
Capítulo 8: RELACIONES

8.1 Introducción

En la vida cotidiana se hace necesario clasificar y ordenar individuos (cosas, animales, personas o números), de una u otra manera. Precisamente buscando llegar a los procesos de clasificación y ordenación de todo aquello que posee características intrínsecas, se estudiará en este capítulo el concepto de relación y como un caso particular de éstas, las funciones (capítulo 8). Aunque este capítulo tiene como finalidad estudiar las relaciones binarias desde el punto de vista discreto, también se analizarán desde el punto de vista continuo, tanto para las relaciones como para las funciones. Se verán, además, algunas aplicaciones de las relaciones y las funciones en ámbito tecnológico utilizando una notación adecuada para la computadora.



René Descartes (1596-1650)

René Descartes, conocido matemático y filósofo francés, nació el 31 de marzo de 1596 en La Haye, en la Turena francesa. Considerado el padre de la filosofía moderna. Fue un pensador completo, que abordó también el estudio de las ciencias. En física, sin saber que Galileo ya lo había hecho, resolvió el problema de las leyes que rigen el movimiento de caída de los cuerpos. Consideraba que había tres sustancias: una infinita, que es el universo, otra que existe por sí misma, así identificó a Dios, y dos sustancias finitas, que se dependen para su existencia, las que denominó sustancia pensante y la corpórea, cuya principal característica es la extensión en el espacio.

En matemáticas creó el álgebra de polinomios y, junto con Fermat, creó la geometría analítica según el mismo principio, a partir de un sistema de coordenadas formado por dos rectas que se cortan en un punto, denominado origen. También fue el inventor de la notación algebraica moderna, en la cual las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, y las variables o incógnitas por las últimas, es decir, x, y, z. En matemáticas, el sistema de referencia se forma sobre un plano con dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto, que se denota con la letra O.

El 11 de febrero de 1650 fue asesinado a los 53 años de edad por envenenamiento con arsénico; pero se creía que había fallecido a causa de una neumonía.

8.2 Par ordenado

8.2.1 Concepto de producto cartesiano

Un par ordenado es un conjunto de dos elementos donde se tiene prioridad en el orden de dichos elementos; cada uno de esos elementos ocupa una posición fija. El primer elemento se llama “*primera componente*” o “*primera coordenada*” y el segundo elemento se denomina “*segunda componente*” o “*segunda coordenada*”.

Las parejas ordenadas se denotan de manera diferente a la de los conjuntos; pues estos últimos se escriben entre llaves (como se vio en el capítulo de conjuntos) y sin importar el orden; por ejemplo,

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

Para diferenciar un conjunto ordenado de un conjunto cualquiera de dos elementos la notación usada de par ordenado es (x, y) . En general se tiene:

$$(x, y) \neq (y, x)$$

8.2.2 Propiedades del par ordenado

$$(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow x = y$$

$$(x, y) = (m, n) \Leftrightarrow x = m \wedge y = n$$

Ejemplo 8.1: las siguientes identidades son verdaderas

- $(2, n) = (2, m) \Leftrightarrow m = n$
- $(m, 2) = (3, n) \Leftrightarrow m = 3 \text{ y } n = 2$
- $(x+4, 7) = (2x-1, 3y+4) \Leftrightarrow x = 5 \text{ e } y = 1$
- $(2-m, 5-n) = (n+2, m+5) \Leftrightarrow m \text{ es igual al inverso aditivo de } n$

8.3 Producto cartesiano

8.3.1 Concepto de producto cartesiano

El nombre de producto cartesiano se dio para conmemorar el nombre de quien lo descubrió⁸: René Descartes

Sean A y B conjuntos diferentes del vacío. El producto cartesiano de A y B denotado **AxB** es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas, tales que las primeras componentes son elementos de A y las segundas componentes son elementos de B. Simbólicamente,

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

⁸ René Descartes (1596-1650). Matemático y Filósofo francés. Es considerado el fundador de la filosofía moderna y la máxima figura del racionalismo; además fundador de la geometría analítica. Enunció las leyes de la óptica geométrica relativas a reflexión y a la refracción. En matemáticas,

En general se tiene:

$$A \times B \neq B \times A$$

La definición de producto cartesiano puede generalizarse al producto entre n conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n . En este caso, al conjunto formado por todas las n -adas ordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) tales que $x_i \in A_i$ con $i = 1, 2, \dots, n$, se llama producto cartesiano de A_1, A_2, \dots, A_n y se denota $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

8.3.2 Propiedades del producto cartesiano

- $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$
- $(x, y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$
- $A \neq B \text{ y } A \times B \neq \emptyset \Rightarrow A \times B \neq B \times A$

Ejemplo 8.2: dados los conjuntos $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4\}$, entonces
 $A \times B = \{(2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

y

$$B \times A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$$

Ejemplo 8.3: sea R el conjunto de los números reales, entonces

$$R \times R = \{(x, y) / x \in R \wedge y \in R\}$$

y se denomina “el conjunto de todas las parejas de números reales”.

8.3.3 Representación gráfica del producto cartesiano

El plano cartesiano tiene diferentes formas de representarlo gráficamente, entre otras las siguientes: plano cartesiano, diagramas sagitales y dígrafos (para relaciones).

Plano cartesiano. También se le llama plano numérico o diagrama cartesiano. Consiste en dos líneas orientadas perpendiculares que se cortan formando cuatro regiones llamadas cuadrantes. Se utiliza para representar geoméricamente el conjunto $R \times R$. En este capítulo se estudiará el *sistema coordenado rectangular* que en estudios previos de álgebra y trigonometría ya les había sido familiar.

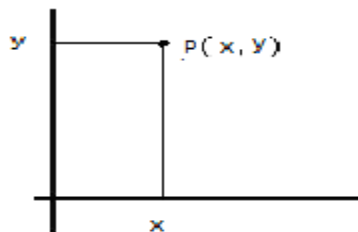


Figura 8.1: representación geométrica de un par ordenado

Entre un par ordenado de $R \times R$ y el conjunto de los puntos del plano geométrico o plano cartesiano, se establece una relación biunívoca; de tal manera, el par ordenado (x, y) se asocia con el punto $P(x, y)$ del plano (vea figura 4.1).

Ejemplo 8.4: dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2\}$, el producto cartesiano $A \times B$ será:

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (5,1), (5,2)\}.$$

Su representación geométrica en el plano cartesiano o diagrama cartesiano puede verse en la figura 8.2.

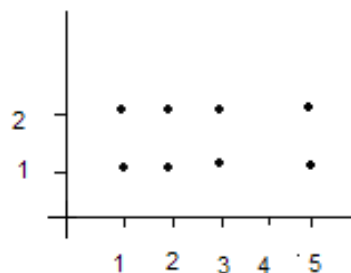


Figura 8.2: representación geométrica del ejemplo 8.4

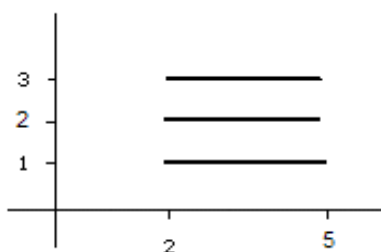


Figura 8.3: representación gráfica del ejemplo 8.5

Ejemplo 8.5: dados los conjuntos $A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \in [2,5]\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \in (0,3]\}$, represente en el plano cartesiano a $A \times B$. En efecto, en el eje X represente el conjunto A y en el eje Y represente el conjunto B. (vea figura 4.3). Observe que por cada valor obtenido en A se obtiene el mismo valor de B; por tal razón, se forma una línea.

Diagramas sagitales. Son muy importantes para la representación de relaciones y de funciones como se verá más adelante. Consisten en figuras geométricas cerradas que también se denominan diagramas de Euler-Venn donde los elementos de cada conjunto se unen con flechas.

Ejemplo 8.5: En la figura 8.4 se representa el producto cartesiano $A \times B$, con $A = \{1,4\}$ y $B = \{2,3,5\}$, utilizando diagramas sagitales.

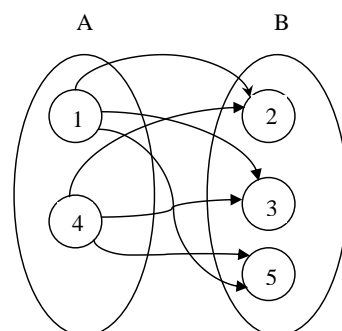


Figura 8.4: diagrama sagital ejemplo 8.5

Ejemplo 8.6: sean $A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{y/y \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq y \leq 4\}$.

Determinar y representar en el plano cartesiano a: $A \times \{0\}$, $\{1\} \times B$, $A \times B$ y $B \times A$.

$$A \times \{0\} = \{(x,y)/-1 \leq x \leq 2 \wedge y=0\}$$

$$\{1\} \times B = \{(x,y)/x=1 \wedge 2 \leq y \leq 4\}$$

$$A \times B = \{(x,y)/-1 \leq x \leq 2 \wedge 2 \leq y \leq 4\}$$

$$B \times A = \{(x,y)/-1 \leq x \leq 2 \wedge 2 \leq y \leq 4\}$$

La representación gráfica es:

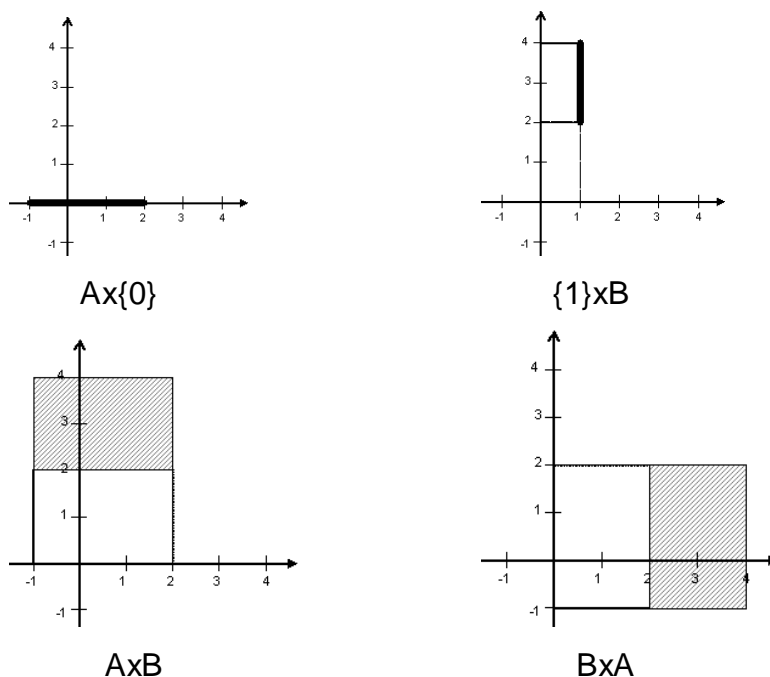


Figura 8.5: ejemplo 8.6

Dígrafos. Los dígrafos o grafos dirigidos son una excelente herramienta para graficar relaciones binarias. Este tema se tratará más adelante en la sección 8.5.

8.4 Relación de conjuntos

8.4.1 Concepto de relación

Sean A y B conjuntos finitos. Si R es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ tal que los elementos x de A cumplen la propiedad con respecto a los elementos y de B , se dice que R es una relación definida de A en B y se denota $R: A \rightarrow B$ al que xRy o $(x,y) \in R$. Por lo tanto, se dice x de A está relacionado con y de B . Al conjunto A se llama “**conjunto de partida**” y a B “**conjunto de llegada**”.

$$R: A \rightarrow B \text{ es una relación} \Leftrightarrow R \subseteq A \times B \text{ y } (x,y) \in R \Leftrightarrow R \subseteq A \times B \text{ y } xRy$$

Si $x \in A$ no está relacionado con $y \in B$, entonces se escribe $x \not R y$

Ejemplo 8.7: sea $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,4\}$ y $R: A \rightarrow B$ la relación definida por R : “ser menor que”. Calcule R .

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$

Quedará como ejercicio el cálculo de $R: B \rightarrow A$

8.4.2 Concepto de relación binaria

Dado cualquier par de elementos de un conjunto que cumplen o no una propiedad determinada se dice que establecen una **relación binaria**.

A menudo la relación R es definida en A , esto es, $R \subseteq A \times A$ y se dice que $R: A \rightarrow A$ o simplemente $R(A)$, que denominaremos “**relación binaria definida en A** ”. Este tipo de relación es de gran importancia para aplicaciones de la computación y en matemáticas aplicadas y por tanto, será nuestro interés en el desarrollo de este libro.

Ejemplo 8.8: sea $A=\{1,2,3,4\}$ y la relaciones

R_1 : “ser menor o igual que” definida en A .

R_2 : “ser múltiplo de” definida en A .

R_3 : “ser cuadrado de” definida en A .

Como R_1 , R_2 y R_3 son subconjuntos de $A \times A$, halle cada relación y calcule la unión, la intersección y el complemento de R_1 y R_2 ; además la diferencia y la diferencia simétrica entre R_2 y R_3

Por lo tanto,

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ conjunto universal de las R_i

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2)\}$

$R_3 = \{(1,1), (4,2)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$

$\overline{R_1} = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$\overline{R_2} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$

$R_2 \oplus R_3 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

$R_2 - R_3 = \{(2,1), (3,1), (4,1)\}$

$R_3 - R_2 = \{\}$

8.5 Representación gráfica de relaciones binarias

La representación gráfica o geométrica de las relaciones se realiza de igual manera que con el producto cartesiano. Los *diagramas sagitales* son muy útiles desde el punto de vista didáctico (vea figura 8.4); los diagramas cartesianos tienen su importancia cuando se quiere graficar utilizando variables continuas, por ejemplo, para definir las relaciones en el conjunto de los números reales.

Los dígrafos, en el ámbito tecnológico, tienen gran uso y es por tal razón que se enfatizará en esta representación gráfica.

Dígrafos. También conocidos como grafos dirigidos de la relación. Son utilizados fundamentalmente para representar relaciones de manera gráfica. Tienen cierta semejanza a los diagramas sagitales; sin embargo se diferencian, básicamente en que los dígrafos o simplemente grafos dirigidos se usan para representar relaciones binarias definidas en un solo conjunto y los elementos de la relación en la gráfica van unidos con flechas.

Para dibujar un dígrafo escriba el elemento correspondiente al conjunto, los cuales se llaman **vértices o nodo**. Trace una flecha de un vértice a otro, a la que se denomina **lado, arco o arista**. Cuando un elemento está relacionado con otro elemento del conjunto, esto se dirige; si está relacionado consigo mismo se indica mediante una flecha que se dirige hacia el mismo elemento, lo cual se llama “**lazo**” o “**bucle**” (vea figuras 8.5 y 8.6).

Ejemplo 8.9: dado $A=\{1,2,3,4\}$ y las relaciones

$$R_1=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4),(4,1)\}$$

$$R_2= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2) (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

Represente mediante dígrafos las relaciones R_1 y R_2 .

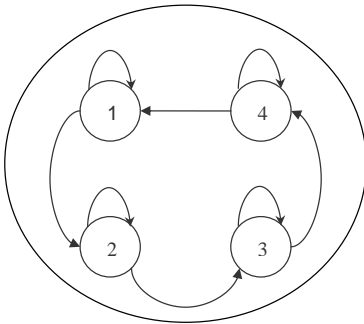


Figura 8.5: dígrafo R_1 del ejemplo 8.9

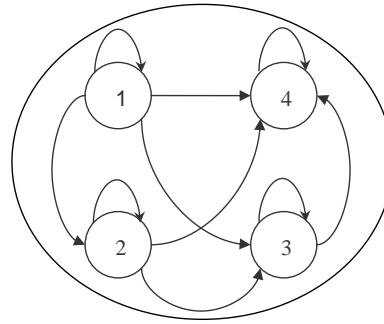


Figura 8.6: dígrafo R_2 del ejemplo 8.9

8.6 Conjuntos dominio y conjunto imágenes de relaciones

De una relación R se pueden definir conjuntos de gran importancia en el desarrollo de las matemáticas y de las ciencias y la tecnología: dominio y imágenes de R .

8.6.1 Conjuntos dominio de una relación

Sean A y B conjuntos cualesquiera y R una relación definida de A en B . El *dominio* de una relación R , denotado $\mathcal{D}(R)$ es el conjunto formado por todas la x o todos los primeros elementos o primeras componentes de la relación; así que,

$$\mathcal{D}(R)=\{x/xRy\}$$

Al dominio también se llama conjunto de “*pre-imágenes*”

Ejemplo 8.10: Sea $A=\{1,2,4,7\}$ y $B=\{1,2,4,16\}$ y la relación $R:A\rightarrow B$ una relación definida por “ser raíz cuadrada de”. Determine el $\mathcal{D}(R)$.

La relación estará definida como sigue:

$$R=\{(1,1),(2,4),(4,16)\}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(R)=\{1,2,4\}$$

8.6.2 Conjunto imágenes de una relación

Sean A y B conjuntos cualesquiera y R una relación definida de A en B. Las *Imágenes* de una relación R, denotado $\text{Im}(R)$ es el conjunto formado por todos los segundos elementos o segundas componentes de la relación; así que,

$$\text{Im}(R) = \{y/xRy\}$$

El conjunto de imágenes de R también es denominado conjunto “**rango**” de R.

Ejemplo 8.11: Dados los conjuntos y la relación del ejemplo 8.8, determine el rango de R. En efecto,

$$\text{Im}(R) = \{1, 4, 16\}$$

Ejemplo 8.12: Dada la relación R definida en los reales por

$$R = \{(x, y) / 3xy - 4x + 3y - 4 = 0\},$$

el dominio y rango de R, respectivamente son:

$$\text{Im}(R) = R - \{4/3\}$$

$$\mathcal{D}(R) = R - \{-1\}$$

8.7 Matriz relacional⁹

Es un tipo de matriz dispersa¹⁰ que se utiliza para representar relaciones binarias.

Dados dos conjuntos finitos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ de m elementos y $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n\}$ de n elementos; sea R una relación de A en B. La relación R se puede representar en una matriz de m*n elementos que se denomina “**matriz relacional**” que se abreviará M_R y se define por

$$M_R = [m_{ij}], \text{ con } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (a, b) \in R \\ 0, & \text{si } (a, b) \notin R \end{cases}$$

8.8 Representación de relaciones en la computadora

Esta definición tiene gran importancia desde el punto de vista tecnológico, básicamente en el ámbito de la computación, si se tiene en cuenta que las matrices son parte fundamental de las estructuras de datos. Por lo tanto, al representarse las relaciones de manera matricial, algunas matrices especiales, tales como las dispersas (matriz diagonal principal, matriz diagonal secundaria, matrices triangulares superior e inferior) ayudarán a determinar las propiedades de las relaciones de la sección 8.9.

⁹ KOLMAN, Bernard y otros. Estructuras de matemáticas discretas para la computación. Editorial Prentice Hall hispanoamericana, S.A., 1997, pp. 111.

¹⁰ Matriz cuyos elementos son unos y ceros.

Ejercicio 8.1: haga un programa en un lenguaje programación, correspondiente a una relación $R:A \rightarrow B$ donde en el conjunto A están los datos de entrada y en el conjunto B estarán los datos de salida o posibles resultados. La relación estará representada por una matriz, donde las filas corresponden al conjunto de partida y las columnas representan al conjunto de llegada.

Para tal fin, dichos conjuntos utilizan la representación vista en la sección 8.5.2. Vea el ejemplo 8.13.

Así que

$xRy \Leftrightarrow y$ es un valor obtenido por el programa cuando se entra x

Ejemplo 8.13: Sea $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $B=\{2,3,4,5,6\}$ y la relación $R:A \rightarrow B$ definida por

$$R=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

Represente la relación R en la computadora.

En efecto, el conjunto A es un vector de 5 posiciones (vea figura 8.7); el conjunto B es un vector de 5 posiciones (vea figura 4.8); la relación M que representa a R es una matriz de 5x5 elementos (con tantos unos como parejas ordenadas tenga la relación).

Vector A:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Figura 8.7: representación del conjunto A del ejemplo 8.13

Vector B:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Figura 8.8: representación del conjunto B del ejemplo 8.13

Matriz M:

| | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| M= | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Figura 8.9: representación de la relación R del ejemplo 8.13

8.9 Propiedades de las relaciones

Las relaciones cumplen con ciertas propiedades que apoyan la gran importancia en aplicaciones computacionales y en el desarrollo de las matemáticas aplicadas.

Sea A un conjunto finito cualquiera y $R:A \rightarrow A$ una relación, entonces se tienen las siguientes propiedades:

8.9.1 Relación reflexiva

Se dice que una relación R definida en A es “reflexiva” si todos los elementos de A están relacionados consigo mismo; es decir, si todos los elementos de A forman parejas ordenadas en R con componentes iguales. Simbólicamente,

$$(\forall x \in A)(xRx)$$

Ejemplo 8.14: Si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por $R=\{(2,2),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7)\}$, entonces es “reflexiva”, porque todos los elementos de A están relacionados consigo mismo.

Observando la matriz de relación M de R (figura 8.10) se puede ver que, esto lo verifica si aparecen unos en la diagonal principal de la matriz.

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| M= | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |

Figura 8.10: representación de la relación R del ejemplo 8.14

8.9.2 Relación anti-reflexiva

Una relación R definida en A es “anti-reflexiva” si ninguno de los elementos de A están relacionados consigo mismo; es decir, si no hay elementos de A forman parejas ordenadas en R con componentes iguales. Simbólicamente,

$$(\forall x \in A)(x \not R x)$$

Ejemplo 8.15: Si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por $R=\{(4,5),(2,4),(5,2),(6,7),(7,6)\}$, entonces R es anti-reflexiva, porque todos los elementos de A están relacionados consigo mismo.

Observe que en la matriz de relación M de R (figura 8.11), no aparece al menos un uno en su diagonal principal.

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| M= | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 7 |

Figura 8.11: representación de la relación R del ejemplo 8.15

8.9.3 Relación no reflexiva

Se dice que una relación R definida en A es “no reflexiva” siempre que algunos elementos de A no están relacionados consigo mismo; es decir, si no todos los

elementos de A forman parejas ordenadas en R con componentes iguales. Simbólicamente,

$$(\exists x \in A)(x \overset{R}{\sim} x)$$

Ejemplo 8.16: Si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por $R=\{(2,2),(4,4),(5,6),(6,5),(7,7)\}$, entonces R es “no reflexiva”, porque no todos los elementos de A están relacionados consigo mismo y otros no.

Observe que en la matriz de relación M de R (figura 8.12) algunos elementos de su diagonal principal tienen un 1, lo que verifica esta propiedad.

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| M= | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |

Figura 8.12: representación de la relación R del ejemplo 8.16

8.9.4 Relación simétrica

Una relación R definida en A es “simétrica” cuando todas las parejas de la relación tienen su recíproco; es decir, para elementos x, y de A se cumple que si xRy , entonces yRx . Simbólicamente,

$$(\forall x,y \in A)(xRy \rightarrow yRx)$$

Ejemplo 8.17: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por

$$R=\{(2,2),(6,4),(5,6),(6,5),(4,6)\},$$

entonces R es simétrica, porque todas las parejas de R tienen su recíproco.

Intuitivamente observe La matriz de la figura 8.13 que, si se doblara por la diagonal principal los 1 coincidirían.

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| M= | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |

Figura 8.13: representación de la relación R del ejemplo 8.17

8.9.5 Relación antisimétrica

Una relación R definida en A es “antisimétrica” cuando ninguna pareja de la relación tienen su recíproco; es decir, para elementos x, y de A se cumple que si $(x,y) \in R$, entonces $(y,x) \notin R$; pero, si $(x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$, entonces $x=y$. Simbólicamente,

$$(\forall x,y \in A)(xRy \rightarrow y \not R x)$$

o también,

$$(\forall x,y \in A)(xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$$

Ejemplo 8.18: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por $R=\{(2,2),(6,4),(5,6),(6,2),(4,5),(7,7)\}$, entonces R es “antisimétrica”, porque ninguna de sus parejas tiene su recíproco y si la tuviese, entonces la pareja sería reflexiva.

Intuitivamente observe la matriz de la figura 8.14 que, si se dobla por la diagonal principal ninguna de los 1 coinciden.

Ahora, la relación $R:A \rightarrow A$ cumple la propiedad definida por $R=\{(2,2),(4,4),(5,5)\}$ es ¿simétrica o antisimétrica?

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| M= | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |

Figura 8.14: representación de la relación R del ejemplo 8.18

8.9.6 Relación no simétrica

Una relación R definida en A es “no simétrica” cuando algunas parejas son simétricas o tienen su recíproco y otras no lo tienen; es decir, no todas las parejas de R cumplen que si $(x,y) \in R$, entonces $(y,x) \in R$; es decir, algunas parejas de R cumplen que $(x,y) \in R$ y $(y,x) \notin R$. Simbólicamente,

$$(\exists x,y \in A)(xRy \wedge y \not R x)$$

Ejemplo 8.19: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por $R=\{(2,2),(5,4),(5,6),(6,5),(7,7)\}$, entonces R es “no simétrica”, porque algunas de sus parejas tienen su recíproco y otras no.

Intuitivamente observe la matriz de la figura 8.15 que, si se doblase por la diagonal principal algunos unos coinciden y otros no.

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| M= | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |

Figura 8.15: representación de la relación R del ejemplo 8.19

Nota: tenga en cuenta que hay diferencias entre relaciones anti-reflexivas y no reflexivas y, entre antisimétricas y no simétricas.

8.9.7 Relación transitiva

Una relación R definida en A es “transitiva” siempre que un elemento esté relacionado con un segundo y este con un tercero, entonces el primero esté relacionado con el tercero. Es decir, siempre que x, y, z sean elementos de A , se cumple que si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, entonces $(x,z) \in R$. Simbólicamente,

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

Ejemplo 8.20: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por $R=\{(2,2),(4,4),(5,4),(5,6),(6,5),(4,5),(4,6),(5,5)\}$, entonces R es “transitiva”. Vea la relación representada en una matriz M en la figura 8.16.

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| M= | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |

Figura 8.16: representación de la relación R del ejemplo 8.20

8.9.8 Relación no transitiva

Una relación R es “no transitiva” si un elemento esté relacionado con un segundo y este con un tercero, pero el primero no está relacionado con el tercero. Es decir, hay elementos x, y, z de A , que cumplen algunas si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, entonces $(x,z) \notin R$. Simbólicamente,

$$(\exists x \in A)(\exists y \in A)(\exists z \in A)(xRy \wedge yRz \wedge x \not R z)$$

Ejemplo 8.21: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por $R=\{(2,2),(4,4),(5,4),(5,6),(6,5),(4,5),(4,6)\}$, entonces R es “no transitiva”. Representéla en una matriz de relación.

8.9.9 Relación de equivalencia

Una relación R definida en un conjunto A es de equivalencia si, y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 8.22: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A \rightarrow A$ es una relación definida por $R=\{(2,2),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(2,7),(7,2),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5),(6,7),(7,6),(4,6),(4,7),(6,4),(7,4),(5,7),(7,5)\}$.

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| M= | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |

Figura 8.17 representación de la relación R del ejemplo 8.22

entonces R es una relación de equivalencia. Observando la matriz de relación M de R (figura 8.17) se puede ver que todas las celdas de la matriz tienen unos.

8.9.10 Relación de orden estricto

Una relación R definida en un conjunto A es de orden estricto si R antisimétrica y transitiva.

Ejemplo 8.23: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A\rightarrow A$ es una relación “ser menor”, entonces R es de orden estricto. En efecto,

$$R=\{(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(4,5),(5,6),(6,7),(5,7)\}.$$

Es antisimétrica y transitiva. Verifique esta respuesta.

8.9.11 Relación de orden parcial

Una relación R definida en un conjunto A es de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no hay relación entre algunos elementos de A .

Ejemplo 8.24: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A\rightarrow A$ es una relación definida por

$$R=\{(2,2),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(2,4),(2,5),(2,6),(4,5),(5,6),(6,7),(4,6)\},$$

entonces R es de orden parcial, porque es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero algunos elementos de A no están relacionados entre sí. Compruebe la repuesta.

8.9.12 Relación de orden total

Esta propiedad tiene gran importancia en la computación en lo que respecta a los procesos de ordenamiento utilizados en los lenguajes de programación y el manejo de bases de datos.

Una relación R definida en un conjunto A es de orden total si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo 8.25: si $A=\{2,4,5,6,7\}$ y $R:A\rightarrow A$ es una relación “ser menor o igual que”, entonces R es de orden total. En efecto,

$$R=\{(2,2),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(4,5),(5,6),(6,7),(4,6),(4,7),(5,7)\}.$$

es de orden total, porque es reflexiva, antisimétrica y transitiva y existe relación entre todos los elementos del conjunto dado. Verifíquelo.

8.10 Relación inversa

Sea A un conjunto cualquiera y R una relación definida en A por $\{(x,y)\in A\times A/xRy\}$; entonces, la relación inversa denotada por R^{-1} se define como el conjunto $\{(x,y)\in A\times A/yRx\}$.

Ejemplo 8.26: Si $A=\{6,12,18,24\}$ y R una relación definida en A por

$$R=\{(6,6),(12,12),(18,18),(24,24),(6,12),(6,18),(6,24),(12,24)\}$$

Entonces

$$R^{-1}=\{(6,6),(12,12),(18,18),(24,24),(12,6),(18,6), (24,6),(24,12)\}$$

8.11 Relación biunívoca

Se dice que una relación $R:A \rightarrow B$ es biunívoca o que guarda una correspondencia biunívoca si la relación es unívoca y su inversa también lo es (vea figura 8.19b).

TALLER 7

1. Dada una relación binaria definida en A ($R:A \rightarrow A$), el grado interno de $x \in A$ es el número de elementos $y \in A$ tales que yRx . El grado externo $x \in A$ es el número de elementos $y \in A$ tales que xRy . Entonces si la relación R está representada gráficamente en un dígrafo, el grado interno de $x \in A$ es el número de arcos que entran en x y su grado externo corresponderá al número de aristas que salen del vértice x . Según el dígrafo de la figura 8.18, determine el grado interno y el externo de cada vértice.

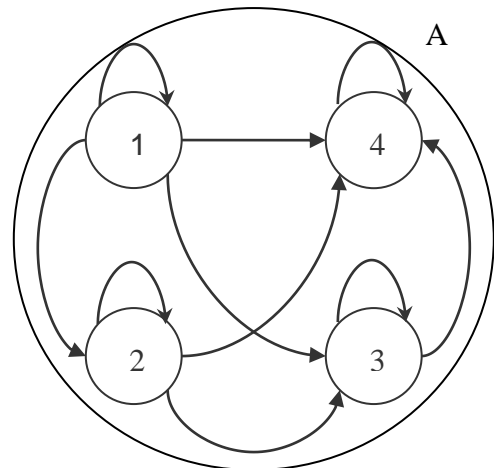


Figura 8.18: problema 1

2. Haga un programa en cualquier lenguaje que determine el grado interno y externo de los elementos de una relación o vértices de un dígrafo.
3. Cuáles propiedades de las relación cumplen las siguientes operaciones:
 - ser igual a.
 - ser mayor o igual que
 - la divisibilidad
 - ser múltiplo de
4. Haga un programa con el lenguaje que usted quiera y determine las propiedades que cumple una relación.
5. Haga un programa en el lenguaje que se quiera, que halle la relación inversa de una relación cualquiera definida en un conjunto dado.
6. Calcule los valores de x e y que verifican las siguientes igualdades:

- 6.1 $(x+y, -4+y) = (2y-3, 2-x)$
 6.2 $(x - \square y, \frac{1}{2}y) = (1+3y, 2x)$
 6.3 $(x^2 - y^2, y) = (0, 4)$
 6.4 $(\sqrt{x+y}, 3x-5) = (1, 7)$

- 7 Dadas las matrices de relación de la figura 8.19, determine las propiedades que cumple cada relación.
- 8 Halle la relación inversa de cada una de las matrices de relación del problema del numeral 7.
- 9 Haga un programa que determine si ciertos conjuntos son particiones de A y si forman clases de equivalencia.
- 10 Sean a, B, C conjuntos cualesquiera. Demuestre por el método adecuado o refute las siguientes afirmaciones:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Matriz R₁

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Matriz R₂

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Matriz R₃

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Matriz R₄

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Matriz R₅

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Matriz R₆

Figura 8.19: matrices del problema 7

- El producto de un conjunto A por la unión de B y C es igual al producto de la unión de A y B con la unión de A y C; es decir,

$$Ax(B \cup C) = (A \cup B)x(A \cup C)$$
- El producto de un conjunto A por la intersección de B y C es subconjunto del producto de la intersección de A y B con la intersección de A y C; es decir,

$$Ax(B \cap C) \subseteq (A \cap B)x(A \cap C)$$
- El producto de la intersección de A y B con la intersección de A y C es subconjunto del producto de un conjunto A por la intersección de B y C; es decir,

$$(A \cap B)x(A \cap C) \subseteq Ax(B \cap C)$$
- Si $AxB = \emptyset$ entonces $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$
- $A \subseteq P \wedge B \subseteq Q \Leftrightarrow Ax(B) \subseteq Px(Q)$
- $Ax(B \cup C) \subseteq (A \cup B)x(A \cup C)$
- $(A \cup B)x(A \cup C) \subseteq Ax(B \cup C)$
- $Ax(B \cap C) \subseteq (A \cap B)x(A \cap C)$
- $(A \cap B)x(A \cap C) \subseteq Ax(B \cap C)$
- $(A - B)x(A - C) \subseteq Ax(B - C)$

- 11 Dado el conjunto

$$M = \{6, 10, 12, 15, 18, 20, 24\},$$

y la relación R: "ser múltiplo de 5 ó de 6". ¿Se puede comprobar que

$$K_1 = \{x \in N / x \text{ es múltiplo de 2 y 3, con } 5 < x < 25\},$$

$$K_2 = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es múltiplo de 3 y 5, con } 5 < x < 25\},$$

$$K_3 = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es múltiplo de 2 y 5, con } 5 < x < 25\}$$

son clases de equivalencia de M ? Determine adecuadamente las razones.

12 Dados los conjuntos A y B , dé un concepto para la relación $R \oplus S$ dado que se definen las relaciones $R: A \rightarrow B$ y $S: A \rightarrow B$.

13 Sean A y B conjuntos cualesquiera que definen las relaciones $R: A \rightarrow B$ y $S: A \rightarrow B$. Teniendo en cuenta que el producto cartesiano $R \times S$ es el conjunto universal de las relaciones, haga un programa en cualquier lenguaje que muestre la relación resultante entre las operaciones intersección, unión, diferencia, diferencia simétrica y complemento de esas relaciones. El programa debe permitir el ingreso por consola de los elementos, tanto de los conjuntos como de las relaciones.

14 Calcule las parejas de cada relación, el dominio y el rango de dichas relaciones, según los siguientes conjuntos:

$$A = \{x / 0 < x \leq 5\}, B = \{y / -4 \leq y \leq 0\} \text{ y } C = \{z / -3 \leq z < 2\}$$

1) $R: A \rightarrow B$

2) $R: C \rightarrow B$

3) $R: C \rightarrow A$

4) $R: A \rightarrow C$

5) $R: B \rightarrow C$

6) $R: B \rightarrow A$

15 Sean A y B los conjuntos del problema 14 y R y S relaciones definidas de A en B ($R: A \rightarrow B$ y $S: A \rightarrow B$), calcule y represente gráficamente las siguientes operaciones:

1) $R - S$,

3) $R \cap S$

5) $R \oplus S$

7) \overline{S}

2) $R \cup S$

4) $S - R$

6) \overline{R}

8) Universal (o $A \times B$)

16. Calcule D_R e I_r (dominio y rango, respectivamente) dado que:

16.1 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $R: A \rightarrow Z$ una relación definida por
 $R = \{(x, y) / xy - x + y + 3 = 0\}.$

16.2 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 19, 20, 30, 40\}$ y $R: A \rightarrow Z$ una relación definida por

$$R = \{(x, y) / x^2 - y + x - 1 = 0\}.$$