

---

## Capítulo 11: TEORIA DE GRAFOS

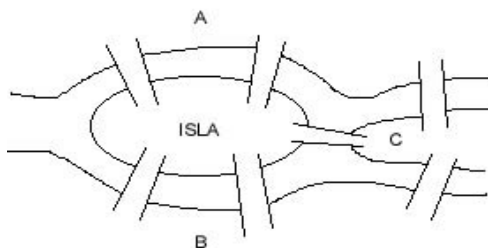
### 11.1 Introducción



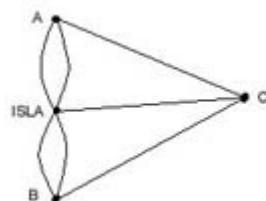
**Leonhard Euler** fue el más grande matemático, filósofo y físico suizo. Nació el 15 de abril de 1707 en Basilea (Suiza).

Siendo un adolescente ingresó a la Universidad de Basilea, donde a los 17 años de edad, se graduó Doctor, provocando grandes aplausos con un discurso probatorio.

Trabajó todas las ramas conocidas de la matemática de su época y a todas les aportó algo. Resolvió el problema de los Puentes de Königsberg que consistía en lo siguiente: dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida?



Euler enfocó el problema representando cada parte de tierra por un punto y cada puente, por una línea, uniendo los puntos que se corresponden. Entonces, el problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas?



Euler demostró que no era posible puesto que el número de líneas que inciden en cada punto no es par (condición necesaria para entrar y salir de cada punto regresando al punto de partida por caminos distintos en todo momento). En teoría de los grafos esta idea se corresponde con la posibilidad de encontrar un Ciclo Euleriano en un grafo.

Entre otras muchas de sus obras Introdujo los símbolos  $e$  (como la inicial de su nombre), la letra  $\pi$  para dicho número (el honor a la letra inicial de Pitágoras),  $f(x)$  para las funciones, el sumatorio ( $\Sigma$ ) y el cálculo de  $i$  como la raíz cuadrada de  $-1$ . Argumentó que el infinito separaba los números positivos de los negativos de forma similar a como lo hace el cero. Definió las

funciones logarítmicas y exponenciales. Elaboró e introdujo la integración doble. Descubrió el teorema de la composición de integrales elípticas. Amplió y perfeccionó la geometría plana y de sólidos. Fue el primero en considerar el seno y el coseno como funciones. Introdujo los factores integrantes en las ecuaciones diferenciales. Generalizó la congruencia de Fermat, introduciendo una expresión que Gauss denominó "indicador".

Considerado como el padre de la Teoría de Gráficas y como uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Euler vivió casi durante los diecisiete últimos años de su vida en una ceguera total. Ni siquiera esta tragedia consiguió interrumpir sus investigaciones y publicaciones, que continuó al mismo e incluso a mayor ritmo hasta 1783.

En San Petersburgo el 18 de septiembre de 1783, en que, a la edad de setenta y seis años, murió de manera repentina mientras tomaba el té y jugaba con uno de sus nietos.

La teoría de gráficas o teoría de grafos es aplicada entre otras, en áreas tales como ciencias sociales, ciencias físicas, ingeniería de comunicación; pero, básicamente juega un papel importante en las ciencias de la computación, tales como inteligencia artificial, lenguajes formales, teoría de cambio y lógica de diseño, gráficos por computadora, sistemas operativos, compiladores, y organización y recuperación de información, en lo que respecta al modelado de problemas, indicando sus características de manera muy objetiva.

El concepto de grafo o gráfica es muy diferente a los trazos realizados en matemática sobre los ejes  $x$  e  $y$ .

Entre otras aplicaciones se utiliza para:

- Cartografía (coloreado de mapas)
- Modelado matemático
- Determinación de tiempos en el desarrollo de proyectos
- Urbanistas
- Programación de exámenes en una institución educativa
- Programación de horarios en una entidad cualquiera
- Programación de distribución de servicios públicos (recolección de basuras en una ciudad, red de acueducto, de alcantarillado y de gas)
- Diseño de boards o tarjetas plásticas para dispositivos electrónicos.
- Redes de computadores

Los elementos de un grafo son los nodos o vértices y las aristas. Cada arista se forma por la unión de dos vértices. En decir, hay una relación entre las aristas y los nodos. Por ejemplo, si se usan grafos para la ejecución de un plan de actividades, los vértices se pueden asociar con las actividades y las aristas corresponderían al tiempo que tarda o a la probabilidad que se tiene para que se realice una actividad. En tal caso se trabaja en grafos dirigidos con peso.

Este capítulo pretende completar, de un modo organizado, los conceptos y términos sobre grafos que aparecen en este tema, los cuales inciden, fundamentalmente en el tratamiento algorítmico de los problemas planteados.

## 11.2 Conceptos básicos de la teoría de grafos

### 11.2.1 Concepto de grafo

Sea  $V$  el conjunto no vacío de vértices o nodos y  $E$  el conjunto de lados o aristas (pares de vértices); se dice que  $G$  es un grafo, si  $G = (V, E)$  es una estructura de datos compuesta por esos dos conjuntos  $V$  y  $E$  que forman un conjunto de pares ordenados o de pares sin ordenamiento de sus vértices o nodos. Los primeros pares van entre paréntesis y los otros se pondrán entre llaves.

## 11.3 Clasificación de los grafos

### 11.3.1 Grafo dirigido

Un grafico dirigido  $G$ , también llamado “dígrafo o digrafo”, consta de un conjunto  $V$  de vértices y un conjunto  $E$  de aristas tales que cada arista  $e \in E$  se asocia con un par ordenado de vértices. Si existe una única arista  $e$  asociada con el par ordenado  $(v, w)$  de vértices, escribimos  $e = (v, w)$  lo cual denota una arista de  $v$  a  $w$ . En conclusión, se puede afirmar que un grafo dirigido es aquel que tiene uniones unidireccionales que suelen dibujarse con una flecha.

Un grafo dirigido es aquel que tiene todas sus aristas dirigidas; es decir, un dígrafo está asociado a un par ordenado (vea figura 9.1a). Por ejemplo, si  $w$  es vértice de partida y  $v$  es vértice de llegada, entonces la arista se asocia a la pareja ordenada  $(w, v)$ , que es diferente de  $(v, w)$ ; es decir,  $(w, v) \neq (v, w)$ .

Los vértices de donde parten las aristas se denominan vértices salientes y los vértices a donde llegan las aristas se llaman vértices entrantes.

$$(V_i, V_j) = \begin{cases} V_i, & \text{es cola del lado} \\ V_j, & \text{es cabeza del lado.} \end{cases}$$

### 11.3.2 Grafo no dirigido

Un grafo no dirigido (vea figura 10.1b) consta de un conjunto de vértices y un conjunto  $E$  de aristas tal que cada arista  $e \in E$  queda asociada a un par no ordenado de vértices. Si existe una única lista  $e$  asociada con los vértices  $v$  y  $w$ , escribimos  $e = \{v, w\}$  ó  $e = \{w, v\}$ . en este contexto,  $\{v, w\}$  denota una arista entre  $v$  y  $w$  en un grafo no dirigido y no un par ordenado. En conclusión, un grafo no dirigido es aquel en el cual sus aristas son direccionales, es decir, si una arista conecta dos nodos  $A$  y  $B$  se puede recorrer tanto en sentido hacia  $B$  como en sentido hacia  $A$ . Sus aristas son no dirigidas; es decir, un dígrafo está asociado a un par desordenado (vea figura 10.1d).

**Ejemplo 11.1:** si  $u$  es vértice de partida y  $v$  es vértice de llegada, entonces la arista se asocia a la pareja desordenada  $\{w, v\}$ , que es igual que escribir  $\{v, w\}$ ; es decir,  $\{w, v\} = \{v, w\}$ . En tal caso,  $w$  es vértice e partida o de llegada; igualmente sucede con  $v$ .

### 11.3.3 Grafo dirigido con peso

Es aquel grafo dirigido en el que sus aristas tienen una etiqueta (vea figura 10.1c). Una etiqueta puede ser un nombre, costo ó un valor de cualquier tipo de dato. También a este grafo se le denomina red de actividades, y el número asociado al arco se le denomina factor de peso. Se

usa en el modelado de problemas de la vida real; por ejemplo, al tiempo que se tardará en realizar una actividad determinada o la distancia que hay de un lugar a otro.

### 11.3.4 Grafo mixto

Es aquel grafo en el que algunas de sus aristas son dirigidas y otras son no dirigidas (vea figura 11.1d).

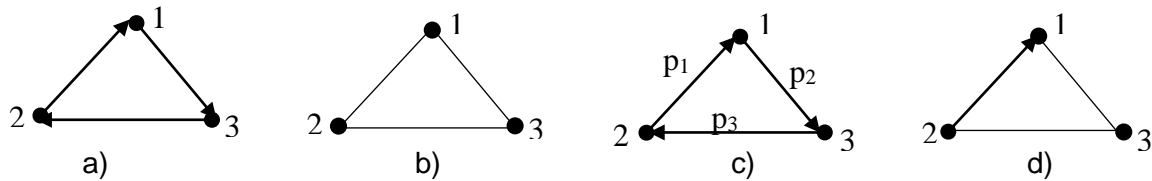


Figura 11.1: representación gráfica de grafos: a) grafo dirigido, b) grafo no dirigido, c) grafo dirigido con peso y d) grafo mixto

Según la figura 11.1c se podría interpretar, por ejemplo, que para pasar de la actividad 1 a la 3 se tarda un tiempo  $p_2$ ; que pasar de actividad 3 a la 2 se tarda un tiempo  $p_3$  y, de la actividad 2 a la 1 se tardaría un tiempo  $p_1$ . Un grafo no dirigido puede dibujarse con aristas dirigidas haciendo que cada lado les corresponda aristas invertidas.

### 11.4 Vértices adyacentes

Son aquellos que conforman un lado o arista. Todo lado conformado por dos vértices se dice que es incidente sobre esos vértices. Si un vértice no tiene otro adyacente se dice que es **aislado**.

**Ejemplo 11.2:** en  $G_2$  de la figura 11.2, son adyacentes los vértices 1 y 3. Así que la arista  $\{1,3\}$  incide sobre los vértices 1 y 3

En  $G_1$  de la figura 11.2: 1 es adyacente hacia 2 ó 2 es adyacente desde 1, donde la arista  $(1,2)$  incide sobre los vértices 1 y 2.

**Ejemplo 11.3:** en el grafo de la figura 11.2 la arista  $e_1$  incide sobre los vértices 1 y 2; igualmente,  $e_7$  incide sobre los vértices 5 y 6.

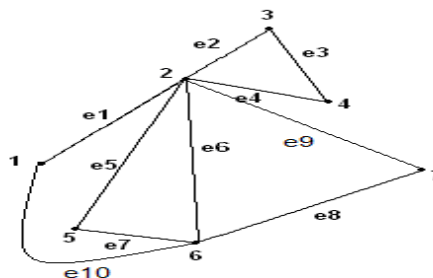


figura 11.2

### 11.5 Representación de grafos

De cualquier manera, para dar algo de sentido a la terminología usada y también para desarrollar algunas ideas intuitivas, se representará un grafo por medio de un diagrama. Ese diagrama se llamará igualmente grafo.

Las definiciones y términos presentadas en este texto no están restringidos a aquellos grafos que pueden ser representados por medio de diagramas, aunque parezca ser el caso, ya que estos términos tengan una fuerte asociación con dicha representación. Debemos resaltar que una representación diagramática es posible únicamente en casos muy simples.

### 11.5.1 Representación gráfica de grafos

Los diagramas se pueden representar gráficamente cuando la cantidad de vértices no es grande. Para tal fin, puede utilizar los siguientes diagramas:

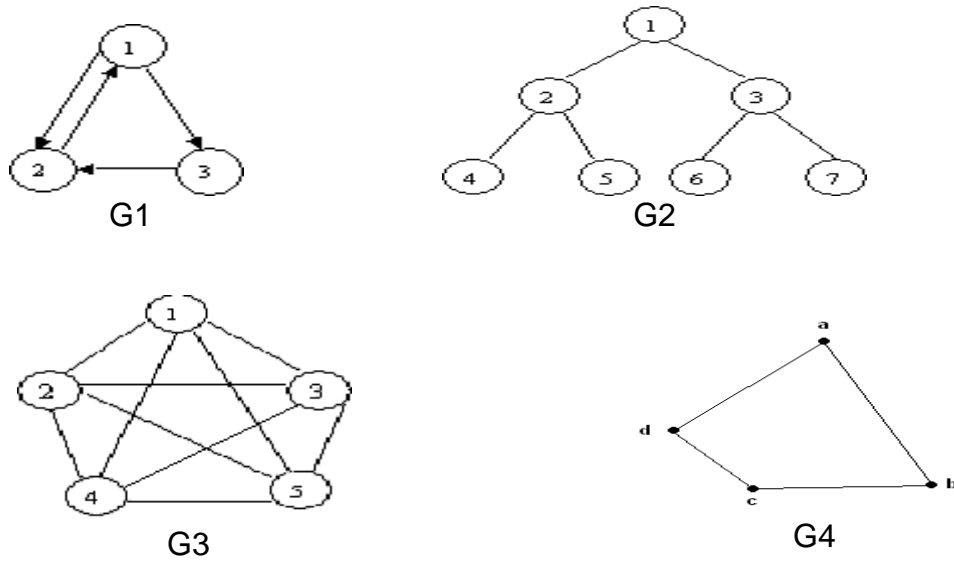


Figura 11.3: representación gráfica de grafos

Los grafos G2, G3 y G4 son grafos no dirigidos; G1 es un grafo dirigido

**Ejemplo 11.4:** según la figura 11.3 los elementos de estos grafos se representan como sigue:

G1: tiene 3 vértices y 4 lados  $\Rightarrow V=\{1,2,3\}$

$$E=\{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2)\}$$

G2: tiene 7 vértices y 6 lados  $\Rightarrow V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$$E=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{3,7\}\}$$

G3: tiene 5 vértices y 10 lados  $\Rightarrow V=\{1,2,3,4,5\}$

$$E=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$$

G4: tiene 4 vértices y 4 lados  $\Rightarrow V=\{a,b,c,d\}$  y  $E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}\}$

Cuando un vértice se dirige a él mismo, se denomina "**bucle**". Si un grafo no tiene bucles o si a lo sumo existe una arista uniendo 2 vértices cualesquiera, se denomina "**Grafo simple**".

### 11.5.2 Representación de grafos en la computadora

#### Matriz de adyacencia

Cuando la cantidad de vértices es razonablemente grande se puede utilizar una representación para la computadora: matrices. Esta manera de representación permite hacer manipulaciones de un grafo utilizando las operaciones que ofrecen las matrices y en consecuencia determinar,

por ejemplo, el grado de un grafo, el camino más corto para ir a un vértice, el número de caminos de longitud  $n$ , los ciclos, entre otros.

En vista del orden de los vértices que se requiere para hacer la representación matricial, se utilizarán dígrafos y la matriz cuadrada conocida como “*matriz de adyacencia*” que se denotará  $MA$ .

Sea  $G=(V,E)$  un dígrafo en el que el conjunto  $V=\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  se asume ordenado desde el vértice  $v_1$  hasta el vértice  $v_n$ . Los elementos de la matriz  $e_{ij}$  están definidos por

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{si } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

**Ejemplo 11.5:** dado el grafo  $G_1$  de la figura 11.4, donde  $V=\{1,2,3\}$  conjunto de vértices ordenado. Su matriz de adyacencia es

	1	2	3	
MA=	0	1	1	1
	1	0	1	2
	0	0	0	3

Figura 11.4: matriz de adyacencia del grafo  $G_1$

La matriz de adyacencia siempre es simétrica ( $a_{ij} = a_{ji}$ ). Cuando se trata de grafos con peso o ponderados en lugar de 1 el valor que tomará será el peso de la arista. Si el grafo es no dirigido hay que asegurarse que se marca con un 1 (o con el peso) tanto la entrada  $a[i][j]$  como la entrada  $a[j][i]$ , puesto que se puede recorrer en ambos sentidos.

El algoritmo Implementado en lenguaje C es:

```
int V, A, a[maxV][maxV];
void inicializar()
{
    int x,y,l,p;
    char v1,v2;
    // lea V,A;
    memset(a,0,sizeof(a));
    for(i=1;i<=A;i++)
    {
        scanf("%c%c%d\n",&v1,&v2,&p);
        x=v1-'A';
        y=v2-'A';
        a[x][y]=p;
        a[y][x]=p;
    }
}
```

## 11.6 Grado en grafos

### 11.6.1 Grado entrante de un vértice

El grado entrante de un vértice  $v$  denotado  $\deg E(v)$  es el número de aristas que llegan al vértice.

**Ejemplo 11.6:** el vértice 3 del grafo  $G_3$  de la figura 11.3, tiene grado entrante 4 y en el grafo  $G_1$  de la misma figura, el grado entrante del vértice 3 es 1 ( $\deg E(3)=1$ ).

### 11.6.2 Grado saliente de un vértice

El grado saliente de un vértice  $v$  denotado  $\deg S(v)$  corresponde al número de aristas que salen del vértice.

**Ejemplo 11.7:** en  $G_3$  de la figura 11.3 el vértice 3 tiene grado saliente igual a 4. Ahora, en  $G_1$  de la figura 11.3 el vértice 1 tiene grado 2 ( $\deg S(3)=1$ ).

### 11.6.3 Grado de un vértice

Se llama grado de un vértice  $v$  al número de aristas que lo tienen como extremo, (cada bucle lo cuenta dos veces). Se designa por **deg(v)** y corresponde al número de aristas incidentes sobre el vértice  $v$ . Un vértice aislado tiene grado cero.

En los grafos dirigidos el grado total de un vértice  $v$  es la suma del grado entrante más el grado saliente ( $\deg(v)=\deg E(v)+\deg S(v)$ ). En los grafos no dirigidos, el grado total de un vértice es igual al número de aristas que tiene el vértice. Por lo tanto, la suma de los grados de los vértices es igual al doble de las aristas del grafo. Compruébalo con varios ejemplos.

**Ejemplo 11.8:** de la figura 11.5, el vértice  $a$  tiene grado total igual a 3; vértice  $b$ , grado 3; vértice  $c$ , grado 2; vértice  $d$ , grado 1; vértice  $e$ , grado 1.

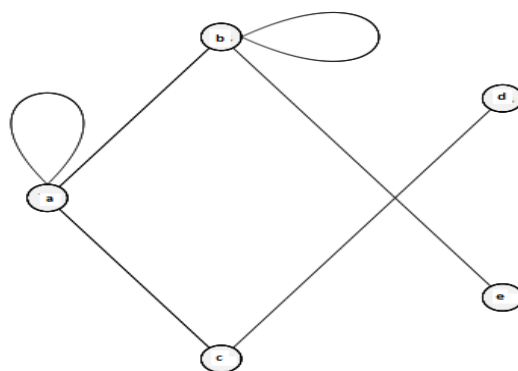


Figura 11.5: ejemplo 11.8

## 11.7 Grafos isomorfos

Isomorfismo significa “de igual forma”. Dos grafos son isomorfos si existe correspondencia uno a uno entre los nodos de ambos grafos y, además conservan la adyacencia tanto entre los nodos como en la dirección de los lados.

Dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos, si existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de los grafos, tal que todo par de vértices, que son adyacentes en un grafo, si y sólo si el correspondiente par de vértices son adyacentes en el otro grafo.

Es decir, sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafos simples. Se dice  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos, si hay una función biyectiva  $f$  de  $V_1$  a  $V_2$  con la propiedad de que  $a$  y  $b$  son adyacentes en  $G_1$  si y solo si  $f(a)$  y  $f(b)$  son adyacentes en  $G_2$ , para todo  $a$  y  $b$  en  $V_1$ . Tal función  $f$  es llamada un isomorfismo.

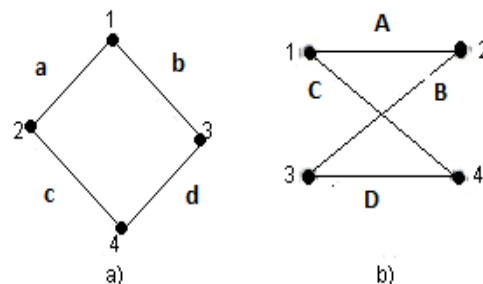


figura 11.6: Grafos del ejemplo 11.9

**Ejemplo 11.9:** de acuerdo con la definición de isomorfismo se podría decir que un par cualquiera de nodos que está unido por una arista debe tener los nodos correspondientes con el otro grafo también unidos por un eje, así mismo debe existir una correspondencia uno a uno entre los ejes. Por lo tanto, los grafos mostrados en la figura 11.6 (a) y (b) son isomorfos.

**Invariantes de grafos isomorfos.** Los invariantes de dos grafos simples isomorfos son: tener iguales, 1. El número de vértices y 2. El número de aristas; 3. La correspondencia entre los grados de los vértices. De tal manera ambos grafos, para alguna ordenación de vértices y lados, sus matrices de adyacencia son iguales.

A partir de sus invariantes (propiedad que los grafos simples deben cumplir) podremos mostrar cuando 2 grafos no son isomorfos o lo que es lo mismo, cuando 2 grafos no son iguales. De tal manera, si en alguna de esas cantidades difieren los grafos simples, se puede decir que no son isomorfos.

**Ejemplo 11.10:** determine si los grafos de la figura 11.7 son isomorfos, utilizando sus matrices de adyacencia.

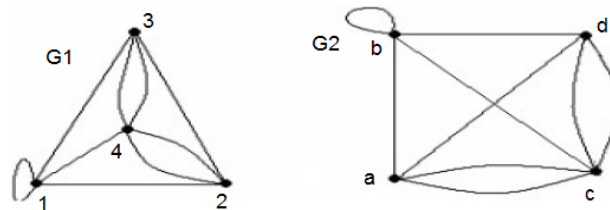


Figura 11.7: grafos del ejemplo 11.10

**Solución:**

$$\begin{array}{rcccl}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 G1: & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcccl}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 G2: & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & b & a & d & c
 \end{array}$$

Grafo	Numero vértices	Número aristas	Grado			
			1	2	3	4
G1	4	9	4	4	4	5

Ahora, con el otro grafo:

Grafo	Numero vértices	Número aristas	Grado			
			a	b	c	d
G2	4	9	4	4	4	5

Por lo tanto, G1 y G2 son isomorfos

## 11.8 Grafos Planos

### 11.8.1 Regiones de un grafo plano

Se dice que G es un grafo plano si puede representarse gráficamente sin la intersección de sus aristas. Es decir, un grafo es plano si puede dividirse en regiones no acotadas.

**Ejemplo 11.10:** el grafo de la figura 11.7a representa un grafo plano, porque puede graficarse sin que se crucen las aristas, como la figura 11.7b. Dichos grafos son iguales.



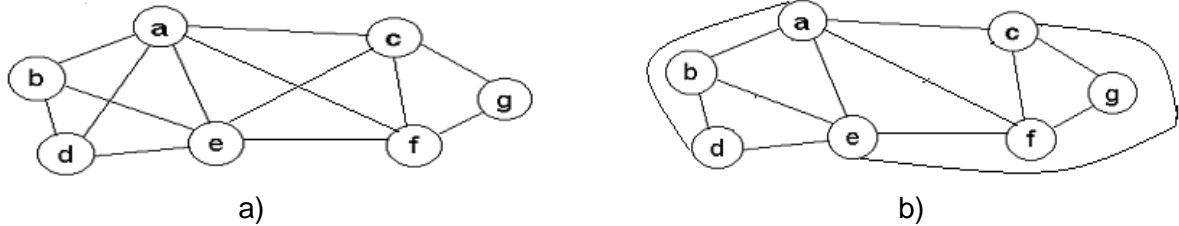


Figura 11.8: Ejemplo de la representación plana de un grafo

### 11.8.2 Fórmula de Euler

Sea  $G$  un grafo plano conexo con  $n$  vértices y  $e$  aristas, que se descompone en  $r$  regiones, entonces  $n - e + r = 2$

#### Demostración por inducción sobre $e$

Si  $e=0$ , entonces  $n=1$ ,  $r=1$  y se cumple que  $n-e+r=2$

Supongamos que el resultado es cierto para todos los grafos planos y conexos con  $e-1$  aristas, donde  $e \geq 1$ .

Sea  $G$  un grafo plano y conexo con  $e$  aristas. Si  $G$  no es árbol, entonces existe alguna arista  $e$  de un ciclo de  $G$ . Entonces,  $G-\{e\}$  es plano, conexo con  $n$  vértices,  $e-1$  aristas y  $r-1$  regiones.

La hipótesis de inducción asegura entonces que:

$$n - (e-1) + (r-1) = 2, \text{ es decir, } n - e + r = 2$$

**Corolario:** Si  $G=(V,E)$  es un grafo plano con  $e$  aristas y  $n$  vértices:  $e \leq 3n - 6$

**Ejemplo 11.12:** los grafos de la figura 11.9 no representan grafos planos. Compruébelo.

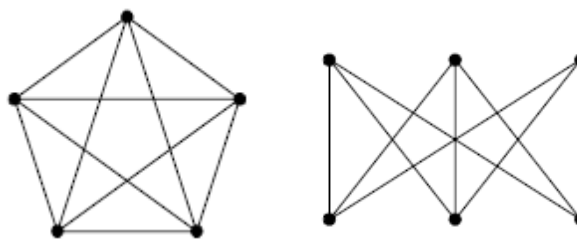


Figura 11.9: grafos del ejemplo 11.12

### 11.8.3 Grafos Homeomorfos

Dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  son homeomorfos si pueden reducirse a gráficas isomorfas realizando varias reducciones en serie. La reducción en serie se da cuando en una gráfica  $G$  las aristas  $(v, v_1)$  y  $(v, v_2)$  están en serie, y al hacer reducción en serie desaparece  $v$  y solo queda  $v_1, v_2$ . Los grafos homeomorfos permiten afirmar cuándo una gráfica no es plana. Por consiguiente, si ambos grafos  $G_1$  y  $G_2$  pueden obtenerse a partir de un mismo grafo por una sucesión de subdivisiones elementales de aristas o reducción en serie, se dice que los grafos son homeomorfos.

## 11.9 Grafos particulares

**Grafo simple** es un grafo que a lo sumo tiene una arista uniendo dos vértices cualesquiera y no tiene bucles. Es decir, que dos vértices específicos del grafo son unidos por una sola arista.

**Grafo conexo.** Es aquel grafo en que existe camino simple entre cualquier par de vértices. Es decir, desde cualquier vértice  $v$  tiene al menos un camino para llegar al vértice  $w$ . También llamado grafo conectado.

**Ejemplo 11.13:** en la figura 11.10a, el grafo es conexo, pues dados dos vértices cualesquiera  $v$  y  $w$  existe un camino de  $v$  a  $w$ .

**Grafo desconexo.** Un grafo  $G$  es desconexo, si algunos nodos no están conectados por caminos simples (figura 10.10b).

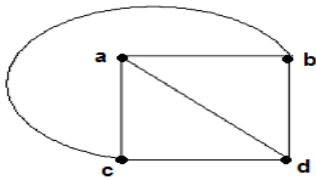


Figura 11.11: grafo regular y completo con cuatro vértices.

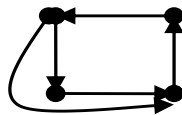
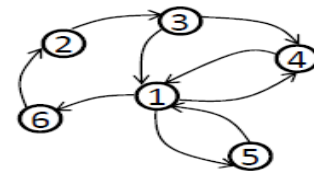
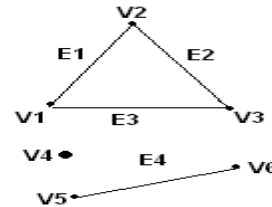


Figura 11.12: grafo fuertemente conexo

**Grafo Bipartito.** Un grafo  $G=(V,E)$  es bipartito, si el conjunto de vértices  $V$  puede separarse en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  disjuntos ( $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ) de modo que cada arista de  $E$  sea incidente con un vértice de  $V_1$  y con un vértice de  $V_2$ ; también puede decirse, cada vértice de  $V_1$  es adyacente con vértices de  $V_2$ , pero no hay adyacencias entre los vértices de cada subconjunto. Observe que un grafo es bipartito, si y solo si, no tiene ciclos con longitud impar. Por ejemplo, el grafo de la figura 11.13 presenta un grafo bipartito, donde  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $V_2 = \{v_4, v_5\}$  son conjuntos disjuntos donde cada arista es incidente en un vértice de  $V_1$  y un vértice de  $V_2$ ; es decir, cada vértice de  $V_1$  es adyacente con cada vértice de  $V_2$  y no tiene ciclos de longitud impar



a)



b)

**Grafo regular.** Es un grafo  $G$  conexo (figura 11.11) cuyos vértices tienen el mismo grado.

**Grafo completo.** Un grafo  $G$  dirigido o no dirigido (simple) es completo si cada vértice es adyacente a los demás vértices del grafo. Es decir, entre cada par de nodos  $v$  y  $w$  existe una arista de  $v$  hacia  $w$  y de  $w$  hacia  $v$  (forzosamente tendrán que cumplirse ambas condiciones). Todo grafo completo es regular; pero no el recíproco; por ejemplo, el grafo de la figura 11.11.

**Grafo fuertemente conexo.** Es un grafo dirigido que tiene camino entre cualquier par de vértices; por ejemplo, el grafo de la figura 11.12. Generan la relación de equivalencia. Mínimo deberá tener 2 caminos de un vértice a otro.

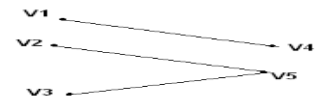


Figura 10.13: grafo bipartito

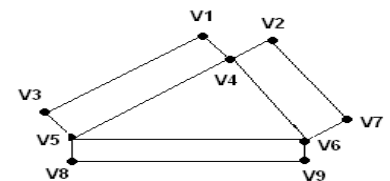


Figura 11.14: grafo no bipartito

**Grafo no bipartito.** Un grafo  $G = (V, E)$  es bipartito, si el conjunto de vértices  $V$  no se puede separar en dos o más subconjuntos. El grafo de la figura 11.14 no es bipartito porque no se puede separar en dos subconjuntos. Por ejemplo, el correspondiente a la figura 11.14 no es bipartito, tiene un ciclo de longitud impar ( $v_4-v_5-v_6-v_4$  que tiene longitud 3).

**Grafo Bipartito Completo.** El grafo bipartito completo con  $m$  y  $n$  vértices, denotada  $(K_{m, n})$ , es la gráfica simple cuyo conjunto de vértices esta dividido en conjuntos  $V_1$  con  $m$  vértices y  $V_2$  con  $n$  vértices, de los cuales existe una arista entre cada par de vértices  $v_1$  y  $v_2$ , donde  $v_1$  está en  $V_1$  y  $v_2$  están en  $V_2$ .

El grafo de la figura 11.15 es bipartito completo con dos y cuatro vértices ( $K_{2,4}$ ) donde  $V_1 = \{3, 5\}$  y  $V_2 = \{1, 2, 4, 6\}$ .

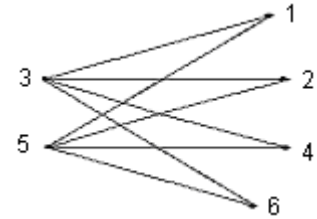


Figura 11.15: grafo bipartito completo

## 11.10 Terminología de grafos

### 11.10.1 Trayectoria o camino

Corresponde a los vértices por los cuales hay que pasar para ir desde un vértice  $w$  hacia un vértice  $v$ . Es decir, un camino entre dos vértices es una lista de vértices que están conectados por una arista del grafo.

Para que un camino o trayectoria exista es condición necesaria que las aristas sobre la trayectoria existan sobre el conjunto de aristas que definen el grafo.

**Ejemplo 10.14:** en la figura 10.16 el camino  $abdefgc$  es un camino que comienza en el vértice  $a$  y pasa por los vértices  $b, d, e, f, g$  y  $c$ .

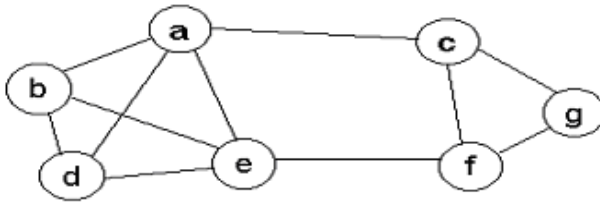


Figura 11.16: grafo del ejemplo 11.14

### 11.10.2 Camino Simple

Existe camino simple cuando todos sus vértices, excepto tal vez el primero y el último, son distintos.

**Ejemplo 11.15:** una trayectoria simple para ir desde el vértice  $b$  hasta el vértice  $g$  en el grafo de la figura 11.10, es:  $b-d-a-c-f-g$ . En la figura 11.16 la trayectoria  $b-e-d-a-e-c-f-g$  no es simple, porque se pasa dos veces por el nodo  $e$ .

### 11.10.3 Longitud de una trayectoria

La longitud de una trayectoria corresponde al número de lados de la trayectoria para ir de un vértice a otro.

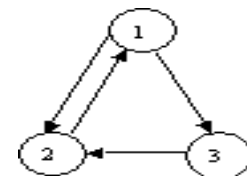


figura 11.17 del ejemplo 11.16

**Ejemplo 11.16:** según el grafo de la figura 11.17, para ir desde 3 hasta 1 el camino tiene longitud 2 (pasa por 2 aristas), pero de 1 hasta 3 tiene longitud 1 (sólo tiene 1 arista).

### 11.10.4 Ciclos

Un ciclo (también llamado circuito) es un camino simple de longitud mínimo 1 que empieza y termina en el mismo vértice; es decir, es una trayectoria simple en la cual el primero y el último vértice son los mismos.

**Ejemplo 11.17:** en el grafo de la figura 11.17, la trayectoria 1, 3, 2, 1 es un ciclo.

**Ejemplo 11.18:** en el grafo de la figura 11.16, la trayectoria a-d-b-e-f-g-c-a es un ciclo de longitud 7.

### 11.10.5 Distancia entre dos vértices

Sea  $G$  un grafo conexo. La distancia entre un par de vértices  $v$  y  $w$  es la longitud mínima de un camino entre esos vértices y se denota  $d(v, w)$ . De acá se deduce:

Sea  $G = (VE)$ , con  $v, w \in V$  y  $d(v, w) \geq 0$ , se tiene:

- $d(v, w) = 0$  si y solo si  $v = w$
- $d(v, w) = d(w, v)$
- $d(v, w) \leq d(v, x) + d(x, w)$

### 11.10.6 Máximo número de lados de un grafo

Si un grafo es dirigido el máximo número de lados es  $n(n-1)$  y para grafos no dirigidos  $n(n-1)/2$ .

**Ejemplo 10.19:** 1. ¿cuál es el máximo número de aristas de un grafo que tiene  $n$  vértices, ilustre la respuesta con dos ejemplos.

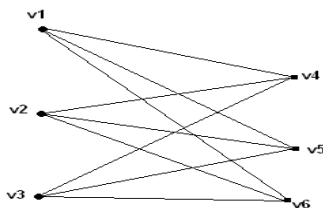


Figura 11.19: grafo bipartito de 6 vértices

con  $n$  vértices?; ilustre ejemplos.

El número máximo de

$$a \frac{n^2 - 1}{4} \text{ si } n \text{ es impar}$$

El máximo número de aristas del grafo dirigido de la figura 11.18 es:  $n(n-1)$  con  $n = 4 \Rightarrow$  aristas dirigidas  $= 4(4-1) = 12$

$$\text{Dada la figura 10.18, } n = 5 \Rightarrow \text{aristas} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(4)}{2} = 10$$

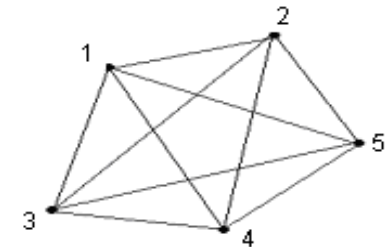


Figura 11.18: grafo completo

2. ¿Cuál es el máximo número de aristas de un grafo bipartito la respuesta con dos

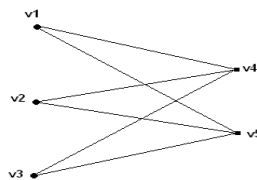


Figura 11.20: grafo bipartito de 5 vértices

$$\text{aristas es } \frac{n^2}{4}, \text{ si } n \text{ es par e igual}$$

Por ejemplo, la figura 11.19  $n = 6: \Rightarrow \text{aristasmax} = \frac{n^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$

En la figura 11.20,  $n = 5 \Rightarrow \text{aristasmax} = \frac{n^2 - 1}{4} = \frac{25 - 1}{4} = \frac{24}{4} = 6$

### 11.10.7 Punto de Articulación

Un punto de articulación de un grafo no dirigido  $G$  es un nodo  $v$  tal que cuando es eliminado de  $G$  (junto con las aristas incidentes en él) se divide un componente conexo del grafo en dos o más componentes conexos. El cálculo de los puntos de articulación se basa en un recorrido de profundidad.

**Ejemplo 11.20:** en la figura 11.21, los vértices  $a$  y  $c$  son puntos de articulación, pues si falla uno de estos, se pierde la comunicación entre otros nodos. Si este grafo representará una red de computadores, y si  $a$  o  $c$  no funcionaran esto causaría que ciertos computadores quedasen incomunicados.

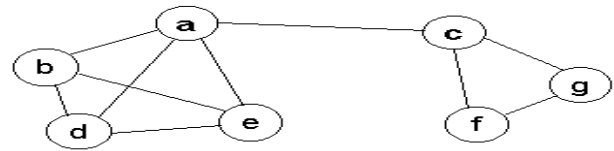


Figura 11.21: grafo ejemplo 11.20

**Ejemplo 11.21:** dibuje dos grafos con seis vértices que tengan exactamente a) dos puntos de articulación y b) cero puntos de articulación.

Solución:

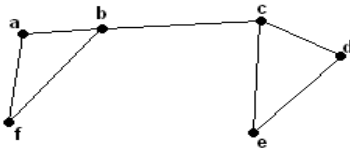


Figura 11.22: grafo con dos puntos de articulación

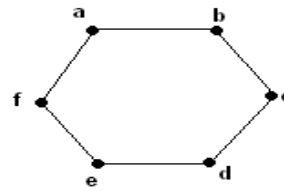


Figura 11.23: grafo con cero puntos de articulación

### 11.10.8 Potencias de la matriz

Sea  $MA$  la matriz de adyacencia de un grafo  $G$ . Las potencias de  $MA$  denotada  $MA^k$  contienen información acerca de los caminos para ir de un vértice del grafo  $G$  a otro vértice con determinada longitud igual a la potencia. Cada elemento  $MA_{ij}^k$  es igual al número de recorridos de longitud  $k$  entre dos vértices  $v_i$  y  $v_j$ .

Recordemos el concepto matemático del producto de matrices: sean  $A$  y  $B$  matrices de dimensiones  $m \times p$  y  $p \times n$ , respectivamente; entonces, la matriz producto  $C$  tendrá dimensiones  $m \times n$ ;  $MA^2$  se obtiene sumando los productos de las filas por las columnas de la matriz  $MA$ . Un elemento  $c_{ij}$  se obtiene así:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} * b_{k,j}$$

Para declarar la matriz en un lenguaje determinado utilice el tipo de dato entero y a partir de allí se determina la matriz potencia. Las instrucciones que determinarían los elementos de la matriz  $MA^2$  son:

```

Para i=1 hasta n
  Para j=1 hasta n
    S[i, j]=0
    Para k=1 hasta n
      S[i, j]=S[i, j]+MA[i, k]*MA[k, j]
    Fin para
    Muestre(S[i, j])
  Fin para
Fin para

```

**Ejemplo 11.22:** según el grafo de la figura 11.24, la matriz del ejemplo 11.25, determine las matrices potencia  $MA^2$  y  $MA^3$ .

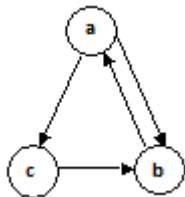


Figura 11.24

$$MA = \begin{array}{ccc|c} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & a \\ b & 1 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 1 & 0 & c \end{array}$$

Figura 11.25: matriz de adyacencia del grafo figura 11.24

$$MA^2 = \begin{array}{ccc|c} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & a \\ b & 0 & 1 & 1 & b \\ c & 1 & 0 & 0 & c \end{array}$$

Figura 11.26: matriz de adyacencia  $MA^2$  del grafo figura 11.24

$$MA^3 = \begin{array}{ccc|c} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & a \\ b & 1 & 1 & 0 & b \\ c & 0 & 1 & 1 & c \end{array}$$

Figura 11.27: matriz de adyacencia  $MA^3$  del grafo figura 11.24

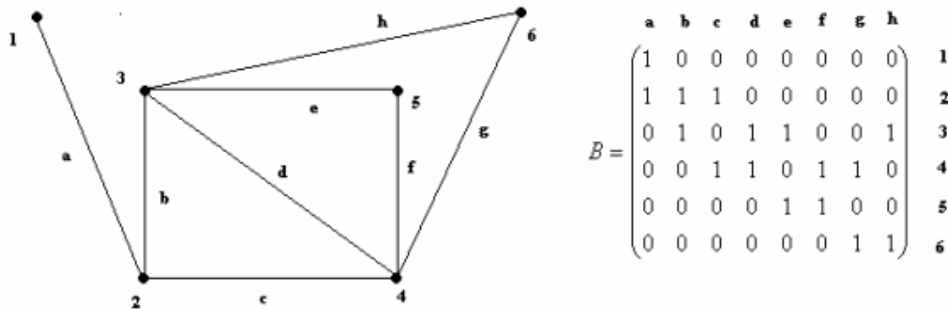
Según la matriz  $MA^2$ , el elemento  $MA_{ac}$  indica que para ir del vértice a al vértice c hay un solo camino de longitud 2 y no existe camino para ir de b hasta a.

De la matriz  $MA^3$  el elemento  $MA_{bc}$  se concluye que para ir del vértice b al vértice c hay un solo camino de longitud 3, pero no hay camino de longitud 3 para ir de c hasta a.

### 11.10.9 Matriz de Incidencia

Dado un grafo simple  $G = (V, E)$  con  $n=|V|$  vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y  $m=|E|$  aristas  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , su matriz de incidencia es la matriz  $B$  de orden  $n \times m$ ,  $B(G)=(b_{ij})$ , donde  $b_{ij}=1$  si  $v_i$  es incidente con  $e_j$  y  $b_{ij}=0$  en caso contrario.

Si la matriz de incidencia sólo contiene ceros y unos (matriz binaria). Como cada arista incide exactamente en dos vértices, cada columna tiene exactamente dos unos. La cantidad de unos que aparece en cada fila es igual al grado del vértice correspondiente. Una fila compuesta sólo por ceros corresponde a un vértice aislado.



### 11.11 Ciclos y Caminos Especiales

**Camino de Euler.** Se dice que un grafo  $G$  conexo tiene camino de Euleriano si su trayectoria incluye todas las aristas una y solo una vez.

**Ciclo o circuito de Euler.** Un grafo  $G$  conexo tiene al menos un ciclo Euler si se recorren todas las aristas del grafo  $G$  exactamente una vez, excepto la arista inicial y la final (que son las mismas). Es decir, un grafo  $G$  tiene un circuito de Euler, si puede pasar por todas las aristas sin repetir arista.

**Teorema 11.1:** Un grafo  $G$  tiene un ciclo de Euler, si y solo si  $G$  es un grafo conexo y cada vértice tiene grado par.

**Teorema 11.2:** Si  $G$  es un grafo conexo que tiene un par de vértices de grado impar, entonces no puede existir un ciclo de Euler en  $G$ , pero si, camino de Euler.

**Camino de Hamilton.** Es aquella trayectoria que contiene cada vértice que lo compone una y solo una vez.

**Ciclo de Hamilton.** Un ciclo de una gráfica  $G$  es Hamiltoniano, si cada vértice del grafo  $G$  conexo aparece exactamente una vez, excepto por el vértice inicial y final (que aparece dos veces).

**Teorema 11.3** (también llamado teorema de ORE, que hace memoria a Oystein Ore en 1960). Un grafo conexo  $G$  de  $n$  vértices para  $n \geq 3$  tal que  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$  siendo  $u$  y  $v$  cualquier par de vértices no adyacentes del grafo  $G$ , entonces contiene un ciclo Hamiltoniano.

**Teorema 11.4:** (también llamado teorema de DIRAC, que memoriza a Gabriel A. Dirac en 1952, es condición suficiente) Un grafo conexo  $G$  de  $n$  vértices con  $n \geq 3$  tal que todos los vértices de  $G$  tienen grado mayor o igual que  $n/2$  contiene un ciclo Hamiltoniano.

El Teorema de Dirac dice lo siguiente: Sea un grafo  $G$ , con sus vértices y aristas, conexo, con la cantidad total de vértices  $n$  mayor o igual a 3, dicho grafo debe cumplir todas estas características para poder continuar aplicando el Teorema. Por lo tanto, si el grado de cada vértice de

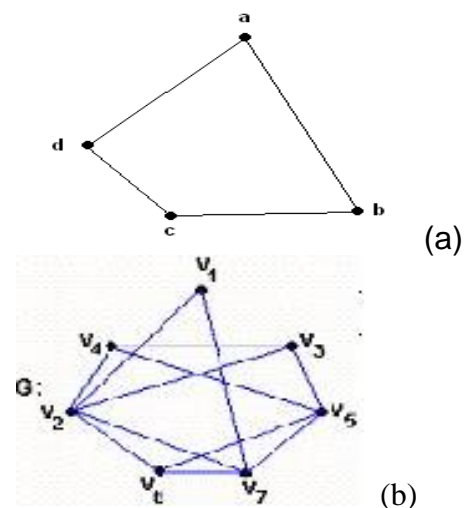


Figura 11.28: ejemplo 11.22

este grafo es mayor o igual que la mitad del número total de vértices de  $G$ , entonces este grafo es **Hamiltoniano**. El recíproco no siempre se cumple.

**Ejemplo 11.23:** el grafo  $G_3$  de la figura 11.28 literal (a) tiene ciclo Hamiltoniano, pero el grafo de la figura 11.28 literal (b) No tiene ciclo Hamiltoniano, porque por ejemplo  $\deg(v_1)$  no es mayor que 4

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 10.1:** determine si los grafos  $G$  y  $H$  de la figura 10.29 son isomorfos.

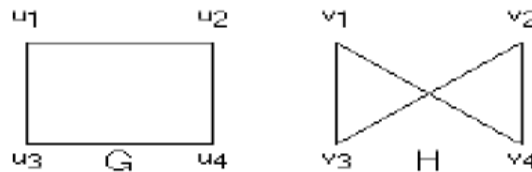


Figura 11.29: ejemplo de grafos isomorfos problema 11.1

Solución:

Los grafos son isomorfos, pues un posible isomorfismo es:

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_4, f(u_3) = v_3, f(u_4) = v_2$$

**Problema 11.2:** qué tipo de camino y de ciclo tiene el grafo de la figura 11.30?

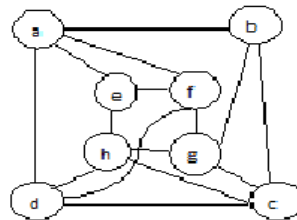


Figura 11.30: grafo del problema 11.2

El grafo de la figura 11.30 no tiene ciclo de Euler, pero sí camino de Euler, porque tiene un solo par de nodos de grado impar; además tiene ciclo y camino de Hamilton, porque desde cualquier par de nodos no adyacentes, la suma de sus grados es mayor o igual que la mitad de cantidad de vértice.

**Problema 11.3:** determine, si los grafos  $G_1$  y  $G_2$  de las figuras 11.31, 11.32, 11.33 son isomorfos; cuál o cuáles tienen camino y/o ciclo de Euler o de Hamilton.

Solución:

Los grafos de la figura 11.31

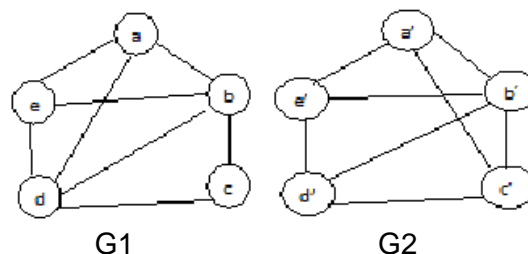




figura 11.31: grafos del problema 11.3

- no son isomorfos, porque falla la invariante del grado de los vértices, así: hay 2 nodos de grado 4 en el grafo G1 y en el G2 solo hay un vértice con este grado; en el grafo G2 hay un vértice de grado 2; en cambio en el grafo G1 ninguno tiene ese grado.
- G1 tiene ciclo y camino de Hamilton, ya que se pueden recorrer todos los vértices, sin repetir vértice. Además tiene camino de Euler, porque tiene exactamente 2 vértices de grado impar y permite recorrer todas las aristas sin repetir arista, basta con partir desde un vértice de grado impar hasta el otro vértice de grado impar: parte de a y llegue e. Pero no tiene ciclo de Euler ya que todos sus nodos no son de grado par.

Los grafos de la figura 11.32 se tiene

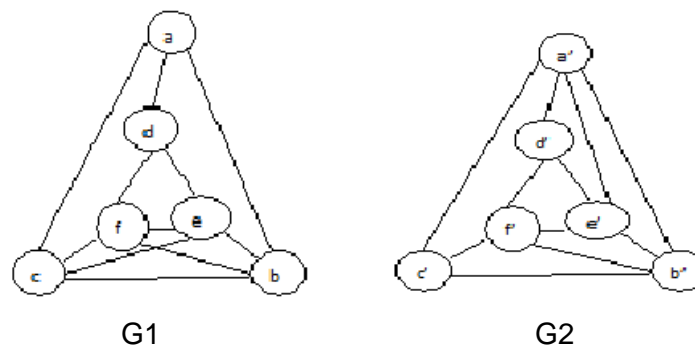


Figura 11.32: grafos del problema 11.3

- Los grafos G1 y G2 son isomorfos. Veamos un posible isomorfismo:

$$f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c', f(d) = d', f(e) = f', f(f) = e', f(g) = g', f(h) = h'$$

- G1 y G2 tienen ciclo de Hamilton (porque desde cualquier par de vértices no adyacentes la suma de sus grados es mayor o igual que la cantidad de vértices del grafo) y por ende camino de Hamilton; tiene además, camino de Euler (porque tiene exactamente un par de vértices de grado impar), pero no tienen ciclo de Euler (algunos vértices tienen grado impar).

Los grafos de la figura 11.33 se puede afirmar que

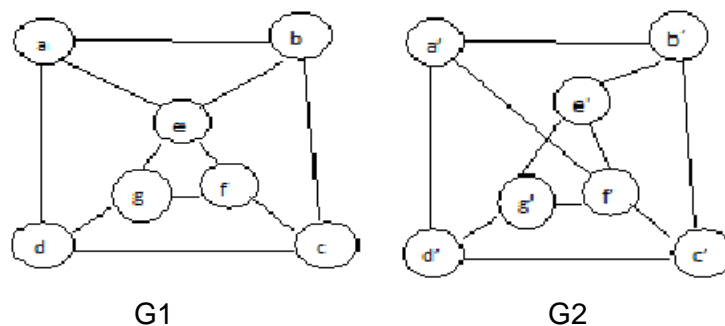


figura 11.33: grafos del problema 11.3

- Los grafos G1 y G2 son isomorfos porque tienen la misma cantidad de aristas y de vértices, con su respectivo grado.

- $G_1$  y  $G_2$  tienen ciclo y camino de Hamilton, no tienen ni ciclo ni camino de Euler.

**Problema 11.4:** determine si el grafo de la figura 11.34 es plano. Si lo es, dibújelo de nuevo sin que se crucen sus aristas.

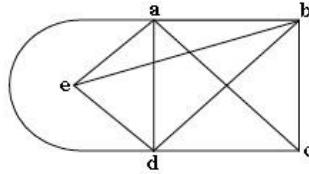


Figura 11.34: grafo no plano del problema 11.4

Efectivamente, luego de analizar detenidamente la gráfica se observa que se puede trazar sin que se crucen las aristas, quedando el grafo (figura 11.35):

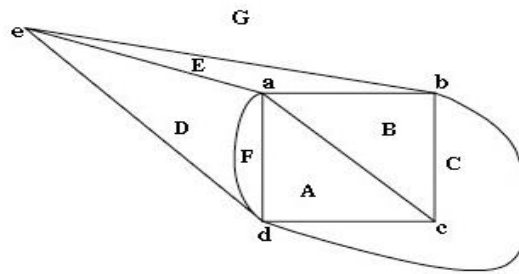


Figura 11.35: ejemplo de grafo plano

Ahora vamos a aplicar la fórmula para hacer la verificación correspondiente.

Gráfica plana conexa con  $r = 7$  regiones (A, B, C, D, E, F y cara externa),  $e = 10$  aristas y  $v = 5$  vértices; Por lo tanto,  $n - e + r = 2$ ; es decir, la gráfica es plana.

**Problema 11.4:** para los grafos de las figuras 11.36 y 11.37, identifique las gráficas planas.

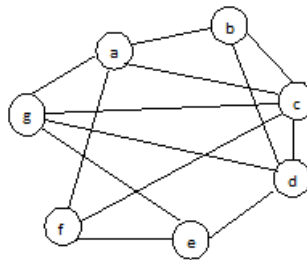


Figura 11.36: grafo del problema 11.4

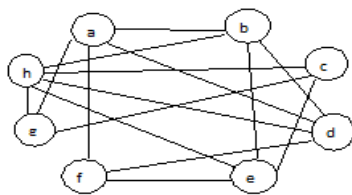


Figura 11.37: grafo del problema 11.4

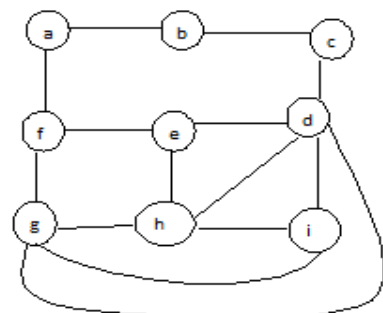


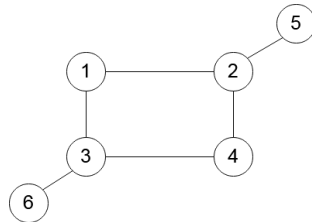
Figura 11.38: grafo del problema 11.5

Las gráficas de las figuras 11.36 y 11.37 no son planas, porque siempre quedan 2 vértices que al conectarse se cruzan otras aristas.

**Problema 11.5:** dibuje un grafo que tenga las siguientes características; grafo plano conexo con 9 vértices y con grados 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 y 5. En efecto, El grafo de la figura 10.38 tiene 14 aristas, 6 caras. En efecto, cumple con las condiciones de una gráfica plana ( $7\text{caras}-14\text{aristas}+9\text{vertices}=2$ ).

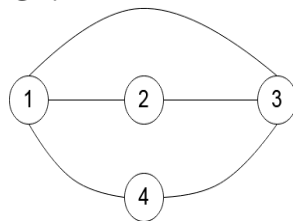
## PROBLEMAS RESUELTOS

**G1:**



Propiedades	si	no	En caso afirmativo explicar porque
Camino de Euler		X	
Ciclo de Euler		X	
Camino de Hamilton		X	
Ciclo de Hamilton		X	
¿Es plano?	X		
¿es bipartito?	X		$V1=\{6,1,4,5\}$ y $V2=\{2,3\}$
¿tiene puntos de articulación?	X		Posee dos puntos de articulación 3 y el 2: si se elimina el 3 el 6 queda desconectado, si se elimina el 2 el 5 queda desconectado.

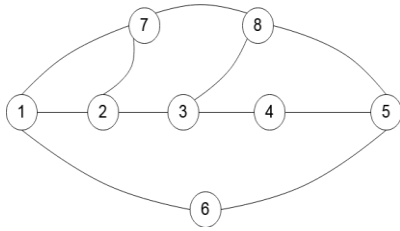
**G2:**



Propiedades	si	no	En caso afirmativo explicar porque
Camino de Euler	X		1-2-3-1-4-3
Ciclo de Euler		X	
Camino de Hamilton	X		1-2-3-4
Ciclo de Hamilton	X		1-2-3-4-1
¿G2 es plano?	X		
¿es bipartito?		X	$V1\{\}$ $V2\{\}$
¿tiene puntos de articulación?		x	

**G3:**

Propiedades	si	no	En caso afirmativo explicar porque
Camino de Euler		X	
Ciclo de Euler		X	
Camino de	X		7-8-5-4-3-6-1-2

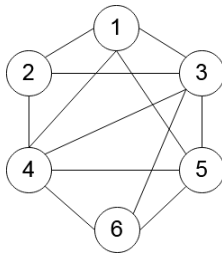


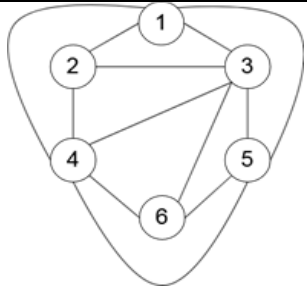
Hamilton			
Ciclo de Hamilton	X		7-2-1-6-5-4-3-8-7
¿Es plano?	X		Regiones $r=5$
¿es bipartito?		X	Tiene al menos un ciclo de longitud impar 1-2-7-1.
¿tiene puntos de articulación?		X	

**G4:**

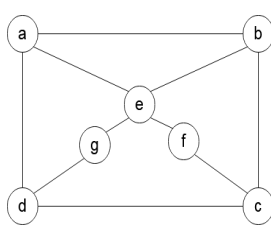
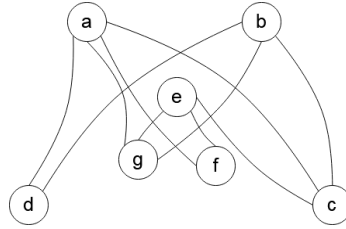
Propiedades	si	no	En caso afirmativo explicar porque
Camino de Euler		X	
Ciclo de Euler		X	
Camino de Hamilton	X		8-7-2-1-6-5-4-3
Ciclo de Hamilton	x		3-4-1-6-5-8-7-2-3
¿Es plano?	X		
¿es bipartito?	X		$V1=\{2,4,8,6\}$ $V2=\{1,3,5,7\}$
¿tiene puntos de articulación?		x	

**G5:**

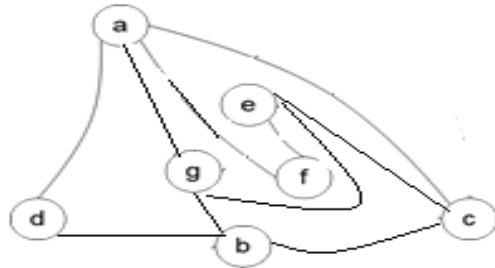


Propiedades	si	no	En caso afirmativo explicar porque
Camino de Euler		x	
Ciclo de Euler		x	
Camino de Hamilton	X		1-2-4-6-5-3
Ciclo de Hamilton	X		1-2-4-6-5-3-1
¿G5 es plano?	X		 <p>8 regiones. Cumple con la fórmula de Euler: <math>6-12+8=2</math></p>
¿es bipartito?		X	$V1=\{\}$ y $V2=\{\}$
¿tiene puntos de articulación?		X	

**Son isomorfos:**

**G6****G7**

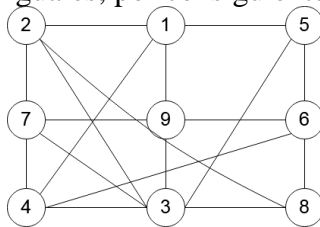
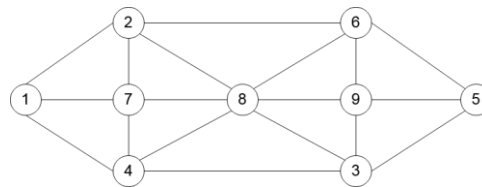
Según G6 y G7 rellene la siguiente tabla

Propiedades	Si	No	En caso afirmativo explicar porque
Camino de Euler		X	
Ciclo de Euler		X	
Camino de Hamilton	X		1-2-4-6-5-3
Ciclo de Hamilton	X		1-2-4-6-5-3-1
¿G7 es plano?	X		 <p>6 regiones; lo cual implica que cumple la fórmula de Euler: <math>7-10+5=2</math></p>
¿G7 es bipartito?	X		$V1=\{a, b, e\}$ y $V2=\{g, d, f, c\}$
¿G7 tiene puntos de articulación?		X	

- 1) ¿G6 es bipartito? Si  $v1=\{a, b, e\}$   $v2=\{g, d, f, c\}$
- 2) ¿G6 es plano? no
- 3) ¿G6 tiene ciclo de Hamilton? No
- 4) ¿G6 y G7 son isomorfos? Si. Veamos:

Grafo	N	A	Grado						
			a	b	c	d	e	F	g
G6	7	10	3	3	3	3	4	2	2
G7	7	10	4	3	3	2	3	2	3

G6 y G7 tienen correspondencia 1-1 en sus grados; las cantidades de vértices y las de aristas son iguales; por consiguiente, son isomorfos

**G8****G9:**

Según G8 y G9 rellene la siguiente tabla

- 1) ¿G8 es bipartito? No
- 2) ¿G8 es plano? No
- 3) ¿G8 tiene ciclo de Hamilton? Si: 2-7-4-3-9-1-5-6-8-2
- 4) ¿G8 y G9 son isomorfos? Si. Efectivamente:

Grafo	N	A	Grado								
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
G8	9	18	4	4	6	4	3	4	4	3	4
G9	9	18	3	4	4	4	3	4	4	6	4

Hay correspondencia 1-1 entre los grados de los nodos; las cantidades de vértices y las de aristas son iguales. Por lo tanto, G8 y G9 son isomorfos.

### AUTOEVALUACION 11

1. Del grafico cuya matriz de adyacencia está dado por  $M_A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  puede decirse que

- A) es un grafo regular                      B) es un grafo simple y conexo  
C) es un grafo que tiene un camino de Euler      D) es un grafo bipartito

2. El grafo que cumple las condiciones dadas en la siguiente tabla. Entonces el grafo es

Grado	A	B	C	D	E	F
Entrada	3	2	1	3	3	1
Salida	1	2	3	2	3	2

TABLA 1

- A) Plano, con 8 regiones y fuertemente conexo  
B) plano, con 8 regiones, pero no fuertemente conexo  
C) plano, con 9 regiones y fuertemente conexo  
D) plano, con 9 regiones, pero no fuertemente Conexo

### TALLER 11

1. Dibuje un grafo de 7 vértices con:
  - a. 0 puntos de articulación
  - b. 1 punto de articulación
  - c. 2 puntos de articulación
  - d. 3 puntos de articulación
  - e. 4 puntos de articulación
2. ¿El grafo de la figura 11.39 es bipartito?
3. Un grafo G es bipartito si y solo si todos sus ciclos tienen longitud par. En caso tal que la afirmación sea cierta ilústrela con un ejemplo.
4. Un grafo conexo G que tenga exactamente dos vértices v y w de grado impar, tiene un camino entre v y w. En caso tal que la afirmación sea cierta ilústrela con un ejemplo.

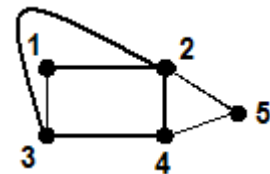


figura 11.39: grafo del ejercicio 2

5. Si una gráfica  $G$  tiene más de dos vértices de grado impar, entonces ¿ $G$  no puede tener un camino de Euler?. Ilustre su afirmación con un ejemplo.
6. Si  $G$  es un grafo conexo que tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces tiene un camino Euler (basta con partir de vértice de grado impar para llegar al otro vértice de grado impar). Ilustre la afirmación con un ejemplo usando grafos de 5 y de 6 vértices.
7. Complete los enunciados de los numerales 11.1 a 11.5 , respecto a la figura 11.39:
- 7.1 Un grafo  $G=(V,E)$  es bipartito si el conjunto de vértices  $V$  se puede separar en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  disjuntos ( $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ) de modo que cada vértice  $V_1$  sea adyacente con vértices de  $V_2$ . La gráfica, ¿es bipartita? \_\_\_\_\_. En caso afirmativo, ¿cuáles son los vértices?  $V_1=\{ \quad \}$  y  $V_2=\{ \quad \}$
- 7.2 Un ciclo de una gráfica  $G$  es Hamiltoniano, si en cada vértice del grafo  $G$  aparece exactamente una vez, excepto el vértice inicial y el final (que aparece dos veces) y por lo tanto, cualquier par de vértices que no sea adyacente, la suma de sus grados es mayor o igual que  $n$  ( $n$ : número de vértices). El grafo ¿tiene ciclo Hamiltoniano? \_\_\_\_\_. En caso afirmativo, ¿cuántos? \_\_\_\_ ¿cuáles? \_\_\_\_\_
- 7.3 Un ciclo de Euler en un grafo  $G$  existe, si  $G$  es conexo e incluye todas las aristas y cada vértice tiene grado par. El grafo ¿ciclo de Euler? \_\_\_\_\_. En caso afirmativo, ¿cuántos? \_\_\_\_ ¿cuáles? \_\_\_\_\_
- 7.4 Un punto de articulación de un grafo no dirigido  $G$  es un nodo  $v$  tal que cuando es eliminado de  $G$  (junto con las aristas incidentes en el) se divide un componente conexo del grafo en dos o más componentes conexos. El grafo ¿tiene puntos de articulación? \_\_\_\_\_. En caso afirmativo, ¿cuántos? \_\_\_\_ ¿cuáles vértices? \_\_\_\_\_
8. Un grafo  $G$  con un punto de articulación ¿tiene ciclo de Euler? \_\_\_\_\_. Se puede afirmar que todo ciclo Euleriano no tiene punto de articulación? \_\_\_\_\_. Ilústrelo gráficamente.
9. Dibuje dos grafos que no sean Eulerianos.

El grafo de la figura 11.40	SI	NO	Complete
es bipartito completo?			$V_1=\{ \quad \}$ $V_2=\{ \quad \}$
Tiene punto de articulación?			Cuál? _____

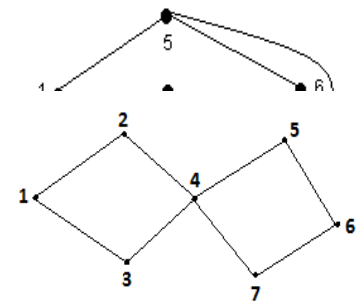


figura 11.41

10. Marque con X la respuesta correcta y en caso afirmativo complete el resto. Los grafos de las figuras 11.40 y 11.41 cumplen lo siguiente:

El grafo de la figura 11.41	SI	NO	COMPLETE
Tiene ciclo de Euler?			Recorrido: 11.
Tiene ciclo de Hamilton?			Recorrido: _____

Según los grafos de las figuras 11.42 y 11.43, complete la

tabla e la figura 11.44 cada uno de los enunciados:

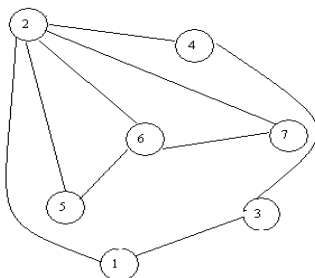


Figura 11.42: Grafo 3

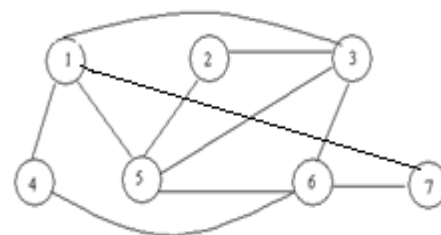


Figura 11.43: Grafo 4

	SI	NO	Complete
<b>Puede partir de una ciudad, ir por todas las carreteras, sin repetir carretera y regresar a la ciudad de partida?</b>			<b>Recorrido:</b>
Puede partir de una ciudad, ir por todas las ciudades, sin repetir ciudad y regresar a la ciudad de partida?			Recorrido:
Puede partir de una ciudad, ir por todas las carreteras, sin repetir carretera?			Recorrido:
Puede partir de una ciudad, ir por todas las ciudades, sin repetir ciudad?			Recorrido:

Figura 11.44: tabla problema 11

- 11.1 Marque con X la respuesta correcta y en caso afirmativo complete el resto, teniendo en cuenta el grafo 3, que representa la internet de una empresa donde cada nodo corresponde a las oficinas de un departamento. Puede afirmarse según la figura 11.42
- 11.2 En el grafo 4, cada arista corresponde a las carreteras para ir de una ciudad a otra. Puede afirmarse según la figura 11.43

12. Los dígrafos DG1 y DG2, DG3 y DG4, DG5 y DG6 representan grafos de la figura 11.45 que son isomorfos? Dichos grafos son planos?. Compruebe sus respuestas llenando la

Tabla de la figura 11.46 con X según el grafo, siendo N: número de vértices y A: número de aristas, R: número de regiones (en caso de ser plano)

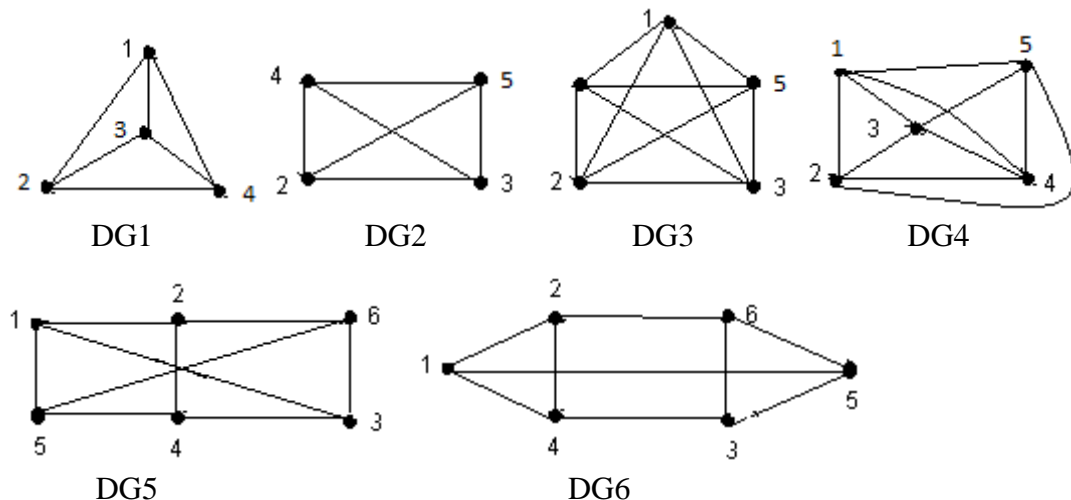




Figura 11.45: problema 13

GRAFO	N	A	R	Grado					
				1	2	3	4	5	6
DG1									
DG2									
DG3									
DG4									
DG5									
DG6									

Figura 11.46: Tabla problema 13

13. Llene la tabla de la figura 11.47 según los grafos de la figura 11.48.

	SI	NO	RESULTADO afirmativo
CAMINO DE EULER DG8			Camino: _____
CICLO DE EULER DG8 y DG9			Ciclo: _____
CAMINO DE HAMILTON DG7, DG8			Camino: _____
CICLO DE HAMILTON DG8			Ciclo: _____
DG7 y DG8 SON ISOMORFOS			Por qué no? _____

Figura 11.47: Tabla problema 14

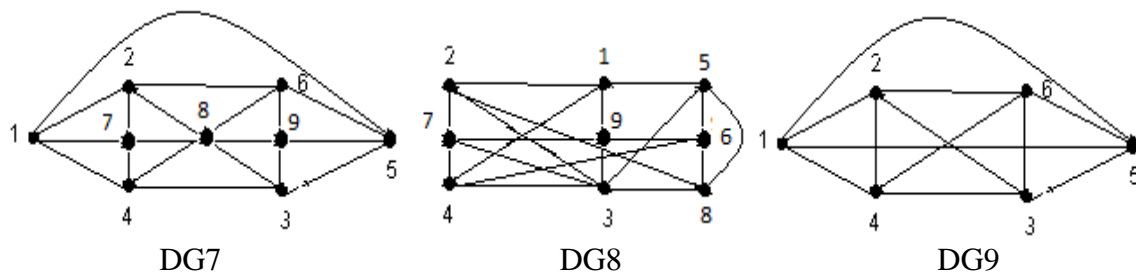


Figura 11.48: grafos del problema 14

14. Llene la tabla de la figura 11.49 haciendo referencia a los dígrafos de la figura 11.48

	SI	NO	RESULTADO afirmativo
CAMINO DE EULER			Camino: _____
CICLO DE EULER			Ciclo: _____
CAMINO DE HAMILTON			Camino: _____
CICLO DE HAMILTON			Ciclo: _____

Figura 11.49: Tabla problema 15

15. Según las tablas de 1 a 8 de la figura 11.50, dibuje los correspondientes grafos a dichas tablas y determine si son o no grafos planos.

DG10	1	2	3
Grado de entrada	2	3	0

Grado de salida	2	1	2
-----------------	---	---	---

Tabla 1: Problema 15

DG11	1	2	3
Grado de entrada	2	1	2
Grado de salida	0	2	3

Tabla 2: Problema 15

DG12	1	2	3
Grado de entrada	2	1	2
Grado de salida	2	1	2

Tabla 3: Problema 15

DG13	1	2	3	4
Grado de entrada	1	2	1	0
Grado de salida	2	1	0	1

Tabla 4: Problema 15

DG14	1	2	3	4
Grado de entrada	3	2	2	1
Grado de salida	2	1	3	2

Tabla 5: Problema 15

DG15	1	2	3	4
Grado de entrada	2	3	2	2
Grado de salida	2	1	4	2

Tabla 6: Problema 15

DG16	1	2	3	4
Grado de entrada	3	2	2	1
Grado de salida	3	2	1	2

Tabla 7: Problema 15

DG17	1	2	3	4	5	6
Grado de entrada	3	2	1	3	2	1
Grado de salida	1	2	3	2	2	2

Tabla 8: Problema 15

Figura 11.50: tablas del problema 16

16. Haga un programa que halle la matriz potencia (definida por el usuario), que permita calcular la cantidad de caminos definida por el usuario de cierta longitud, para ir de un vértice a otro.

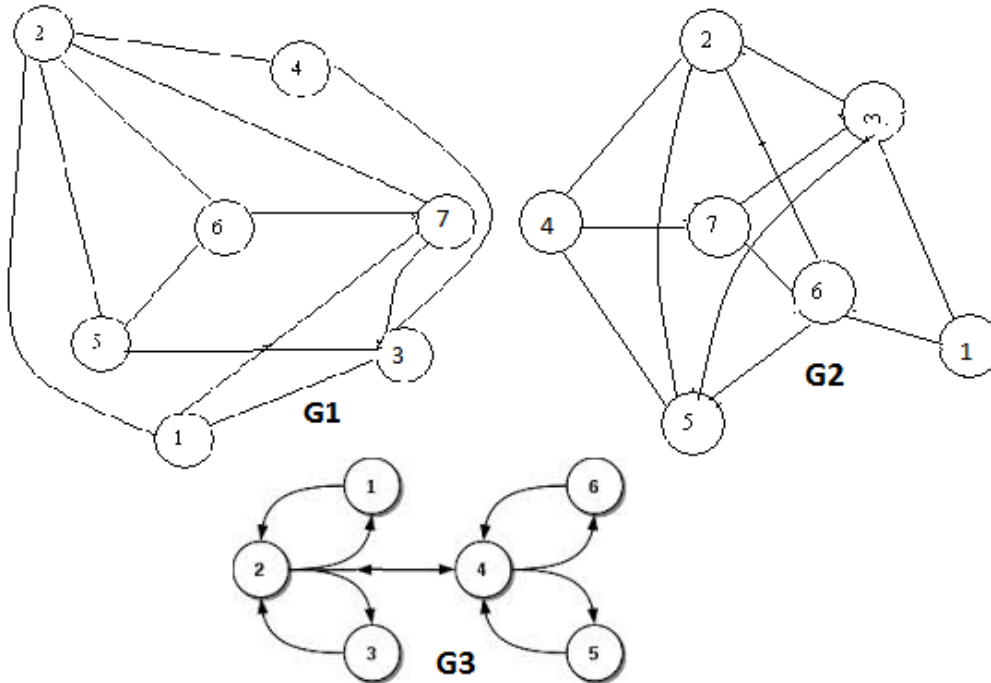
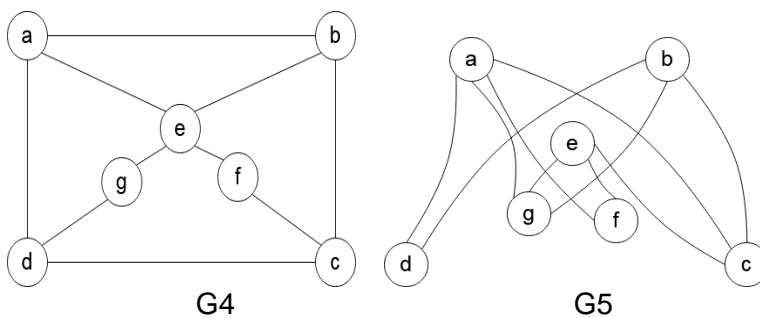


Figura 12:

	SI	NO	SEGÚN RESULTADO
G2 ES BIPARTITO?			Si: $V1=\{ \quad \}$ y $V2=\{ \quad \}$ No: Por qué? _____
G1 TIENE CICLO DE HAMILTON?			Ciclo: _____
G2 TIENE CAMINO DE EULER?			Camino: _____
G1 y G2 SON ISOMORFOS?			Por qué no? _____
G3 ES FUERTEMENTE CONEXO?			Por qué no? _____



17. Las siguientes tablas con grados de vértices representan grafos simples Grafo 1 y Grafo 2. Complete con los datos requeridos las siguientes tablas:

Grafo	Grado							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Grafo 1	2	2	2	4	3	3	2	2

Grafo 2	4	4	4	4	4	4	4	4
---------	---	---	---	---	---	---	---	---

Figura 13: Tabla grados problema 17

	SI	NO	SEGÚN RESULTADO
Grafo 2 es bipartito?			Si: $V1=\{ \quad \}$ y $V2=\{ \quad \}$ No: Por qué? _____
Grafo 1 tiene ciclo de hamilton?			Ciclo: _____
Grafo 2 tiene ciclo de euler?			Camino: _____
Grafo 1 es plano ?			Regiones= _____
Grafo 2 es plano ?			Regiones= _____