(x) \text{ para } b\le x<c \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x) \text{ para } m\le x<n \end{cases}$$

Ejemplo 9.6: en un almacén de juguetes venden sus artículos a $4000 c/u, pero al por mayor (20 o más artículos) las ventas las realizan así: $30000/unidad; ahora si la venta a un cliente es superior a 100 artículos le hacen un descuento del 10% adicional a los $3000/artículo. Escriba la función que representa una venta. ¿Cómo se denomina la función anterior? Determine el dominio y el rango de esa función.

$$f(x)=\begin{cases} 4000x, \text{ si } x<20 \\ 3000x, \text{ si } 20\leq x\leq 100 \\ 2700x, \text{ si } x>100 \end{cases}$$

A este función se denomina "función segmentada o por tramos" y su dominio es $[0,\propto)$, porque nunca sería posible realizar una venta negativa de artículos.

9.4.5 Función constante

Es aquella cuyos elementos del conjunto del dominio tienen la misma imagen. Es decir, aquella cuyo dominio de imagen es un conjunto unitario. Son aquellas funciones de la forma f()=k con k = constante

Ejemplo 9.10: $f(x)=3$

9.5 Clasificación de funciones especiales

Hay funciones muy especiales que son de gran aplicación en el estudio de las matemáticas discretas y son ellas: función inyectiva, función sobreyectiva, función biyectiva y función inversa.

9.5.1 Función inyectiva

Una función $f:A\rightarrow B$ se dice que es *inyectiva* o también llamada *uno a uno*, si y solo si cada elemento del codominio es imagen de solo un elemento del dominio. Es decir,

$$f(x_1)= f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2, \text{ para todo } x_1,x_2\in A$$

o también

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2), \text{ para todo } x_1,x_2\in A$$

Ejemplo 9.7: Sea $f:R\rightarrow R$ una función definida por $f(x)=3x-1$. Demuestre que f es uno a uno. En efecto,

$f(x_1)= f(x_2)$	Por hipótesis
$3x_1-1= 3x_2-1$	Ley uniforme, MPP
$3x_1=3x_2$	Ley uniforme (suma 1 a ambos lados), MPP
$x_1=x_2$	Ley uniforme (divide por 3 a ambos lados), MPP

Por lo tanto, f es uno a uno.

9.5.2 Función sobreyectiva

Una función $f:A\rightarrow B$ se dice que es *sobreyectiva* o simplemente *sobre* si el conjunto de llegada B es igual al conjunto imagen; es decir, si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A. Esto es, el codominio es igual al conjunto de llegada

$$f:A\rightarrow B \text{ es función sobre} \Leftrightarrow f(A)=B=Im(f)$$

Ejemplo 9.8: dada la función del ejemplo 9.5, demuestre que es una función sobre. En efecto,

$f(x)=y$	Por definición,
$x=(y+1)/3$	despejando x, MPP
$Im(f)=R$	x no tiene restricciones, MPP
f es sobre	Definición de función sobre, MPP

9.5.3 Función biyectiva

Una función $f:A\rightarrow B$ es biyectiva si y solo si f es uno a uno y sobre, a la vez.

Ejemplo 9.9: La función f de los ejemplos 9.5 y 9.6 es biyectiva.

Función inversa

Una función $f:A\rightarrow B$ se dice que tiene función inversa, si f es biyectiva y se denota por $f^{-1}:B\rightarrow A$. Es decir, para todo $y\in B$ existe un $x\in A$ tal que la función inversa $f^{-1}(y)=x$.

Ejemplo 9.10: $A=\{-1,0,1,2,3\}$ y $f:A\rightarrow A$ una relación definida por $f=\{(-1,-1),(1,2),(0,1),(2,3),(3,0)\}$. Determine f^{-1}.

Solución

Observe que ninguna 1ª componente se repite y todos los elementos de A están relacionados; por lo tanto, f es función.

Ahora veamos, cualquier par de elementos diferentes de A les corresponden elementos diferentes del mismo conjunto; es decir, f es 1-1.

Observe además que el conjunto formado por las segundas componentes es igual al conjunto de llegada; por lo tanto, f es sobre. Por lo tanto, f es función biyectiva (por ser 1-1 y sobre), lo cual implica que, existe función inversa f^{-1}.

Para calcular la función inversa f^{-1} basta con cambiar el orden de las parejas ordenadas:

$f^{-1}=\{(-1,-1),(2,1),(1,0), (3,2),(0,3)\}$

Ejemplo 9.11: halle la función inversa de una relación $f:A\rightarrow B$ con $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ y $B=\{-5,1,3,4,7\}$ definida por $f=\{(x,y)\ /x-y-xy+7=0\}$. Redefina f donde sea necesario para que exista la función inversa f^{-1}; es decir, que la relación f sea función biyectiva.

Solución

$x-y-xy+7=0$ para analizar si f es función, despeje primero a y:

$x-(1+x)y+7=0$ transponiendo términos

$y=(x+7)/(x+1)$ despejando y

Puede observarse que como x está en el denominador, entonces el término $1+x\neq 0$ (para evitar la indeterminación). En efecto, $x\neq -1$. Esto indica que x no puede tomar el valor de -1, porque de tal manera la relación no existe. Por lo tanto, para la relación f sea función, se redefine quitando el -1 del conjunto A; es decir, $A=\{-2,0,1,2\}$ y entonces f:

$x\in A$	$y=(x+7)/(x+1),\ y\in B$
-2	-5
0	7
1	4
2	3

Como puede observarse los elementos de A deberán ser: -5, 7, 4, 3 La función inversa, corresponde a despejar x:

$x-y-xy+7=0 \Leftrightarrow (x-xy)-y+7=0 \Leftrightarrow (1-y)x-y+7=0 \Leftrightarrow x=(y-7)/(1-y)$ con $y\neq 1$ (para evitar indeterminación).

Por consiguiente, redefinamos B excluyendo el 1. Así que $B=\{-5,3,4,7\}$. Por consiguiente, la relación $f:A\rightarrow B$ $A=\{-2,0,1,2\}$ y $B=\{-5,3,4,7\}$ definida por $f=\{(x,y)/y=(x+7)/(x+1)\}$ que es biyectiva, que implica que la función f^{-1} existe. Luego, ese valor de x es la función inversa y se define $x=f^{-1}(y)=(y-7)/(1-y)$

9.6 Composición de funciones

Sean $f:A\rightarrow B$ y $g:B\rightarrow C$ funciones. La composición g y f denotadas por $g_{o}f:A\rightarrow C$

$$(g_{o}f)(x)=g(f(x))$$

Esto significa que la función $g_{o}f$ le asigna al elemento x de A, el respectivo elemento asignado por g a f(x). Vea la ilustración en la figura 9.2. Observe que $g_{o}f\neq f_{o}g$.

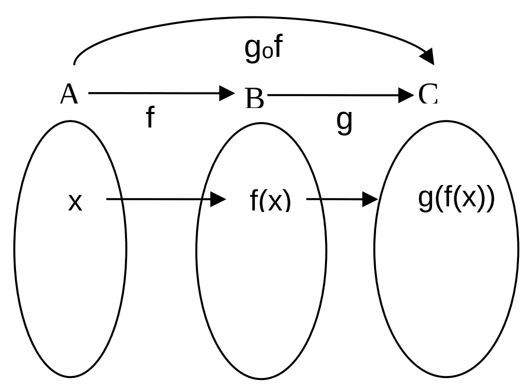

Figura 9.2: composición de g y f

Ejemplo 9.12: sean $f:R\rightarrow R$ y $g:R\rightarrow R$ funciones definidas por

$$f(x)=(3x^{2}-2x+5)/4$$

y

$$g(x)=2x+3$$

Determine $g_o f$.

$(g_o f)(x)=g(f(x))=(3(2x+3)^2 -2(2x+3)+5)/4$

Por lo tanto, $(g_o f)(x)=3x^2+8x+4$

Entre tanto, $(f_o g)(x)= (3x^2-2x+5)/2 +3$.

TALLER 9

1. Escriba falso (F) o verdadero (V) a cada una de las siguientes afirmaciones:

_____	1. Toda relación es función
_____	2. Toda Función es relación
_____	3. El dominio de una función es igual al conjunto de partida.
_____	4. Si f:A→B es una relación y dominio de f es igual al conjunto de partida, entonces f siempre es función.
_____	5. Si f:A→B es función, entonces f es una relación y dominio de f es igual al conjunto de partida.
_____	6. Si 2 elementos del conjunto de llegada están relacionados con un mismo elemento del conjunto de partida, entonces f no es función.
_____	7. Sea f:A→B es una relación. Si un elemento del conjunto de partida no está relacionado, pero todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con uno y solo un elemento del conjunto de partida, entonces f siempre es función.
_____	8. Si f:A→B es una función, entonces el rango de f es igual al conjunto de llegada.
_____	9. Sea f:A→B una relación. Si el rango de f es igual al conjunto de llegada entonces f es siempre una función.
_____	10. Sea f:A→B es una relación. Si el rango de f es igual al conjunto de llegada y el dominio de f es igual al conjunto de partida, entonces f es siempre una función.

2. Sea f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es una relación. Analice si f es una función y en caso negativo redefina f según las siguientes relaciones:

   1. f={(x,y)/2x-5y-7=0} Es función
   2. f={(x,y)/2x-5y+4xy -7=0} No es función. Redefinición f: $\mathbb{R}-\{5/4\}\rightarrow\mathbb{R}$
   3. f={(x,y)/ x-y+xy -2=0} No es función. Redefinición f: $\mathbb{R}-\{1\}\rightarrow\mathbb{R}$
   4. f={(x,y)/x^2-4xy -7=0} No es función. Redefinición f: $\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$

5. f={(x,y)/x^2y-4xy-6=0} No es función. Redefinición f: $\mathbb{R}-\{0, 4\} \to \mathbb{R}$
6. f={(x,y)/y^2-5xy^2-6=0} No es función. Redefinición f:$(-\infty, 1/5)) \to \mathbb{R}$
7. f={(x,y)/4y^2-4xy^2 -1=0} No es función. Redefinición f: $(-1,\infty)) \to \mathbb{R}$
8. f={(x,y)/4y^2-4xy+1=0} No es función. Redefinición f:$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)) \to \mathbb{R}$
9. f={(x,y)/-2x^2+5y-9x+7=0} Es función
10. f={(x,y)/4x+9y^2-16=0} No es función. Redefinición f:$(-\infty, 4]) \to \mathbb{R}$
11. f={(x,y)/y^2-6xy+144=0} No es función. Redefinición f:$(-\infty,-4] \cup [4,\infty)) \to \mathbb{R}$
12. f={(x,y)/ x^2y^2-6xy-16=0} No es función. Redefinición f: $\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$

3. En cada uno de los siguientes casos ¿cómo restringiría a x para que la función quede definida, si ésta hace parte de un logaritmo o del exponente de la función exponencial o del ángulo de una función trigonométrica?

4. En cada una de las relaciones de los numerales 4.1 a 4.10 redefina f si es necesario para que sea función:

   4.1 f:R-{0,3}→R definida por f(x)=1/x(x-3)
   4.2 f:R→R definida por f(x)=1/(x^3-27)
   4.3 f:R→R definida por f(x)=$\sqrt[3]{x^3 + 1}$
   4.4 f:R→R definida por f(x)=$\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$
   4.5 f:R-{0,3}→R definida por f(x)=$\sqrt{1/x(x-3)}$
   4.6 f:R→R definida por f(x)=1/(x^2-4)
   4.7 f:R→R definida por f(x)=(x^2-1)/(x+1)
   4.8 f:R→R definida por f={(x,y)/3x+2xy-5y+4=0}
   4.9 f:R→R definida por f={(x,y)/yx^2-y-x^2=0}
   4.10 f:R→R definida por f={(x,y)/ yx^2-3xy-1=0}

5. Halle el rango de cada una de las funciones del numeral anterior

6. Analice cuáles de las relaciones dadas en el numeral 2 de este taller, tienen función inversa. A las que les existe función inversa hálleles su inversa; a las que no lo son, les debe redefinir el conjunto de partida y luego debe determinar su dominio y su codominio o rango.

7. Dado que A={0,1,2,3,4,5} y B={0,1,2,3,4,5} y las relaciones R_i están definidas de A en B, determine qué clase de función es cada una de las siguientes relaciones:

   7.1 R_1= {(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (,0), (5,0)}
   7.2 R_2= {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}
   7.3 R_3= {(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5)}
   7.4 R_4= {(0,0), (1,1), (2,0), (3,3), (4,1), (5,3)}
   7.5 R_5= {(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5)}
   7.6 R_6= {(0,0), (5,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}

7.7 R_7= {(0,0), (1,5), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}

Nota: si una relación es función, entonces relación inversa también lo es.

8. Haga un programa con cualquiera de los lenguajes conocidos que determine si una relación es o no función. El programa debe recibir los conjuntos de partida y de llegada; hallar la clase de función y mostrar si existe o no función inversa. En caso de existir función inversa debe mostrarla.

9. Halle $g_o f$ y $f_o g$ dado que $f:R\to R$ y $g:R\to R$ funciones definidas por:

9.1 $f(x)=3x^2 - 2x+1$ y $g(x)=4x+7$.
9.2 $f(x)=\sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ y $g(x)=x+1$
9.3 $f(x)= \sqrt[3]{3x^3 - 1}$ y $g(x)=x^2-1$
9.4 $f(x)=3/(x^2 – 2)+1$ y $g(x)=4-x$
9.5 $f(x)= \sqrt{x - 1}$ y $g(x)=1/(x^2-4)$

Se presenta una situación con cuatro posibles respuestas de las cuales hay dos que son verdaderas. Para cada situación presentada en los numerales 8 y 11 responda la respuesta correcta así:

A) Si 1 y 2 son verdaderas
B) Si 2 y 3 son verdaderas
C) Si 3 y 4 son verdaderas
D) Si 2 y 4 son verdaderas

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores responda los numerales 10 al 13

10. Sea f una función real ($f:R\to R$). El dominio denotado D_f es el conjunto formado por todas las pre-imágenes o valores posibles de la variable independiente; es decir, $D_f=\{x\in R/y=f(x)\}$. El rango denotado I_f es el conjunto formado por todas imágenes de f o valores posibles de la variable dependiente; es decir, $I_f= \{y\in R/y=f(x)\}$.

Si se tiene que 3xy-5x+4y-5=0, entonces
1) $D_f=R-\{-3/4\}$
2) $I_f =R-\{5/3\}$
3) $I_f =R-\{3/5\}$
4) $D_f =R-\{-4/3\}$

11. Sea $f:A\to B$ una relación. Se dice que f es una función si todos los elementos de A están relacionados con uno y solo un elemento de B. Según lo anterior y el concepto visto en el numeral 8, si $f(x)=x^2$, $D_f=[0,\infty)$ y $I_f=[0,\infty)$, entonces,
1) f no es 1-1
2) f es 1-1
3) f es función
4) f no es función

Sea f: A→B una función con y=f(x), a "x" se denomina variable independiente y a "y" se llama variable dependiente. Se sabe que f es 1-1, si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ o también, si $f(x_1)=f(x_2)$, entonces $x_1=x_2$

Ahora, f es sobre si f(A)=B (el conjunto de imágenes de o posibles valores de la variable dependiente f es igual a B). f es biyectiva si f es 1-1 y sobre.

12. Según la figura 9.4, se puede asegurar que

1) f no es función 1-1, pero es función sobre
2) f no es función biyectiva
3) f es función 1-1
4) f es relación

13. La gráfica de la figura 9.3 representa a una relación f:[0,c]→[b,a]; se dice que f es:

1. f no es función
2. f no es 1-1
3. f es función 1-1
4. f es función sobre

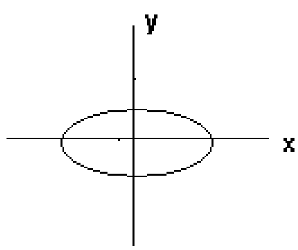

figura 9.3

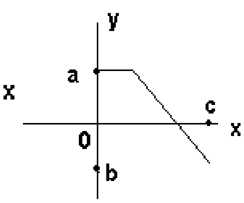

figura 9.4

14. Si una relación R es una función, entonces la relación inversa R^{-1} también lo es.

15. Determine el dominio y el rango de $g_{o}f$ y $f_{o}g$.