

---

## Capítulo 10: RELACIONES DE RECURRENCIA

### 10.1 Introducción

En este capítulo se estudiarán los algoritmos recursivos y las relaciones de recurrencia que tienen una estrecha relación con la inducción matemática, porque en los tres casos se asumen conocidos los casos o valores anteriores (valores de arranque), que llamaremos “condiciones iniciales”. Por ejemplo, una relación de recurrencia utiliza valores anteriores de una sucesión para calcular el valor actual o valor deseado. En un algoritmo recursivo se utiliza instancias menores de la entrada actual para calcular ésta.

En conclusión cualquiera de los temas en mención requieren de ciertas condiciones iniciales para lograr un valor o valores determinados u obtener una sucesión.

Los conjuntos tienen otra representación en las computadoras, además de vectores, tomados como una **sucesión**; es decir, como una lista con un orden particular. Basta con buscar la regla que deben cumplir sus elementos y que se llamará “**función característica**”.



Kurt Gödel (1906-1978)

Kurt Gödel fue un lógico, matemático y filósofo austriaco-estadounidense. Nació un 28 de abril, 1906 Austria-Hungría, ahora República Checa y murió el 14 de enero de 1978 Princeton, New Jersey. En la obra de Gödel pueden rastrearse los inicios de la teoría de modelos y la teoría de la recursividad. El más destacado de sus teoremas es el de la incompletitud que establece que todo artificio matemático basado en su propia definición auto-consistente lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), tiene proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema desarrolló una técnica denominada ahora como numeración de Gödel, el cual codifica expresiones formales como números naturales.

En el transcurso del ese año 1933 desarrolló ideas sobre la computación y la función recursiva y sobre el concepto de verdad. Posteriormente, este trabajo se desarrolló en la teoría de los números, empleando la numeración de Gödel.

Las funciones recursivas son una clase de funciones de los números naturales en los números naturales que son computables en un sentido intuitivo. De hecho, en teoría de la computación se demuestra que las funciones recursivas son precisamente las funciones que pueden ser calculadas con el formalismo de cómputo más general conocido como lo son las máquinas de Turing.

## 10.2 Progresiones

Progresión es un término que procede del vocablo latino progressio. Intuitivamente se emplea para nombrar al avance o el desarrollo de algo. La noción puede vincularse al verbo **proseguir**, que consiste en mantener o prolongar aquello que ya se ha comenzado. Puede asociarse a progreso o secuencia. El concepto de progresión también se utiliza en las matemáticas para nombrar una sucesión de términos o números vinculados por cierta ley. En conclusión, se denomina progresión a una sucesión o serie de números o de términos algebraicos que pueden seguir un modelo determinado. Básicamente puede conocerse 2 tipos de progresiones: progresión aritmética y progresión geométrica.

### 10.2.1 Progresión aritmética

Una progresión aritmética es aquella progresión cuyos términos pueden obtenerse mediante sumas (o restas) en la que resultados tienen un valor constante llamado “diferencia”.

Diferencia,  $d = a_n - a_{n-1}$ ;

Término genérico,  $a_n = a_1 + (n-1)d$

Sumatoria,  $S_n = (n/2)(2a_1 + (n-1)d)$

### 10.2.2 Progresión geométrica

Una progresión geométrica es la secuencia cuyos elementos pueden obtenerse a partir de la multiplicación (o división) que como resultado se obtiene un valor constante denominado “razón”.

Razón,  $r = a_n / a_{n-1}$ ;

Término genérico  $a_n = a_1 * r^{n-1}$ ;

Si la sucesión es alterna  $+ - + - \dots$ ,  $a_n = a_1 * r^{n-1}$  o si es alterna  $- + - + \dots$ ,  $a_n = a_1 * r^n$

Sumatoria,  $S_n = a_1 (1 - r^n) / (1 - r)$

Por lo tanto, si la razón es negativa, entonces la progresión tomará una de las formas anteriores.

PROGRESION ARITMETICA	PROGRESION GEOMETRICA
Término genérico: $a_n = a_1 + (n-1)d$ , de donde $d(\text{diferencia}) = a_n - a_{n-1}$	Término genérico: $a_n = a_1 r^{n-1}$ , de donde $r(\text{razón}) = a_n / a_{n-1}$
Sumatoria de los n términos: $S_n = (n/2)(2a_1 + (n-1)d)$	Sumatoria de los n términos: $\rightarrow S_n = a_1 (1 - r^n) / (1 - r)$ Si la sucesión es alterna: $+ - + - \dots$ , $\rightarrow a_n = a_1 * r^{n-1}$ o si es $- + - + \dots$ , $\rightarrow a_n = a_1 * r^n$

Tabla 10.1

**Ejemplo 9.1:** A) identifique cada una de las sucesiones como sucesión, progresión aritmética o progresión geométrica. Si son progresiones:

- 1) 3, 7, 11, ... Progresión aritmética
- 2) 1, 1, 2, 3, 5, ... sucesión (conocida como la serie fibonacci)
- 3) 1, 4, 16, 64, ... Progresión geométrica
- 4) -1, 3, -9, 27, ... ¿cuál es?

**B)** encuentre el término genérico y la fórmula de la sumatoria de cada una de las siguientes sumatorias:

- 1) Para la sucesión 5, 2, -1, -4, -7, -10, ...

$$d = 2 - 5 = -4 - (-1) = -3$$

**d = -3**  $\Rightarrow$  La sucesión es aritmética

El término genérico es:  $8 - 3n$ . Veamos,

$$a_1 = 5$$

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-3) = 5 - 3n + 3 = \mathbf{8 - 3n}$$

La sumatoria de los términos es  $S_n$ : \_\_\_\_\_

$$S_n = (n/2)(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$S_n = (n(2(5) + (n-1)(-3)))/2$$

$$S_n = (n(10 - 3n + 3))/2$$

$$\mathbf{S_n = (n(13 - 3n))/2}$$

- 2) Para la sucesión 1, -1/3, 1/9, -1/27, ...

$$r = (-1/3) / 1 = (-1/9) / (-1/3) = -1/3$$

$\Rightarrow$  **La sucesión es** geométrica

$$\text{Su término genérico es: } a_n = a_1 \cdot R^{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{Su término de la sumatoria de los términos es: } 1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) / \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\frac{4}{3}}$$

### 9.2.3 Progresión cuadrática

Si una progresión no tiene las formas de la progresión aritmética ni de la geométrica, entonces podría tener la forma de la progresión cuadrática y, efectivamente, puede hacerse el siguiente análisis para determinarla, procediendo de la siguiente manera:

- calcule la diferencia "m" entre los términos de la sucesión que llamará  $m_1, m_2, m_3, \dots$
- Si los valores  $m_i$  son diferentes, calcule la diferencia  $q_i$  entre los valores  $m_i$
- Si las diferencias  $q_i$  son iguales, entonces la progresión es cuadrática.

En general se tiene:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
Valores m:	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	
Valores q:		$q_1$	$q_2$	$q_3$	

donde  $m_1 = a_2 - a_1$ ;  $m_2 = a_3 - a_2$ ;  $m_3 = a_4 - a_3$ ;  $m_4 = a_5 - a_4$ ;

$$q_1 = m_2 - m_1; q_2 = m_3 - m_2;$$

Si  $q_1 = q_2 = q_3 = \dots$  entonces, haga las  $q_i = q$ .  $\Rightarrow$  la progresión es cuadrática

### 10.3 Técnicas para calcular término genérico de progresión cuadrática

Para calcular el término genérico  $a_n$ , de progresión cuadrática se ofrecen 3 técnicas:

#### Técnica 10.1: por fórmula particular

$$a_n = \frac{n^2 q}{2} + (2 - n)a_1 + (n - 1)a_2 + \left(1 - \frac{3n}{2}\right)q \text{ donde } q \text{ es constante obtenida de los } m_i - m_{i-1}$$

#### Técnica 10.2: por ecuaciones

Efectivamente, utilice la fórmula de la ecuación cuadrática definida en  $n$ :  $a_n = An^2 + Bn + C$

Para calcular los valores de los coeficientes A, B, C conforme un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, así:

$$(1) A + B + C = a_1 \quad (\text{haciendo } n=1 \text{ en la ecuación cuadrática})$$

$$(2) 4A + 2B + C = a_2 \quad (\text{haciendo } n=2 \text{ en la ecuación cuadrática})$$

$$(3) 9A + 3B + C = a_3 \quad (\text{haciendo } n=3 \text{ en la ecuación cuadrática})$$

Resuelve el sistema calculando los coeficientes por cualquiera de las técnicas de solución de sistemas de ecuaciones lineales con 3 incógnitas (igualación reducción o sustitución).

#### Técnica 10.3: por regla práctica

$$a_n = \left(\frac{A}{2}\right)n^2 + \left(\frac{B-A}{2}\right)n + C, \text{ siendo } A=q, B=m_1-q \text{ y } C=a_1-B$$

#### Suma de los n términos

$$S_n = \left(\frac{q}{2}\right)(n(n+1)(2n+1)/6) + (a_2 - a_1 - 3q/2) \cdot n(n+1)/2 + (2a_1 - a_2 + q) \cdot n$$

$$= n \left( \left(\frac{q}{2}\right) \cdot (n+1)(2n+1)/6 + (a_2 - a_1 - 3q/2) \cdot (n+1)/2 + 2a_1 - a_2 + q \right)$$

$$S_n = n * \left( \frac{q * (n+1) * (2n+1)}{12} + \frac{(a_2 - a_1 - \frac{3q}{2}) * (n+1)}{2} + 2 * a_1 - a_2 + q \right)$$

**Ejemplo 10.2:** halle el  $a_n$  y la  $S_n$  de la sucesión 4, 12, 24, 40, 64, 88, ...

Observe que no tiene la forma de la sucesión aritmética ni de la geométrica. Entonces analicemos si tiene la forma de la sucesión cuadrática:

4, 12, 24, 40, 64, 88, ...

Valores m: 8, 12, 16, 20, 24, ...

Valores q: 4 4 4 4

Efectivamente la progresión es cuadrática. Solucionemos el problema por las 3 técnicas para observar la consistencia de dichas técnicas.

**Por fórmula particular con  $a_1=4$ ,  $a_2=12$  y  $q=4$ :**

$$a_n = \frac{n^2 q}{2} + (n-1)a_2 + (2-n)a_1 + \left(1 - \frac{3n}{2}\right)q = \frac{n^2 4}{2} + (n-1)12 + (2-n)4 + \left(1 - \frac{3n}{2}\right)4 = 2n^2 + 2n$$

$$\begin{aligned} S_n &= n * \left( \frac{4 * (n+1) * (2n+1)}{12} + \frac{(12 - 4 - \frac{3*4}{2}) * (n+1)}{2} + 2 * 4 - 12 + 4 \right) \\ &= n \left( \frac{(n+1) * (2n+1)}{3} + (n+1) \right) = n(n+1) \left( \frac{(2n+1)}{3} + 1 \right) = n(n+1) \frac{(2n+4)}{3} \end{aligned}$$

Queda como ejercicio calcular el término genérico con las demás técnicas.

## PROBLEMAS RESUELTOS 10.1

**Problema 1:** Calcule los 5 primeros términos de la sucesión y la fórmula explícita de  $a_n = 2a_{n-1} + 11$ , Los términos son:  $a_1=5$ ,  $a_2=1$ ,  $a_3=9$ ,  $a_4=-7$ ,  $a_5=25 \Rightarrow \{5, 1, 9, -7, 25\}$

La fórmula explícita es:  $a_n = 5 * 2^{n-1} + 11(2^{n-1} - 1)$ . Compruebe que dicha fórmula es la solución de la relación de recurrencia.

**Problema 2:** Calcule los 6 primeros términos de la sucesión de  $a_n = a_{n-1} * a_{n-2}$ , con  $a_1=1$  y  $a_2=2$ . Efectivamente, los términos son:  $a_1=1$ ,  $a_2=2$ ,  $a_3=2$ ,  $a_4=4$ ,  $a_5=8$ ,  $a_6=32 \Rightarrow \{1, 2, 2, 4, 8, 32\}$

**Problema 3:** Calcule los 6 primeros términos de la sucesión de  $a_n = a_{n-2} + 3$  con  $a_1=-6$  y  $a_2=6$ .

Observe que  $n \geq 3$ . Por lo tanto, los términos serán  $\{-6, 6, -3, 9, 0, 12\}$

**Problema 4:** dada la sucesión 6, 16, 46, 136, 408, ... calcule la fórmula recursiva y la fórmula explícita.

Observe que cada término es 3 veces el término anterior menos 2. Por lo tanto, la fórmula recursiva es  $a_n = 3a_{n-1} - 2$  con  $a_1 = 6$ . Ahora, según las formas particulares de las relaciones de recurrencia se tendría la fórmula explícita es:  $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + 1$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcule los 5 primeros términos de las siguientes relaciones de recurrencia y su respectiva solución:

- |                              |            |                             |            |
|------------------------------|------------|-----------------------------|------------|
| a. $a_n = a_{n-1} + 5$ ,     | $a_1 = -4$ | e. $a_n = a_{n-1} + 5n$ ,   | $a_1 = -4$ |
| b. $a_n = -2a_{n-1}$ ,       | $a_1 = -4$ | f. $a_n = -2a_{n-1} + 11$ , | $a_1 = 5$  |
| c. $a_n = -5a_{n-1} + 5$ ,   | $a_1 = -5$ | g. $a_n = a_{n-1} + 5n$ ,   | $a_1 = -5$ |
| d. $a_n = (a_{n-1} - 1)^2$ , | $a_1 = 3$  | h. $a_n = a_{n-1} - 9n$ ,   | $a_1 = -3$ |

2. Calcule la relación de recurrencia correspondiente a cada fórmula explícita:

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| a. $a_n = 9n - 14$                         | g. $a_n = 51 - 6n$             |
| b. $a_n = (3 \cdot 2^{n+1} - 1)/2^n$       | h. $a_n = 2n(n+1) - 1$         |
| c. $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 5n(n+1)/2 + 5$ | i. $a_n = (5 + 4^n)/3$         |
| d. $a_n = -3^n - 2$                        | j. $a_n = 8 - 3n(n+1)/2$       |
| e. $a_n = 4n(n+1) - 7$                     | k. $a_n = 11 - 2n$             |
| f. $a_n = -1 - 3n(n+1)/2$                  | l. $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + 1$ |

3. Calcule la relación de recurrencia y su correspondiente fórmula explícita (puede ayudarse de las formas particulares, según las siguientes sucesiones:

- |                                   |                              |
|-----------------------------------|------------------------------|
| a. 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...       | g. 1, 7, 13, 19, 25, 31, ... |
| b. 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, ...    | h. 1, 2, 2, 4, 8, 32, ...    |
| c. 1, 9, 25, 49, 91, ...          | i. 2, 8, 32, 128, 512, ...   |
| d. -2, 16, -128, 1024, -8192, ... | j. 8, 5, 6, 3, 4, 1, 2       |
| e. 1, 2, 2, 4, 8, 32, ...         | k. 1, -2, 4, -8, 16, ...     |
| f. 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, ...    | l. 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...  |

## 10.4 Principio de inducción matemática

Este método es de gran utilización en la teoría de números y consiste en probar la validez de una proposición, estableciendo en primer lugar que cumple para un caso determinado; posteriormente, asume que se cumple generalmente y se prueba su validez para el caso siguiente o para el caso inmediato anterior.

Para algunos formalistas matemáticos, este principio tiene su inconveniente en que al final se tiene decir que: “así sucesivamente” o “continúa indefinidamente” o algo parecido. Por lo tanto, no se ve claramente cuando termina la demostración o cuando se detiene el proceso. En efecto, se ve la necesidad de lograr un procedimiento lógico que pueda establecer la validez de una fórmula propuesta (si en verdad es cierta) sin depender de unas cuantas verificaciones. Los matemáticos han creado un teorema

denominado “**teorema inducción matemática**” que fundamenta el proceso demostración de series en la teoría de números.

La inducción matemática tiene sus aplicaciones en la computación, por ejemplo, entre otras en el análisis de complejidad de algoritmos, en el cálculo del total o un valor particular en series. Por ejemplo, la proposición, para todo  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

El término de esta sumatoria nos permite definir el número de registros en un árbol binario dado un determinado nivel.

### **Teorema de inducción matemática.**

Sea  $p(n)$  una proposición con  $n \in \mathbf{N}$ . Si  $p(1)$  es cierta y si  $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ , para un número  $k$  arbitrario, entonces  $p(n)$  es cierta para  $n \in \mathbf{N}$ .

Para hacer una demostración de expresiones  $p(n)$  por inducción matemática se realizan los siguientes pasos:

**Primer paso (verificación):** comprueba que la expresión cumple la igualdad para distintos casos particulares. En efecto, compruebe explícitamente que  $p(n)$  es cierta para  $p(1)$ ,  $p(2)$  y en otros valores particulares la proposición.

**Segundo paso (hipótesis inductiva):** Suponga que para  $n=k$  la expresión cumple, es decir,  $p(k)$  es cierta.

**Tercer paso (tesis inductiva):** demuestre que la expresión cumple para  $n=k+1$  o para  $n=k-1$ , esto es,  $p(k+1)$  o  $p(k-1)$  también es cierta. Aplique en adelante el método directo.

**Ejemplo 9.3:** demuestre que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $1+2+3+\dots+n=n(n+1)/2$

#### **Paso 1 (Verificación):**

$$n=1: 1=1 \cdot 2/2=1$$

$$n=2: 1+2=2 \cdot 3/2(3=3$$

$$n=3: 1+2+3=3 \cdot 4/2(6=6$$

#### **Paso 2 (hipótesis inductiva):**

Supongamos que para  $n=k$ ,  $p(k)$  cumple, es decir,  $1+2+3+\dots+k=k(k+1)/2$  es cierto

**Paso 3 (tesis inductiva):** demostremos por método directo que para  $n=k+1$  también se cumple. En efecto,

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$$

$$k(k+1)/2 + (k+1) = (k+1)(k+2)/2 \quad \text{Hipótesis inductiva y ley uniforme}$$

$$\begin{array}{lll} (k+1)(k/2+1) & = (k+1)(k+2)/2 & \text{Ley distributiva} \\ (k+1)(k+2)/2 & = (k+1)(k+2)/2 & \text{Propiedad de fraccionarios} \end{array}$$

Se demostró que se da la igualdad para  $n=k+1$ , comprobando que  $p(n)$  es cierta  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 10.4:** demuestre que  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p(n)$ : " $4^n - 1$  es divisible por 3"

**Verificación:** si  $n=1$ :  $p(1)$ :  $4^1 - 1 = 3$  que es divisible por 3

Si  $n=2$ :  $p(2)$ :  $4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$  que es divisible por 3

Si  $n=3$ :  $p(3)$ :  $4^3 - 1 = 64 - 1 = 63$  que es divisible por 3

Hipótesis inductiva: supongamos que para  $n=k$ ,  $p(k)$  cumple, es decir, que  $4^k - 1$  es divisible por 3

**Tesis inductiva:** demostremos por método directo que para  $n=k+1$  también se cumple. En efecto,

$4^{k+1} - 1$  es divisible por 3 (tesis inductiva)

$$\begin{array}{ll} 4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 & \text{Hipótesis inductiva y propiedad de la potenciación} \\ = 4(4^k - 1) + 3, & \text{divisible por 3, factor común} \end{array}$$

de donde  $4(4^k - 1)$ , es divisible por 3 por hipótesis inductiva y por tener un término múltiplo de 3.

**Ejemplo 10.5:** demuestre que la suma de los términos dados es igual al término de la sumatoria, usando el término genérico y la sumatoria obtenidos mostrados en el ejemplo 10.2 correspondiente.

Solución:

1)  $5 + 2 + (-1) + (-4) + (-7) + (-10) + \dots + \text{término genérico} = \text{término de la sumatoria}$

Efectivamente,

$$5 + 2 + (-1) + (-4) + (-7) + (-10) + \dots + (8 - 3n) = (n(13 - 3n))/2$$

Paso 1

$$n = 1: 5 = ((13 - 3))/2 = 5 = 10/2 = 5 \text{ (verdadero)}$$

$$\begin{aligned} n = 2: 5 + 2 &= (2(13 - (3 \cdot 2)))/2 \\ 7 &= (2(13 - 6))/2 = 14/2 = 7 \text{ (verdadero)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 3: 5 + 2 + (-1) &= (3(13 - (3 \cdot 3)))/2 \\ 6 &= (3(13 - 9))/2 = (3 \cdot 4)/2 = 12/2 = 6 \text{ (verdadero)} \end{aligned}$$

Paso 2

Supongamos que para  $n = k$ ,  $p(k)$  se cumple; es decir,

$$5 + 2 + (-1) + (-4) + (-7) + (-10) + \dots + (8 - 3n) = (k(13 - 3k))/2 \text{ es cierto}$$



Paso 3

$$5 + 2 + (-1) + (-4) + (-7) + (-10) + \dots + (8 - 3k) + (-3(k+1) + 8) = (k+1)(13 - 3(k+1)) / 2$$

$$\frac{k(13 - 3k + 1)}{2} + (-3k + 5) = (k+1)(13 - 3(k+1)) / 2$$

$$\frac{13k - 3k^2 - 6k + 10}{2} = \frac{(k+1)(13 - 3(k+1))}{2}$$

$$\frac{13k - 3k^2 - 6k + 10}{2} = \frac{(k+1)(13 - 3k - 3)}{2}$$

$$\frac{13k - 3k^2 - 6k + 10}{2} = \frac{13k - 3k^2 - 3k + 13 - 3k - 3}{2}$$

$$\frac{13k - 3k^2 - 6k + 10}{2} = \frac{13k - 3k^2 - 6k + 10}{2}$$

2)  $1 + (-1/3) + (1/9) + (-1/27) + \dots$  + término genérico = término de la sumatoria.

$$1 + (-1/3) + (1/9) + (-1/27) + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = (1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n) / \left(-\frac{4}{3}\right)$$

Paso 1

$$N = 1: 1 = (1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^1) / \left(-\frac{4}{3}\right) = 1 \quad (\text{verdadero})$$

Paso 2

Supongamos que para  $n = k$ ,  $p(k)$  cumple, es decir

$$1 + (-1/3) + (1/9) + (-1/27) + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k)}{\frac{4}{3}}$$

Paso 3

$$1 + (-1/3) + (1/9) + (-1/27) + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{(k+1)-1} = \frac{(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{(k+1)})}{\frac{4}{3}}$$

## TALLER 10.1

A) Halle el término genérico y la sumatoria de los  $n$  primeros términos de

1)  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots +$  R/  $3^{n-1}; 3^n - 1$

2)  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots +$

3)  $1 + 5 + 9 + 13 + \dots +$  R/  $a_n = 4n - 3; S_n = n(2n - 1)$

4)  $6 + 15 + 28 + 45 + 66 + \dots +$

5)  $(-2) + 16 + (-128) + \dots +$  R/  $a_n = (-2)^{3n-2}; S_n = \frac{-2(1 - (-2)^{3n})}{7}$

B) Demuestre las siguientes identidades por inducción matemática para todo  $n \geq 1$  que

1.  $8^n - 1$  es divisible por 7

2.  $2^{4n} - 1$  es divisible por 5

3.  $5^{2n} - 1$  es divisible por 24

4.  $x^n - 1$  es divisible por  $x - 1$

5.  $10^{n+1} - 9n - 10$  es divisible por 81

6.  $n^4 + 2n^3 + n^2$  es divisible por 4

7. Si  $n \neq 0$ , entonces  $0^n = 0$

8.  $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$
9.  $1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}=2^n-1$
10.  $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=n(4n^2-1)/3$
11.  $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=n^2(n+1)^2/4$
12.  $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$
13.  $1*2+2*3+\dots+n(n+1)=n(n+1)(n+2)/3$
14.  $1/(1*3)+1/(3*5)+\dots+1/((2n-1)(2n+1))=n/(2n+1)$
15.  $x^n - y^n$  es divisible por  $x - y$
16. La suma de un número impar de números consecutivos es múltiplo de  $n$ .  
Entonces,  $(x/y)^n = x^n / y^n$

## 10.5 Recursividad

La recursividad o recursión es la técnica con la cual se especifica un proceso basado en su propia definición. Es una herramienta con amplia gama de utilidades que inicialmente fue utilizada por los matemáticos para solucionar problemas mediante definiciones recursivas. En efecto, utilizan la técnica “*divide y vencerás*” que consiste en descomponer un problema en subproblemas del mismo tipo que el original. A la vez cada subproblema se divide en otros subproblemas; este proceso se repite hasta que pueda resolver el problema de manera directa. De tal manera, las soluciones de los subproblemas permiten dar solución al problema original. A este proceso se denomina “*recursividad*”.

## 10.6 Subprogramas recursivos versus subprogramas iterativos

En el argot de la lógica de programación muchas veces se tienen que repetir ciertas acciones para lograr la solución de un problema; por consiguiente, se tienen varias tipos de algoritmo: *algoritmos recursivos* y *algoritmos iterativos*.

Un subprograma recursivo es aquel que se llama a sí mismo. Son poco difundidos; tal vez por la sobrecarga en tiempo de ejecución. Los subprogramas iterativos son los más utilizados en el diseño de algoritmos y, efectivamente, usan la estructura de programación repetitiva (denominada ciclos) que utiliza un contador o un centinela, para lograr así la solución a un problema.

**Ejemplo 10.6:** calcule  $n!$  (factorial de un número  $n$ ) con la técnica iterativa y recursiva.

Los algoritmos recursivos no utilizan ciclos; solamente utilizan condicionales; de ahí que basta con conseguir la condición que hace que allí finalice el algoritmo.

El algoritmo iterativo correspondiente a la solución del problema es:

```
Procedimiento factorial(n)
{
    int l, fac;
    fac=1;
    for(l=1; l<=n; l=l+1)
    {
        fac=fac*l;
    }
}
```

```

        return fac;
    }

```

El correspondiente algoritmo recursivo es:

```

Procedimiento factorial(n)
{
    if(n<=1)
        return 1;
    else
        return (n*factorial(n-1));
}

```

Esta última técnica es poco utilizada por los programadores en vista del consumo de memoria de estos programas. Sin embargo, se estudiará la conversión de un algoritmo iterativo en otro recursivo.

### 10.7 Conversión de un algoritmo iterativo en recursivo

Cualquier programa iterativo escrito con cualquier tipo de ciclo se puede transcribir a algoritmo recursivo. Una técnica sencilla está propuesta en [Flórez]<sup>7</sup> página 110. Veámosla mediante un ejemplo.

**Ejemplo 10.7:** transcriba a un programa recursivo, el siguiente programa iterativo con las siguientes líneas de un programa de referencia o principal

```

—
—
—
read(M,N);
x=-3;
for(l=1;l<=M;l=l+1)
{
    for(J=1;J<=N;J=J+1)
    {
        x=x-2;
    }
}
print(x);
—
—
—

```

**PASO 1:** Reemplace las instrucciones propias del ciclo por sus instrucciones elementales, así:

- 1.1 Asigne un valor inicial a la variable de control del ciclo.
- 1.2 Escriba una instrucción IF que compare el valor de la variable controladora del ciclo con su valor final.
- 1.3 Ponga un rótulo o marca al IF escrito en el paso 1.2.

---

<sup>7</sup> FLÓREZ R., Roberto. Algoritmos y estructuras de datos.

- 1.4 Escriba las instrucciones propias del ciclo.
- 1.5 Incremente la variable controladora del ciclo.
- 1.6 Escriba la instrucción de transferencia del control (GOTO) al rótulo definido en el paso 1.3.
- 1.7 Cierre o finalice la instrucción IF definido en el paso 1.2. En efecto,

```

—
—
read(M,N); //instrucción del programa referencia o llamador
x=-3;      //instrucción del programa referencia o llamador
l=1;       //variable de control del ciclo externo con valor inicial
:R1: if(l<=M) //variable de control del ciclo externo comparada con valor final
{
    J=1; //variable de control del ciclo externo con valor inicial
:R2: if(J<=N) //variable de control del ciclo interno comparada con valor final
    {
        x=x-2; //instrucción propia del ciclo
        J=J+1; //actualización de variable de control del ciclo interno
        GOTO R2; //transferencia del control al rótulo
    }
    l=l+1; //actualización variable de control del ciclo externo
    GOTO R1; //transferencia del control al rótulo
}
print(x);
—
—

```

**PASO 2:** El subprograma recursivo lo conformarán todas las instrucciones del ciclo y como parámetro ponga la variable controladora del ciclo.

En nuestro ejemplo hay dos llamadas recursivas. Observe que por cada ciclo hay una llamada recursiva rotulada R1 y R2. En efecto, los subprogramas recursivos se llamarán PR1 y PR2, respectivamente:

```

:R1: if(l<=M)
{
    J=1;
:R2: if(J<=N)
    {
        x=x-2;
        J=J+1;
        GOTO R2;
    }
    l=l+1;
    GOTO R1;
}

```

**PASO 3:** Suprima todas las instrucciones del ciclo por una llamada al subprograma recursivo en el programa de referencia o invocador y reemplácelas por la instrucción de

asignación del valor inicial a la variable controladora del ciclo. El valor del parámetro en esta llamada será el valor inicial de la variable controladora del ciclo.

```

—
—
read(M,N);
x=-3;
l=1;
PR1(1);    //primera llamada recursiva a PR1 desde el programa principal
print(x);
—
—

```

Pero observe además que PR1 hace una llamada recursiva a PR2. Por consiguiente, determinemos a PR1:

```

subprograma PR1(l)
{
    if(l<=M)
    {
        PR2(1); //llamada recursiva inicial a PR2 desde el subprograma recursivo PR1
        PR1(l+1); // llamada recursiva desde el mismo subprograma para actualizar
                  su parámetro
    }
}

```

**PASO 4:** En el subprograma recursivo, reemplace las instrucciones de incremento de la variable controladora del ciclo del ciclo y GOTO por una llamada recursiva, cuyo parámetro de llamada es la variable controladora del ciclo incrementada según el incremento que tenga el ciclo. Desde luego que

```

    if(J<=N)
    {
        x=x-2;
        J=J+1;
        GOTO R2;
    }

```

Por lo tanto, el subprograma recursivo quedará como sigue:

```

Subprograma PR2(J)
{
    f(J<=N)    //variable de control del ciclo interno comparada con valor final
    {
        x=x-2;    //instrucción propia del ciclo
        PR2(J+1); // llamada recursiva desde el mismo subprograma para
                  actualizar su parámetro
    }
}

```

En síntesis, el algoritmo recursivo quedará como sigue:

PROGRAMA PRINCIPAL	SUBPROGRAMA PR1	SUBPROGRAMA PR2
<pre> — — — read(M,N); x=-3; PR1(1); print(x); — — — </pre>	<pre> Subprograma PR1(l) {     if(l&lt;=M)     {         PR2(1);         PR1(l+1);     } } </pre>	<pre> Subprograma PR2(J) {     if(J&lt;=N)     {         x=x-2;         PR2(J+1);     } } </pre>

**Ejemplo 10.8:** halle las funciones recursivas de las siguientes operaciones:

1. La suma de los n primeros números naturales y calcule P(5)

$$P(n)=n+P(n-1) \text{ y } P(0)=0$$

$$P(5)=5+P(4)=5+4+P(3)=5+4+3+P(2)=5+4+3+2+P(1)=5+4+3+2+1+P(0)=\mathbf{15}$$

2.  $P(n)=n*P(n-1)$  y  $P(0)=1$

$$P(5)=5*P(4)=5*4*P(3)=5*4*3*P(2)=5*4*3*2*P(1)=5*4*3*2*1*P(0)=\mathbf{120}$$

3. El producto de 2 números a y b ( $a*b$ )

$$P(a, b)=a+ P(a,b-1) \text{ y } P(a, 0)=0$$

$$P(5,6)=5+P(5,5)=5+5+P(5,4)=5+5+5+P(5,3)=5+5+5+5+P(5,2)=5+5+5+5+5+P(5,1)=5+5+5+5+5+5+P(5,0)=\mathbf{30}$$

4. La división entera entre a y b ( $a \text{ DIV } b$ )

$$P(a, b)=1+P(a-b, b) \text{ y } P(0, b)=0$$

$$P(12, 3)=1+ P(12-3, 3)=1+1+ P(9-3, 3)=1+1+1+P(6-3, 3)=1+1+1+1+ P(0, 3)=\mathbf{4}$$

5. La potencia de “a” elevado “b” ( $a^b$ ) con a:base, b:exponente

$$P(a,b)=a*P(a,b-1) \text{ y } P(a,0)=1$$

$$P(5,4)=5*P(5,3)=5*5*P(5,2)=5*5*5*P(5,1)=5*5*5*5*P(5,0)=5*5*5*5*1=\mathbf{625}$$

## TALLER 10.2

1. Haga un programa recursivo que calcule la serie  $2+4+6+. . . 2n$
2. Haga un programa recursivo que calcule la potencia  $x^n$ .
3. Haga un programa recursivo que convierta un número en base 10 a otro de base cualquiera.
4. Haga un programa recursivo que muestre los términos de la sucesión de Fibonacci.
5. Los siguientes trozos a-c de un programa iterativo, conviértalos a subprogramas recursivos:



6.2 Principal	SubPR A(I)	SubPR B(K,J)
Lea(n) a=3 b=-1 A(a) Muestre(a)	Si $I \leq n$ entonces a=a-1 K=I B(a,k) Muestre(b) A(I+1) FinSi	Si $J \leq n-(K+1)$ entonces b=b+2 B(K-1,J+2) FinSi

6.3 Principal	SubPR A(I)	SubPR B(J)
Lea(n) a=-2 b=1 A(2) Muestre(a)	Si $I \leq n$ entonces a=a+1 B(n-I) Muestre(b) A(I+1) FinSi	Si $J < n+1$ entonces b=b+2 B(J+2) FinSi

## 10.8 Sucesiones

Una sucesión es un conjunto ordenado de datos u objetos (diferentes o no) que conservan su forma respecto a una regla determinada. Una sucesión es una función que tiene como elemento genérico o variable dependiente un número  $n \in \mathbb{N}$ . Las sucesiones se pueden clasificar en sucesiones finitas y en sucesiones infinitas.

### 10.8.1 Sucesión finita

Es aquella en la que sus datos se pueden determinar en  $n$  pasos ( $n \in \mathbb{N}$ ). En este caso los elementos de la sucesión están dispuestos en un orden, así: el primero, el segundo, el tercero, el cuarto y así sucesivamente.

**Ejemplo 10.8:** La sucesión 2, 5, 8, 11, 14, 17 es finita sin elementos repetidos. El primer elemento es 2, el segundo es 5, el tercero es 8, el cuarto es 11, el quinto es 14 y el sexto es 17. Para modelar la fórmula utilice una fórmula recursiva; en efecto, parta del primer término  $a_1=2$  y defina la fórmula así:  $a_n = a_{n-1} + 3$ ,  $2 \leq n \leq 6$ .

La sucesión 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2 es finita con elementos repetidos. El primero, el cuarto y el octavo elemento de la sucesión es 2; el segundo, el tercero, el quinto, el sexto y el séptimo de la sucesión es 1. En este caso no se tiene un modelo.

### 10.8.2 Sucesión infinita

Es aquella en la que sus datos no se pueden determinar en  $n$  pasos ( $n \in \mathbb{N}$ ), ya que se tiene que continuar indefinidamente. La manera de simbolizar la expresión “y así sucesivamente” es escribiendo al final de los término conocidos tres puntos sucesivos “...”, que indica que continua el modelo establecido para los primeros términos.



**Ejemplo 10.9:** La sucesión 3, 5, 7, 9, 11, . . . es infinita si términos repetidos. El modelado de su fórmula es explícito; observe que todos sus términos son impares. Por lo tanto, basta con conocer la definición de los números impares. En efecto,  $a_n=2n+1$ ,  $1 \leq n \leq \infty$ .

La sucesión infinita -1, 4, -9, 14, -19, . . . no tiene términos repetidos. Su fórmula se modela de manera recursiva. Observe que los términos de las posiciones impares son negativas y las pares son positivas; por consiguiente, la fórmula queda así:  $a_1=-1$  y  $a_n=(a_{n-1}+5)(-1)^n$ ,  $2 \leq n \leq \infty$ .

## 10.9 Modelado de fórmulas de sucesiones

Se llama fórmula de una sucesión a aquella expresión con una o más variables que permite modelar el término genérico de una sucesión. Tiene su importancia en la computación cuando se quiere analizar la complejidad de un algoritmo.

Para modelar una sucesión se utilizan ciertos patrones que se denominan **fórmulas** también conocidas como término genérico; se pueden dividir en “**las fórmulas explícitas y las fórmulas recurrentes o recursivas**”<sup>1</sup>. Las primeras se diseñan indicando el valor exacto según la posición del término específico. Las segundas se diseñan teniendo en cuenta un índice que se refiere a la posición de un término; de tal manera se construyen todos los términos, haciendo referencia al término anterior de la sucesión.

### 10.9.1 Fórmula explícita

Una fórmula explícita es aquella que permite determinar el valor exacto de un término de una sucesión en particular con solo tener el valor de su posición. En síntesis, una *fórmula explícita* es la solución de una relación de recurrencia.

**Ejemplo 10.10:** determine la sucesión que describe el cuadrado de los números impares. En tal caso, si la posición es  $n$ , entonces  $a_n=(2n-1)^2$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, la sucesión será:  $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, \dots$  y más explícitamente, 1, 9, 25, 49, 81, 121, . . .

**Ejemplo 10.11:** encuentre la fórmula explícita definida por la sucesión 4, 9, 14, 19, . . . con  $n \in \mathbb{N}$ . En efecto, la fórmula explícita corresponde a  $a_n=5n-1$ , con  $n \in \mathbb{N}$

### 10.9.2 Fórmula recurrente

Es aquella que define cualquier término de una sucesión a partir de unas condiciones iniciales o valores explícitos que corresponderán al punto de partida, teniendo en cuenta que para lograrla utiliza subíndices que indican la posición de un término en la sucesión.

**Ejemplo 10.12:** dada la sucesión -5, 4, 13, 22, . . . determine su fórmula recursiva

Condición inicial:  $a_1=-5$

Fórmula recursiva:  $a_n=a_{n-1}+9$ ,  $n \geq 2$

<sup>1</sup> KOLMAN, Bernard y otros. Estructuras de matemáticas discretas para la computación. Editorial Prentice-Hall hispanoamericana, S.A. México, 1997, pp.15.

**Ejemplo 10.13:** dada la sucesión 45, 39, 33, 27, 21, . . . determine su fórmula recursiva  
 Condición inicial:  $a_1=45$   
 Fórmula recursiva:  $a_n=a_{n-1}-6$ ,  $n \geq 2$

**Ejemplo 10.14:** dada la fórmula recursiva  $a_n=5a_{n-1}$ , con su condición inicial  $a_1=2$  para  $n \in [2,8]$  determine su sucesión.

$$\begin{aligned} a_2 &= 5a_1 = 5 \cdot 2 = 10 \\ a_3 &= 5a_2 = 5 \cdot 10 = 50 \\ a_4 &= 5a_3 = 5 \cdot 50 = 250 \\ a_5 &= 5a_4 = 5 \cdot 250 = 1250 \\ a_6 &= 5a_5 = 5 \cdot 1250 = 6250 \\ a_7 &= 5a_6 = 5 \cdot 6250 = 31250 \\ a_8 &= 5a_7 = 5 \cdot 31250 = 156250 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión queda formada por 8 términos: 2, 10, 50, 250, 1250, 6250, 31250, 156250

## 10.10 Relaciones de recurrencia

Una relación de recurrencia es una fórmula recursiva que se obtiene a partir de una sucesión definida de manera recurrente. Permiten hallar una fórmula explícita a partir de unas condiciones iniciales o valores dados explícitamente.

Se denomina relación de recurrencia de una sucesión

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

a una ecuación que relaciona  $a_n$  (n-ésimo término) con algunos de sus términos predecesores de la sucesión (condiciones iniciales)

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$$

Las relaciones de recurrencia tienen su gran utilización en la solución de problemas de conteo y en problemas de análisis de algoritmos, para medir su complejidad o tiempo de ejecución de éstos.

Los valores dados en forma explícita con un número finito de términos de la sucesión, corresponden a información acerca del comienzo de la sucesión y, por lo tanto, permiten definir la sucesión de manera recursiva.

### 10.10.1 Formas de relaciones de recurrencia

Las relaciones de recurrencia tienen formas muy singulares y se pueden distinguir así:

**Relaciones de recurrencia con coeficientes constantes.** Se subdividen a la vez en

- Relaciones de recurrencia con coeficientes constantes con formas particulares.
- Relaciones de recurrencia lineales homogéneas de orden  $k$  (orden 2 y 3).
- Relaciones de recurrencia lineales no homogéneas de orden  $k$  (no se tratarán en este libro, su estudio se puede verse en [JOHNSONBAUGH]).

- Relaciones de recurrencia que utilizan funciones generatrices<sup>8</sup> (no serán estudiados en este libro, pero puede ser consultado en [BRUALDI]).

### 10.10.2 Solución de relaciones de recurrencia

La solución de una relación de recurrencia correspondiente a una sucesión consiste en hallar la fórmula explícita. Se conocen varias técnicas para solucionar estas relaciones:

- Solución con la técnica “análisis hacia atrás” o “análisis de regreso”.
- Solución utilizando algunas formas particulares (ver tabla 2).
- Solución a relaciones de recurrencia lineales homogéneas de grado 2 y 3.

### 10.10.3 Técnica de análisis hacia atrás o análisis de regreso

Es un método iterativo que permite dar solución a una relación de recurrencia con coeficientes constantes, la cual tiene grandes aplicaciones en análisis financiero.

**Ejemplo 10.15:** utilizando la técnica de análisis hacia atrás determine la fórmula explícita a partir de la relación de recurrencia

$$1) a_n = a_{n-1} + 3 \text{ con } a_1 = 2.$$

$$2) a_n = 3a_{n-1} \text{ con } a_1 = 2.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 1) \quad a_n &= a_{n-1} + 3 \\
 &= a_{n-1} + 1 \cdot 3 \\
 &= (a_{n-2} + 3) + 3 \\
 &= a_{n-2} + 2 \cdot 3 \\
 &= ((a_{n-3} + 3) + 3) + 3 \\
 &= a_{n-3} + 3 \cdot 3 \\
 &= (((a_{n-4} + 3) + 3) + 3) + 3 \\
 &= a_{n-4} + 4 \cdot 3 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &= a_{n-(n-1)} + (n-1) \cdot 3 \\
 &= a_1 + (n-1) \cdot 3
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $a_1 = 2$ , entonces la fórmula explícita es:  $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$ . Verifiquemos si con la fórmula explícita y la relación de recurrencia se logra la misma sucesión:

N	Relación de recurrencia: $a_n = a_{n-1} + 3$	Fórmula explícita: $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$ .
1	$a_1 = 2$	$a_1 = 2$
2	$a_2 = 2 + 3 = 5$	$a_2 = 2 + 3 = 5$
3	$a_3 = 5 + 3 = 8$	$a_3 = 2 + 2 \cdot 3 = 8$
4	$a_4 = 8 + 3 = 11$	$a_4 = 2 + 3 \cdot 3 = 11$
5	$a_5 = 11 + 3 = 14$	$a_5 = 2 + 4 \cdot 3 = 14$

Tabla 10.2

<sup>8</sup> BRUALDI, R.A. Introductory Combinatorics, 2a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1992.

En efecto, se verifican los mismos valores para los términos de la sucesión.

$$\begin{aligned}
 2) \quad a_n &= 3a_{n-1} \\
 &= a_{n-1} \cdot 3 \\
 &= (a_{n-2} \cdot 3) \cdot 3 \\
 &= a_{n-2} \cdot 3^2 \\
 &= ((a_{n-3} \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3 \\
 &= a_{n-3} \cdot 3^3 \\
 &= (((a_{n-4} \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3 \\
 &= a_{n-4} \cdot 3^4 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &= a_{n-(n-1)} \cdot 3^{(n-1)} \\
 &= a_1 \cdot 3^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $a_1=2$ , entonces la fórmula explícita es:  $a_n=2 \cdot 3^{(n-1)}$ .

Verifique si se logra la misma sucesión, tanto con la fórmula explícita encontrada como con la relación de recurrencia que dio.

**Ejemplo 10.16:** Dada la sucesión 45, 39, 33, 27, 21, . . . determine la fórmula explícita, utilizando la técnica de análisis de regreso, con la condición inicial  $a_1=45$ .

Hallemos primero la relación de recurrencia; en efecto,  $a_n = a_{n-1} - 6$ ,  $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_{n-1} - 6 \\
 &= a_{n-1} - 1 \cdot 6 \\
 &= (a_{n-2} - 6) - 6 \\
 &= a_{n-2} - 2 \cdot 6 \\
 &= ((a_{n-3} - 6) - 6) - 6 \\
 &= a_{n-3} - 3 \cdot 6 \\
 &= (((a_{n-4} - 6) - 6) - 6) - 6 \\
 &= a_{n-4} - 4 \cdot 6 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &= a_{n-(n-1)} - (n-1) \cdot 6 \\
 &= a_1 - (n-1) \cdot 6
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $a_1=45$ , entonces la fórmula explícita es:  $a_n=45-(n-1) \cdot 6$

**Ejemplo 10.17:** la relación de recurrencia  $a_n=a_{n-1}+ a_{n-2}$  con sus condiciones iniciales  $a_1=a_2=1$  definen la sucesión de Fibonacci cuyos términos son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

**Ejemplo 10.18:** en una cooperativa un socio invierte \$3'000.000 al 12% compuesto anual. Determine la relación de recurrencia y las condiciones iniciales que definen la sucesión al cabo de  $n$  años ( $A_n$ ). Calcule la cantidad obtenida al cabo de 3 años. ¿Cuánto tiempo requiere para triplicar el capital invertido?

$A_0$  corresponde a la cantidad invertida inicialmente, que corresponde a la condición inicial  $A_0$ ; esto es,

$$A_0 = 3000000$$

Al cabo de un año tiene una cantidad  $A_{n-1}$  más los intereses así:

$$A_n = A_{n-1} + 0.12A_{n-1} = 1.12A_{n-1}, \text{ para } n \geq 1$$

La anterior ecuación corresponde a la relación de recurrencia.

Con la condición inicial se podrá calcular el valor  $A_n$ .

$$A_1 = A_0 + 0.12 A_0 = 1.12A_0 = 3'360.000$$

$$A_2 = A_1 + 0.12 A_1 = 1.12A_1 = 3'763.200$$

$$A_3 = A_2 + 0.12 A_2 = 1.12A_2 = 4'214.784$$

$$A_4 = A_3 + 0.12 A_3 = 1.12A_3 = 4720558,08$$

Al finalizar el 4º año la cantidad obtenida será: \$4'720.558

El dinero alcanzado al cabo de  $n$  años es

$$A_n = (1.12)^n A_0$$

Ahora, el tiempo que se requiere para triplicar el capital inicial es:

$$A_n = (1.12)^n A_0 = 9000000$$

$$n = \log 3 / \log 1.12 = 9 \text{ años } 8 \text{ meses } 10 \text{ días, aprox.}$$

#### 10.10.4 Solución de relaciones de recurrencia con formas particulares

Algunas relaciones de recurrencia con coeficientes constantes tienen formas especiales que producen soluciones muy particulares para la determinación de la fórmula explícita (como las planteadas en la tabla 10.3).

Dado que  $k$ ,  $r$  son enteros constantes y  $a_1$  es condición inicial de cada relación de recurrencia, el siguiente resumen podría servirle al lector como referencia para la determinación de la fórmula explícita:

Forma	Relación de recurrencia	Formula explícita
1.	$a_n = a_{n-1} + k$	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot k$ Progresión aritmética
2.	$a_n = a_{n-1} + kn$	$a_n = a_1 + k(n(n+1)/2 - 1)$ Progresión cuadrática
3.	$a_n = r a_{n-1} + k$	$a_n = a_1 r^{n-1} + k(r^{n-1} - 1)/(r - 1)$ Progresión geométrica

Tabla 10.3

Si el lector quiere realizar las demostraciones para verificar la validez del resumen anterior, puede recurrir a la técnica de análisis hacia atrás, a algunas series conocidas o a inducción matemática, para llevarlas a cabo:

- $1+2+3+4+\dots+n=n(n+1)/2$
- $1+a+a^2+a^3+a^4+\dots+a^{n-1}=(a^n-1)/(a-1)$
- $a+ar+ar^2+ar^3+\dots+ar^n=a(r^{n+1}-1)/(r-1)$  conocida como "serie geométrica"

**Ejemplo 10.19:** determine la fórmula explícita y la sucesión correspondiente a cada una de las siguientes relaciones de recurrencia:

1.  $a_n = a_{n-1} - 2$ , con  $a_1 = 9$
2.  $a_n = a_{n-1} - 3n$ , con  $a_1 = -4$
3.  $a_n = 6a_{n-1}$ , con  $a_1 = 10$
4.  $a_n = 3a_{n-1} - 2$ , con  $a_1 = 6$

**Solución:**

1. La relación de recurrencia tiene la forma 1 dada en la tabla 7.2; por lo tanto, la fórmula explícita correspondiente a:

$$a_n = 9 - 2(n-1) = 11 - 2n$$

La respectiva sucesión es:

$$9, 7, 5, 3, 1, \dots$$

2. La relación de recurrencia tiene la forma 2 dada en la tabla 7.2; por lo tanto, la fórmula explícita correspondiente a:

$$a_n = -4 - 3n(n+1)/2 + 3 = -1 - 3n(n+1)/2$$

La respectiva sucesión es:

$$-4, -10, -19, -31, \dots$$

3. La relación de recurrencia tiene la forma 3 dada en la tabla 7.2; por lo tanto, la fórmula explícita correspondiente a:

$$a_n = 10 \cdot 6^{n-1}$$

La respectiva sucesión es:

$$10, 60, 360, 2160, \dots$$

4. La relación de recurrencia tiene la forma 3 dada en la tabla 7.2; por consiguiente, la fórmula explícita corresponde a:

$$a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 2(3^{n-1} - 1)/2 = 5 \cdot 3^{n-1} + 1$$

La respectiva sucesión es: 6, 16, 46, 136, ...

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 10.1:** Calcule los 5 primeros términos de la sucesión y la fórmula explícita de  $a_n = 2a_{n-1} + 11$ . Los términos son:  $a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 9, a_4 = -7, a_5 = 25 \Rightarrow \{5, 1, 9, -7, 25\}$ . La fórmula explícita es:  $a_n = 5 \cdot 2^{n-1} + 11(2^{n-1} - 1)$ . Compruebe que dicha fórmula es la solución de la relación de recurrencia.

**Problema 10.2:** Calcule los 6 primeros términos de la sucesión de  $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ , con  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 2$ . Efectivamente, los términos son:  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 8, a_6 = 32 \Rightarrow \{1, 2, 2, 4, 8, 32\}$

**Problema 10.3:** Calcule los 6 primeros términos de la sucesión de  $a_n = a_{n-2} + 3$  con  $a_1 = -6$  y  $a_2 = 6$ .

Observe que  $n \geq 3$ . Por lo tanto, los términos serán  $\{-6, 6, -3, 9, 0, 12\}$

**Problema 10.4:** dada la sucesión 6, 16, 46, 136, 408, ... calcule la fórmula recursiva y la fórmula explícita.

Observe que cada término es 3 veces el término anterior menos 2. Por lo tanto, la fórmula recursiva es  $a_n = 3a_{n-1} - 2$  con  $a_1 = 6$ . Ahora, según las formas particulares de las relaciones de recurrencia se tendría la fórmula explícita es:  $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + 1$

### 10.10.5 Solución a relaciones de recurrencia lineales homogéneas de grado k

Dada una relación de recurrencia lineal homogénea de grado k con coeficientes constantes reales  $c_1, c_2, \dots, c_k$  de la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \dots + c_k a_{n-k}, \quad c_2 \neq 0$$

se asocia a un polinomio de orden k de la forma

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + c_3 x^{k-3} + \dots + c_k$$

denominado “*ecuación característica*”, cuyas raíces corresponden a la base para hallar la fórmula explícita para la sucesión definida por una relación de recurrencia y sus condiciones iniciales

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1, \quad a_2 = c_2, \quad \dots \quad a_{k-1} = c_{k-1}.$$

que definen una sucesión única

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

El siguiente teorema es una buena técnica para solucionar este tipo de relación con coeficientes constantes.

#### Teorema 10.1

Dada una relación de recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

con coeficientes constantes  $c_1, c_2$  y sus condiciones iniciales con valores para  $a_1$  y  $a_2$  tiene como ecuación característica de grado 2

$$x^2 = c_1 x + c_2$$

que es equivalente a la ecuación cuadrática

$$x^2 - c_1 x + c_2 = 0$$

Esta ecuación tiene dos raíces  $r_1$  y  $r_2$ , que pueden ser o iguales o distintas.

a) Si  $r_1 \neq r_2$ , entonces

$$a_n = u r_1^n + v r_2^n$$

que será la solución de la relación de recurrencia; es decir, la fórmula explícita, donde u y v dependen de las condiciones iniciales para la sucesión, así:

$$a_1 = u r_1 + v r_2$$

$$a_2 = u r_1^2 + v r_2^2$$

que forman un sistema de ecuaciones simultaneas con dos incógnitas

b) Si  $r_1 = r_2 = r$ , entonces la fórmula explícita es

$$a_n = r^n (u + v n)$$

donde u y v dependen de las condiciones iniciales

$$a_1 = u r + v r$$

$$a_2 = u r^2 + 2 v r^2$$

**Ejemplo 10.20:** encuentre la fórmula explícita y los valores  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ , correspondientes a la relación de recurrencia

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \text{ con } n \geq 3$$

y condiciones iniciales  $a_1=2$  y  $a_2=-1$

**Solución:**

Según la relación dada se puede observar que la ecuación característica es:

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Las raíces de esta ecuación cuadrática son:  $r_1=3$  y  $r_2=-1$

$$a_1 = u(3) + v(-1) = 2 \Leftrightarrow 3u - v = 2 \quad (1)$$

$$a_2 = u(3)^2 + v(-1)^2 \Leftrightarrow 9u + v = -1 \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se puede concluir que:  $u=1/12$  y  $v=-7/4$

Por lo tanto, la fórmula explícita es

$$a_n = (1/12)3^n - (7/4)(-1)^n$$

Por consiguiente,  $a_1=2, a_2=-1, a_3=4, a_4=5, a_5=22, a_6=59$

**Ejemplo 10.21:** encuentre la fórmula explícita y los valores  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ , correspondientes a la relación de recurrencia

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \text{ con } n \geq 3$$

y condiciones iniciales  $a_1=2$  y  $a_2=-1$

**Solución:**

$$x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

las raíces de esta ecuación cuadrática son:  $s_1=s_2=s=2$

$$\text{Ahora, } a_1 = u(2) + v(1)(2) \Leftrightarrow 2u + 2v = 2 \Leftrightarrow u = 9/4 \text{ y } v = -5/4$$

Por lo tanto, la fórmula explícita es

$$a_n = 2^n (9/4 - 5/4 \cdot n)$$

Por consiguiente,  $a_1=2, a_2=-1, a_3=-12, a_4=-44, a_5=-128, a_6=-336$

## Teorema 10.2

Dada una relación de recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \dots + c_k a_{n-k},$$

siendo  $c_1, c_2, \dots, c_k$  son números reales y  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  y sus condiciones iniciales con valores para  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$  tiene como ecuación característica de grado  $k$

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + c_3 x^{k-3} + \dots + c_k$$



que tiene  $k$  raíces diferentes  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ . Dichas raíces se calculan utilizando técnicas algebraicas como el teorema del factor. En consecuencia, estas raíces tienen 2 posibilidades: que sean diferentes o que sean iguales.

**Caso 1:** las raíces son diferentes

Pero

$$a_0 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k$$

$$a_1 = u_1 r_1 + u_2 r_2 + u_3 r_3 + \dots + u_k r_k$$

$$a_2 = u_1 r_1^2 + u_2 r_2^2 + u_3 r_3^2 + \dots + u_k r_k^2$$

.

.

.

$$a_k = u_1 r_1^k + u_2 r_2^k + u_3 r_3^k + \dots + u_k r_k^k$$

Por lo tanto, su fórmula explícita será:

$$a_n = u_1 r_1^n + u_2 r_2^n + u_3 r_3^n + \dots + u_k r_k^n$$

**Ejemplo 10.22:** calcule la solución de la relación de recurrencia definida por

$$a_n = 7a_{n-1} - 7a_{n-2} - 15a_{n-3}$$

cuyas condiciones iniciales son:  $a_0=2$ ,  $a_1=-1$ ,  $a_2=-3$

**Solución**

Según la relación de recurrencia

$$a_n = 7a_{n-1} - 7a_{n-2} - 15a_{n-3}$$

tiene como ecuación característica

$$x^3 = 7x^2 - 7x - 15$$

equivalente a

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$$

Aplicando el teorema del residuo, sus raíces son  $s_1'=3$ ,  $s_2'=5$ ,  $s_3'=-1$

$$a_0 = u + v + w$$

$$a_1 = u s_1' + v s_2' + w s_3'$$

$$a_2 = u s_1'^2 + v s_2'^2 + w s_3'^2$$

En efecto, se forma un sistema de ecuaciones simultáneas con 3 incógnitas:

$$2 = u + v + w$$

$$-1 = 3u + 5v - w$$

$$-3 = 9u + 25v + w$$

de donde  $u=9/8$ ,  $v=-7/12$ ,  $w=35/24$

Por lo tanto, la fórmula explícita correspondiente es

$$a_n = 9/8(3)^n - 7/12(5)^n + 35/24(-1)^n$$

**Caso 2:** las raíces son iguales. Queda como ejercicio o consulta.

### 10.11 Relaciones de recurrencia lineal no homogéneas con coeficientes constantes

Una relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes, es una relación de la forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n)$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_k$  son números reales y  $f(n)$  es una función diferente de 0 que depende solo de  $n$ . La relación de recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

es llamada la **relación de recurrencia homogénea asociada**.

#### Teorema 10.3

Si  $\{a_n^{(p)}\}$  es una solución particular de la relación de recurrencia no homogénea con coeficientes constantes:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n).$$

tiene una solución de la forma  $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ , donde  $\{a_n^{(h)}\}$  es relación de recurrencia homogénea de la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

tiene como ecuación característica de grado  $k$

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + c_3 x^{k-3} + \dots + c_k$$

que tiene  $k$  raíces diferentes  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ . La relación de recurrencia homogénea asociada tiene solución, si y solo si

$$a_n = u_1 r_1^n + u_2 r_2^n + \dots + u_k r_k^n$$

con  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  y  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$  constantes reales.

$a_n^{(p)}$  es una solución particular que depende de la función asociada a  $f(n)$ , ya sea, entre otras, lineal, cuadrática, exponencial (definida en  $n$ ).

#### Teorema 10.4

Suponga que  $\{a_n\}$  satisface la relación de recurrencia lineal no homogénea:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n),$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_k$  son números reales y

$$f(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0) s^n,$$

donde  $b_0, b_1, \dots, b_t$  y  $s$  son números reales.

Cuando  $s$  no es una raíz de la ecuación característica de la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, es decir,  $s \neq r$  entonces hay una solución particular de la forma:

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) s^n$$

Cuando  $s$  es una raíz de la ecuación característica y su multiplicidad es  $m$ ; es decir,  $s=r$ , entonces hay una solución particular de la forma:

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) s^n$$

**Ejemplo 10.23:** halle la solución de la relación de recurrencia  $a_n = a_{n-1} + n$  con condición inicial  $a_1 = 1$ , que refleja la sumatoria de los primeros  $n$  enteros positivos.

Resolviendo su ecuación de recurrencia lineal homogénea asociada ( $a_n = a_{n-1}$ ) tenemos que  $a_n - a_{n-1} = 0$  cuya ecuación característica es  $(r-1) = 0$  tiene como raíz  $r=1$ . Por consiguiente,  $a_n^{(h)} = u^*(1)^n = u$ .

Aplicando el teorema 9.4 con respecto a la función  $f(n)=n$  que es lineal, para encontrar una solución particular, tenemos que  $s=1$  con multiplicidad  $m=1$  y por lo tanto,  $f(n)=n=n(1)^n$ . Entonces:

$$a_n^{(p)} = n(p_1 n + p_0)(1)^n = n(p_1 n + p_0) = n^2 p_1 + n p_0$$

Para calcular  $p_1$  y  $p_0$  iguale la solución particular  $a_n^{(p)}$  con la relación de recurrencia original  $a_n = a_{n-1} + n$

$$n^2 p_1 + n p_0 = (n-1)^2 p_1 + (n-1) p_0 + n \quad \text{haciendo } n \text{ como } n-1$$

$$= n^2 p_1 - 2n p_1 + p_1 + n p_0 - p_0 + n \quad \text{disolviendo paréntesis}$$

Por lo tanto,

$$0 = -2n p_1 + p_1 - p_0 + n$$

$$= n(-2p_1 + 1) + (p_1 - p_0)$$

$$(-2p_1 + 1) = 0 \text{ y } (p_1 - p_0) = 0$$

reduciendo términos semejantes

asociando términos  $n$  y factorizando

Utilizando la técnica algebraica

Luego,  $p_1 = p_0 = 1/2$ .

Siendo  $a_n^{(p)} = n((1/2)n + 1/2) = (n(n+1))/2$  una solución particular, todas las soluciones de la relación de recurrencia original son:

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = (n(n+1))/2 + u.$$

Como  $a_1 = 1$ , remplacemos  $1 = (1(1+1))/2 + u = 1 + u$ . Luego  $u = 0$ .

Ahora como  $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ , tenemos que:

$$a_n = (n(n+1))/2 + 0 = (n(n+1))/2$$

**Ejemplo 10.24:** halle todas las soluciones de la relación de recurrencia  $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ . Cuál es la solución con  $a_1 = 3$ ?

**Solución:**

De la ecuación de recurrencia lineal homogénea asociada ( $a_n = 3a_{n-1}$ ) tenemos que  $a_n^{(h)} = u \cdot 3^n$  donde  $u$  es una constante real.

Puesto que  $f(n) = 2n$ , tenemos sólo tiene una raíz ( $s=1$  con multiplicidad  $m=1$ ) que es diferente al raíz de la relación de recurrencia  $r \neq 3$ . Luego,

$$a_n^{(p)} = (p_1 n + p_0)(1)^n.$$

Para calcular  $p_1$  y  $p_0$  tenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= (p_1 n + p_0) \text{ y } a_{n-1} \\ &= (p_1(n-1) + p_0) \end{aligned}$$

Igualando las soluciones de las ecuaciones

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n \Leftrightarrow (p_1 n + p_0) = 3(p_1(n-1) + p_0) + 2n$$

$$\Leftrightarrow n(2p_1 + 2) + (2p_0 - 3p_1) = 0 \quad \text{reduciendo términos semejantes con } n \text{ y sin } n$$

$$\Leftrightarrow (2p_1 + 2) = 0 \text{ y } (2p_0 - 3p_1) = 0 \quad \text{igualando términos con } n \text{ y sin } n$$

$$\Leftrightarrow (p_1 = -1 \text{ y } p_0 = -3/2) \quad \text{despejando } p_1 \text{ y } p_0$$

Siendo  $a_n^{(p)} = (-n - 3/2)$  una solución particular.

Las soluciones son:  $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = (-n - 3/2) + u \cdot 3^n$ .

Como  $a_1 = 3$  se tiene  $3 = (-1 - 3/2) + u \cdot 3^1$ . Luego  $u = 11/6$ .

Por lo tanto  $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = (-n - 3/2) + (11/6)3^n$ .

**Ejemplo 10.25:** halle la solución de la relación de recurrencia  $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + f(n)$  cuando  $f(n) = 3^n$ ,  $f(n) = n3^n$ ,  $f(n) = n^2 3^n$  y  $f(n) = (n^2 + 1)3^n$

**Solución:**

De la ecuación de recurrencia lineal homogénea asociada ( $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ ) cuya ecuación característica es  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$ . Luego tiene una sola raíz  $r=3$ , de multiplicidad  $m=2$ .

Aplicando el teorema 10.4 con respecto a las funciones indicadas  $f(n)$ , tenemos las siguientes soluciones particulares:

- Para  $f(n)=3^n$ . Dado que  $r=3$  con multiplicidad  $m=2$  y  $s=3$ , entonces:

$$a_n^{(p)} = n^2 (p_0) 3^n$$

- Para  $f(n)=n^2 3^n$ . Dado que  $r=s=3$  con multiplicidad  $m=2$ , entonces:

$$a_n^{(p)} = n^2 (p_1 n + p_0) 3^n$$

- Para  $f(n)=n^2 2^n$ . Dado que  $s=2$  es diferente de  $r=3$ , entonces:

$$a_n^{(p)} = (p_2 n^2 + p_1 n + p_0) 2^n$$

- Para  $f(n)=n^2 2^n$ . Dado que  $s=2$  es diferente de  $r=3$ , entonces:

$$a_n^{(p)} = (p_2 n^2 + p_1 n + p_0) 2^n$$

- Para  $f(n)=(n^2 + 1)3^n$ . Dado que  $r=s=3$  con multiplicidades  $m=2$ , entonces:

$$a_n^{(p)} = n^2 (p_2 n^2 + p_1 n + p_0) 3^n$$

**Ejemplo 10.26:** Encuentre todas las soluciones de la relación de recurrencia  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ .

**Solución**

$$a_n^{(h)} = u_1 3^n + u_2 2^n$$

Puesto que  $f(n)=7^n$ , tenemos que  $s=7$  es diferente de  $r_1=3$  y  $r_2=2$  con multiplicidad  $m=1$ . Donde  $s \neq r_1 \neq r_2$ . Luego,  $a_n^{(p)} = (p_0) 7^n$ .

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n \Leftrightarrow (p_0) 7^n = 5(p_0 7^{n-1}) - 6(p_0 7^{n-2}) + 7^n$$

Entonces, para hallar  $p_0$ , divida la expresión por  $7^{n-2}$  y nos quedará:  $p_0 = 49/20$ .

$a_n^{(p)} = (49/20) 7^n$  solución particular.

La solución es:  $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = (49/20) 7^n + u_1 3^n + u_2 2^n$ .

## **10.12 Aplicaciones de la recurrencia en el análisis de algoritmos**

Las relaciones de recurrencia tienen además de las aplicaciones mencionadas en anteriores secciones, otras aplicaciones, entre ellas: al análisis de algoritmos, que permite medir el tiempo de ejecución de un algoritmo.

### **10.12.1 Evaluación de algoritmos**

La evaluación de un algoritmo consiste en medir su eficiencia respecto al consumo de memoria y del tiempo de ejecución.

Las técnicas matemáticas permiten el análisis de algoritmos, independientemente de la configuración específica del computador o de los datos que maneje. El tiempo de ejecución de un algoritmo se determina en función de su tamaño. Generalmente, dicho tamaño se identifica de acuerdo con el número de elementos definidos para ser entrados.

### **10.12.2 Evaluación de memoria**

En años anteriores (hasta la década de los setenta) era muy importante considerar la cantidad de memoria con la que se contaba, en vista de las limitaciones de memoria en las diferentes máquinas; de ahí la importancia de evaluar dicho consumo, para lo cual existían técnicas y una gran exigencia y esfuerzo en la programación.

En la actualidad, debido a los enormes avances tecnológicos en la construcción de componentes del hardware (chips microprocesadores, chips de memoria, discos duros, etc.), el consumo de memoria ya no es un factor relevante de los programadores, pues son componentes de alta capacidad; tal vez, por esta razón, se abusa de la eficiencia en la programación.

### **10.12.3 Evaluación de tiempo de ejecución**

La evaluación de tiempo de ejecución es una medida básica de la eficiencia de un algoritmo, que predice cuánto tiempo se requerirá para ejecutar un programa o algoritmo que solucione un problema determinado.

Dicha evaluación es el factor más importante en lo que tiene que ver con el control de procesos en tiempo real, lo cual, a pesar de las altas velocidades que poseen los microprocesadores actuales, a veces se quedan cortos para procesar grandes cantidades de información. Son las razones anteriores las que indican la necesidad de que los programadores hagan ingentes esfuerzos de programación, utilizando técnicas que ayuden a aliviar el concepto de velocidad de procesamiento.

### **10.12.4 Medida de eficiencia de algoritmos**

Para medir el tiempo de ejecución de un algoritmo se tienen dos formas: medición a posteriori y medición a priori.

**Medición a posteriori.** Esta forma determina el proceso de elaboración de un algoritmo desde su análisis y diseño hasta las fases de codificación, compilación y ejecución del

programa. Pero si se tiene en cuenta que al ejecutar el programa el sistema operativo tiene las herramientas suficientes para informar el tiempo de ejecución, se puede además asegurar que esta forma tiene sus inconvenientes: sólo evalúa la calidad o capacidad del compilador y de la máquina mas no del algoritmo, lo cual debiese ser su propósito, independiente de la máquina y del compilador en que se hizo el programa.

**Medición a priori.** Esta forma de medir la eficiencia de un algoritmo es la que se requiere para los propósitos de lo que se va a estudiar. Pero para los efectos del caso se necesita conocer los conceptos de contador de frecuencias y orden de magnitud.

### 10.13 Contador de frecuencia.

Corresponde a una expresión algebraica que indica el número de veces que se ejecutan las instrucciones de un algoritmo. Para lograr esto basta con hacer una prueba de escritorio exhaustiva, para observar el comportamiento de las instrucciones. En efecto, es importante recordar o identificar algunas series que ayudarán a determinar dicho contador, tales como:

$$\begin{aligned}
 1+2+3+4+5+\dots+n &= n(n+1)/2 \\
 1+3+5+7+9+\dots+(2n-1) &= n^2 \\
 2+4+6+8+10+\dots+(2n) &= n(n+1) \\
 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 &= n(n+1)(2n+1)/6 \\
 1+3+6+10+15+21+\dots+n(n+1)/2 &= n(n+1)(n+2)/6 \\
 n + n/r + n/r^2 + n/r^3 + n/r^4 + \dots + n/r^{k-1} &= n(1-1/r^k)/(1-1/r)
 \end{aligned}$$

Las instrucciones que utilicen sólo la estructura secuencial o selectiva tienen como contador de frecuencia 1. En lo que respecta a ciclos, se tienen en cuenta sus límites, y a partir de ellos se consideran las series antes anotadas. Su contador de frecuencia será el límite superior menos el inferior más uno.

Si los ciclos están anidados y las variables de control son independientes, el contador de frecuencia será el producto de los límites superiores. Si las variables de control de dos ciclos son dependientes, entonces su contador será la sumatoria de los  $n$  términos  $n(n+1)/2$ . Si son más de dos, este corresponderá a la sumatoria de los  $n(n+1)/2$  y así sucesivamente.

Si la variable de control de un ciclo se divide o multiplica por un número  $b$ , su contador de frecuencia será de tipo logarítmico teniendo en cuenta que el número será el dado como superior del límite del ciclo y como base el número divisor ( $b$ ), de la forma **Log<sub>b</sub>n**.

Cuando un ciclo logarítmico se halla anidado en otro ciclo de límite superior  $n$  sus instrucciones tendrán contador de frecuencia semilogarítmico de la forma **nLog<sub>b</sub>n**.

Para las frecuencias logarítmicas o semilogarítmicas, recuerde el concepto de logaritmo: el exponente al cual hay que elevar la base para ser igual al número, esto es,  $\log_b n = x \Leftrightarrow b^x = n$

También se puede definir el logaritmo como el número de veces que hay que dividir un número  $n$  por otro llamado base  $b$  para obtener 1 como cociente. Por ejemplo,  $\log_2 64 = 6$ , porque  $2^6 = 64$  o también,

Número ÷ Base	Iteración
$64 \div 2 = 32$	1
$32 \div 2 = 16$	2
$16 \div 2 = 8$	3
$8 \div 2 = 4$	4
$4 \div 2 = 2$	5
$2 \div 2 = 1$	6

Por lo tanto, el logaritmo de 64 en base 2 es 6.

## PROBLEMAS RESUELTOS

Determine el contador de frecuencia a cada uno de los siguientes algoritmos

### Problema 10.1:

Instrucciones	Frecuencias
Lea(edad)	1
Si (edad > 18)	1
Entonces muestre "eres adulto"	1
Si no muestre "eres joven"	1
Contador de frecuencias: 4	

Figura 9.1: Algoritmo y contador de frecuencias del problema 10.1

### Problema 10.2:

Instrucciones	Frecuencias
Lea(n)	1
C=0	1
Mientras (l ≤ n) haga	n+1
Muestre ("HOLA")	n
C=C+1	n
Fin Mientras	n
Muestre(C)	1
Contador de frecuencias: 5+4n	

Figura 10.2: Algoritmo y contador de frecuencias del problema 10.2

### Problema 10.3:

Instrucciones	Frecuencias
Lea(m, n)	1
C=0	1
Para l=1 hasta m haga	m+1
Para J=1 hasta n haga	m*(n+1)
L[l,J]=1	m*n
C=C+1	m*n



Fin Para	$m*(n+1)$
Fin Para	$m$
Muestre(C)	1
Contador de frecuencias: $4+4m+4mn$	

Figura 10.3: Algoritmo y contador de frecuencias del problema 10.3

**Problema 10.4:**

Instrucciones	Frecuencias
Lea(n)	1
C=0	1
Para I=1 hasta n haga	$n+1$
Para J=1 hasta I haga	$1+n(n+1)/2$
L[I,J]=1	$n(n+1)/2$
C=C+1	$n(n+1)/2$
Fin Para	$n(n+1)/2$
Fin Para	$n$
Muestre(C)	1
Contador de frecuencias: $5+2n+2n(n+1)$	

Figura 10.4: Algoritmo y contador de frecuencias del problema 10.4

**Problema 10.5:**

Instrucciones	Frecuencias
n=625	1
C=0	1
Mientras (n>1) haga	$1+\text{Log}_5 n$
n=n/5	$\text{Log}_5 n$
C=C+1	$\text{Log}_5 n$
Fin mientras	$\text{Log}_5 n$
Muestre(n,C)	1
Contador de frecuencias: $4+4\text{Log}_5 n$	

Figura 10.5: Algoritmo y contador de frecuencias del problema 10.5

**Problema 10.6:**

Instrucciones	Frecuencias
n=625	1
C=1	1
I=1	1
Para J=1 hasta n haga	$n+1$
Mientras (I<=n) haga	$n(1+\text{Log}_5 n)$
I=I*5	$n\text{Log}_5 n$
C=C+1	$n\text{Log}_5 n$
Fin mientras	$n\text{Log}_5 n$
Fin Para	$n$
Muestre(C)	1
Contador de frecuencias: $5+3n+4n\text{Log}_5 n$	

Figura 10.6: Algoritmo y contador de frecuencias del problema 10.6

**Problema 10.7:**

Instrucciones	Frecuencias
Lea(n)	1
C=C+1	1
Para I=1 hasta m haga	m+1
Para J=1 hasta n haga	$m*(n+1)$
Para J=1 hasta p haga	$m*n*(p+1)$
L[I,J]=1	$m*n*p$
C=C+1	$m*n*p$
Fin Para	$m*n*(p+1)$
Fin Para	$m*(n+1)$
Fin Para	m
Muestre(C)	1
Contador de frecuencias: $4+4m+4mn+4mnp$	

Figura 10.7: Algoritmo y contador de frecuencias del problema 10.7

**10.14 Análisis del orden de magnitud**

El orden de magnitud corresponde a la expresión algebraica que se obtiene a partir del contador de frecuencias resultante, luego de eliminar los coeficientes, las constantes y los términos negativos. Se denota por **O(magnitud)**. En caso de que los términos sean dependientes, se toma el mayor de ellos. En otro caso, el orden de magnitud corresponderá a la suma de los términos que quedaron. Si el contador es una constante el orden de magnitud será 1.

Orden	Tipo de orden	Orden de magnitud
1	Constante	$O(1)$
2	Logarítmico	$O(\log_b N)$
3	Lineal	$O(N)$
4	Semilogarítmico	$O(N \log_b N)$
5	Cuadrático	$O(N^2)$
6	Polinomial	$O(N^m)$ , m entero positivo
7	Cúbico	$O(N^3)$
8	Exponencial	$O(m^n)$ , $m \geq 2$

Tabla 10.4: Tipos de orden de magnitud

El orden de magnitud de los problemas resueltos son, respectivamente,  $O(1)$ ,  $O(n)$ ,  $O(m*n)$ ,  $O(n^2)$ ,  $O(\log_5 X)$ ,  $O(n \log_5 X)$ ,  $O(m*n*p)$ . Verifíquelos.

**AUTOEVALUACION 10****SELECCIÓN MÚLTIPLE DE MÚLTIPLE RESPUESTA**

1. Resuelva los problemas 1.1 a 1.6 y seleccione la respuesta correcta según las siguientes situaciones:

- A) Si 1 y 2 son correctas
- B) Si 2 y 3 son correctas

- C) Si 3 y 4 son correctas
- D) Si 2 y 4 son correctas
- E) Si 1 y 3 son correctas

1.1 Dado que  $A_n$  es una cantidad al final de  $n$  años y suponiendo que una persona invierte \$1'000.000 al 18% compuesto anual, la fórmula explícita y el valor de  $A_3$  es:

- 1.  $(0.82)^n A_0$
- 2. 1'643.032
- 3. 1'551.368
- 4.  $(1.18)^n A_0$

Respuesta: \_\_\_\_\_

1.2 Dado que  $A_n$  es una cantidad al final de  $n$  meses y suponiendo que una persona invierte \$1'000.000 al 1.5% compuesto mensual, la fórmula explícita y el valor a pagar en un año es:

- 1.  $(1.015)^n A_0$
- 2. 1'195.618
- 3. 1'180.000
- 4.  $(1.18)^n A_0$

Respuesta: \_\_\_\_\_

1.3 Una persona tiene como saldo \$11100 en el primer mes y \$228.922.97 a los 30 meses. El interés y la cantidad invertida fueron:

- 1. 10% mensual
- 2. 11% mensual
- 3. \$10000
- 4. \$11100

Respuesta: \_\_\_\_\_

1.4 Dado que  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  con  $n \geq 3$  y las condiciones iniciales son  $a_1 = 2$  y  $a_2 = 3$  entonces los términos 4 y 8 son:

- 1. 8
- 2. 21
- 3. 55
- 4. 34

Respuesta: \_\_\_\_\_

1.5 La fórmula explícita de una relación de recurrencia es  $a_n = -7 - (n-1) \cdot 5$  entonces la fórmula recurrente y sus condiciones iniciales son:

- 1.  $a_n = -5 + a_{n-1}$
- 2.  $a_n = a_{n-1} - 7$
- 3. -7
- 4. 5

Respuesta: \_\_\_\_\_

1.6 Dado que la fórmula recurrente es  $a_n = 4a_{n-1}$  y su condición inicial es  $a_1 = 3$  entonces su fórmula explícita y su cuarto término son:

- 1.  $a_n = a_1 4^{n-1}$
- 2.  $a_n = a_1 3^{n-1}$
- 3. 81
- 4. 192

Respuesta: \_\_\_\_\_

1.7 La fórmula explícita que represente la sucesión definida por la relación de recurrencia

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \text{ con condiciones iniciales } a_1 = 0 \text{ y } a_2 = 1 \text{ son:}$$

$$(1) a_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot (2)^{n-2}} \quad (2) (1 - 2^{n-2}) / 2^{n-2} \quad (3) (2^{n-2} - 1) / 2^{n-2} \quad (4) a_n = \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot (2)^{n-2}}$$

respuesta: \_\_

2. Seleccione la respuesta correcta

2.1 Un grupo de inversionistas promueve ante sus clientes que su capital invertido se triplicará al cabo de 28 meses. El interés compuesto mensual aproximado que ellos están prometiendo a sus clientes es:

- A) 3%      B) 4%      C) 4.5%      D) 5%

2.2 Según el interés mensual del problema 10.1, el capital invertido se duplicará

- A) Entre los 14 y los 15 meses  
B) Entre los 16 y los 17 meses  
C) Entre los 18 y los 19 meses  
D) Entre los 20 y los 21 meses

2.3 Un grupo de biólogos investigadores concluyeron que esa población de bacterias se triplica cada 28 segundos. ¿la rata de crecimiento de esas bacterias para triplicarse es

- A) 5%      B) 4.5%      C) 4%      D) 3%

2.4 Según la rata de crecimiento por segundo correspondiente al problema 10.3, las bacterias se duplicarán

- A) Entre los 14 y los 15 segundos  
B) Entre los 15 y los 16 segundos  
C) Entre los 16 y los 17 segundos  
D) Entre los 17 y los 18 segundos

### TALLER 10.3

2 Calcule la solución general de la ecuación de recurrencia lineal no homogénea de

$$2.1 a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$$

$$2.2 9a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} + 5n^2$$

3 Haga un subprograma que calcule y muestre el valor de cada término, el valor de las sumas parciales y el valor total de las siguientes series<sup>2</sup>:

$$3.1 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots$$

$$3.2 1 + 9 + 25 + 49 + \dots$$

$$3.3 4 + 16 + 36 + 64 + \dots$$

$$3.4 1/4 + 9/16 + 25/36 + 49/64 + \dots$$

$$3.5 1 + 4/2 + 9/6 + 16/24 + 25/120 + \dots$$

<sup>2</sup> Según la enciclopedia Lexis 22, una serie es una sucesión de números reales o complejos; también se dice que una sucesión es cuyos términos son las sumas parciales de los términos.

$$3.6 \ 1*4/1 + 9*16/6 + 25*36/120 + 49*64/5040 + \dots$$

- 4 Utilizando la técnica análisis hacia atrás determine la fórmula explícita para cada una de las siguientes sucesiones:
  - 4.1  $a_n = -a_{n-1}$ , con  $a_1 = -5$
  - 4.2  $a_n = 3a_{n-1}$ , con  $a_1 = -15$
  - 4.3  $a_n = a_{n-1} + 3$ , con  $a_1 = 15$
  - 4.4  $a_n = a_{n-1} - 3$ , con  $a_1 = -25$
  - 4.5  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ , con  $a_1 = 7$
- 5 Determine la fórmula explícita y la correspondiente sucesión de cada una de las siguientes relaciones de recurrencia con su respectiva condición inicial:
  - 5.1  $a_n = a_{n-1} + 3$ , con  $a_1 = 4$
  - 5.2  $a_n = 3a_{n-1}$ , con  $a_1 = 10$
  - 5.3  $a_n = -3a_{n-1} + 2$ , con  $a_1 = 20$
  - 5.4  $a_n = 3a_{n-1} - 2$ , con  $a_1 = -10$
  - 5.5  $a_n = a_{n-1} - 3n$ , con  $a_1 = -20$
  - 5.6  $3a_n = 3a_{n-1} + 3n$ , con  $a_1 = 1$
- 6 Determine la fórmula explícita, la relación de recurrencia y las condiciones iniciales de cada una de las siguientes sucesiones:
  - 6.1  $3, 7, 11, 15, \dots, n \geq 2$
  - 6.2  $3, -1, -7, -19, \dots, n \geq 2$
  - 6.3  $-14, -5, 4, 13, \dots, n \geq 2$
  - 6.4  $-1, -1, 1, 1, 5, 5, 13, 13, \dots, n \geq 3$
  - 6.5  $-3, -1, 0, 0, 2, 3, 3, 5, 6, 6, \dots, n \geq 4$
- 7 Una cooperativa le promete a sus socios que por cada peso invertido les darán 18 centavos, como interés compuesto. Un socio quiere invertir \$1'000.000 determine:
  - 7.1 ¿Cuánto dinero recibirá de intereses en los meses 1, 2 y 3?
  - 7.2 ¿Cuál sería la formula explícita para calcular lo que gana en cierto mes?
  - 7.3 Según la fórmula explícita, ¿cuánto dinero recibe de interés en el mes 10?
  - 7.4 ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para duplicar la cantidad invertida?
  - 7.5 ¿Cuál es la fórmula de recurrencia? Verifique que produzca los mismos valores obtenidos por la fórmula explícita.
- 8 Resuelva las relaciones de recurrencia de los literales a-e que son relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes. Determine la fórmula explícita:
  - 8.1  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ , con  $a_0 = 1$  y  $a_1 = 0$
  - 8.2  $2a_n = -3a_{n-1} + 2a_{n-2}$ , con  $a_0 = 1$  y  $a_1 = 0$
  - 8.3  $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$ , con  $a_0 = 1$  y  $a_1 = -5$
  - 8.4  $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}$ , con  $a_0 = 10$  y  $a_1 = -3$
  - 8.5  $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ , con  $a_0 = 5$  y  $a_1 = 2$
  - 8.6  $a_n = 2\sqrt{3}a_{n-1} - 3a_{n-2}$ , con  $a_0 = 5$  y  $a_1 = 2$
  - 8.7  $6a_n = 13a_{n-1} + 5a_{n-2}$ , con  $a_0 = -1$  y  $a_1 = 2$

## 9 Análisis de relación

En los numerales 8.1 hasta 8.6, seleccione la opción correcta, así:

- A) Si la afirmación y la razón son VERDADERAS y la razón es una explicación CORRECTA de la afirmación
- B) Si la afirmación y la razón son VERDADERAS, pero la razón NO es una explicación CORRECTA de la afirmación
- C) Si la afirmación es VERDADERA, pero la razón es una proposición FALSA
- D) Si la afirmación es FALSA, pero la razón es una proposición VERDADERA
- E) Si tanto la afirmación como la razón son proposiciones FALSAS

9.1 La sucesión infinita -5, 4, 13, 22 . . . es determinada por la formula recursiva  $a_1 = -5$  y  $a_n = a_{n-1} + 9$  **PORQUE** las fórmulas recurrentes con una condición inicial puede determinarse su respectiva sucesión.

**Respuesta:** \_\_\_\_\_

9.2 Una fórmula explícita define cualquier término de una sucesión a partir de una condición inicial **PORQUE** las fórmulas explícitas utilizan un subíndice que indica la posición de cada término en la sucesión y unas condiciones iniciales para determinar el total de la sucesión. **Respuesta:** \_\_\_\_\_

9.3 Una fórmula recurrente define cualquier término de una sucesión mediante la posición de sus términos **PORQUE** las fórmulas explícitas sólo requieren de las condiciones iniciales y las fórmulas recurrentes solamente requieren de la posición de sus términos. **Respuesta:** \_\_\_\_\_

9.4 Una fórmula recurrente define cualquier término de una sucesión a partir de una condición inicial **PORQUE** las fórmulas recurrentes utilizan las condiciones iniciales para indicar la parada en el algoritmo y un subíndice que se utiliza para indicar la posición de un término en la sucesión; de tal manera se definen las fórmulas explícitas. **Respuesta:** \_\_\_\_\_

9.5 Una fórmula recurrente es la expresión de una relación recurrente y una fórmula explícita es su solución **PORQUE** las fórmulas explícitas se expresan en función de la posición de sus términos y las fórmulas recurrentes sólo requieren de sus condiciones iniciales. **Respuesta:** \_\_\_\_\_

9.6 La sucesión infinita 2, -1, -12, -44, . . . es determinada por la formula recursiva  $a_n = 4a_{n-1} + 4a_{n-2}$  con  $n > 2$  **PORQUE** formula recursiva  $a_n = 4a_{n-1} + 4a_{n-2}$  con  $n > 2$  utilizó la fórmula explícita  $a_n = us^n + vns^n$  con las condiciones iniciales  $a_1 = us + vs$  y  $a_2 = us^2 + 2vs^2$  con  $u = 9/4$  y  $v = -5/4$ , siendo  $s = 2$  **Respuesta:** \_\_\_\_\_

10 Calcule el contador de frecuencias y determine el orden de magnitud del siguiente conjunto de instrucciones:

10.1 Instrucciones	Frecuencias
$n = 2187$ $C = 0$ $J = 1$ Mientras $J \leq n$ haga Mientras $(n > 1)$ haga	

$n=n/3$ $C=C+1$ Fin mientras $J=J+1$ Fin Mientras Muestre(C)	Contador de frecuencias: _____ Orden de magnitud: _____
---	--

10.2 Instrucciones	Frecuencias
$n=15625$ $C=0$ $J=4$ Mientras $J \leq n$ haga Mientras ( $I > 1$ ) haga $n=n/5$ $C=C+1$ Fin mientras $J=J+1$ Fin Mientras Muestre(C)	Contador de frecuencias: _____ Orden de magnitud: _____

10.3 Instrucciones	Frecuencias
$n=16384$ $C=0$ $I=1$ $J=1$ Mientras $J \leq n$ haga Mientras ( $I \leq n$ ) haga $I=I*4$ $C=C+1$ Fin mientras $J=J+1$ Fin Mientras Muestre(C)	Contador de frecuencias: _____ Orden de magnitud: _____