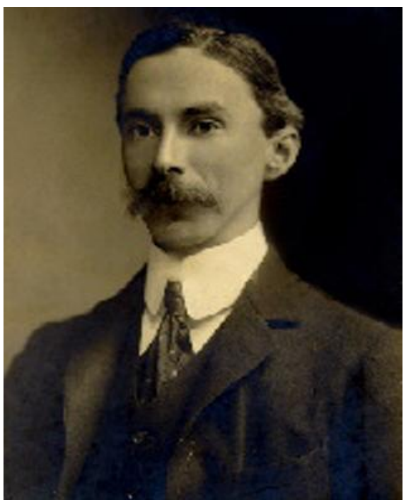
Capítulo 4: LÓGICA DE PROPOSICIONES

4.1 Introducción

Aristóteles (384 aC – 332 aC) desarrollo el primer tratado sistemático de las leyes de pensamiento para la adquisición de conocimiento en el Órganon, como el primer intento serio para fundar la lógica como ciencia. Fue el primero en dar el concepto de proposición como “un discurso enunciativo perfecto que se expresaba en un juicio que significaba falso o verdadero”.

El álgebra Booleana fue descubierta por el matemático inglés George Boole (1815 - 1864) como una técnica para tratar expresiones de la lógica proposicional. Boole logró tratar y publicar en 1854, las leyes de esta algebra en el libro conocido como *An Investigation of the Laws of Thought*[2] o simplemente *The Laws of Thought*). Precisamente tomó como base las leyes del álgebra proposicional que son tautologías, para hacer sus desarrollos. En la actualidad se aplica su trabajo en el diseño electrónico.



Bertrand Arthur William Russell

(1872-1970)

Bertrand Arthur William Russell fue un matemático, filósofo y escritor británico. Nació el 18 de mayo de 1872 y murió 2 de febrero de 1970.

Russel hizo grandes aportes a la lógica matemática moderna, habiendo estudiado los trabajos de George Boole, George Cantor y Augustus De Morgan, cuyos resultados se encuentran en la Universidad McMaster en notas que le hacía a sus lecturas que fueron redactadas por Ernst Schoröder y Charles S. Peirce.

Profundizó en los trabajos de Gottlob Frege aplicando un acercamiento extensionista, en la que basaba la lógica en la teoría de conjuntos.

Matemático italiano Giuseppe Peano definió lógicamente todos los términos primitivos de su sistema: número, la excepción de 0, sucesor y el término singular 'el' (*the*) y sus axiomas para la aritmética. En el año 1900, luego del primer Congreso Internacional de Filosofía en París, se familiarizó con el trabajo de Peano, para convertirse luego en un experto de ese nuevo simbolismo y su conjunto de axiomas. Russell se dio la tarea de encontrar definiciones lógicas para cada uno de éstos términos.

Russell clarificó las proposiciones más genéricas sobre el mundo en componentes más simples como función de verdad. Condujo la creación de la teoría axiomática de conjuntos con la que encontró aplicaciones prácticas en las ciencias de la computación y la tecnología de la información.

4.2 Aplicaciones tecnológicas de la lógica

- Las contingencias o inciertos (enunciados que no son ni tautologías ni contradicciones) sirven para la construcción de circuitos de control y automatización; las tautologías y contradicciones para probar la consistencia interna de las argumentaciones.

- Las reglas de inferencia lógica se utilizan como test de pruebas de la consistencia lógica interna de los algoritmos computacionales.
- Las propiedades algebraicas y transformaciones de las sentencias se utilizan como una ventaja en la construcción de circuitos integrales comerciales (compuertas lógicas: NOT, AND, OR, NAND, NOR)

4.3 Conceptos de Lógica

La **lógica** es una ciencia formal y una rama de la filosofía que estudia los principios de la demostración e inferencia válida.

Matemática es una ciencia formal que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entes abstractos (números, figuras geométricas, símbolos).

La **lógica matemática** es una parte de la lógica y de las matemáticas que estudia la matemática de la lógica. Tiene gran aplicación en el estudio de otras áreas de las matemáticas (como la geometría) y la lógica filosófica y, estrechas conexiones con la ciencia de la computación. La lógica matemática no es la «lógica de las matemáticas» sino la «matemática de la lógica». Incluye aquellas partes de la lógica que pueden ser modeladas y estudiadas, matemáticamente.

Razonamiento es la forma ágil y asertiva del pensamiento inductivo (donde interviene la probabilidad y la formulación de conjeturas), deductivo (estrictamente lógico) y abductivo (el antecedente es una hipótesis explicativa). Es la facultad que permite resolver problemas, extraer conclusiones y aprender de manera consciente de los hechos, estableciendo conexiones causales y lógicas necesarias entre ellos.

El **razonamiento lógico** o **causal** es un proceso de lógica mediante la cual, partiendo de uno o más juicios, se deriva la validez, la posibilidad o la falsedad de otro juicio distinto.

Entre estos problemas se tienen los problemas de razonamiento lógico.

4.3.1 Problemas de razonamiento lógico

1. Pedro es primo de Juan. Juan es sobrino de Luis, Pedro es nieto de Carlos. Se sabe que Carlos es padre de 2 hijos, entre ellos Lucas. Si el hijo de José es Pedro, la relación de José con Juan es:

   A) Hermano B) Primo **C)** Tío D) sobrino

2. Pedro es primo de Juan. Juan es sobrino de Luis, Pedro es nieto de Carlos. Se sabe que Carlos es padre de 2 hijos, entre ellos Lucas. Si el hijo de José es Pedro, la relación que tiene Luis con José es:
   A) Hermano B) Primo C) Tío D) sobrino
3. El primo hermano de Juan y sobrino de Carlos es Camilo. Si el padre de Camilo es Luis, entonces Luis es ___ de Carlos
   A) Hermano B) Primo C) Tío D) sobrino
4. En una cuadra hay casas (Azul, Rosa, Verde) a la izquierda de Carlos Vive Pedro y a la derecha de Carlos vive José. Si la casa del medio es Verde y la de José no es Azul, ¿de qué color es la casa de Pedro?
   A) verde B) rosa C) azul D) faltan datos
5. Un profesor, un mecánico y un tendero van de paseo. El mecánico lleva gaseosa; el profesor no lleva agua; El tendero no lleva confites. Si quien lleva agua va en bus, el de los confites va en automóvil; la gaseosa la toma el del camión. La profesión de quien va en bus es
   A) Camionero B) Mecánico C) Profesor D) Tendero

4.3.2 Problemas de razonamiento lógico- matemático

1. Las edades de un par de mellizos suman la mitad de la de su padre. La edad de un mellizo es la tercera parte de la edad de su madre. Dado que la abuela materna de los mellizos tiene 72 años y es el doble de la edad de la madre de éstos ¿Cuántos años tiene el padre?
   A) 48 B) 56 **C)** 46 D) 40

2. Camilo es tío de Andrés e hijo de Pedro. Andrés tiene 20 años y es la cuarta parte de la edad de Pedro (su abuelo). Dado que José es hermano de Camilo y tiene la mitad de la edad de su padre más 10 años, pero 3 años menos que su hermano, ¿Qué edad tiene Camilo?
   A) 60 B) 48 **C)** 46 **D)** 53

3. En un hogar nacieron trillizos, cuando la madre tenía 27 años. Si en la actualidad la suma de las edades de la madre y sus trillizos es 103 años, la edad de la madre, en años es:
   A) 56 B) 48 **C)** 46 D) 40
4. El gobierno propone repartir las tierras confiscadas a los paramilitares proporcional a la cantidad de hijos que tenga la cabeza de familia. Se han presentado 3 personas cabeza de familia: de 5, de 3 y de 2 hijos para reclamar un terreno de 1200 hectáreas. A las familias les correspondió respectivamente:
   A) 240, 360, 600 **B)** 600, 360, 240 C) 300, 400, 500 D) 500, 400, 300

5. Un padre de familia propone repartir sus tierras entre sus hijos proporcionalmente así: al mayor el 25%, al del medio, el 35% y el resto al menor. Dado que sus tierras son 12000 hectáreas, el área que debe reclamar el hijo menor es

   A) 6000 **B)** 4800 C) 3600 D)64

4.4 Concepto de Enunciado

Un enunciado es una expresión del lenguaje que puede ser falso o verdadero o no serlo. Dichos enunciados pueden ser interrogativos o prescriptivos, ya que a éstos no puede asignarse un valor de verdad.

Ejemplo 4.1: escriba, sobre la línea, el tipo de enunciado:

1. Medellín es una ciudad atractiva por el verde de sus montañas y su clima →<u>descriptiva</u>
2. ¡cuidado con la grasa! →<u>exclamativa</u>
3. ¿la gallina está clueca? →<u>interrogativa</u>
4. coma carne pulpa de res→<u>prescriptiva</u>
5. la gallina es ovípara→<u>declarativa</u>

No son enunciados:

1. el caballo bayo galopero de don Juan Castro;
2. la expresión $5x+3y^3 - 4$

4.5 Concepto de proposición

Una proposición es un enunciado declarativo al que puede asignarse valores de verdad (verdadero, V; falso, F; falso/verdadero, F/V).

Ejemplo 4.2: son ejemplos de proposiciones:

1. el ser humano es inteligente,
2. la expresión 2+3 es 5;
3. la vaca es negra;
4. la expresión 2+4x= -2;
5. si 2+3 es 5 entonces 2+4x= -2.

4.6 Clasificación de Enunciados y de Proposiciones

Tanto los enunciados como las proposiciones se clasifican así: según la cantidad de conectores lógicos que la conforman y según su valor de verdad.

4.6.1 Enunciados y proposiciones según la cantidad de conectores lógicos que la conforman

Los enunciados y las proposiciones se clasifican en simples o atómicas y compuestas o moleculares.

Enunciado y Proposición Simple o Atómica. Se denomina enunciado o proposición simple o atómica a aquel enunciado o proposición que no tiene conectores lógicos.

Ejemplo 4.3: Enunciados y proposiciones simples

Enunciado Simple	Proposición Simple
Este mes voy a trabajar	El trabajo es un derecho humano
Este mes me muero de hambre	El alimento mitiga el hambre

Viva en Lima	El caballo tiene piel oscura
No vaya a Lima	Lima no es capital de Perú
Viva en Madrid	Madrid es capital de España
Estudie matemáticas	Euler estudió matemáticas
Podrá enseñar matemáticas	Euler enseñó matemáticas
Hacía frío en la tarde	3+5=35
¿mañana lloverá en el valle de Aburrá?	Euler estudió medicina en universidad de Oxforf
Las vacas negras de Pedro Luis el dueño de la casa en el aire	x+3=2
¡Huy qué frío!	El sol se esconde después de las 6 pm
El número es grande	El único número par primo es el 2
El rombo está coloreado	El rombo es un equilátero
El rectángulo está dividido	El rectángulo es un equiángulo
La suma está apareada	La suma de dos números impares es par

Enunciado y Proposición Compuesta o Molecular. Es un enunciado o proposición que está formada por dos o más enunciado o proposiciones simples; por consiguiente, están separadas por diferentes conectores lógicos.

Ejemplo 4.4: Enunciados y proposiciones compuestos

Enunciado Compuesto	**Proposición Compuesta**
Si este mes voy a trabajar; entonces, esté mes me muero de hambre	Si el trabajo es un derecho; entonces, el alimento mitiga el hambre
Vaya a Lima y viva en Madrid	El caballo tiene piel oscura y Madrid es capital de España
Estudie matemáticas o podrá enseñarla	Euler estudió matemáticas o pudo enseñarla
Podrá enseñar matemáticas si y solo si estudie matemáticas	Euler pudo enseñar matemáticas si y solo si estudio matemáticas
Estudie matemáticas, pero no podrá enseñarla	Euler no estudio matemáticas, pero pudo enseñarla
Estudié matemáticas o si este mes voy a trabajar; entonces, esté mes me moriré de hambre	En los países caribeños, el sol se esconde después de las 6 pm o si x+3=2; entonces, Euler pudo enseñar matemáticas
Estudié matemáticas, pero si este mes voy a trabajar entonces esté mes me moriré de hambre	En los países caribeños, el sol se esconde después de las 6 pm, pero si x+3=2 entonces Euler pudo enseñar matemáticas

Ejercicio 4.1: escriba entre el paréntesis verdadero (V), falso (F), falso/verdadero (I) no es proposición (E), según el caso.

- La ciudad de Medellín es la capital del departamento de Antioquia ( )
- ¿Luis Alfredo Ramos será presidente de Colombia próximamente? ( )
- En el próximo mes de marzo tal vez haya verano ( )
- Si 4+2x=3 con x=**-** 0.5, entonces 6x-5=7 con x=**-** 0.5 ( )
- El número 3 es primo y el 2 es impar ( )
- 4+2x=3 ( )
- Vaya a Medellín o a Bogotá ( )
- El sol es un astro o las estrellas son planetas ( )
- Medellín es capital de Sucre si y sólo si Barranquilla es capital de Quindío ( )

4.6.2 Proposiciones según su valor de verdad

Estas proposiciones de clasifican así: tautologías, contradicciones e inciertos (o contingencias).

Tautologías. Son aquellas proposiciones que siempre son verdaderas. Las tautologías se utilizan para verificar y demostrar la consistencia de las argumentaciones.

Ejemplo 4.5: “2+3=5”

“x^2=4 para x=2 o para x=-2 si y solo si 2y-5=0 para y=5/2 “.

“el número entero es par o impar o nulo”.

“si 2+4x= -2 entonces 2+3 es 5”

Contradicciones. Son aquellas proposiciones que siempre son falsas. Las contradicciones se utilizan para verificar y demostrar la inconsistencia de las argumentaciones.

Ejemplo 4.6:“2+3=6”

“un número entero impar puede ser divisible por 2”.

“El cuadrado de un número entero impar es par”

Contingencias o inciertos. Son aquellas proposiciones que ni son verdaderas ni son falsas. Tecnológicamente, las contingencias o inciertos se utilizan para construir circuitos de control y en el automatismo.

Ejemplo 4.7: “los animales carnívoros son cuadrúpedos”

“todo cuadrilátero equilátero es un polígono regular”

“si 2+3 es 5 entonces 2+4x= -2.”

Ejercicio 4.2: Determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones compuestas
Si el rombo es un equilátero entonces el rectángulo es un equiángulo

El rombo es un equilátero y el rectángulo es un equiángulo

La suma de dos números impares es par si y solo si el único número par primo es el número 2

La suma de dos números impares es par o el único número par primo es el 2

Si el rombo es un equilátero entonces el rectángulo es un equiángulo, y la suma de dos números impares es par si y solo si el único número par primo es el 2.

La suma de dos números impares es par y el rectángulo es un equiángulo, si y solo si el único número par primo es el 2 o el rombo es un equilátero.

Ejercicio 4.3: determine el tipo de proposición, según su valor, para cada uno de los siguientes enunciados:

Si el trabajo es un derecho, entonces el alimento mitiga el hambre

El caballo tiene piel y Madrid es capital de España

Euler estudió matemáticas o él pudo enseñarla

Euler pudo enseñar matemáticas si y solo si él estudió matemáticas

Euler no estudió matemáticas, pero él pudo enseñarla

El sol se esconde después de las 6 pm o si x+3=2 entonces Euler pudo enseñar matemáticas

2+3x=6 con x entero si y solo si 3+5=7

Si 2x-1=5 con x=1, entonces 2+3x=6 con x entero

Si 3x+2=-1 entonces 3x+2=-1 con x=-1

3x+2=-1 pero 3x+2=-1 con x=-1

2+3x=6 con x entero o 3+5=7

4.7 Tablas de verdad

Una tabla de verdad corresponde a un arreglo rectangular conformado por una o más proposiciones y todas las posibles combinaciones de verdad que se pueden definir de la proposición dada. Esto es, un conjunto de combinaciones de valores de verdad correspondientes a una proposición.

La cantidad de combinaciones de verdad de una proposición depende del número de proposiciones simples que la componen y se calcula mediante la expresión $\mathbf{2^n}$ con n=número de proposiciones simples.

<table>
<tr><th colspan="6">Número proposiciones</th></tr>
<tr><th>n=1</th><th colspan="2">n=2</th><th colspan="3">n=3</th></tr>
<tr><th>p</th><th>p</th><th>q</th><th>p</th><th>q</th><th>r</th></tr>
<tr><td rowspan="4">F</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">V</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="4">V</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">F</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
</table>

Tabla 4.1: tabla de verdad con valores de verdad según el número de proposiciones.

En efecto, si n es 1, se tienen dos posibles valores de verdad; si se tienen 2 proposiciones se producen 4 posibles valores de verdad; si se tienen 3 proposiciones, entonces serían 8 las posibles combinaciones de verdad si se tienen 4 proposiciones, entonces serían 16 las posibles combinaciones de verdad y así sucesivamente (vea tabla 1.1).

El resultado definitivo de una proposición compuesta corresponde al valor del conectivo lógico principal de la proposición y se obtiene a partir de los valores parciales de las proposiciones que la conforman. Se utilizan para comprobar la verdad o falsedad de las proposiciones.

4.8 Notación de proposiciones

Para denotar proposiciones se utilizan letras minúsculas tales como p, q, r, s, t, u, etc., seguidas de dos puntos (:); el enunciado se escribe entre comillas dobles (“ ”).

Ejemplo 4.8: denote las siguientes proposiciones

- p: “La ciudad de Medellín es la capital del departamento de Antioquia”
- q: “4+2x=3 con x=**-** 0.5”
- r:” el número 3 es primo”
- s:” el sol es un astro”
- t: “las estrellas son planetas”
- u: “Barranquilla es capital de Quindío”

4.9 Conectores Lógicos

Los conectores lógicos son símbolos que se utilizan para conectar dos o más proposiciones y formar otras proposiciones más complejas; se clasifican en conectivos lógicos fundamentales, como **¬**, la negación (no); $\wedge$, la conjunción (y); v, la disyunción (o) y conectivos lógicos derivados, tales como: **→**, el condicional (si …, entonces . . .); $\oplus$, disyunción exclusiva (o exclusiva); anti-disyunción y anti-conjunción y **↔**, el bicondicional (. . . si y solo si . . .) también conocida como anti-disyunción exclusiva.

4.9.1 Conectivos lógicos fundamentales

La negación o NO. Sea p una proposición cualquiera; la negación de p (no p) se escribe **¬p** y se lee “no p”**.** Su valor de verdad consiste en cambiar el valor de verdad de p (vea tabla 1.2).

p	**¬p**
F	V
V	F

Tabla 4.2: valor de verdad de la negación

La conjunción o AND. La tabla de verdad del conectivo lógico de la conjunción fue descubierta por el matemático y logicista inglés nacido en la India, Augustus De Morgan (1806 - 1871).

Sean p, q proposiciones cualesquiera; la conjunción de dos proposiciones (p, q) denotada $\mathbf{p \wedge q}$ se lee "p y q". A veces se puede interpretar como la palabra "**pero**". Por ejemplo, $p \wedge \neg q$ que se puede leer: "p pero no q".

La conjunción es verdadera si todas las proposiciones simples que la conforman son verdaderas y falsa si alguna de ellas es falsa (vea tabla 1.3).

La disyunción u OR. La tabla de verdad de este conectivo lógico fue descubierta por el economista, filósofo y logicista inglés, William Stanley Jevons (1835 - 1882).

Se conoce como disyunción inclusiva que se define así: sean p, q proposiciones cualesquiera; la disyunción de dos proposiciones (p, q) denotada $\mathbf{p \vee q}$ que se lee "p o q" es verdadera si alguna de las proposiciones simples que la conforman es verdadera y falsa si todas ellas son falsas (vea tabla 1.3).

4.9.2 Conectivos lógicos derivados

A partir de los conectivos lógicos fundamentales se definen otros muy importantes en el argot de la lógica; son ellos: el condicional, el bicondicional, la disyunción exclusiva, antidisyunción, anticonjunción, antidisyunción exclusiva.

El condicional. Sean p, q proposiciones cualesquiera; llámese p antecedente y q consecuente; el condicional de p y q se denota $\mathbf{p \rightarrow q}$ y se lee "si p entonces q". El condicional es falso si p es verdadera y q es falsa; en los demás casos, el condicional es verdadero (véase tabla 1.3). Algunas veces en el lenguaje ordinario[1] el condicional se utiliza con las palabras "como" o "cuando", así:

"como p, entonces q".

"cuando p, entonces q"

Si $\mathbf{p \rightarrow q}$ es verdadero se dice que "**p** implica a **q"** y se denota $\mathbf{p \Rightarrow q}$

El condicional "si p entonces q" puede leerse o interpretarse como:

p es suficiente para q
q es necesario para p
Solo si q, se da p
p, solo si q

Ejemplo 4.9: Un hombre le prometió a su novia: "me casaré contigo solo si consigo trabajo". El hombre consiguió trabajo, pero rehusó a casarse con ella. Ella lo demandó por romper la promesa. ¿La novia pudo ganar lógicamente la demanda? ¿Por qué?.[2]

---

[1] Por lenguaje corriente se entiende como aquél que se formula de manera idiomática. Es impreciso en vista de sus ambigüedades para enunciar algo.
[2] ALLENDOERFER, Carl B. y OAKLEY, Cletus O. Introducción moderna a la matemática superior. Editorial McGraw Hill, Mexico 1971, pp. 56.

Solución: no, porque la promesa del hombre fue la recíproca del condicional. En efecto, veamos su análisis.

Las proposiciones fueron:
p: "me casaré contigo" y q: "consigo trabajo"
La promesa fue: $p \to q$, que se lee lógicamente: "p solo si q". Mas la novia interpretaba: $q \to p$: si consigo trabajo me casaré contigo.

Las siguientes expresiones son variantes del condicional $p \to q$

Recíproco: $q \to p$
Contrario: $\neg p \to \neg q$
Contra-recíproco: $\neg q \to \neg p$ [3]

Disyunción exclusiva. Fue descubierto por el matemático y filósofo británico, George Boole (1815-1864). Sean p, q proposiciones cualesquiera; la disyunción exclusiva también llamada XOR de p y de q se denota $p \oplus q$ es verdadera, si los valores de verdad de las proposiciones son contrarios (véase tabla 1.3). Es lógicamente equivalente a la negación del bicondicional. Este conectivo definido con conectivos fundamentales queda como sigue: $(p \wedge \neg q)$ v $(q \wedge \neg p)$. Compruebe esta equivalencia.

La disyunción exclusiva con 3 ó más proposiciones es V, si hay impar de F (o par de V) y es F, si hay par de F (o impar de V).

Bicondicional. Fue descubierto por matemático, lógico y filósofo alemán, Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925); fundador de la moderna lógica matemática y la filosofía analítica; considerado el mayor lógico desde Aristóteles.

Sean p, q proposiciones cualesquiera; el bicondicional de las proposiciones p y q denotado $\mathbf{p \leftrightarrow q}$ y se lee "p si y solo si q". El bicondicional es verdadero si las proposiciones que la conforman toman el mismo valor de verdad y falsa si los valores son contrarios (véase tabla 4.3).

El bicondicional es lógicamente equivalente a $\mathbf{(p \to q) \wedge (q \to p)}$ y a $\mathbf{(\neg p v q) \wedge (\neg q v p)}$

Si $p \leftrightarrow q$ es verdadero se dice que p es equivalente a q que se denota $p \Leftrightarrow q$. Así que, una falsedad es equivalente a otra falsedad, una verdad es equivalente a otra verdad.

El bicondicional entre 3 ó más proposiciones es V, si se tiene par de F (o impar de V) y es F, si hay impar de F (o par de V).

Este conectivo también se denomina comparador o antidisyunción exclusiva como se verá más adelante (véase la sección 4.8).

P	**q**	$\mathbf{p \wedge q}$	$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{p \to q}$	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$	$\mathbf{p \oplus q}$
F	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	F

[3] El contrarrecíproco es lógicamente equivalente al condicional. Véase tabla 1.9, página 9.

Tabla 4.3: valor de verdad de proposiciones con conectivos lógicos

p	**Q**	**r**	$p \wedge q \wedge r$	$p \vee q \vee r$	$p \oplus q \oplus r$	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$
F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	V	V	V	V	V	F

Adicional a los conectivos lógicos ya mencionados se han definido otros muy reconocidos y usados en aplicaciones tecnológicas de la lógica matemática[4] los cuales se derivan de los conectivos básicos NO, AND y OR; éstos son: la anticonjunción o NAND y la antidisyunción o NOR, que fueron descubiertos por Sheffer y Pierce.

Anti-conjunción. Es un conectivo lógico descubierto por el logicista americano Henry Maurice Sheffer (1882-1964). Se define como la negación de la conjunción, es decir, NOT AND $\Leftrightarrow$ NAND (en compuertas lógicas), que en este texto simbolizaremos con $\overline{\wedge}$. De tal manera, la anti-conjunción es falsa si las proposiciones son verdaderas; en los demás casos es verdadera (véase la tabla 1.4). Las proposiciones compuestas con solamente 2 o más anti-conjunciones no pueden asociarse como si fuesen lógicamente equivalentes.

$$p \text{ NAND } q \leftrightarrow \neg(p \wedge q) \leftrightarrow p \,\overline{\wedge}\, q$$

Anti-disyunción. Este Conectivo lógico fue descubierto por el matemático, filósofo y logicista norteamericano Charles Sanders Peirce (1839-1914). Se define como la negación de la disyunción, es decir, NOT OR $\Leftrightarrow$ NOR (en compuertas lógicas), que simbolizaremos en este texto con $\overline{\vee}$. De tal manera, la anti-disyunción es verdadera si las proposiciones son falsas; en los demás casos es falsa (véase la tabla 4.4). Las proposiciones compuestas con solamente 2 o más anti-disyunciones no pueden asociarse como si fuesen lógicamente equivalentes.

$$p \text{ NOR } q \leftrightarrow \neg(p \vee q) \leftrightarrow p \,\overline{\vee}\, q$$

p	**q**	$p \,\overline{\wedge}\, q$	$p \,\overline{\vee}\, q$
F	F	V	V
F	V	V	F
V	F	V	F
V	V	F	F

Tabla 4.4: tabla de verdad de la NAND y NOR

[4] La gran importancia de estos conectivos está en su gran aplicación tecnológica para la construcción de circuitos digitales como consecuencia del álgebra booleana, ya que cualquier expresión booleana se puede escribir utilizando únicamente anticonjunciones o antidisyunciones. Aunque se pueda ver más extensa y compleja la expresión o la cantidad de compuertas en un circuito lógico tiene la ventaja tecnológica de que sólo es necesario fabricar uno de los dispositivos NAND o NOR.

Anti-disyunción exclusiva. La anti-disyunción exclusiva es equivalente a la tabla de verdad del bicondicional, que en compuertas lógicas se llama XNOR y simbolizaremos $\overline{\oplus}$. El conectivo XNOR es un comparador de gran aplicación en álgebra booleana para la construcción de circuitos lógicos (véase la tabla 4.5) y es equivalente al bicondicional.

$$p \text{ XNOR } q \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \overline{\oplus} q$$

p	**q**	**$p \overline{\oplus} q$**
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Tabla 4.5: tabla de verdad de la XNOR

Ejemplo 4.10: determine el valor de verdad de la proposición $(\neg p \wedge s) \rightarrow ((\neg q \leftrightarrow (p v r)) \wedge t)$ dado que p: F, q: F, r: F, s: V, t: V

$(\neg p \ \wedge s) \rightarrow ((\neg q \ \leftrightarrow (p \text{ v } r)) \wedge t)$

$(\neg(F) \wedge V) \rightarrow ((\neg(F) \leftrightarrow (F v F)) \wedge V)$ Poniendo los valores de cada proposición

$V \ \wedge V \ \rightarrow ((\ V \ \leftrightarrow \ F \ ) \ \wedge V)$ Negación y disyunción de falsedades

$V \ \rightarrow \ F \ \wedge V$ Conjunción de verdades; bicondicional de V con F

$V \ \rightarrow \ F$ Conjunción F con V

F Condicional de antecedente V con consecuente F

Ejemplo 4.11: determine la tabla de verdad, definiendo el tipo de proposición compuesta

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge r).$$

La solución al problema puede darse, determinando primero la tabla de verdad de cada una de las proposiciones simples que la conforman; en este caso, $\neg p$, $p \rightarrow q$ y $\neg p \wedge r$.

La proposición es ***incierta***, basta con hallar la tabla de verdad del bicondicional (véase tabla 4.6).

p	**q**	**r**	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge r)$
F	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	F	F
V	V	V	F	V	F	F

Tabla 4.6: solución del problema del ejemplo 1.11

Ejercicio 4.4: escriba el valor de verdad de las siguientes proposiciones utilizando las proposiciones del ejemplo 4.3:

a) $\neg((\neg p \wedge q) v q) v \neg((s \ v \ \neg q) \wedge s)$

b) $(((p \ v \ r) \wedge q) v (p v r)) \wedge (\neg p v r)$

c) $(q \ v \ r) \ v \ (p \wedge q) v (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$

d) $\neg((\neg p \wedge q) \rightarrow q) v \neg((s \leftrightarrow \neg q) \wedge s)$

4.10 Álgebra de proposiciones

Álgebra de proposiciones es un sistema axiomático consistente, completo e independiente; se utiliza básicamente para construir y simplificar proposiciones complejas, siempre que cumplan determinadas propiedades.

4.10.1 Elementos del álgebra proposicional

Los siguientes elementos se utilizan para escribir expresiones proposicionales. Cada expresión proposicional tiene su respectiva función lógica. Los elementos del álgebra proposicional son:

Símbolos lógicos. Se representan por F y V; corresponden a los posibles valores de una proposición, para señalar respectivamente la falsedad o la verdad de la proposición.

Constantes. Son proposiciones que no cambian su valor (siempre es F o V).

Variables. Son proposiciones que cambian su valor con el tiempo; están representadas por las letras minúsculas del alfabeto, así: p, q, r, s, t, etc.

Signos de agrupación. Se utilizan los paréntesis izquierdo "(" y paréntesis derecho ")"

Símbolos operacionales. Las únicas operaciones de la lógica proposicional son: OR (v), AND ($\wedge$), la negación ($\neg$), el condicional ($\rightarrow$).

Símbolo relacional. El único símbolo relacional se utiliza para comparar es el conectivo lógico "$\Leftrightarrow$".

4.10.2 Postulados del álgebra de proposiciones

Los postulados son de gran importancia para la justificación de las leyes. Su enunciado se puede ver en la tabla 4.7:

P1: $(V) \wedge (V) \Leftrightarrow (V)$

P2: $(V) \wedge (F) \Leftrightarrow (F)$

P3: (F)$\wedge$(F)$\Leftrightarrow$(F)

P4: (V)v(V)$\Leftrightarrow$(V)

P5: (V)v(F)$\Leftrightarrow$(V)

P6: (F)v(F)$\Leftrightarrow$(F)

Tabla 4.7: postulados del álgebra proposicional

4.10.3 Leyes del álgebra de proposiciones

Las leyes de las proporciones conforman la parte fundamental para demostrar la equivalencia entre proposiciones o construir y simplificar funciones lógicas (con propiedades determinadas) de manera consistente; más adelante se utilizará para construir circuitos digitales óptimos a partir del álgebra booleana (capítulo 10).

Sean p, q, r proposiciones cualesquiera, entre otras leyes se tienen básicamente las siguientes (véase la tabla 4.8):

NOMBRE DE LA LEY	LOGICA DE PROPOSICIONES
1. Idempotencia	• $p \wedge p \Leftrightarrow p$ • $p \vee p \Leftrightarrow p$
2. Identidad	• $p \wedge (V) \Leftrightarrow p$ • $p \vee (F) \Leftrightarrow p$
3. Dominación	• $p \wedge (F) \Leftrightarrow (F)$ • $p \vee (V) \Leftrightarrow (V)$
4. Conmutativa	• $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ • $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
5. Asociativa	• $p \wedge q \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ • $p \vee q \vee r \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
6. Distributiva	• $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ • $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
7. Complementación: • **Contradicción** • **Tercero excluido**	 • $p \wedge \neg p \Leftrightarrow (F)$ • $p \vee \neg p \Leftrightarrow (V)$
8. Involución	• $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ doble negación • $\neg(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow \neg p$ triple negación
9. D' Morgan	• $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ • $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
10. Absorción total	• $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ • $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
10. Absorción parcial	• $p \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$ • $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$
11. Alternativa del condicional	• $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
12. Contra recíproco[5]	• $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

[5] La ley contrarecíproco del condicional es de gran importancia en el desarrollo de demostraciones. Corresponde a una variante del condicional.

Tabla 4.8: leyes del álgebra proposicional

Para verificar la verdad de la equivalencia de estas leyes, basta con utilizar las tablas de verdad, con las cuales deberá llegar a una tautología.

Ejemplo 4.12: simplifique las siguientes proposiciones hasta la mínima expresión, justificando cada paso realizado.

a) $\neg((\neg p \wedge q) v q) v \neg((s \; v \; \neg q) \wedge s)$

b) $(((p \; v \; r) \wedge q) v (p v r)) \wedge (\neg p v r)$

c) $(q \; v \; r) \; v \; (p \wedge q) v (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$

Solución:

a) $\neg((\neg p \wedge q) \; v \; q) \; v \; \neg((s \; v \; \neg q) \wedge s)$	$\Leftrightarrow \neg q \; v \; \neg s$	Ley de absorción parcial
	$\Leftrightarrow \neg(q \wedge s)$	Ley de D'Morgan
b) $(((p \; v \; r) \wedge q) v (p v r)) \wedge (\neg p v r)$	$\Leftrightarrow (p v r) \wedge (\neg p v r)$	Ley de absorción parcial
	$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \; v \; r$	Ley distributiva
	$\Leftrightarrow (F) \; v \; r$	Ley de contradicción
	$\Leftrightarrow r$	Ley de dominación
c) $(q \; v \; r) \; v \; (p \wedge q) v (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$	$\Leftrightarrow (q \; v \; r) v \; (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$	Leyes conmutativa, asociativa y de absorción total
	$\Leftrightarrow (q \; v \; r) \; v \; (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$	ley asociativa y conmutativa
	$\Leftrightarrow (q \; v \; r) \; v \; (\neg(q \; v \; r) \wedge p)$	Ley de D'Morgan
	$\Leftrightarrow q \; v \; r \; v \; p$	Ley de absorción parcial

Nota: no cumplen con la propiedad asociativa: ni el condicional ni la anti-conjunción ni la anti-disyunción ni la disyunción exclusiva. Los demás operadores cumplen la propiedad asociativa.

4.11 Trascripción de enunciados en lenguaje corriente al lenguaje simbólico

La trascripción de un enunciado dado en lenguaje corriente al lenguaje simbólico consiste en extraer las proposiciones simples y luego, utilizando los conectivos lógicos escribe el enunciado dado.

Para transcribir dichos enunciados de lenguaje corriente a lenguaje lógico puede proceder así:

1. Analice cuales son las proposiciones simples que conforman el enunciado dado.
2. Escriba el enunciado de manera simbólica, teniendo en cuenta los signos de puntuación. Esto le ayudará a esclarecer cual es el conectivo lógico principal. Tenga en cuenta el orden de prioridad de estos signos según la tabla 4.9; adicionalmente,

considere que si en la proposición hay paréntesis, podría comenzar evaluando la proposición simbólica por los paréntesis más internos.

Conectivo	Prioridad
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3

Tabla 4.9: orden de prioridad de los conectivos lógicos

3. Cambie los conectivos derivados que aparezcan en la expresión por conectivos fundamentales; por ejemplo, si es condicional $p \rightarrow q$ por su equivalente $\neg p \vee q$.
4. Si el objetivo del problema es simplificar el enunciado, aplique las leyes de las proposiciones para lograrlo.

Ejemplo 4.13: trascriba a lenguaje simbólico y determine su valor de verdad del enunciado "si el caballo es cuadrúpedo y el perro es mamífero, entonces la gallina es invertebrado".

Para hallar el valor de verdad de una proposición dada en lenguaje corriente se puede proceder así:

- Extraiga y escriba en lenguaje lógico las proposiciones simples del enunciado

  p: "el caballo es cuadrúpedo"

  q: "el perro es mamífero"

  r: "la gallina es invertebrado"

- Escriba la proposición utilizando la trascripción lógica

  $(p \wedge q) \rightarrow r$

- Determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones simples que conforman la proposición dada.

  p: V, q: V, r: F

- Determine el valor de verdad de la proposición compuesta

  $(V \wedge V) \rightarrow F \Leftrightarrow V \rightarrow F \Leftrightarrow F$. Por lo tanto, el enunciado es **falso**

Ejemplo 4.14: simplifique cada uno de estos enunciados hasta lograr el mínimo.

1. Como Juan es condenado, debe ser el asesino. Entonces, Juan es el asesino y debe ser condenado.

2. Como al trabajar debo casarme, entonces, no es el hecho de que si no me caso deba trabajar.

3. No es cierto: que el agua no está contaminada o que produzca amebiasis o que si el agua no produce amebiasis, entonces el agua no esté contaminada.

Solución 1: El enunciado tiene dos enunciados simples; estas son:

p: “Juan es condenado”

q: “Juan es el asesino”

La trascripción lógica queda como sigue: $(p\rightarrow q)\rightarrow(q\wedge p)$

Ahora, apliquemos los pasos para simplificar la proposición

$(p\rightarrow q)\rightarrow(q\wedge p)$	$\Leftrightarrow \neg(\neg p v q) \text{ v } (q\wedge p)$	Ley alternativa del condicional
	$\Leftrightarrow (\neg\neg p\wedge\neg q) \text{ v } (q\wedge p)$	Ley de D’Morgan
	$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q) \text{ v } (q\wedge p)$	Ley de doble negación
	$\Leftrightarrow (p\wedge(\neg q \text{ v } q)$	Ley distributiva
	$\Leftrightarrow p$	Ley de tercero excluido y dominación

El enunciado obtenido es “Juan es condenado”

Solución 2: Los enunciados simples son:

p: “debo trabajar”

q: “debo casarme”

La trascripción al lenguaje simbólico es: $(p\rightarrow q)\rightarrow\neg(\neg q\rightarrow p)$

$(p\rightarrow q)\rightarrow\neg(\neg q\rightarrow p)$	$\Leftrightarrow \neg(\neg p \text{ v } q)v\neg(\neg\neg q \text{ v } p)$	Ley alternativa del condicional
	$\Leftrightarrow (\neg\neg p\wedge\neg q)v(\neg\neg\neg q\wedge\neg p)$	Ley de D’Morgan
	$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)v(\neg q\wedge\neg p)$	Ley de doble y triple negación
	$\Leftrightarrow \neg q\wedge (pv\neg p)$	Ley distributiva
	$\Leftrightarrow \neg q\wedge (V)$	Ley de tercero excluido
	$\Leftrightarrow \neg q$	Ley de dominación

Por consiguiente, la conclusión del enunciado es “no debo casarme”

Solución 3: Los enunciados simples que conforman este enunciado son:

p: “el agua está contaminada”

q:” el agua produce amebiasis”

La trascripción al lenguaje simbólico es: $\neg(p \text{ v } q \text{ v } (q\rightarrow\neg p))$

$\neg(\neg p \text{ v } q \text{ v } (\neg q\rightarrow\neg p))$	$\Leftrightarrow \neg((\neg p \text{ v } q)v(\neg\neg q \text{ v } \neg p))$	Ley alternativa del condicional
	$\Leftrightarrow (\neg\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg\neg\neg q\wedge\neg\neg p)$	Ley de D’Morgan
	$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q) \text{ v } (p\wedge\neg q)$	Ley de involución y conmutativa
	$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)$	Ley de idempotencia

El enunciado se reduce a: “el agua está contaminada y no produce amebiasis”

4.12 Formas normales

Muchas aplicaciones tecnológicas adoptan diferentes formas de expresar proposiciones las cuales se denominan “formas normales”. Dichas formas se reconocen como: forma normal conjuntiva y forma normal disyuntiva.

4.12.1 Forma normal conjuntiva o FNC

Esta forma es abreviada por FNC; corresponde a la conjunción de términos conformados por disyunciones de las n-proposiciones de la función proposicional con negaciones o sin ellas. Cada término se denomina “término disyuntivo” (véase la tabla 4.10).

4.12.2 Forma normal disyuntiva o FND

Esta forma es abreviada por FND; está formada por la disyunción de términos conformados por las conjunciones de las n-proposiciones de la función proposicional con negaciones o sin ellas. Cada término se denomina “término conjuntivo” (véase tabla 4.10).

p	**q**	**Término conjuntivo**	**Término disyuntivo**
F	F	$\neg p \wedge \neg q$	pvq
F	V	$\neg p \wedge q$	pv¬q
V	F	$p \wedge \neg q$	¬pvq
V	V	$p \wedge q$	¬pv¬q

Tabla 4.10: formas normales

El número de términos tanto conjuntivos como disyuntivos se determina con la expresión 2^n siendo n la cantidad de proposiciones de la función proposicional. Ahora, la expresión escrita con 2^n términos se denomina “forma normal conjuntiva completa” o “forma normal disyuntiva completa”, según el caso. En efecto,

Forma normal conjuntiva completa: $(pvq) \wedge (pv\neg q) \wedge (\neg pvq) \wedge (\neg pv\neg q) \Leftrightarrow \mathbf{F}$

Por lo tanto, la FNC representa los valores falsos (“F”) de la función proposicional.

Forma normal disyuntiva completa: $(\neg p \wedge \neg q)v(\neg p \wedge q)v(p \wedge \neg q)v(p \wedge q) \Leftrightarrow \mathbf{V}$

Por consiguiente, se puede concluir que la FND representa los valores verdaderos (“V”) de la función proposicional.

Ejemplo 4.15: teniendo en cuenta que f es la función proposicional de la tabla 4.11, utilice las FNC y FND para simplificarla hasta la mínima expresión. Escriba la función mínima obtenida en forma de conjunto completo con conectivos NAND y con NOR.

p	**q**	**r**	**F**
F	F	F	F
F	F	V	F
F	V	F	V
F	V	V	F
V	F	F	F

V	F	V	F
V	V	F	V
V	V	V	V

Tabla 4.11: ejemplo 4.15

Representemos los valores "V" de la función; para tal fin, comencemos con FND. En efecto, $(p \wedge \neg q \wedge r) v (p \wedge \neg q \wedge \neg r) v (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ es la FND de la función f.

Continuemos la solución del problema simplificando a f:

$$
\begin{aligned}
(p \wedge \neg q \wedge r) v (p \wedge \neg q \wedge \neg r) v (\neg p \wedge \neg q \wedge r) &\Leftrightarrow \neg q \wedge ((p \wedge r) v (p \wedge \neg r) v (\neg p \wedge r)) \\
&\Leftrightarrow \neg q \wedge (((p \wedge (r \; v \; \neg r)) v (\neg p \wedge r)) \\
&\Leftrightarrow \neg q \wedge ((p \wedge V) v (\neg p \wedge r)) \\
&\Leftrightarrow \neg q \wedge (p \; v (\neg p \wedge r)) \\
&\Leftrightarrow \neg q \wedge (p \; v \; r)
\end{aligned}
$$

Escribamos la función resultante en forma de conjunto completo con NOR:

$$
\begin{aligned}
\neg q \wedge (p \; v \; r) &\Leftrightarrow \neg\neg(\neg q \wedge (p \; v \; r)) \\
&\Leftrightarrow \neg(q \; v \neg(p \; v \; r)) \\
&\Leftrightarrow (q \; \bar{v} \; (p \; \bar{v} \; r))
\end{aligned}
$$

Ahora, escribiendo el conjunto completo de la función resultante con NAND, se tiene:

$$\neg q \wedge (p \; v \; r) \Leftrightarrow \neg(\neg q \; \bar{\wedge} \; (\neg p \; \bar{\wedge} \; \neg r))$$

Finalmente, representemos los valores "F" de la función proposicional f utilizando FNC la cual queda como sigue:

$$(\neg p \; v \; \neg q \; v \; \neg r) \wedge (\neg p \; v \; \neg q \; v \; r) \wedge (p v \neg q \; v \; \neg r) \wedge (p \; v \; \neg q \; v \; r) \wedge (p \; v \; q \; v \; r)$$

La expresión anterior simplificada queda

$$\neg q \wedge (p \; v \; r)$$

Observe que la solución obtenida es equivalente a la solución adquirida por FND. Trate de comprobarla.

Ejemplo 4.16: escriba en FNC y en FND la expresión $(p \; v \; \neg r) \wedge \neg q$

Solución:

FND: $(p \; v \; \neg r) \wedge \neg q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \; v (\neg r \wedge \neg q)$ ley distributiva

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge (\neg r \; v \; r)) \; v ((p \; v \; \neg p) \wedge \neg r \wedge \neg q)$ ley de idempotencia

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) v \; (p \wedge \neg q \wedge r) \; v ((\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \; v (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ ley distributiva

FNC: $(p \; v \; \neg r) \wedge \neg q \Leftrightarrow (p \; v \; (q \wedge \neg q) \; v \; \neg r) \wedge (p \; v \; \neg p) \wedge \neg q \wedge (r \; v \; \neg r)$ ley de idempotencia

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge$

$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ ley distributiva

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

ley idempotencia

4.13 Conjunto completo de conectivos lógicos: anti-conjunción y anti-disyunción

Se dice que los conectivos lógicos forman un conjunto funcionalmente completo, porque cualquier expresión proposicional se puede expresar en términos de anti-conjunciones $(\neg, \wedge)$ o $\overline{\wedge}$ y también, de anti-disyunciones $(\neg, \vee)$ o $\overline{\vee}$; es decir, en función de conectivos lógicos primarios.

Ejemplo 4.17: ¿Las operaciones de la proposición $(\neg r \rightarrow q) \vee \neg p$ forman un conjunto completo?

Para verificar si es o no un conjunto completo simplifique totalmente la proposición y luego mediante las leyes de involución y D´Morgan escriba la expresión resultante utilizando solamente anti-conjunción o anti-disyunción.

Para realizar tal operación NOR primero debe definir el condicional en función de disyunción. Para tal fin, aplique la ley alternativa del condicional y las leyes de involución (doble negación); en efecto,

$(\neg r \rightarrow q) \vee \neg p \Leftrightarrow (\neg\neg r \vee q) \vee \neg p$	Ley alternativa del condicional
$\Leftrightarrow (r \vee q) \vee \neg p$	Ley de doble negación
$\Leftrightarrow \neg\neg\, (\neg\neg(r \vee q) \vee \neg p)$	Ley de doble negación
$\Leftrightarrow \neg(\neg(r \;\overline{\vee}\; q) \;\overline{\vee}\; \neg p)$	Ley de doble negación

Con el último resultado obtenido se llega a la primera solución

Para obtener el resultado de usar solamente NAND partamos del resultado alcanzado en la primera respuesta y aplicando reiteradamente la ley de D'Morgan se logra la respuesta.

$(\neg r \rightarrow q) \vee \neg p \;\Leftrightarrow \neg\neg\, (\neg\neg\, (r \vee q) \vee \neg p)$	Proposición escrita en NOR
$\Leftrightarrow (\neg(\neg r \;\overline{\wedge}\; \neg q) \;\overline{\wedge}\; p)$	Ley de D'Morgan (2 veces)

El último resultado obtenido es la respuesta esperada.

4.14 Propuesta metodológica para simplificar proposiciones

El matemático y físico estadounidense Maurice Karnaugh trabajó en los laboratorios Bell entre los años 1952 y 1966 donde descubrió los reconocidos Mapas de Karnaugh en 1954. Dichos mapas son de gran utilidad en el campo de la electrónica para simplificar expresiones booleanas complejas o circuitos lógicos complejos, sin necesidad de usar los cálculos extensos, como los que se dan mediante el uso de las leyes del algebra booleana.

Un Mapa de Karnaugh consiste en un arreglo bidimensional rectangular o cuadrado que representa mediante un 1 a cada término de una expresión booleana expresada Forma Normal Disyuntiva (o minterm, sumas de productos o en proposiciones, disyunción de conjunciones) o mediante un 0 a cada factor de una expresión booleana expresada Forma Normal Conjuntiva (o maxterm, productos de sumas o en proposiciones, conjunción de disyunciones). Un Mapa de Karnaugh produce una excelente simplificación muy aproximada a la expresión óptima resultante mediante la utilización de leyes del álgebra proposicional. Con el fin de obtener la proposición óptima simplificada, se utilizan unas pocas leyes, para culminar.

Retomando el concepto de Mapas de Karnaugh lo utilizaremos para simplificar proposiciones compuestas complejas de cualesquiera. Efectivamente, consideraremos la Forma Normal Disyuntiva (o minterm) como disyunción de conjunciones, en las que cada término conjuntivo representará una verdad, la cual nos indicará la existencia de dicho término. Por consiguiente, dada la proposición compuesta, procederemos así:

1. Cuente la cantidad de proposiciones simples que aparecen en la proposición
2. Construya la tabla de verdad de la proposición, cuyo resultado corresponderá a la función lógica del sistema lógico.
3. Lleve al Mapa de Karnaugh los valores verdaderos, ubicando la celda correspondiente, según las proposiciones simples de la tabla del numeral 2.
4. Ubique las adyacencias de las celdas verdaderas, teniendo en cuenta que debe considerarse la formación de un mínimo de agrupaciones, con un máximo de celdas adyacentes verdaderas, agrupadas en potencia de 2. Es decir, cada agrupación contiene 2^n celdas adyacentes verdaderas.
5. La simplificación de expresiones booleanas complejas con Mapas de Karnaugh utiliza celdas adyacentes. Se dice que 2 celdas están adyacentes si dichas celdas estás contiguas, mas no de manera diagonal; es decir, si sus direcciones respectivas difieren en un solo dígito. Las adyacencias de V se agrupan en potencias de 2 así: de a dos, de a cuatro, de a ocho y de a dieciséis V contiguas. También hay adyacencias cuando los V están ubicados en los extremos opuestos de las filas o columnas o que compartan las esquinas.
6. Los mapas de Karnaugh permiten representar expresiones de máximo 6 proposiciones con los cuales se hacen simplificación de proposiciones por agrupaciones, así:
    a. Adyacencias de 2 celdas verdaderas, simplifican 1 variable
    b. Adyacencias de 4 celdas verdaderas, simplifican 2 variables
    c. Adyacencias de 8 celdas verdaderas, simplifican 3 variables
    d. Adyacencias de 16 celdas verdaderas, simplifican 4 variables
    e. Adyacencias de 32 celdas verdaderas, simplifican 5 variables
    f. Adyacencias de 64 celdas verdaderas, simplifican 6 variables
7. Las celdas en las que las proposiciones cambian de afirmativa a negativa o viceversa, corresponderá a la proposición que se anula. Las proposiciones que no cambian deberán escribirse.

8. Por cada mapa que aparezca deberá aparecer una proposición simple o compuesta resultante; es decir, si existen 2, 3 ó más Mapas deberán aparecer 2, 3 ó más proposiciones resultantes.

Ejemplo 4.18: Obtenga la proposición mínima resultante de un sistema lógico expresado por las siguientes funciones lógicas.

$f_1 \leftrightarrow$ VVVVVFVFVFVFVVVV
$f_2 \leftrightarrow$ VFVFVVVVVVVVFFFF
$f_3 \leftrightarrow$ FFFFFFFFVVVFVVVF
$f_4 \leftrightarrow$FVVFFVVFVVVVFVVF

Solución:

Cada una de las funciones contiene 16 valores de verdad, lo cual implica que corresponde a 2^4 combinaciones de valores de verdad y, por consiguiente cada función estará conformada por 4 proposiciones, digamos, p, q, r, s (ver tabla 4.12).

p	**q**	**r**	**s**	**f_1**	**f_2**	**f_3**	**f_4**
F	F	F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V	F
V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F

Tabla 4.12: del ejemplo 4.18

Representemos las verdaderas de cada función lógica de la tabla 4.12 en el correspondiente mapa de karnaugh.

f1	**¬r** $\wedge$ ¬s	**¬r** $\wedge$ **s**	**r** $\wedge$ **s**	**r** $\wedge$ ¬s
¬p $\wedge$ ¬q	V	V	V	V
¬p $\wedge$ q	V	V	V	V
p $\wedge$ q	V	F	F	V
p $\wedge$ ¬q	V	F	F	V

$f_1 \leftrightarrow \neg q \vee \mathbf{s}$

Antidisyunción:

$f_1 \leftrightarrow \neg p \vee \neg \mathbf{s}$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow \neg\neg(\neg p \vee \neg \mathbf{s})$	**Ley de D'Morgan**
$\leftrightarrow \neg(\neg q \,\overline{\vee}\, \neg \mathbf{s})$	**Definición de Anti-disyunción**

➔3 negaciones y 1 Anti-disyunción

Anti-conjunción:

$f_1 \leftrightarrow \neg q \vee \neg \mathbf{s}$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow \neg\neg((\neg q \vee \neg s)$	**Ley de involución**
$\leftrightarrow \neg(q \wedge \mathbf{s})$	**Ley de D'Morgan**
$\leftrightarrow (q \,\overline{\wedge}\, \mathbf{s})$	**Definición de Anti-conjunción**

1 Anti-conjunciones

Por lo tanto, es más apropiado diseñar el sistema lógico mediante anti-conjunción.

f_2	$\mathbf{\neg r} \wedge \neg s$	$\mathbf{\neg r} \wedge \mathbf{s}$	$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$	$\mathbf{r} \wedge \neg s$
$\mathbf{\neg p} \wedge \neg q$	V	F	F	V
$\mathbf{\neg p} \wedge q$	V	V	V	V
$\mathbf{p} \wedge q$	F	F	F	F
$\mathbf{p} \wedge \neg q$	V	V	V	V

R/. $f_2 \leftrightarrow (\neg q \wedge \mathbf{\neg s}) \vee (\mathbf{\neg p} \wedge q) \vee (\mathbf{p} \wedge \neg q)$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow ((\neg q \wedge \mathbf{\neg s}) \vee (\mathbf{p} \wedge \neg q)) \vee (\mathbf{\neg p} \wedge q)$	Ley conmutativa
$\leftrightarrow (\neg q \wedge (\mathbf{\neg s} \vee \mathbf{p})) \vee (\neg \mathbf{p} \wedge q)$	Ley distributiva

f_3	$\mathbf{\neg r} \wedge \neg s$	$\mathbf{\neg r} \wedge \mathbf{s}$	$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$	$\mathbf{r} \wedge \neg s$
$\mathbf{\neg p} \wedge \neg q$	F	F	F	F
$\mathbf{\neg p} \wedge q$	F	F	F	F
$\mathbf{p} \wedge q$	V	V	F	V
$\mathbf{p} \wedge \neg q$	V	V	F	V

R/. $f_3 \leftrightarrow (p \wedge \neg s) \vee (p \wedge \mathbf{\neg r})$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow p \wedge (\neg s \vee \mathbf{\neg r})$	**Ley distributiva**
$\leftrightarrow p \wedge \mathbf{\neg}(s \wedge \mathbf{r})$	**Ley de D'Morgan**

f_4	$\mathbf{\neg r} \wedge \neg s$	$\mathbf{\neg r} \wedge \mathbf{s}$	$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$	$\mathbf{r} \wedge \neg s$
$\mathbf{\neg p} \wedge \neg q$	F	V	F	V
$\mathbf{\neg p} \wedge q$	F	V	F	V
$\mathbf{p} \wedge q$	F	V	F	V
$\mathbf{p} \wedge \neg q$	V	V	V	V

R/. $f_4 \leftrightarrow (\mathbf{p} \wedge \neg q) \vee (\mathbf{\neg r} \wedge \mathbf{s}) \vee (\mathbf{r} \wedge \neg s)$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow (\mathbf{p} \wedge \neg q) \vee ((\mathbf{\neg r} \wedge \mathbf{s}) \vee (\mathbf{r} \wedge \neg s))$	Ley asociativa
$\leftrightarrow (\mathbf{p} \wedge \neg q) \vee (\mathbf{r} \oplus \mathbf{s})$	Definición XOR

Ejemplo 4.19: Simplifique la función

$$f \leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s)$$

y exprese la proposición óptima mediante anti-disyunción o mediante anti-conjunción (la más adecuada)

Solución:

Recomiendo que primero se determine la tabla de verdad de la proposición compuesta, conformada por 4 proposiciones simples. Efectivamente se tendría 2^4 combinaciones:

P	**q**	**R**	**s**	$p \vee \neg q \vee r \vee \neg s$	$p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$	$\neg p \vee q \vee r \vee \neg s$	$\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s$	**f**
F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V

Tabla 4.13: ejemplo 4.19

Llevemos los valores verdaderos de la tabla de verdad al Mapa de Karnaugh, el cual nos abreviará el proceso de simplificación en un alto porcentaje, ya que deja muchas veces las proposiciones totalmente simplificada. El Mapa de Karnaugh según la Tabla 4.13:

F	$\mathbf{\neg r} \wedge \neg s$	$\mathbf{\neg r} \wedge \mathbf{s}$	$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$	$\mathbf{r} \wedge \neg s$
$\mathbf{\neg p} \wedge \neg q$	V	V	V	V

$\neg\mathbf{p}\wedge q$	V	F	F	V
$\mathbf{p}\wedge q$	V	V	V	V
$\mathbf{p}\wedge\neg q$	V	F	F	V

La función resultante es: $f(p,q,r,s)\leftrightarrow(\neg\mathbf{p}\wedge\neg q)\vee(\mathbf{p}\wedge q)\vee\neg s$

Ahora expresemos mediante anti-disyunción o mediante anti-conjunción, para determinar luego cuál es la más adecuada.

Con anti-disyunción

$f(p,q,r,s)\leftrightarrow(\neg\mathbf{p}\wedge\neg q)\vee(\mathbf{p}\wedge q)\vee\neg s$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow\neg\neg(\neg\neg((\neg\mathbf{p}\wedge\neg q)\vee(\mathbf{p}\wedge q))\vee\neg s)$	Ley asociativa y de involución
$\leftrightarrow\neg\neg(\neg\neg(\neg\neg(\neg\mathbf{p}\wedge\neg q)\vee\neg\neg(\mathbf{p}\wedge q))\vee\neg s)$	Ley de involución
$\leftrightarrow\neg\neg(\neg\neg(\neg(\mathbf{p}\vee q)\vee\neg(\neg\mathbf{p}\vee\neg q))\vee\neg s)$	Ley de D'Morgan
$\leftrightarrow\neg(\neg((\mathbf{p}\,\overline{\vee}\,q)\,\overline{\vee}\,(\neg\mathbf{p}\,\overline{\vee}\,\neg q))\,\overline{\vee}\,\neg s)$	Definición de Anti-disyunción

La proposición resultante contiene: 5 negaciones, 4 Anti-disyunciones

Veamos ahora el resultado con Anti-conjunciones:

$f(p,q,r,s)\leftrightarrow(\neg\mathbf{p}\wedge\neg q)\vee(\mathbf{p}\wedge q)\vee\neg s$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow\neg\neg(\neg\neg((\neg\mathbf{p}\wedge\neg q)\vee(\mathbf{p}\wedge q))\vee\neg s)$	Ley asociativa y de involución
$\leftrightarrow\neg\neg(\neg(\neg(\neg\mathbf{p}\wedge\neg q)\wedge\neg(\mathbf{p}\wedge q))\vee\neg s)$	Ley de D'Morgan
$\leftrightarrow\neg(\neg(\neg(\neg(\neg\mathbf{p}\wedge\neg q)\wedge\neg(\mathbf{p}\wedge q)))\wedge s)$	Ley de D'Morgan
$\leftrightarrow\neg((\neg\mathbf{p}\,\overline{\wedge}\,\neg q)\,\overline{\wedge}\,(\mathbf{p}\,\overline{\wedge}\,q))\,\overline{\wedge}\,s$	Definición de Anti-conjunción

La proposición resultante contiene: 3 negaciones, 4 Anti-conjunciones

Ejemplo 4.20: Simplifique hasta obtener la proposición mínima resultante, la función

$$f\leftrightarrow(p\,\overline{\vee}\,\neg s)\,\overline{\wedge}\,\neg((\neg q\to\neg r)\oplus s)$$

y exprese la proposición resultante mediante Anti-disyunción y Anti-conjunción

P	q	R	S	$p\,\overline{\vee}\,\neg s$	$\neg q\to\neg r$	$(\neg q\to\neg r)\oplus s$	$\neg((\neg q\to\neg r)\oplus s)$	f
F	F	F	F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V	V

V	V	V	F	F	V	V	F	V
V	V	V	V	F	V	F	V	V

Tabla 4.14: ejemplo 4.20

El Mapa de Karnaugh según la Tabla 4.14:

F	$\neg r \wedge \neg s$	$\neg r \wedge s$	$r \wedge s$	$r \wedge \neg s$
$\neg p \wedge \neg q$	V	V	V	V
$\neg p \wedge q$	V	V	V	V
$p \wedge q$	V	V	V	F
$p \wedge \neg q$	F	V	V	F

Con anti-disyunción

$f \leftrightarrow \neg p \vee s \vee (q \wedge \neg r)$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow (\neg p \vee s) \vee (q \wedge \neg r)$	Ley asociativa
$\leftrightarrow \neg\neg(\neg p \vee s) \vee (q \wedge \neg r)$	Ley de involución
$\leftrightarrow \neg\neg(\neg\neg(\neg p \vee s) \vee (q \wedge \neg r))$	Ley de involución
$\leftrightarrow \neg\neg(\neg\neg(\neg p \vee s) \vee \neg(\neg q \vee r))$	Ley de D'Morgan
$\leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \,\bar{\vee}\, s) \,\bar{\vee}\, (\neg q \,\bar{\vee}\, r))$	Definición de Anti-disyunción

4 negaciones y 3 Anti-disyunciones

Con anti-conjunción

$f \leftrightarrow \neg p \vee s \vee (q \wedge \neg r)$	Proposición simplificada
$\leftrightarrow (\neg p \vee s) \vee (q \wedge \neg r)$	Ley asociativa
$\leftrightarrow \neg\neg(\neg p \vee s) \vee (q \wedge \neg r)$	Ley de involución
$\leftrightarrow \neg(p \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg r)$	Ley de D'Morgan
$\leftrightarrow \neg\neg(\neg(p \wedge \neg s) \vee (q \wedge \neg r))$	Ley de involución
$\leftrightarrow \neg(\neg(p \,\bar{\wedge}\, \neg s) \wedge \neg(q \wedge \neg r)$	Definición de Anti-conjunción y Ley de D'Morgan
$\leftrightarrow \neg(p \,\bar{\wedge}\, \neg s) \,\bar{\wedge}\, (q \,\bar{\wedge}\, \neg r)$	Definición de Anti-conjunción

3 negaciones y 3 Anti-conjunciones

Para simplificar una proposición de 5 proposiciones requiere de 2 MK de 4 proposiciones: uno con ¬t y otro con t. Digamos, por ejemplo, para ¬t se tiene:

f_1	$\neg r \wedge \neg s$	$\neg r \wedge s$	$r \wedge s$	$r \wedge \neg s$
$\neg p \wedge \neg q$	V	V	V	V
$\neg p \wedge q$	V	V	V	V

p ∧ q	F	V	V	F
p ∧ ¬q	F	V	V	F

$f_1 \Leftrightarrow \neg t \wedge (\neg p \vee s)$

Ahora para t podría ser:

f_2	**¬r** ∧ ¬s	**¬r** ∧ **s**	**r** ∧ **s**	**r** ∧ ¬s
¬p ∧ ¬q	V	V	F	F
¬p ∧ q	V	V	V	V
p ∧ q	V	V	V	V
p ∧ ¬q	V	V	F	F

$f_2 \Leftrightarrow t \wedge (q \vee \neg r)$

$f \Leftrightarrow f_1 \vee f_2 \Leftrightarrow \neg t \wedge (\neg p \vee s) \vee t \wedge (q \vee \neg r)$.

Aplíquele leyes si es necesario para simplificarla y reducirla a la mínima expresión.

AUTOEVALUACION 4

1. Seleccione la opción correcta correspondiente a la conclusión de los enunciados dados 1.1 a 1.5. Para tal fin, escriba en lenguaje lógico los enunciados dados, simplifíquelos; el resultado lo transcribe al lenguaje corriente.

1.1 Si las personas son honradas, entonces Juan es ladrón o Pedro es honrado; pero Juan es ladrón

A) Juan no es ladrón
B) Pedro es honrado
C) Si las personas son honradas, entonces Juan es ladrón
D) Juan es ladrón

1.2 Que importa morir si no pasan y si pasan, que importa morir[6]

A) Que importa morir
B) No pasan
C) Si pasan que importa morir
D) Pasan, pero no importa morir

1.3 Como al trabajar me debo casar; entonces no es el hecho de que si no me caso deba trabajar.

A) No me caso
B) No debo trabajar
C) Debo trabajar
D) Si me caso debo trabajar

Prueba de selección múltiple de múltiple respuesta

Resuelva los problemas de los numerales 2.1 y 2.2 y seleccione la respuesta correcta, según las siguientes situaciones:

A) Si 1 y 2 son correctas
B) Si 2 y 3 son correctas
C) Si 3 y 4 son correctas
D) Si 2 y 4 son correctas
E) Si 1 y 3 son correctas

2.1 No es cierto que si tomo la medicina me pueda morir; o como si me puedo morir entonces tomo la medicina, entonces no tomo la medicina.

1. Si tomo la medicina entonces me muero
2. Si tomo la medicina entonces muero
3. Si no muero entonces no tomo la medicina
4. Si muero entonces tomo la medicina

[6] Frase de un miliciano de Asturias citada en el Depêche deToulouse (4-11-1937)

2.2 Las personas son honradas si y solo si Juan es ladrón o Pedro es honrado; pero Juan es ladrón

1. Las personas son honradas, pero Pedro no lo es
2. Las personas son honradas, pero Juan es ladrón
3. Juan no es ladrón y Pedro es honrado
4. Si Las personas son honradas, entonces Juan es ladrón

2.3 Sean p, q, r proposiciones. La proposición $\neg p \rightarrow (\neg p \wedge (q \vee r))$ es idéntica a:

1) $p \wedge q \wedge r$
2) $p \vee q \vee r$
3) $\neg(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
4) $\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Respuesta: D

2.4 Dada la proposición $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, si se escribe utilizando únicamente los conectivos Anticonjunción (NAND, negaciones de AND) o Antidisyunción (NOR, negaciones de OR), queda:

1) $\neg(\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee r))$
2) $\neg(\neg(\neg(\neg q \vee p) \vee r))$
3) $\neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$
4) $\neg(\neg(p \wedge q) \wedge r)$

Respuesta: E

2.5 La proporción $\neg(\neg((p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)))$ es lógicamente equivalente a:

1) $\neg p \rightarrow q$
2) $p \rightarrow \neg q$
3) $q \rightarrow \neg p$
4) $\neg q \rightarrow p$

Respuesta: B

2.6 La proposición $\neg(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r))$ es lógicamente equivalente a

1) ni p ni q ni r
2) $\neg((\neg q \wedge \neg r) \wedge p)$
3) $\neg(p \wedge q \wedge r)$
4) $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

Respuesta: A

2.7 El enunciado “si ni el tigre es como lo pintan ni el oso es feo, entonces el tigre es como lo pintan” es equivalente a:

1) Si el oso es feo, entonces el tigre no es como lo pintan
2) Si el tigre no es como lo pintan, entonces el oso es feo
3) El oso no es feo o el tigre no es como lo pintan
4) El tigre es como lo pintan o el oso es feo

2.8 El enunciado es equivalente a: “si la mantequilla no es proteínica entonces: la mantequilla es proteínica solo si la arepa no es una harina, pero ni el queso es una grasa ni la mantequilla son proteínicos” , es:

1. SI el queso es una grasa entonces la mantequilla es proteínica.
2. Si mantequilla es proteínica, entonces el queso no es una grasa y la arepa es una harina
3. Solo si mantequilla no es proteínica, entonces el queso no es una grasa.
4. Si la arepa no es una harina, entonces mantequilla no es proteínica, pero el queso es una grasa.

   Respuesta: E

TALLER 4

1. Calcule el valor de verdad de los siguientes enunciados y escriba en lenguaje simbólico cada una de las proposiciones del numeral, determinando si es tautología o contradicción:

   1.1 La luna es un planeta si y solo si 4+x=8 ó 3-5=2

   1.2 La vaca es mamífero y el caballo es ovíparo o la luna es un cuerpo celeste

   1.3 Si el caballo y el perro son cuadrúpedos y el sapo o la rana son mamíferos, entonces la vaca es omnívora

   1.4 La raíz cuadrada de un número negativo es real si el número es par divisible por tres

   1.5 Si la gallina pone huevo y el perro ni es bípedo ni es herbívoro entonces el sol es un astro si y solo si la raíz cuadrada de un número entero negativo es un número complejo. (Interprétese la expresión **ni p ni q** como $\neg p \wedge \neg q$).

2. Escriba en el lenguaje simbólico cada uno de los enunciados, dadas las proposiciones p, q, r:

   p: ”El agua produce amebiasis”
   q: ”El agua está hervida”
   r: ”El agua está contaminada”

   2.1 El agua produce amebiasis si y solo si, o no está contaminada o si el agua produce amebiasis entonces no está hervida.

   2.2 El agua no produce amebiasis si y solo si, o el agua no está contaminada o si no está hervida entonces produce amebiasis.

   2.3 El agua produce amebiasis si y solo si, o no está hervida o si está contaminada entonces el agua no produce amebiasis.

   2.4 No es cierto: que el agua esté contaminada o que produzca amebiasis o que si no produce amebiasis entonces el agua no está contaminada.

3. Demuestre la equivalencia de las siguientes proposiciones sustentando cada paso realizado con la ley correspondiente:

3.1 $((p \wedge q) \rightarrow q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg r) \Leftrightarrow p \wedge r$

3.2 $(r \wedge (q \vee r)) \wedge (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow r$

3.3 $(((\neg r \vee (\neg p \rightarrow \neg q)) \rightarrow p) \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg p$

3.4 $((p \rightarrow (\neg q \vee (\neg r \rightarrow \neg p))) \wedge \neg p) \Leftrightarrow \neg p$

3.5 $(p \rightarrow ((\neg q \wedge \neg p) \vee ((\neg r \rightarrow \neg p) \wedge \neg p)) \Leftrightarrow \neg p$

3.6 $(q \vee r) \vee (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge q \wedge p) \Leftrightarrow r \vee q$

4. Transcriba al lenguaje simbólico los siguientes enunciados y determine la conclusión, si es posible:
    - 4.1 Un alcalde, en época poselectoral, le dice a su pueblo: “no cumpliré la promesa si no me dan dos años más de gobierno”. ¿El alcalde asegura con esto, que con dos años más de gobierno, él cumplirá la promesa? Dé explicación lógica.
    - 4.2 No tomo la medicina porque me puedo morir o como si me puedo morir es porque me tomo la medicina, entonces me puedo morir. ¿Cuál es la conclusión?
    - 4.3 No es cierto que si usted no estudia gane el curso o tampoco es cierto que si usted no estudia no gane el curso. ¿qué se puede concluir?
    - 4.4 Como si no voy al paseo entonces pago el alquiler, entonces si no pago el alquiler hago la fiesta; pero ni pagó el alquiler ni hizo la fiesta. ¿cuál es su conclusión?
    - 4.5 Qué significa el enunciado: ¿si trabajo entonces ni me caso ni trabajo?

5. Simplifique las siguientes proposiciones hasta una mínima expresión formada por conectivos fundamentales, justificando cada paso realizado:
    - 5.1 $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$
    - 5.2 $(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$
    - 5.3 $\neg(\neg((p \wedge q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)))$
    - 5.4 $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(\neg p \rightarrow q)$
    - 5.5 $\neg(\neg((p \rightarrow q) \wedge \neg(p \vee \neg q)))$
    - 5.6 $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow p$
    - 5.7 $\neg(p \leftrightarrow q) \wedge \neg p$
    - 5.8 $(\neg p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$

6. Escriba cada una las siguientes expresiones lógicas utilizando únicamente los conectivos anticonjunción o antidisyunción, en cada caso:
    - 6.1 $(p \rightarrow q) \vee r$
    - 6.2 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
    - 6.3 $r \wedge (q \rightarrow (r \vee p))$
    - 6.4 $(q \wedge p) \rightarrow (p \rightarrow (r \vee q))$
    - 6.5 $\neg(p \leftrightarrow q) \wedge \neg p$

7. Escriba las formas normales disyuntiva y conjuntiva (FND y FNC, respectivamente) correspondientes a las funciones proposicional f_i de cada una de la tabla 4.15:

8. Dada la función lógica de la tabla 4.16 y teniendo en cuenta que las f_i (i=1,2,3) son funciones lógicas, utilice las FNC y FND para simplificar cada una de ellas la hasta la mínima expresión. Escriba la función mínima obtenida con solamente conectivos lógicos Anti-disyunción y Anti-conjunción.

p	q	r	s	f_1	f_2	f_3
F	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F
V	V	V	F	F	V	F
V	V	V	V	V	V	V

Tabla 4.15: numeral 7

p	q	r	f_1	f_2	f_3	f_4
F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	V	V	F	V	F	F

Tabla 4.16: numeral 8

R/. f_4: $\Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$

9. Simplifique hasta obtener la proposición mínima resultante de los sistemas lógicos representados por las funciones y exprese las proposiciones resultantes mediante Anti-disyunción y Anti-conjunción

$f_1 \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge ((q \oplus r) \vee \neg r)$

$f_2 \leftrightarrow ((p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg p \vee s) \wedge p \wedge \neg s$

$f_3 \leftrightarrow$ VVFVVVFVFVVVFVVVVVFVVVVVFVFFFVVF

$f_4 \leftrightarrow$ FFFFFFFFVVVVVVVVFFVVFFVVFFVVFFVV

$f_5 \leftrightarrow$ FFVVFFVVVVVVFFVVFFVFFFVFVVVVVVVV

$f_6 \leftrightarrow$ VVVVVVVVVFFVVVFFVVVVVVVVVFFFVVFF

$f_7 \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s \vee \neg t) \wedge$
$(\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r \vee s \vee \neg t) \wedge$
$(p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee t) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee t)$

10. Exprese las proposiciones resultantes del ejemplo 4.18 mediante Anti-disyunción y Anti-conjunción, únicamente.

11. Calcule la función lógica de:
    11.1 $p \oplus q \oplus r \oplus s \oplus t$
    11.2 $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \leftrightarrow s \leftrightarrow t \leftrightarrow u$