

Appunti di Geometria 2, corso di fisica

Federico Belliardo
Alberto Bordin
Alessandro Candido
Marco Costa
Valerio Lomanto
Andrea Luzio
Giacomo Petrillo
Roberto Ribatti

Anno accademico 2015–2016

Indice

1	Spazi topologici	4
1.1	Definizioni di base	4
1.2	Spazi metrici e metrizzabili	4
1.3	Sottospazi	6
1.4	Chiusura, parte interna, frontiera	6
1.5	Morfismi degli spazi topologici	7
1.6	Separazione	8
1.7	Numerabilità	8
1.8	Connessione	10
1.9	Compattezza	11
1.9.1	Compattezza in spazi metrizzabili	12
1.9.2	Compattezza e funzioni continue	13
1.10	Topologia prodotto e topologia quoziente	13
2	Varietà	15
2.1	Definizioni di base	15
2.1.1	Esempi di varietà	15
2.2	Spazio proiettivo (reale)	16
2.2.1	Filtrazione di \mathbb{P}^n	17
2.3	Varietà prodotto	17
2.4	Varietà differenziabili	17
2.5	Linearizzazioni di applicazioni lisce tra spazi euclidei	19
2.6	Funzioni a foruncolo	22
2.7	Varietà con bordo	22
2.8	Sottovarietà	23
2.9	Fibrato tangente	23
2.9.1	Modello locale	23
2.9.2	Caratterizzazione differenziale di $T_x U$	24
2.9.3	Costruzione del fibrato tangente su varietà	25
2.10	Fibrati	27
2.11	Fatti di algebra lineare	27

2.12	Richiami della scorsa lezione	28
2.13	Altri fibrati su M	28
2.14	Equivalenza tra fibrati	29
2.15	Richiami della lezione scorsa	29
2.16	Teorema di Embedding	29
2.17	Topologia sullo spazio delle applicazione lisce tra varietà - fede	30
2.18	Spazi di applicazioni lisce	30
2.19	Orientazione	31
2.20	Cobordismo	32
2.21	Gruppo fondamentale	35
2.21.1	Alcuni $\eta_n(Y)$ e $\Omega_n(Y)$	35
2.22	Trasversalità	37
2.23	Cenni alle dimostrazioni dei teoremi di trasversalità	38
2.24	Immersioni e embedding	39
2.25	Versione orientata dei teoremi di trasversalità	40
2.26	Ripasso della lezione sulla trasversalità	40
2.27	Teoria del grado	42
2.28	Numero d'intersezione	43
2.28.1	Versione orientata	43
2.28.2	Autointersezione	43
2.29	Funzioni di Morse	45
2.30	Superfici	47
2.31	La forma di intersezione su $\eta_1(S)$	48
2.32	Forme d'intersezione	49
2.32.1	Una costruzione alternativa	49
2.32.2	Caratterizzazione delle classi d'isometria	50
2.33	Classificazione spazi vettoriali su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	51
2.33.1	$\eta(S^2)$	51
2.33.2	$\eta(T_2) = H$	51
2.33.3	$\eta(\mathbb{P}^2) = U$	52
2.33.4	Modelli per spazi di dimensione maggiore	54
2.34	Somma connessa	56
2.35	Relazione tra somma connessa e caratteristica di Eulero	56
2.36	Teoria di Morse	56

Capitolo 1

Spazi topologici

1.1 Definizioni di base

Definizione 1 (Topologia). Sia dato un insieme X e una famiglia τ di sottoinsiemi di X . τ è detta *topologia* se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\emptyset, X \in \tau$
- τ è chiusa per intersezioni finite, ovvero: $\forall A_1, A_2 \in \tau \implies A_1 \cap A_2 \in \tau$
- τ è chiusa per unioni arbitrarie, ovvero: $\forall \mathcal{B} \subseteq \tau \implies \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A \in \tau$.

Gli elementi di τ sono detti *aperti* per la topologia τ .

Definizione 2 (Spazio topologico). Sia $X \neq \emptyset$ un insieme munito di una topologia τ . La coppia (X, τ) è detta *spazio topologico*.

Definizione 3 (Chiuso). Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è detto *chiuso* se $\mathcal{C}Y$ è aperto.

Osservazione 1. \emptyset e X sono sia aperti che chiusi.

Proposizione 1. Sia F_τ la famiglia dei sottoinsiemi chiusi di X . Questa gode delle seguenti proprietà:

- $\emptyset, X \in F_\tau$
- F_τ è chiusa per unioni finite
- F_τ è chiusa per intersezioni arbitrarie.

Osservazione 2. Un insieme $X \neq \emptyset$ ammette sempre due topologie degeneri:

- $\tau_B = \{\emptyset, X\}$ detta topologia banale
- $\tau_D = \mathcal{P}(X)$ detta topologia discreta.

Definizione 4 (Finezza). Date due topologie τ e τ' su X , si dice che τ è *più fine* di τ' se $\tau \supset \tau'$, ovvero tutti gli aperti di τ' sono anche aperti di τ , ma esistono aperti in τ non presenti in τ' .

Osservazione 3. La topologia banale è quella meno fine, mentre quella discreta è la più fine.

1.2 Spazi metrici e metrizzabili

Definizione 5 (Spazio metrico). Sia dato un insieme $X \neq \emptyset$ e una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0 \wedge (d(x, y) = 0 \iff x = y)$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

La funzione d è detta *distanza* e la coppia (X, d) è detta *spazio metrico*.

Esempio 1. Esempi di spazi metrici sono:

- \mathbb{R}^n munito della distanza euclidea d_E
- Un insieme X qualsiasi munito della distanza discreta $d_D = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Definizione 6 (Palla aperta). Sia (X, d) uno spazio metrico, definiamo la *palla aperta centrata in x di raggio r* come:

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

Proposizione 2 (Topologia indotta). *Sia (X, d) uno spazio metrico e τ_d una famiglia di sottoinsiemi così definita:*

$$\tau_d := \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \exists B_r(x) \subseteq A\}$$

Affermo che τ_d è una topologia su X (la chiamerò topologia indotta).

Dimostrazione. Verifico che si tratti di una topologia:

- $\emptyset \in \tau_d$ per vacuità, $X \in \tau_d$ perché le palle aperte sono a valori in X per definizione.
- Siano A_1, \dots, A_n sottoinsiemi di X . Considero la loro intersezione $\bigcap A_k$. Per ogni punto x nell'intersezione considero tutti gli A_k tali che $x \in A_k$. Prendo quindi una palla aperta $B^k(x)$ per ognuno di questi (posso farlo per definizione di τ_d). Tra queste prendo quella con raggio minore: questa è contenuta in $\bigcap A_k$, segue che τ_d è chiuso per intersezioni finite.
- Se $x \in \bigcup A_j$ allora x appartiene almeno ad uno degli A_j . Poiché questi sono aperti segue che $\exists B_{r_i}(x) \subseteq A_i \subseteq \bigcup A_j$. \square

Definizione 7. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *metrizzabile* se esiste una distanza d tale che $\tau = \tau_d$, ovvero la topologia sia uguale alla topologia indotta dalla distanza d .

Esempio 2. Esempi di topologie indotte sono:

- (\mathbb{R}^n, d_E) induce (\mathbb{R}^n, τ_E) .
- Lo spazio topologico indotto da (X, d_D) (dove d_D è la distanza discreta dell'Esempio 1) è τ_D (la topologia discreta). Infatti $B_{1/2}(x) = \{x\}$, quindi ogni punto è un aperto.

Proposizione 3. *Sia (X, d) uno spazio metrico e (X, τ_d) lo spazio topologico indotto. Si verifica che:*

- le apelle aperte sono aperti per la topologia indotta;
- ogni $A \in \tau_d$ è unione di palle aperte.

Dimostrazione.

- Sia $y \in B_r(x)$, devo trovare un r' tale che $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x)$. Prendo $r' < r - d(x, y)$. Segue:

$$\forall z \in B_{r'}(y) : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r - d(x, y) < r$$

- Sia A un qualsiasi aperto per la topologia indotta. A è unione dei suoi punti e per ogni punto x ho una palla aperta centrata in x e contenuta in A . Segue che A è unione di palle aperte. \square

Definizione 8. (X, d) e (X, d') si dicono *topologicamente equivalenti* se le topologie indotte coincidono.

Osservazione 4. È chiaro che uno spazio metrico ha una “struttura” più rigida di uno spazio topologico e conseguentemente spazi metrici diversi possono indurre la stessa topologia.

Teorema 4. *Tutte le distanze indotte da un prodotto scalare sono topologicamente equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare definito positivo. Indichiamo con $B_r^E(x)$ le palle della metrica euclidea e con $B_r^{(\cdot)}(x)$ quelle della metrica con distanza $d_{(\cdot)}(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$. Poiché gli aperti di una topologia metrizzabile sono unione di palle aperte centrate su ogni punto, ci basta mostrare che:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \forall r > 0 : \begin{cases} \exists r' : B_{r'}^E(x) \subseteq B_r^{(\cdot)}(x) \\ \exists r'' : B_r^{(\cdot)}(x) \subseteq B_{r''}^E(x) \end{cases}$$

Consideriamo le matrici del prodotto scalare canonico (che induce d_E) e di $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Commutano e sono simmetriche, quindi sono diagonalizzabili simultaneamente, in particolare con una matrice ortogonale. Nelle nuove coordinate, la palla $B_r^{(\cdot)}(0)$ è definita dalla condizione:

$$d_{(\cdot)}(x, 0) = \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2} < r$$

Quindi per trovare r' e r'' basta considerare gli assi minore e maggiore dell'ellissoide:

$$r' \leq r \min \{\lambda_i\}, \quad r'' \max \{\lambda_i\} \leq r \quad \square$$

Esempio 3. DA FARE

Definizione 9 (Intorno). Dato $x \in (X, \tau)$, si dice *intorno* di x (rispetto a τ) un insieme U_x che contiene un aperto A tale che $x \in A \subseteq U_x$.

Definizione 10 (Base di aperti). Dato uno spazio topologico (X, τ) si dice *base di aperti* una famiglia di aperti \mathcal{B} tale che ogni elemento di τ è ottenibile come unione di elementi di \mathcal{B} .

Definizione 11 (Base di intorni). Una *base di intorni* è un insieme di intorni di un punto x tale che qualsiasi intorno di x contenga almeno uno degli elementi della base.

Osservazione 5. Le palle aperte sono una base di intorno per una topologia indotta.

Lemma 5. *Un insieme è aperto se ogni punto ha un intorno contenuto nell'insieme:*

$$A \text{ aperto} \iff \forall x \in A \exists U_x \subseteq A$$

Dimostrazione. L'implicazione verso destra è banale perché A è un intorno dei suoi punti¹. Mostriamo l'altra: per definizione di intorno possiamo prendere gli U_x aperti. Sia $A' := \bigcup_{x \in A} U_x$. A' è aperto perché unione di aperti ed è contenuto in A , però contiene tutti i punti di A quindi $A = A'$. \square

1.3 Sottospazi

Si può definire una topologia sui sottoinsiemi di uno spazio topologico:

Proposizione 6 (Topologia dei sottospazi). *Sia (X, τ) spazio topologico e $\chi \subseteq X$, l'insieme $\tau_\chi := \{A \cap \chi \mid A \in \tau\}$ è una topologia su χ .*

Dimostrazione. Verifichiamo le tre proprietà della topologia:

- Il vuoto c'è perché $\emptyset \cap \chi = \emptyset$; χ c'è perché $X \cap \chi = \chi$.
- Siano $a_1, \dots, a_n \in \tau_\chi$. Allora $\forall k \exists A_k \in \tau : a_k = A_k \cap \chi$. Quindi:

$$\bigcap a_k = \bigcap (A_k \cap \chi) = \left(\bigcap A_k \right) \cap \chi$$

Ma $\bigcap A_k$ è aperto in (X, τ) .

- Sia $\{a_k\}_{k \in I} \subseteq \tau_\chi$. Definiti come sopra gli A_k , abbiamo:

$$\bigcup a_k = \bigcup (A_k \cap \chi) = \left(\bigcup A_k \right) \cap \chi \quad \square$$

Definizione 12 (Sottospazio). Chiamiamo (χ, τ_χ) *sottospazio* di (X, τ) .

È interessante che la topologia dello spazio di partenza si colleghi direttamente alla topologia di sottospazio di ogni aperto:

Proposizione 7. *A aperto \iff tutti gli aperti in A come sottospazio sono aperti*

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni:

\Rightarrow Infatti ogni aperto in A è intersezione di due aperti.

\Leftarrow Infatti A è aperto in A . \square

¹Se è banale, perché l'abbiamo spiegata?

1.4 Chiusura, parte interna, frontiera

In generale i sottoinsiemi di uno spazio topologico non sono né aperti né chiusi. Tuttavia possiamo associare a ognuno in modo naturale un aperto e un chiuso.

Definizione 13 (Chiusura). La *chiusura* di un insieme Y è l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono:

$$\bar{Y} := \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supseteq Y}} C$$

Proposizione 8. *La chiusura di Y è il più piccolo chiuso che contiene Y , cioè:*

$$\left. \begin{array}{l} Y \subseteq C \subseteq \bar{Y} \\ C \text{ chiuso} \end{array} \right\} \implies C = \bar{Y}$$

Dimostrazione. Infatti dalla definizione di \bar{Y} segue $\bar{Y} = \bar{Y} \cap C$. \square

Definizione 14 (Parte interna). La *parte interna* di un insieme Y è l'unione di tutti gli aperti contenuti in Y :

$$\mathring{Y} := \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq Y}} A$$

Proposizione 9. *La parte interna di Y è il più grande aperto contenuto in Y , cioè:*

$$\left. \begin{array}{l} \mathring{Y} \subseteq A \subseteq Y \\ A \text{ aperto} \end{array} \right\} \implies A = \mathring{Y}$$

Dimostrazione. Infatti dalla definizione di \mathring{Y} segue $\mathring{Y} = \mathring{Y} \cup A$. \square

Osservazione 6. La parte interna e la chiusura sono rispettivamente aperta e chiusa.

Definiamo ora alcune proprietà che collegano singoli punti di un insieme alle nozioni di chiusura e parte interna.

Definizione 15 (Punto interno). Gli elementi della parte interna di Y si chiamano *punti interni* di Y :

$$x \text{ interno a } Y \iff x \in \mathring{Y}$$

Definizione 16 (Punto di accumulazione). Un elemento x (non necessariamente in Y) è *punto di accumulazione per Y* se ogni intorno di x contiene punti di Y diversi da x :

$$x \text{ accumulazione per } Y \iff \forall U_x : (U_x \setminus \{x\}) \cap Y \neq \emptyset$$

Definizione 17 (Punto isolato). I punti di Y non di accumulazione sono *isolati*:

$$x \text{ isolato in } Y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in Y \\ \neg(x \text{ accumulazione per } Y) \end{cases}$$

Lemma 10. La chiusura di un insieme è l'insieme stesso unito ai suoi punti di accumulazione:

$$\bar{Y} = Y \cup \{x \mid x \text{ accumulazione per } Y\}$$

Dimostrazione. Mostriamo le due inclusioni:

(\subseteq) Ci basta verificare che $y \in \bar{Y} \setminus Y \implies y$ accumulazione per Y . Per assurdo:

$$y \text{ non di accumulazione} \rightarrow \exists A \text{ aperto} : \begin{cases} y \in A \\ A \cap Y = \emptyset \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y \notin \mathcal{C} A \\ Y \subseteq \mathcal{C} A \end{cases}$$

Ma $\mathcal{C} A$ è chiuso, quindi avremmo $y \notin \bar{Y}$. ∇

(\supseteq) Ci basta verificare che $y \notin Y \wedge y$ accumulazione per $Y \implies y \in \bar{Y}$. Per assurdo, $y \notin \bar{Y} \rightarrow y \in \mathcal{C} \bar{Y}$. Ma $\mathcal{C} \bar{Y}$ è aperto, quindi $\mathcal{C} \bar{Y}$ sarebbe un intorno di y disgiunto da Y . \square

Vogliamo ora formalizzare il concetto di “bordo” di un insieme, cioè la famiglia dei punti che lo “separa” dal suo complementare. Diamo questa definizione:

Definizione 18 (Frontiera). La famiglia dei punti della chiusura di Y esterni a Y è la *frontiera* di Y :

$$\mathcal{F} Y := \bar{Y} \setminus \mathring{Y}$$

Proposizione 11. La frontiera consta dei punti esterni isolati o di accumulazione:

$$\mathcal{F} Y = (\{x \mid x \text{ isolato in } Y\} \cup \{x \mid x \text{ accumulazione per } Y\}) \setminus \mathring{Y}$$

Dimostrazione. Basta usare il Lemma 10 e osservare che:

$$Y \setminus \{x \mid x \text{ accumulazione}\} = \{x \mid x \text{ isolato}\} \quad \square$$

Proposizione 12. La frontiera di un insieme è anche frontiera del complementare:

$$\mathcal{F} Y = \mathcal{F} \mathcal{C} Y$$

Dimostrazione. Passando al complementare le unioni diventano intersezioni quindi parte interna e chiusura si scambiano:

$$(\mathcal{C} \mathring{Y}) = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq \mathcal{C} Y}} A = \mathcal{C} \left(\bigcap_{\substack{\mathcal{C} A \text{ chiuso} \\ \mathcal{C} A \supseteq Y}} \mathcal{C} A \right) = \mathcal{C} \bar{Y}$$

Un conto analogo mostra che $\overline{\mathcal{C} Y} = \mathcal{C} \mathring{Y}$. Quindi:

$$\mathcal{F} \mathcal{C} Y = \overline{\mathcal{C} Y} \setminus (\mathcal{C} \mathring{Y}) = \mathcal{C} \mathring{Y} \setminus \mathcal{C} \bar{Y} = \bar{Y} \setminus \mathring{Y} = \mathcal{F} Y \quad \square$$

Osservazione 7. Sia X l'insieme ambiente e $x \in Y \subseteq X$. Si ha che:

$$x \text{ interno a } Y \not\Rightarrow x \text{ di accumulazione per } Y$$

Ad esempio per (X, τ_D) preso $Y := \{x\}$ allora x è interno a Y , poiché quest'ultimo è aperto, ma $\{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$ quindi non è di accumulazione. Tuttavia, basta supporre che i singoletti non siano aperti affinché invece l'implicazione sia valida.

1.5 Morfismi degli spazi topologici

In generale, dati degli spazi con certe proprietà, i *morfismi* sono funzioni tra gli spazi che mantengono in qualche modo le proprietà. Ad esempio i morfismi degli spazi vettoriali sono le funzioni lineari, che mandano 0 in 0, sottospazi in sottospazi, ecc.

In particolare gli *isomorfismi* mettono in corrispondenza due spazi in modo che siano completamente indistinguibili relativamente alle proprietà considerate. Data una famiglia di spazi, si può definire su di essa un'equivalenza per isomorfismo e considerare le sottofamiglie di spazi *isomorfi* come singoli elementi.

Vediamo ora che i naturali morfismi degli spazi topologici sono le funzioni *continue*. Siano da qui in poi X, Y spazi topologici² e $f : X \rightarrow Y$.

Definizione 19 (Continuità). f si dice *continua* se le controimmagini di aperti sono aperte:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow \forall A \subseteq Y, A \text{ aperto} : f^{-1}(A) \text{ aperto}$$

Possiamo definire una forma *locale* di continuità e collegarla alla nozione globale:

Definizione 20 (Continuità locale). f è *continua in* $x \in X$ se ogni intorno di $f(x)$ contiene l'immagine di un intorno di x :

$$f \text{ continua in } x \Leftrightarrow \forall U_{f(x)} \exists U_x : f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$$

Proposizione 13. f continua $\iff \forall x \in X : f$ continua in x

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni:

(\Rightarrow) $\forall x \in X \forall U_{f(x)}$ definiamo $U_x := f^{-1}(U_{f(x)})$. Poiché f^{-1} manda aperti in aperti, U_x è un intorno di x , e ovviamente $f(U_x) = U_{f(x)}$.

²Identificheremo, quando non ci siano ambiguità, lo spazio topologico (X, τ) con X o con τ . Si noti che comunque τ contiene tutta l'informazione perché $X = \bigcup \tau$.

(\Leftarrow) Sia $A \subseteq Y$, A aperto. Poiché A è un intorno dei suoi punti, abbiamo che $\forall x \in f^{-1}(A) \exists U_x : f(U_x) \subseteq A$ cioè $U_x \subseteq f^{-1}(A)$. Il Lemma 5 conclude. \square

Definiamo gli isomorfismi topologici, che chiameremo *omeomorfismi*:

Definizione 21 (Omeomorfismo). f è un *omeomorfismo* se è continua, bigettiva e con inversa continua:

$$f \text{ omeomorfismo} :\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bigettiva} \\ f, f^{-1} \text{ continue} \end{cases}$$

È necessario specificare che f^{-1} sia continua perché la continuità di una funzione invertibile non implica la continuità dell'inversa:

Esempio 4. Consideriamo due spazi topologici sullo stesso insieme $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$. Sia τ_1 più fine di τ_2 , cioè $\tau_1 \supset \tau_2$. Sia $\text{id} : X \rightarrow X$ l'identità. id è invertibile e continua rispetto a $\tau_1 \rightarrow \tau_2$, ma non continua rispetto a $\tau_2 \rightarrow \tau_1$.

1.6 Separazione

Per adesso gli spazi topologici sono un concetto molto generale. Cominciamo a definire delle proprietà che ci permettano di avere un'idea più intuitiva di come sono fatti certi spazi topologici.

Definizione 22 (Proprietà di separazione). Uno spazio topologico si dice *di Hausdorff*³ o *separato* o T_2 se per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$X \text{ è } T_2 :\Leftrightarrow \forall x \neq y \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$$

Proposizione 14. *Gli spazi metrizzabili sono separati:*

$$X \text{ metrizzabile} \implies X \text{ è } T_2$$

Dimostrazione. $x \neq y \rightarrow r := d(x, y) \neq 0 \rightarrow B_{r/3}(x) \cap B_{r/3}(y) = \emptyset$ \square

Proposizione 15. *Negli spazi separati i singoletti sono chiusi:*

$$X \text{ è } T_2 \implies \forall x \in X : \{x\} \text{ chiuso}$$

Dimostrazione. Abbiamo che $\forall y \in \mathcal{C} \{x\} \exists U_y, U_x : U_y \cap U_x = \emptyset$ cioè in particolare $U_y \subseteq \mathcal{C} \{x\}$. Quindi $\mathcal{C} \{x\}$ è aperto. \square

Vediamo che non vale il viceversa:

³Preferiremo la notazione T_2 perché ci da fastidio dire che uno spazio topologico sia “di Hausdorff”.

Esempio 5 (Topologia di Zariski). Sia τ_z una topologia su \mathbb{R} i cui aperti sono i complementari di insiemi finiti:

$$\tau_z := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A = \emptyset \vee (A = \mathcal{C} F \wedge \# F \in \mathbb{N})\}$$

Gli aperti non vuoti non sono disgiunti, quindi (\mathbb{R}, τ_z) non è T_2 . Però i singoletti sono chiusi.

Osservazione 8. La topologia euclidea è più fine di τ_z .

Proposizione 16. *La proprietà T_2 passa ai sottospazi.*

Dimostrazione. Sia $\chi \subseteq X$. $\forall x \neq y \in \chi \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$, per $x, y \in \chi$ prendiamo come intorni $U_x \cap \chi$ e $U_y \cap \chi$. \square

Proposizione 17. *La proprietà T_2 è invariante per omeomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo. Mostriamo che $Y \text{ è } T_2 \implies X \text{ è } T_2$:

$$\begin{aligned} \forall x_1 \neq x_2 \in X : \\ y_1 := f(x_1), y_2 := f(x_2) \\ f \text{ iniettiva} &\rightarrow y_1 \neq y_2 \\ Y \text{ è } T_2 &\rightarrow \exists U_{y_1}, U_{y_2} \text{ aperti} : U_{y_1} \cap U_{y_2} = \emptyset \\ U_{x_1} := f^{-1}(U_{y_1}), U_{x_2} := f^{-1}(U_{y_2}) \\ U_{y_1} \cap U_{y_2} = \emptyset &\rightarrow U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset \\ f \text{ continua} &\rightarrow U_{x_1}, U_{x_2} \text{ sono aperti} \end{aligned}$$

Applicando lo stesso ragionamento a f^{-1} si mostra che $X \text{ è } T_2 \implies Y \text{ è } T_2$. \square

Osservazione 9. In generale le proprietà che dipendono solo dalla topologia sono invarianti per omeomorfismo, perché un omeomorfismo induce una bigezione tra le topologie tale che due aperti corrispondenti sono messi in bigezione dall'omeomorfismo.

Esempio 6. Sia $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'identità e τ_E la topologia euclidea. id è continua rispetto a $\tau_E \rightarrow \tau_z$ perché $\tau_E \supseteq \tau_z$, però non nell'altro verso. Infatti (\mathbb{R}, τ_E) è T_2 ma (\mathbb{R}, τ_z) no, quindi non possono essere omeomorfi.

1.7 Numerabilità

Di solito con insieme numerabile si intende un insieme con la cardinalità dei numeri naturali. Per brevità di notazione chiameremo numerabili anche gli insiemi finiti:

Definizione 23 (Numerabilità). S numerabile $:\Leftrightarrow \# S \leq \# \mathbb{N}$

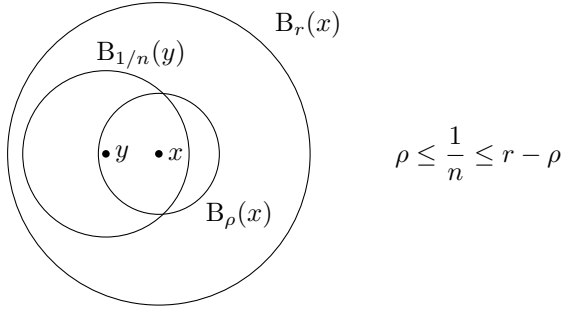


Figura 1: Costruzione di $B_{1/n}(y)$ tale che $B_{1/n}(y) \subseteq B_r(x)$ e $x \in B_{1/n}(y)$.

Definizione 24 (1-numerabilità). Uno spazio topologico è *1-numerabile* se ogni punto ha una base di intorni numerabile.

Proposizione 18. *metrizzabile \implies 1-numerabile*

Dimostrazione. Avevamo già osservato che le palle aperte centrate in un punto formano una base di intorni per il punto. Ci basta scegliere la sottofamiglia numerabile $\{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, che è ancora una base perché $\forall r \exists n : B_{1/n}(x) \subseteq B_r(x)$. \square

Definizione 25 (2-numerabilità). Uno spazio topologico è *2-numerabile* se ha una base di aperti numerabile.

Lemma 19. *2-numerabile \implies 1-numerabile*

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} una base di aperti di X numerabile. $\forall x \in X$ sia $\mathcal{B}_x := \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$. \mathcal{B}_x è numerabile ed è una base di intorni di x . \square

Definizione 26 (Densità). Un sottospazio è denso se interseca tutti gli aperti:

$$Y \text{ denso in } X \iff \begin{cases} Y \subseteq X \\ \forall A \text{ aperto, } A \neq \emptyset : A \cap Y \neq \emptyset \end{cases}$$

Lemma 20. *Uno spazio metrizzabile che contiene un denso numerabile è 2-numerabile:*

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ metrizzabile} \\ Y \text{ denso in } X \text{ e numerabile} \end{array} \right\} \implies X \text{ 2-numerabile}$$

Dimostrazione. Mostriamo che $\{B_{1/n}(y) \mid y \in Y \wedge n \in \mathbb{N}\}$ è una base di aperti di X . Ogni aperto A si può scrivere come $A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x)$. Scegliamo $\rho_x < r_x$ abbastanza piccolo tale che $\exists n_x \in \mathbb{N} : \rho_x \leq 1/n_x \leq r_x - \rho_x$ (vedi Figura 1). Consideriamo $B_{\rho_x}(x)$: è un aperto non vuoto quindi $\exists y_x \in Y \cap B_{\rho_x}(x)$. Poniamo $A' := \bigcup_{x \in A} B_{1/n_x}(y_x)$. Allora $A' \subseteq A$ perché $B_{1/n_x}(y_x) \subseteq B_{r_x}(x)$ e $A \subseteq A'$ perché $x \in B_{1/n_x}(y_x)$, quindi $A = A'$. \square

Esempio 7. \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} e numerabile, quindi \mathbb{R} è 2-numerabile. Si noti che nel dimostrare il Lemma 20 abbiamo usato la densità di \mathbb{Q} .

Costruiamo ora una topologia che sia 1-numerabile ma non 2-numerabile:

Definizione 27. Sia τ_s una topologia su \mathbb{R} generata dagli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra:

$$\tau_s := \left\{ \bigcup \mathcal{I} \mid \mathcal{I} \subseteq \{[a; b) \mid a \leq b\} \right\}$$

Proposizione 21. τ_s è più fine di τ_E .

Dimostrazione. Infatti la topologia euclidea è generata dagli intervalli aperti, e ogni intervallo aperto si può scrivere come:

$$(c; d) = \bigcup_{\substack{a > c \\ a < d}} [a; d) \quad \square$$

Proposizione 22. τ_s è 1-numerabile.

Dimostrazione. Infatti $\{[x; x + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una base di intorni di x numerabile. \square

Proposizione 23. \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} secondo τ_s .

Dimostrazione. Segue dalla densità di \mathbb{Q} secondo τ_E . \square

Proposizione 24. τ_s è T_2 .

Dimostrazione. Presi $x < y \exists z : x < z < y$ quindi $[x; z) \cap [y; \infty) = \emptyset$. \square

Proposizione 25. τ_s non è 2-numerabile.

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} una base di aperti. Abbiamo che:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists B_x \in \mathcal{B} : \begin{cases} x \in B_x \\ B_x \subseteq [x; \infty) \end{cases}$$

Quindi $y \neq x \rightarrow B_y \neq B_x$, cioè l'applicazione $(x \mapsto B_x)$ da \mathbb{R} in \mathcal{B} è iniettiva, ovvero $\#\mathcal{B} \geq \#\mathbb{R}$. \square

Osservazione 10. Quindi 1-numerabilità non implica 2-numerabilità.

Seguono due proposizioni analoghe a quelle mostrate per la proprietà T_2 :

Proposizione 26. *Le proprietà di numerabilità passano ai sottospazi.*

Proposizione 27. *Le proprietà di numerabilità sono invarianti per omeomorfismo.*

Gli spazi numerabili si possono studiare usando le successioni, cioè le applicazioni con dominio \mathbb{N} . Indichiamo con (a_n) l'applicazione $(n \mapsto a_n)$:

Definizione 28 (Convergenza). Si dice che (a_n) converge a x se è definitivamente contenuta in ogni intorno di x :

$$a_n \rightarrow x :\Leftrightarrow \forall U_x \exists N \forall n \geq N : a_n \in U_x$$

Diamo ora una definizione che ci servirà per dimostrare la Proposizione 29:

Definizione 29. Una base di intorni annidati è una base di intorni numerabile ordinata per inclusione:

$$\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ base di intorni annidati } :\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{U_n\} \text{ base di intorni} \\ \forall n : U_{n+1} \subseteq U_n \end{array} \right.$$

Proposizione 28. Una base di intorni numerabile induce una base di intorni annidati.

Dimostrazione. Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base di intorni. Definiamo $U'_k = \bigcap_{n=0}^k U_n$. U'_k è un intorno perché è un'intersezione finita di intorni. $\{U'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una base di intorni annidati perché gli U'_k sono tutti contenuti negli U_n , e per costruzione sono annidati. \square

Proposizione 29. In uno spazio 1-numerabile, ai punti di accumulazione di un insieme convergono sottosuccessioni a valori nell'insieme:

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ 1-numerabile} \\ Y \subseteq X \\ x \text{ accumulazione per } Y \end{array} \right\} \Rightarrow \exists (a_n) \subseteq Y : a_n \rightarrow x$$

Dimostrazione. Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base di intorni annidati di x . Poiché x è di accumulazione per Y , $\forall n \exists a_n \in (U_n \setminus \{x\}) \cap Y$. La successione (a_n) converge a x perché gli U_n sono annidati. \square

1.8 Connessione

Con la proprietà di connessione vogliamo rendere l'idea intuitiva che uno spazio sia “tutto attaccato”.

Definizione 30 (Connessione). Uno spazio è connesso se non è esprimibile come unione di due aperti disgiunti non vuoti:

$$X \text{ sconnesso } :\Leftrightarrow \exists A, B \text{ aperti } : \left\{ \begin{array}{l} X = A \cup B \\ A \cap B = \emptyset \\ A, B \neq \emptyset \end{array} \right.$$

Proposizione 30. In uno spazio connesso, gli unici insiemi sia aperti che chiusi sono lo spazio stesso e il vuoto:

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ connesso} \\ A \subseteq X \\ A \text{ aperto e chiuso} \end{array} \right\} \Rightarrow A = X \vee A = \emptyset$$

Dimostrazione. A è chiuso quindi $\mathcal{C} A$ è aperto, e $X = A \cup \mathcal{C} A$. Se fosse $A, \mathcal{C} A \neq \emptyset$, X sarebbe sconnesso. \square

Proposizione 31. I connessi di \mathbb{R} sono gli intervalli:

$$Y \subseteq \mathbb{R} \text{ connesso secondo } \tau_E \iff Y \text{ è un intervallo}$$

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni:

\Rightarrow Se Y non fosse un intervallo, avremmo $\exists x \in (\inf Y; \sup Y) : x \notin Y$. Ma allora $Y = (Y \cap (-\infty; x)) \cup (Y \cap (x; \infty)) \not\subseteq$.

\Leftarrow Supponiamo per assurdo che Y sia sconnesso. Allora $Y = A_1 \cup A_2$ aperti (nella topologia di Y) disgiunti non vuoti. In particolare $\exists x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ WLOG $x_1 < x_2$. Poiché Y è un intervallo, $[x_1; x_2] \subseteq Y$. Poniamo:

$$\xi := \sup(A_1 \cap [x_1; x_2]) = \min(x_2, \sup A_1)$$

ξ è di accumulazione per A_1 e A_2 , quindi $\xi \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Ma essendo gli A_i complementari in Y , $A_i = \overline{A_i} \not\subseteq$. \square

Teorema 32. L'immagine continua di connessi è connessa:

$$\left. \begin{array}{l} f : X \rightarrow Y \text{ continua} \\ X \text{ connesso} \end{array} \right\} \Rightarrow f(X) \text{ connesso}$$

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo $f(X) = B_1 \cup B_2$, B_1, B_2 aperti disgiunti non vuoti. $A_1 := f^{-1}(B_1)$ e $A_2 := f^{-1}(B_2)$ sono aperti per continuità di f . Inoltre sono non vuoti, disgiunti e $X = A_1 \cup A_2$, assurdo. \square

Osservazione 11. La connessione è invariante per omeomorfismo, ma *non* passa ai sottospazi.

Definizione 31 (Arco). Un arco in X è un'applicazione $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continua con topologia euclidea sul dominio.

Diciamo che una arco γ collega due punti x_0, x_1 se $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

Definizione 32 (Connessione per archi). Uno spazio topologico è *connesso per archi* se ogni sua coppia di punti è collegata da un arco:

$$X \text{ connesso per archi} :\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in X \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X : \begin{cases} \gamma \text{ continua} \\ \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = x_1 \end{cases}$$

Proposizione 33. $X \text{ connesso per archi} \implies X \text{ connesso}$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $X = A_0 \cup A_1$ aperti non vuoti disgiunti. Siano $x_0 \in A_0$ e $x_1 \in A_1$, e γ un arco che li collega. L'intervallo $[0, 1]$ è connesso quindi $\gamma([0, 1])$ è connesso per continuità di γ . Ma posso anche scriverlo come $\gamma([0, 1]) = (A_0 \cap \gamma([0, 1])) \cup (A_1 \cap \gamma([0, 1]))$ che è sconnesso \nmid . \square

Esercizio 1. Non è vero il viceversa! Si prendano gli insiemi in \mathbb{R}^2 :

$$Y_1 := \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \quad Y_2 := \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$Y = Y_1 \cup Y_2$ è connesso ma non per archi.

Invece per gli aperti di \mathbb{R}^n il viceversa vale:

Proposizione 34. $A \subseteq (\mathbb{R}^n, \tau_E)$ aperto connesso $\implies A$ connesso per archi

Dimostrazione. Introduciamo la seguente relazione di equivalenza su A :

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ sono collegati da un arco}$$

È una buona definizione perché, dati x, y collegati da γ e y, z collegati da η , la concatenazione ζ di γ e η :

$$\zeta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \eta(2t - 1) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è continua. Infatti $\zeta^{-1}(S \subseteq A) = \gamma^{-1}(S) \cup \eta^{-1}(S)$.

Andiamo a mostrare che, fissato $x \in A$, la sua classe di equivalenza $[x]$ è un insieme sia aperto che chiuso. La Proposizione 30 conclude.

Sia $y \in [x]$ cioè $y \in A$, $y \sim x$. Per ipotesi esiste una palla aperta $B_r(y) \subseteq A$. Abbiamo che $\forall z \in B_r(y) : z \sim x$ perché z è collegato a y tramite l'arco radiale:

$$\rho(t) = y + t(z - y), \quad d_E(y, \rho) \leq d_E(y, z)$$

Dunque $B_r(y) \subseteq [x]$.

Per mostrare che l'insieme è chiuso basta vedere che il complementare è aperto. Ma se un punto y non è collegato a x , allora i punti z in una palletta intorno a lui non possono essere collegati a x : altrimenti potrei collegare y a x passando per z con un arco radiale tra z e y . \square

Definizione 33 (Componenti connesse per archi). Su uno spazio topologico X arbitrario, le classi di equivalenza per la relazione sopra definita sono dette *componenti connesse per archi* di X .

1.9 Compattezza

Generalmente la proprietà di compattezza è utile in spazi T_2 , tuttavia non esiste una convenzione globalmente accettata riguardo al richiedere o meno che uno spazio compatto sia necessariamente T_2 . Noi intenderemo sempre implicitamente che sia T_2 .

Esistono due nozioni di compattezza, non sempre equivalenti:

Definizione 34 (Compattezza per ricoprimenti). Uno spazio topologico X è *compatto per ricoprimenti* se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Definizione 35 (Compattezza per successioni). X è *compatto per successioni* se ogni successione a valori in X ammette una sottosuccessione convergente in X .

Generalmente quando diciamo solo “compatto” intendiamo “compatto per ricoprimenti”.

Proposizione 35. *I sottospazi compatti di un compatto sono i chiusi:*

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ compatto} \\ Y \subseteq X \end{array} \right\} \implies (Y \text{ compatto} \iff Y \text{ chiuso})$$

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni:

\Leftarrow Un ricoprimento aperto di Y corrisponde a una famiglia \mathcal{A} di aperti di X tale che $Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. La famiglia $\mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$ è un ricoprimento aperto di tutto X , da cui per compattezza posso estrarre un sottoricoprimento finito \mathcal{F} di X . \mathcal{F} dovrà necessariamente contenere solo elementi di \mathcal{A} , allora $\{F \cap Y \mid F \in \mathcal{F}\}$ è il sottoricoprimento di Y cercato.⁴

\Rightarrow Voglio mostrare che $X \setminus Y$ è aperto. Fisso $y \in X \setminus Y$. Per T_2 , $\forall x \in Y \exists U_x, W_x$ aperti disgiunti, $x \in U_x, y \in W_x$.

Si osservi che $\bigcup_{x \in Y} U_x$ è ricoprimento di Y . Per compattezza, posso estrarre un sottoricoprimento finito U_1, \dots, U_n . Considero i rispettivi insiemi aperti W_1, \dots, W_n che assieme agli U_i separavano i punti.

Allora $W := \bigcap_{i=1}^n W_i$ è un intorno di y , che contiene solo punti di $X \setminus Y$ perché gli U_i ricoprono Y . \square

⁴Si osservi che non abbiamo usato la proprietà T_2 di X .

Ci accingiamo ora a mostrare sotto che ipotesi la compattezza per ricoprimenti equivale alla compattezza per successioni.

Lemma 36. *I sottoinsiemi infiniti di uno spazio compatto hanno punti di accumulazione:*

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ compatto} \\ Y \subseteq X \\ Y \text{ infinito} \end{array} \right\} \implies \exists y \in X \text{ punto di accumulazione per } Y$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che tutti gli $x \in X$ non siano di accumulazione per Y . Abbiamo due casi:

- $x \in X \setminus Y \implies \exists U_x : U_x \cap Y = \emptyset$
- $x \in Y \implies \exists U_x : U_x \cap Y = \{x\}$

La famiglia di interni $\{U_x\}_{x \in X}$ ricopre X (posso scegliere gli interni aperti). Per compattezza estraggo U_1, \dots, U_n sottoricoprimento finito. Ma allora Y è contenuto in un insieme finito:

$$Y = \bigcup_{i=1}^n (U_i \cap Y) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \quad \square$$

Proposizione 37. *X 1-numerabile e compatto $\implies X$ compatto per successioni*

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in X . Si hanno allora due casi:

- se assume un numero finito di valori ne assumerà uno di questi infinite volte, quindi posso estrarre una sottosuccessione costante;
- se assume un numero infinito di valori distinti allora per il Lemma 36 si ha che $\exists x \in X$ di accumulazione per $\{a_n\}$.

Nel secondo caso la sottosuccessione si estrae per 1-numerabilità, infatti, presa una base di interni $\{U_n\}$ di x **WLOG** annidati, costruisco induttivamente la sottosuccessione (a_{n_k}) in modo che $a_{n_k} \in U_k$:

$$\begin{aligned} n_0 &:= \min\{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in U_0\} \\ n_k &:= \min\{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in U_k \wedge m > n_{k-1}\} \end{aligned}$$

Questa è una buona definizione perché gli n_k sono strettamente crescenti e perché x è di accumulazione per $\{a_n\}$. La sottosuccessione converge a x perché abbiamo preso gli interni annidati. \square

Osservazione 12. Se un punto x è di accumulazione per un dato insieme in uno spazio T_2 si ha che ogni intorno di x interseca l'insieme in infiniti punti. Infatti, supponendo che l'intersezione sia invece finita, sottraggo questi punti (tranne eventualmente x) all'intorno, che rimane un intorno di x perché in uno spazio T_2 i singoletti sono chiusi e l'intersezione finita di aperti è aperta, ma non ha punti in comune con l'insieme a parte al più x , assurdo.

Proposizione 38. *X 2-numerabile e compatto per successioni $\implies X$ compatto*

Dimostrazione. Dato un ricoprimento \mathcal{R} di X , da esso ne devo estrarre uno finito.

Otteniamo prima un risultato intermedio, cioè l'estrazione di un sottoricoprimento numerabile. In questo primo passaggio non è coinvolta l'ipotesi di compattezza per successioni. Sia dunque \mathcal{B} una base numerabile di aperti di X . Allora dalle definizioni di ricoprimento e base abbiamo che:

$$\forall x \in X \quad \exists R_x \in \mathcal{R} : x \in R_x \quad \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq R_x$$

La famiglia dei B_x è numerabile. Se per ogni $B \in \{B_x\}_{x \in X}$ scelgo un solo $R_B \in \{R_x \mid B_x = B\}$ ho un sottoricoprimento numerabile.

Il secondo passaggio è estrarre da un ricoprimento numerabile un sottoricoprimento finito. Per assurdo, se il ricoprimento $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non ammette un sottoricoprimento finito, posso costruire una successione tale che $a_n \notin \bigcup_{i=0}^n R_i$ (altrimenti $\{R_i\}_{i \leq n}$ ricopre). Ma una sottosuccessione convergente di (a_n) sarebbe definitivamente contenuta in un R_i . \square

Corollario 39. *Per uno spazio 2-numerabile si ha che: compatto \iff compatto per successioni.*

1.9.1 Compattezza in spazi metrizzabili

Se uno spazio metrizzabile è compatto questa proprietà risulta avere conseguenze “importanti” su ogni spazio metrico che induce la topologia.

Definizione 36. Sia (X, d) uno spazio metrico. Esso si dice *totalmente limitato* se $\forall \varepsilon > 0 : X$ è ricoperto da un numero finito di palle di raggio ε .

Proposizione 40. *Sia (X, τ_d) compatto per successioni, allora ogni metrica inducente (X, d) è totalmente limitata.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo $\exists \varepsilon > 0$ tale che X non è ricoperto da un numero finito di palle di raggio ε . Allora dato $x_0 \in X$ esiste una successione (x_n) tale che $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=0}^n B_\varepsilon(x_i)$. Questa successione non ammette una sottosuccessione convergente perché i punti distano fra loro almeno ε , da cui l'assurdo. \square

Proposizione 41. *(X, τ_d) compatto per successioni $\implies X$ 2-numerabile*

Dimostrazione. $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste una famiglia finita \mathcal{F}_n di palle aperte di raggio 2^{-n} che ricopre X , per totale limitatezza. Sia $\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. Abbiamo che \mathcal{B} è numerabile, per verificare che è anche una base di τ_d mostriamo prima che se \mathcal{A} è un ricoprimento di X allora esiste un \bar{n} tale che ogni palla di $\mathcal{F}_{\bar{n}}$ è contenuta in uno degli aperti di \mathcal{A} . Poniamo:

$$\forall x \in X \quad n_x := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists A \in \mathcal{A} : B_{2^{-n}}(x) \subseteq A\}$$

È una buona definizione perché le palle $B_{2^{-n}}(x)$ sono arbitrariamente piccole. Ora invertiamo n_x , cioè per ogni $n \in \{n_x\}_{x \in X}$ scegliamo un x_n tale che $n_{x_n} = n$. Per assurdo, supponiamo che gli n_x non abbiano massimo: allora (x_n) è una successione e ha una sottosuccessione convergente a un punto \bar{x} . Quindi gli x_n sono frequentemente contenuti in $B_{2^{-(1+n_{\bar{x}})}}(\bar{x})$, e quindi c'è un $m > 1 + n_{\bar{x}}$ tale che $n_{x_m} \leq 1 + n_{\bar{x}} < m$. Il massimo degli n_x è \bar{n} che cercavamo.

$\forall A \in \tau_d \forall x \in A$ consideriamo $\mathcal{A} := \{A, X \setminus \{x\}\}$. È un ricoprimento perché in uno spazio metrico i singoletti sono chiusi. Allora le palle di $\mathcal{F}_{\bar{n}}$ che contengono x sono contenute in A e al variare di x queste palle ricoprono A . \square

Corollario 42. *metrizzabile \implies (compatto \iff compatto per successioni)*

Proposizione 43. *Per un insieme in (\mathbb{R}^n, τ_E) vale che: compatto \iff chiuso e limitato.*

Dimostrazione. (\mathbb{R}^n, τ_E) è metrizzabile quindi compatto equivale a compatto per successioni. Mostriamo le due implicazioni:

\Rightarrow Per assurdo:

Limitatezza Se l'insieme è illimitato allora contiene una successione che tende a ∞ . Le sottosuccessioni di questa tendono necessariamente anch'esse a ∞ .

Chiusura Se l'insieme non è chiuso allora è più piccolo della sua chiusura, quindi c'è un punto di accumulazione x fuori dall'insieme. Lo spazio è 1-numerabile quindi c'è una successione contenuta nell'insieme che tende a x . Tutte le sottosuccessioni di questa convergono a x .

\Leftarrow È sostanzialmente il teorema di Bolzano-Weierstrass. Osserviamo che funziona perché \mathbb{R}^n ha dimensione finita. \square

Esercizio 2. (X, τ_d) compatto $\iff (X, d)$ completo e totalmente limitato

1.9.2 Compattezza e funzioni continue

Lemma 44. *L'immagine continua di un compatto è compatta.*⁵

⁵Non stiamo dimostrando che l'immagine continua di T_2 è T_2 .

Dimostrazione. Sia X compatto e $f : X \rightarrow Y$ continua. Vogliamo dimostrare che $f(X)$ con la topologia di sottospazio è compatto.

Prendiamo dunque un ricoprimento aperto \mathcal{A} di $f(X)$. Consideriamo $\mathcal{A}_X := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$. Per definizione di continuità, gli elementi di \mathcal{A}_X sono aperti, mentre per ragioni insiemistiche ricoprono X . Allora da \mathcal{A}_X posso estrarre un sottoricoprimento finito \mathcal{A}_X^F . Tornando indietro, l'insieme $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}_X^F\}$ è un sottoricoprimento finito di \mathcal{A} . \square

Lemma 45. *L'immagine continua di un compatto per successioni è compatta per successioni.*

Dimostrazione. Siano X compatto per successioni e $f : X \rightarrow Y$ continua, vogliamo dimostrare che $f(X)$ è compatto per successioni.

Sia $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in Y . Per ognuno degli y_n scelgo un $x_n \in f^{-1}(y_n)$, definendo così una successione in X . Estraggo da essa una sottosuccessione convergente (x_{n_k}) (esiste poiché X è compatto per successioni). Tornando indietro, $(f(x_{n_k}))$ è una sottosuccessione di (y_n) e converge per continuità di f . \square

Lemma 46. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e X è compatto allora f ammette massimo e minimo assoluti.*

Dimostrazione. L'immagine continua di compatti è compatta, dunque $f(X)$ è compatto. Ma in \mathbb{R} compatto equivale a chiuso e limitato. Dalla limitatezza segue che esiste, in \mathbb{R} , estremo superiore e inferiore, dalla chiusura che essi sono in $f(X)$. \square

Lemma 47. *Se X è compatto e $f : X \rightarrow Y$ è continua e invertibile, allora f^{-1} è continua (corollario: è un omeomorfismo).*

Dimostrazione. Per prima cosa mostriamo che f è chiusa (cioè manda chiusi in chiusi). Sia $C \subseteq X$ chiuso. X è compatto quindi C è compatto. L'immagine continua di compatti è compatta quindi $f(C)$ e $Y = f(X)$ sono compatti. $f(C)$ è un sottospazio compatto di Y quindi è chiuso.

Sia ora $A \subseteq X$ aperto. Il suo complementare $\mathcal{C}A$ è un chiuso di X , allora la sua immagine $f(\mathcal{C}A)$ è un chiuso di Y ovvero $\mathcal{C}f(\mathcal{C}A)$ è aperto. Per invertibilità, $\mathcal{C}f(\mathcal{C}A) = f(A)$. Abbiamo quindi che f^{-1} è continua. \square

1.10 Topologia prodotto e topologia quoziente

Definiamo ora delle operazioni fra spazi topologici che ci permettano di costruirne altri in maniera "naturale".

Definizione 37 (Topologia prodotto). Siano X, Y spazi topologici. La *topologia prodotto* è la topologia meno fine su $X \times Y$ tale che le proiezioni canoniche $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$ sono continue.

Osservazione 13. Si vede come la condizione sulle proiezioni non sia impossibile da soddisfare. Infatti la topologia discreta sul prodotto cartesiano soddisfa banalmente.

Fatto 1. *La topologia prodotto esiste ed è generata dalle controimmagini secondo le proiezioni canoniche di aperti di X e di Y , ovvero dalla base di aperti:*

$$\{A_X \times A_Y \mid A_X \text{ aperto di } X \wedge A_Y \text{ aperto di } Y\}$$

Fatto 2. *Proprietà comuni di compattezza, connessione, T_2 , 1- o 2-numerabilità si propagano allo spazio prodotto.*

Osservazione 14. Il prodotto si estende a prodotto di più fattori, e si ha:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

Osservazione 15. Data una funzione surgettiva $f : X \rightarrow Y$, la relazione $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ è di equivalenza, e l'insieme quoziente si identifica con Y perché $X/\sim = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$.

Viceversa, data una relazione di equivalenza \sim su X , la proiezione che manda un elemento nella sua classe di equivalenza

$$f := (x \mapsto [x]_\sim) : X \rightarrow X/\sim$$

è surgettiva e ha la proprietà che $a \sim b \iff f(a) = f(b)$.

Definizione 38 (Topologia quoziente). Siano X uno spazio topologico e \sim una relazione di equivalenza su X . La *topologia quoziente* è la topologia più fine su X/\sim tale che la proiezione $x \mapsto [x]_\sim$ è continua.

Osservazione 16. Anche questa volta, se l'esistenza di topologie che rendano continua l'immersione è palese (basti pensare alla topologia banale), non è affatto scontato che esista una “topologia più fine possibile”.

Definizione 39 (Insieme f -satturo). Data una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice f -satturo un $X' \subseteq X$ tale che $f^{-1}(f(X')) = X'$.

Fatto 3. *La topologia quoziente su X/\sim esiste ed è data dalle immagini attraverso $f := (x \mapsto [x]_\sim)$ di aperti f -saturi di X .*

Fatto 4. *Le proprietà di connessione e compattezza si propagano al quoziente.*

Esercizio 3. La topologia quoziente è data dagli insiemi la cui controimmagine attraverso la proiezione è aperta.

Capitolo 2

Varietà

C'era una volta un nero serpentello
sul verde schermo di un telefonino
e mosso da veloce polpastrello
guatava i frutti del suo bel giardino.

Non viveva chiuso da alcun cancello:
nessun lato fermava il suo cammino,
e se da questo spariva, da quello
andava verso il prossimo spuntino.

Di vivere in un ritto piano il moro
serpente credeva, poiché era dura
immaginare che se io accosto

dello schermo ogni lato a quello opposto
di quel mondo si svela la natura:
non ha forma di un piano, ma di un toro.

2.1 Definizioni di base

Definizione 40 (Localmente euclideo). Uno spazio topologico X è detto *localmente n -euclideo* se $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto U di x e un omeomorfismo $f : U \rightarrow W \subseteq (\mathbb{R}^n, \tau_E)$ con W aperto. Si hanno le seguenti denominazioni:

- (U, f) è detta *carta locale* di X intorno a x ;
- $f^{-1} : W \rightarrow U$ è detta *parametrizzazione locale* di X intorno a x ;
- la famiglia delle carte locali è detta *atlante*.

Definizione 41 (Varietà). Una *n -varietà* è uno spazio topologico localmente n -euclideo, T_2 e 2-numerabile.

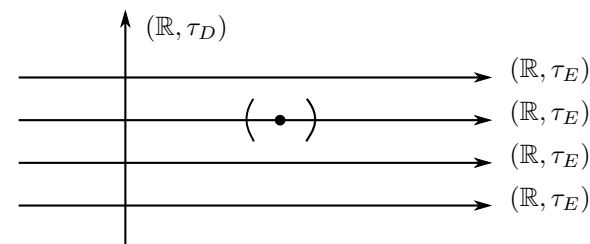


Figura 2: $(\mathbb{R}, \tau_E) \times (\mathbb{R}, \tau_D)$ è localmente 1-euclideo ma non 2-numerabile.

Proposizione 48. *localmente euclideo $\not\Rightarrow$ 2-numerabile*

Dimostrazione. Si consideri $X = (\mathbb{R}^n, \tau_E) \times (\mathbb{R}, \tau_D)$. Tale spazio è localmente n -euclideo, ma non 2-numerabile (vedi Figura 2). Un controesempio minimale è (X, τ_D) con X non numerabile, questi è localmente 0-euclideo, ma non 2-numerabile. \square

Proposizione 49. *localmente euclideo $\not\Rightarrow T_2$*

Dimostrazione. Prese 2 copie di (\mathbb{R}^n, τ_E) sia $(x, 0) \in (\mathbb{R}_0^n, \tau_0)$ e $(x, 1) \in (\mathbb{R}_1^n, \tau_1)$, e sia $X = (\mathbb{R}_0^n \cup \mathbb{R}_1^n, \{A_0 \cup A_1 \mid A_0 \in \tau_0, A_1 \in \tau_1\})$. Si consideri la relazione di equivalenza $(x, 0) \sim (x, 1)$ se $x > 0$ mentre gli altri elementi fanno classe a sé. Si consideri l'insieme quoziente X/\sim e la funzione $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X/\sim$ che manda $t \mapsto [(t, 0)]$. Si verifica che f è un omeomorfismo (esercizio) che rende X/\sim localmente 1-euclideo. Tuttavia X/\sim non è T_2 in quanto non è possibile separare i punti $[(0, 0)]$ e $[(0, 1)]$ (vedi Figura 3). \square

2.1.1 Esempi di varietà

- (\mathbb{R}^n, τ_E)

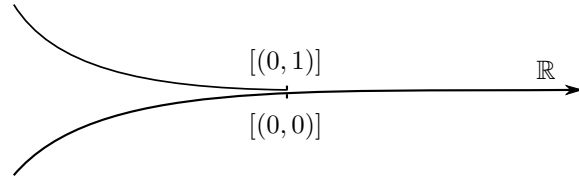


Figura 3: $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ quozientato in modo che l'unione non sia disgiunta sulla semiretta positiva; i punti nell'origine sono disgiunti ma non separati.

- Ogni aperto di \mathbb{R}^n
- Le n -sfere:

$$S^n \subseteq (\mathbb{R}^{n+1}, \tau_E), \quad S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Osservazione 17. S^n è compatto, T_2 e 2-numerabile.

Proposizione 50. S^n è localmente n -euclideo.

Dimostrazione. Dobbiamo esibire un atlante \mathcal{A} . Siano $N := (0, 0, \dots, 1)$ e $S := (0, 0, \dots, -1)$ il polo Nord e il polo Sud. Siano f_N e f_S le proiezioni stereografiche di centro N ed S così definite:

$$f_N : (S^n \setminus \{N\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1 - x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

E analogamente f_S . Allora abbiamo l'atlante:

$$\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{N\}, f_N), (S^n \setminus \{S\}, f_S)\}$$

□

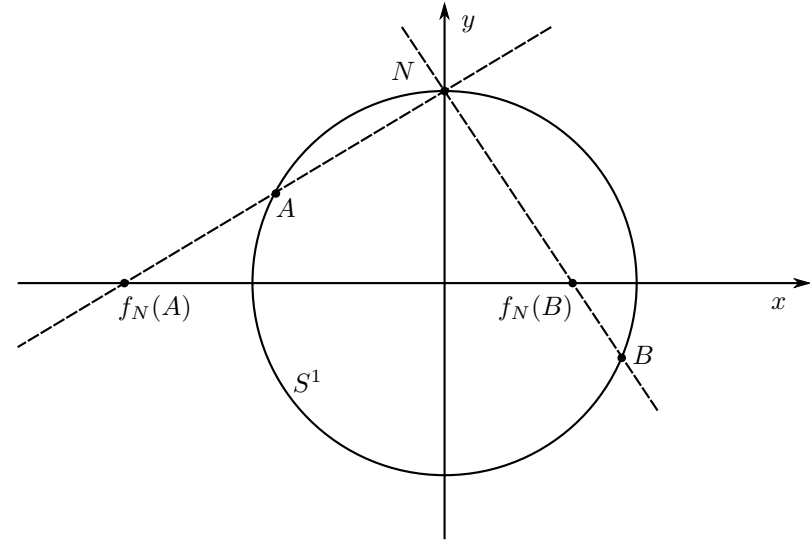


Figura 4: La proiezione stereografica f_N di centro N su S^1 .

2.2 Spazio proiettivo (reale)

Sia $\mathbb{R}_0^n := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (come sottospazio topologico); introduciamo su \mathbb{R}_0^{n+1} la relazione \sim (di equivalenza proiettiva):

$$x, y \in \mathbb{R}_0^{n+1}, \quad x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x = \lambda y$$

Le relative classi di equivalenza sono date da $[x]_{\sim} = \text{span}(x) \setminus \{0\}$. Inoltre, essendo $S^n \subset \mathbb{R}_0^{n+1}$, posso restringere tale relazione di equivalenza a S^n , ottenendo \sim_S (rispetto a cui le classi di equivalenza sono date da $[x]_{\sim_S} = \{x, -x\} = [x]_{\sim} \cap S^n$). Consideriamo ora gli insiemi quoziente $X := \mathbb{R}_0^{n+1} / \sim$ e $Y := S^n / \sim_S$, con le rispettive proiezioni $\pi : \mathbb{R}_0^{n+1} \rightarrow X$ e $\pi_S : S^n \rightarrow Y$.

Osservazione 18. L'applicazione $[x]_{\sim} \mapsto \text{span}(x)$ è una biiezione tra X e $\{V \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \mid V \text{ è SSV}^1 \text{ di dimensione } 1\}$.

Vogliamo mostrare che X è omeomorfo a Y . Si ricorda che gli aperti della topologia quoziente sono le immagini degli aperti saturi rispetto alla proiezione.

Definizione 42 (Cono). Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}_0^n$ è un *cono* se $\text{span}(C) \setminus \{0\} \subseteq C$ (e dunque, poiché $x \in \text{span}(x)$, se $\text{span}(C) \setminus \{0\} = C$).

Esercizio 4. Valgono le seguenti:

¹Sottospazio vettoriale.

- $A \subseteq \mathbb{R}_0^{n+1}$ è π -saturato $\iff A$ è un cono.
- $A \subseteq S^n$ è π_S -saturato $\iff \forall x \in A : -x \in A$.

Proposizione 51. La biiezione $[x]_{\sim_S} \mapsto [x]_{\sim}$ (con inversa $[y]_{\sim} \mapsto [y]_{\sim} \cap S$) è un omeomorfismo tra X e Y (rispetto alle topologie quoziente).

Dimostrazione. Per l'Esercizio 4, la biiezione tra

$$\{A \subseteq \mathbb{R}_0^{n+1} \mid A \text{ è } \pi\text{-saturato}\} \quad \text{e} \quad \{A_S \subseteq S^n \mid A_S \text{ è } \pi_S\text{-saturato}\}$$

data semplicemente da $A \mapsto A \cap S^n$, $\text{span}(A_S) \setminus \{0\} \leftrightarrow A_S$ manda aperti in aperti e viceversa, mostrando continuità e apertura di $[x]_{\sim_S} \mapsto [x]_{\sim}$. \square

Definizione 43 (Spazio proiettivo). Questi quozienti sono dunque identificati sotto il nome di *spazio proiettivo reale di dimensione n* , indicato con \mathbb{P}^n .

Proposizione 52. \mathbb{P}^n è una varietà compatta.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che è T_2 , 2-numerabile, compatto e localmente euclideo.

Siano $[x], [y] \in \mathbb{P}^n$ distinti. Tornando alle controimmagini in S^n abbiamo:

$$\pi_S^{-1}([x]) = \{x, -x\}; \quad \pi_S^{-1}([y]) = \{y, -y\}; \quad x \neq \pm y$$

Allora possiamo prendere U_x, U_{-x}, U_y, U_{-y} intorno aperti (rispettivamente di $x, -x, y, -y$) in modo che non si intersechino e che $U_x = -U_{-x}, U_y = -U_{-y}$; le unioni $U_x \cup U_{-x}$ e $U_y \cup U_{-y}$ sono dunque π_S -sature e disgiunte, e passando alle loro immagini otteniamo intorno aperti disgiunti di $[x]$ e $[y]$, dunque \mathbb{P}^n è T_2 . Similmente si può mostrare che è anche 2-numerabile. Inoltre, dalla continuità di π_S e dalla compattezza di S^n segue che \mathbb{P}^n è compatto.

Esibiamo ora un atlante: vedendo \mathbb{P}^n come quoziente di \mathbb{R}_0^{n+1} , consideriamo il piano affine:

$$\Pi_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_0^{n+1} \mid x_i = 1\}$$

Sia $\phi_i : \Pi_i \rightarrow \mathbb{P}^n$ la restrizione di π al piano (vedi Figura 5). È iniettiva e continua. Con $U_i := \phi_i(\Pi_i) \subset \mathbb{P}^n$ e $\tau_i : \Pi_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'isomorfismo naturale, ho $f_i := \tau_i \circ \phi_i^{-1} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ biiettiva e continua, dunque se U_i è aperto, (U_i, f_i) è una carta per \mathbb{P}^n . Ma posto

$$G_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_0^{n+1} \mid x_i = 0\}$$

ho $U_i = \pi(\mathbb{R}_0^{n+1} \setminus G_i)$ e $\mathbb{R}_0^{n+1} \setminus G_i$ è un aperto π -saturato, ergo U_i è aperto. L'unione dei $\mathbb{R}_0^{n+1} \setminus G_i$ è \mathbb{R}_0^{n+1} quindi gli U_i ricoprono \mathbb{P}^n ; dunque $\{(U_i, f_i)\}_{1 \leq i \leq n+1}$ è un atlante per \mathbb{P}^n . \square

Esercizio 5. $\pi_S : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ è un omeomorfismo locale, ovvero $\forall x \in S^n \exists U$ intorno aperto di x tale che $\pi_S(U)$ è aperto in \mathbb{P}^n e $\pi_S|_U : U \rightarrow \pi_S(U)$ è un omeomorfismo.

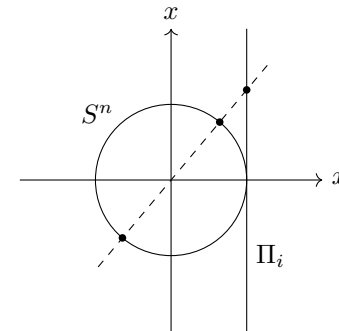


Figura 5: Carta i -esima di \mathbb{P}^n .

2.2.1 Filtrazione di \mathbb{P}^n

Poiché si ha $\pi^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus U_i) = G_i$, il quale è identificabile con \mathbb{R}_0^n , e inoltre $\pi(\mathbb{R}_0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$, valgono:

- $\mathbb{P}^n = U_i \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$;
- $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n .

2.3 Varietà prodotto

Proposizione 53 (Prodotto di varietà). Date M_1 e M_2 n_1 -varietà e n_2 -varietà, $M_1 \times M_2$ è una $(n_1 + n_2)$ -varietà.

Dimostrazione. Devo esibire un atlante. Se $\{(U_i, f_i)\}$ è un atlante per M_1 e $\{(W_j, g_j)\}$ è un atlante per M_2 allora $\{(U_i \times W_j, f_i \times g_j)\}$ è un atlante per il prodotto. Il prodotto di funzioni è definito come segue: sia $f : U \rightarrow A$ e $g : W \rightarrow B$, allora $f \times g : U \times W \rightarrow A \times B$ è la funzione $(p, q) \mapsto (f(p), g(q))$. T_2 e 2-numerabilità sono proprietà che passano al prodotto topologico. \square

Esempio 8.

- $S^p \times S^q$ è una $(p + q)$ -varietà.
- $\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ è chiamato n -toro ed è una n -varietà.

2.4 Varietà differenziabili

Osservazione 19. Gli omeomorfismi sono isomorfismi anche per le varietà.

Fatto 5. S^n è omeomorfo a S^m se e solo se $n = m$, e S^n non è omeomorfo a \mathbb{P}^n , ma non è facile dimostrarlo.

Gli omeomorfismi e in generale le funzioni continue possono essere molto lontani dalla nostra intuizione di “continuo”:

Esempio 9 (Curva di Peano). Esiste una funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ continua e surgettiva.²

Dunque vogliamo definire degli oggetti che siano “più continui”.

Definizione 44 (Differenziabilità in un punto). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile in x se esiste un’applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0$$

Fatto 6. Se L esiste è necessariamente unica.

Definizione 45 (Differenziabilità in un insieme). $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile in Ω se è differenziabile in ogni suo punto.

Definizione 46 (Funzione differenziale). Data una funzione differenziabile $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, la funzione $df : \Omega \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \simeq \mathbb{R}^{nk}$ che manda $x \mapsto L$ è il differenziale di f . Poiché il valore è una funzione, l’argomento si indica a pedice: $d_x f$.

Osservazione 20. Il differenziale è *functoriale*, ovvero:

- $d_x \text{id} = \text{id}$;
- $d_x(f \circ g) = d_{g(x)}f \circ d_x g$;

le quali implicano $d_x(f^{-1}) = d_{f(x)}f$.

Osservazione 21. Se il differenziale è differenziabile, posso costruire induttivamente $d(df) = d^2f$, e analogamente $d(d^2f) = d^3f$ e così via.

Definizione 47. f è n -differenziabile se esiste $d^n f$.

Definizione 48 (Funzione liscia). f è C^∞ o *liscia* se è k -differenziabile $\forall k > 0$.

Fatto 7. Dall’analisi reale sappiamo che f è C^∞ se tutte le derivate parziali esistono e sono continue.

Definizione 49 (Diffeomorfismo). $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subseteq \mathbb{R}^k$ è un *diffeomorfismo* se è C^∞ ed è invertibile con inversa C^∞ .

²Ma non un omeomorfismo.

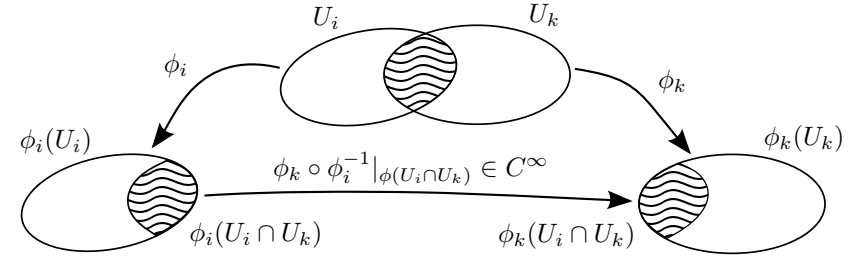


Figura 6: Un atlante è differenziabile se il passaggio da una rappresentazione a un'altra è liscio.

Proposizione 54. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è diffeomorfismo allora $n = k$, cioè la dimensione è un invariante per diffeomorfismo.

Dimostrazione. Sia g la funzione inversa di f . Allora $g \circ f = \text{id}$ e $f \circ g = \text{id}$, in particolare vale che $d(f \circ g) = df \circ dg = \text{id}$ (dall’analisi reale). Dunque valutando il differenziale in un punto ottengo che le due matrici che sono i differenziali della funzione f e della sua inversa sono una l’inversa dell’altra ma per avere un’inversa la matrice deve essere quadrata, dunque il diffeomorfismo conserva le dimensioni. \square

Definizione 50 (Atlante differenziabile). Un atlante è *differenziabile* se, per ogni coppia di carte (U_i, ϕ_i) , (U_k, ϕ_k) , si ha che la funzione $\phi_k \circ \phi_i^{-1}|_{\phi(U_i \cap U_k)}$ è liscia.³

Osservazione 22. Se le carte non si intersecano l’atlante è differenziabile.

Definizione 51 (Atlanti compatibili). Due atlanti differenziabili sulla stessa varietà sono *compatibili* se la loro unione è ancora un atlante differenziabile.

Definizione 52 (Atlante massimale). Per una certa classe di atlanti compatibili, l’unione di tutti gli atlanti possibili è l’*atlante massimale*.

Definizione 53 (Varietà differenziabile). Una varietà dotata di atlante differenziabile è una *varietà differenziabile* o *liscia*.

Osservazione 23. La struttura di varietà differenziabile si identifica con l’atlante massimale.

Fatto 8. Il prodotto di varietà differenziabili è differenziabile.

D’ora in poi chiameremo brevemente “varietà” le varietà lisce e quando vorremo specificare che non è liscia la chiameremo “varietà topologica”.

Data una varietà topologica esiste sempre un atlante differenziabile massimale? È unico? Sono domande a cui non risponderemo.

³Per simmetria, è in effetti un diffeomorfismo.

Proposizione 55. *Lo spazio proiettivo \mathbb{P}^n è una n -varietà differenziabile.*

Dimostrazione. Mostriamo che l'atlante topologico $\{(U_1, f_1), \dots, (U_{n+1}, f_{n+1})\}$ fornito precedentemente è in effetti un atlante differenziabile.

Ricordiamo che U_j è l'immagine tramite f_j^{-1} di \mathbb{R}^n identificato con il piano $\Pi_j = \{x_j = 1\}$, e che $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha quest'espressione:

$$f_j([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_j} \right)$$

dove infatti si ha $x_j \neq 0$ per $[x] \in U_j$. Conseguentemente avrò $f_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ con:

$$f_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

Se adesso mi restringo all'intersezione $U_j \cap U_i$ e considero la composizione:

$$\begin{aligned} f_j \circ f_i^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) &= f_j([\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, 1, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n]) = \\ &= \left(\frac{\xi_1}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_j}, \frac{1}{\xi_j}, \frac{\xi_{i+1}}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_{j-1}}{\xi_j}, \frac{\xi_{j+1}}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_j} \right) \end{aligned}$$

questa funzione è in effetti liscia. \square

Esercizio 6. Si verifichi che anche S^n munito dell'atlante $\{(S^n \setminus \{N\}, f_N), (S^n \setminus \{S\}, f_S)\}$, citato precedentemente, è una n -varietà differenziabile.

Definizione 54 (Carte f -adattate). Siano M, N varietà e $f : M \rightarrow N$. Due carte (U, ϕ) e (W, ψ) rispettivamente di M e N sono f -adattate se $f(U) \subseteq W$.

Definizione 55 (C^∞ su varietà). Con la stessa notazione della definizione precedente, f si dice C^∞ o *liscia* se $\forall x \in M \exists (U_x, \phi), (W, \psi)$ f -adattate tali che $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è liscia. La funzione $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è detta *rappresentazione locale di f* .

Esercizio 7. Se f è C^∞ lo sono anche tutte le sue rappresentazioni locali.

Esercizio 8. C^∞ su varietà \implies continua

Definizione 56 (Diffeomorfismo su varietà). Una funzione tra varietà è un *diffeomorfismo* se è C^∞ , invertibile e con inversa C^∞ . Se tra due varietà esiste un diffeomorfismo, si dicono *diffeomorfe*.

Osservazione 24. Essere diffeomorfe è una relazione più debole della compatibilità tra atlanti.

Esempio 10. Considero lo spazio topologico $M := (\mathbb{R}, \tau_E)$ e due funzioni da M a \mathbb{R} :

$$\phi_0 := \text{id}; \quad \phi_1(x) := \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

$\{(M, \phi_0)\}$ e $\{(M, \phi_1)\}$ sono due atlanti differenziabili (banalmente perchè costituiti da una sola carta), ma non sono compatibili: infatti $\{(M, \phi_0), (M, \phi_1)\}$ non è un atlante differenziabile poichè $\phi_1 \circ \phi_0^{-1} = \phi_1$ che non è differenziabile in 0. Tuttavia le due varietà differenziabili sono diffeomorfe attraverso ϕ_1 , infatti $\phi_0 \circ \phi_1 \circ \phi_1^{-1} = \text{id}$, che evidentemente è differenziabile.

Esempio 11. Più in generale, sia $f : M \rightarrow M_0$ omeomorfismo e $\{(U_i, \phi_i)\}$ atlante differenziabile di M_0 . Allora $\{(f^{-1}(U_i), \phi_i \circ f)\}$ è un atlante differenziabile su M che rende f un diffeomorfismo.

2.5 Linearizzazioni di applicazioni lisce tra spazi euclidei

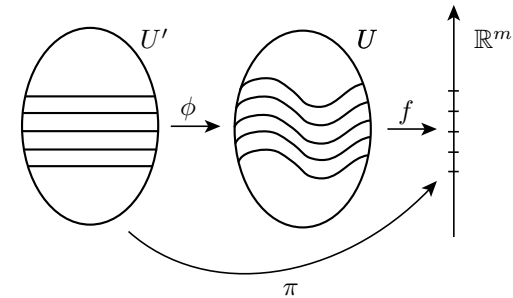
Fatto 9 (Teorema della funzione inversa). Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia con Ω aperto e per un certo $x \in \Omega$ sia $d_x f$ invertibile. Allora esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U)$ è aperto e $f|_U : U \rightarrow f(U)$ è un diffeomorfismo.

In altre parole, restringendo f a un intorno aperto opportuno U di x in Ω , $(U, f|_U)$ è una carta locale di Ω intorno a x .

È interessante notare come questo teorema, a partire da un'informazione locale (in un punto), ci restituisce informazioni "localmente globali".

Vediamo i teoremi della funzione implicita, che sono corollari di questo teorema. Definisco un *modello locale lineare*, ovvero una proiezione $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $n \geq m$ tale che $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$. Noto che $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $d_x \pi$ è surgettivo (essendo $d_x \pi = \pi$ per linearità di π).

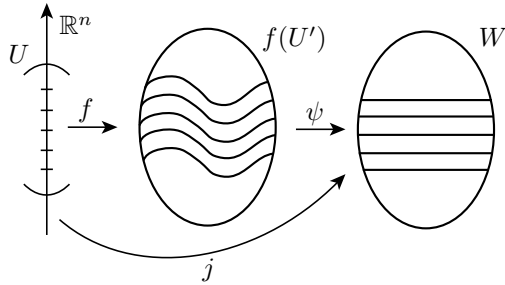
Fatto 10 (Teorema della funzione implicita, versione surgettiva). Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia con U aperto e per un certo $x \in U$ sia $d_x f$ surgettivo. Allora esiste un diffeomorfismo $\phi : U' \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U$ con U' e $\phi(U')$ aperti tale che $f \circ \phi = \pi|_{U'}$, cioè che fa commutare il diagramma:



In termini di varietà, ϕ è una parametrizzazione locale di U intorno a x .

Similmente a prima definisco un modello locale lineare, stavolta una inclusione $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $n \leq m$ tale che $j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Noto che $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $d_x j$ è iniettivo (essendo $d_x j = j$ per linearità di j).

Fatto 11 (Teorema della funzione implicita, versione iniettiva). *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia con U aperto e per un certo $x \in U$ sia $d_x f$ iniettivo. Allora esistono un intorno aperto U' di x con $f(U')$ aperto e un diffeomorfismo $\psi : f(U') \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$ con W aperto tale che $\psi \circ f = j|_{U'}$, cioè che fa commutare il diagramma:*



Ancora in termini di varietà, $(f(U'), \psi)$ è una carta locale di $f(U)$ intorno a $f(x)$.

Proposizione 56. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenziabile con $d_x f$ invertibile ovunque. La composizione del differenziale $df : \mathbb{R}^n \rightarrow GL_n$, del determinante $\det : GL_n \rightarrow \mathbb{R}_0$ e della funzione segno $\text{sgn} : \mathbb{R}_0 \rightarrow \{\pm 1\}$ è una funzione costante.*

Dimostrazione. \mathbb{R}^n è connesso e $\text{sgn} \circ \det \circ df$ è composizione di funzioni continue, quindi continua. \square

Osservazione 25. I diffeomorfismi hanno differenziale invertibile ovunque.

Definizione 57. Se $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\det d_x f > 0$, si dice che f preserva l'orientazione.

Osservazione 26. Per la proposizione precedente basta valutare il segno di $\det(d_x f)$ in un punto. Inoltre se f non preserva l'orientazione basterà comporla con

$$\tau : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, -x_n)$$

per ottenere una funzione che la preserva. Ci si potrà quindi restringere allo studio delle funzioni che preservano l'orientazione.

Adesso facciamo un teorema che intuitivamente vuol dire: preso un diffeomorfismo di \mathbb{R}^n in sé stesso che preserva l'orientazione, possiamo deformarlo in modo liscio (“senza strappi”) fino a farlo diventare l'identità. Ma prima, un lemma utilissimo:

2.5. LINEARIZZAZIONI DI APPLICAZIONI LISCE TRA SPAZI EUCLIDEI

Lemma 57 (Taylor dei geometri). *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ liscia con U aperto convesso, $0 \in U$, $f(0) = 0$. Allora esistono n funzioni lisce $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tali che $f(x) = \sum_i x_i g_i(x)$.*

Dimostrazione. Lavorando componente per componente, ci restringiamo al caso $k = 1$. Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo:

$$f(x) = f(1 \cdot x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tx)) dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx) dt \right) x_i$$

Allora poniamo:

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx) dt$$

\square

Teorema 58 (Linearizzazione dei diffeomorfismi di \mathbb{R}^n a meno di isotopia). *Gli autodiffeomorfismi euclidei che preservano l'orientazione sono diff-isotopi all'identità:*

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ diffeomorfismo} \\ \forall x \in \mathbb{R}^n : \det(d_x f) > 0 \end{array} \right\} \implies \exists F : \begin{cases} F : \mathbb{R}^n \times [0; 1] \rightarrow [0; 1] \text{ liscia} \\ \forall t \in [0; 1] : F_t \text{ diffeomorfismo} \\ F_0 = f \\ F_1 = \text{id} \end{cases} \quad \text{dove } F_t := F|_{\mathbb{R}^n \times \{t\}}$$

Dimostrazione. Non costruiamo subito la F : esibiremo vari cammini del tipo di F ma che non collegano direttamente f a id ; la loro concatenazione darà F .

$f \dashrightarrow f(0) = 0$ Sia $x_0 := f(0)$. Allora $H(x, t) := f(x) - tx_0$ collega $f = H_0$ a $f' := H_1$ con $f'(0) = 0$, e H_t è sempre un diffeomorfismo. Per leggerezza di notazione diciamo che $f(0) = 0$.

$f \dashrightarrow d_0 f$ Per definizione, $d_0 f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx)}{t}$. Allora poniamo:

$$\tilde{F}(x, t) := \begin{cases} \frac{f(tx)}{t} & t \in [0; 1] \\ d_0 f(x) & t = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo che \tilde{F} è liscia. Applicando il Lemma 57 a f abbiamo $\tilde{F}(x, t) = \sum_i x_i g_i(tx)$ per $t \neq 0$. Ma, osservando la forma esplicita delle g_i , vediamo che $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$, quindi l'uguaglianza si estende a $t = 0$.

$d_0 f \dashrightarrow B_1 \in SO_n$ Sia A la matrice di $d_0 f$, per ipotesi $\det A > 0$. Allora esiste un unico prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ tale che le colonne A^i sono una base ortonormale; sia invece $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ quello canonico. Osserviamo che

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_t := (1 - t) \langle \cdot, \cdot \rangle_A + t \langle \cdot, \cdot \rangle_I \quad t \in [0; 1]$$

ci dà un cammino di prodotti scalari definiti positivi. Per ogni \langle, \rangle_t applico Gram-Schmidt alle A^i ottenendo una base ortonormale $\{B_t^1, \dots, B_t^n\}$ dove consideriamo le B_t^i come colonne di una matrice B_t . Basta dunque osservare che:

- le formule di Gram-Schmidt per le B_t^i sono lisce;
- $\det B_t > 0$;
- $B_0 = A$;
- $B_1 \in \text{SO}_n$.

$\boxed{B_1 \dashrightarrow \text{id}}$ È geometricamente intuitivo collegare una matrice di SO_n all'identità.

Per concatenare questi cammini in modo liscio, basta prima comporre la variabile t con una funzione liscia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1, \quad \forall k \geq 1 : \frac{d^k \varphi}{dt^k}(0) = \frac{d^k \varphi}{dt^k}(1) = 0.$$

Un esempio di tale funzione è:

$$\varphi(x) = \frac{\phi_{0,2}(x)}{\phi_{0,2}(x) + \phi_{-1,1}(x)}, \quad \phi_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & x \in (a;b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Sia ora $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ liscia con U aperto, $0 \in U$, $f(0) = 0$. Espandiamo in serie la f :

$$f(x) = d_0 f(x) + x^T (H_0 f) x + R \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R}{\|x\|^2} = 0$$

Dove Hf è la matrice hessiana, che per le funzioni lisce è simmetrica:

$$(H_0 f)_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0) = (H_0 f)_{ji}$$

Se $d_0 f \neq 0$, siamo nelle ipotesi del teorema della funzione implicita, versione surgettiva. Allora esiste una parametrizzazione locale ψ tale che $f \circ \psi(x) = x_1$.

Supponiamo invece che $d_0 f = 0$. In questo caso $f(x) = x^T (H_0 f) x + R$.

Definizione 58 (Punto critico). Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ liscia; $x \in U$ si dice *punto critico* di f se $d_x f = 0$; un punto critico si dice *non degenero* se $H_x f$ è invertibile.

Supponiamo dunque che 0 sia un punto critico non degenero, cioè $\det(H_0 f) \neq 0$. Allora applichiamo il teorema di Sylvester alla matrice $H_0 f$ (che è simmetrica e non singolare), avremo indici di positività e negatività i_+ e $i_- = n - i_+$ tali che:

$$\exists P \in \text{GL}_n : P^T (H_0 f) P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 & \\ & i_- \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right. & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} =: J$$

Definizione 59 (Indice del punto critico). Sia x punto critico non degenero di f ; chiamiamo *indice* di x l'indice di negatività di $H_x f$.

Sia $Q_A(x) := x^T A x$ la forma quadratica associata a una matrice A , allora:

$$\begin{aligned} Q_H(x) &= x^T (H_0 f) x \\ Q_J(x) &= x_1^2 + \dots + x_{i_+}^2 - (x_{1+i_+}^2 + \dots + x_n^2) \\ f(x) &= Q_H(x) + R \end{aligned}$$

Esercizio 9. Sia ψ una parametrizzazione locale di U intorno a 0. Allora $f \circ \psi$ ha un punto critico in $\psi^{-1}(0)$ con lo stesso indice.

Teorema 59 (Lemma di Morse). Sia f come sopra, allora esiste una parametrizzazione locale intorno all'origine che trasforma la f nella forma quadratica canonica del tipo di Q_J :

$$\left. \begin{aligned} f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ liscia} \\ U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ intorno di } 0 \\ 0 \text{ punto critico di indice } \lambda \\ f(0) = 0 \end{aligned} \right\} \implies \exists \psi, W, U' : \begin{cases} W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ intorno aperto di } 0 \\ U' \subseteq U \text{ intorno aperto di } 0 \\ \psi : W \rightarrow U' \text{ diffeomorfismo} \\ f \circ \psi(x) = - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2 \end{cases}$$

Dimostrazione. Possiamo restringerci a U convesso, e applicare due volte il Lemma 57:

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\rightarrow f(x) = \sum_i x_i g_i(x) \\ d_0 f \equiv 0 &\rightarrow f(x) = \sum_{ij} b_{ij}(x) x_i x_j \end{aligned}$$

Dove le b_{ij} sono lisce. Sia B la matrice di componenti b_{ij} , poiché la usiamo in una forma quadratica è **WLOG** simmetrica (in effetti dalla formula esplicita si vedrebbe

che è già simmetrica). Essendo GL_n aperto, a meno di restringere ancora U le $B(x)$ sono invertibili e hanno lo stesso indice di negatività di $B(0) = H_0 f$.

Applichiamo Gram-Schmidt alle B :

$$\forall x \in U \exists P(x) \in GL_n : P^T B P = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} =: J$$

Le formule di Gram-Schmidt sono lisce, quindi anche le $P(x)$.

Sia $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\varphi(x) := P(x)^{-1}x$. Osserviamo che $d_0\varphi$ è invertibile, allora applichiamo il teorema della funzione inversa: intorno a 0, φ è un diffeomorfismo (restringendo il codominio). Abbiamo finalmente $f = \varphi^T(P^T B P)\varphi = \varphi^T J \varphi$. \square

2.6 Funzioni a foruncolo

Definizione 60 (Funzione a foruncolo). Dati $b > a > 0$, una funzione liscia $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che dipende solo da $|x|$ tale che

- $|x| \leq a \implies \lambda(x) = 1$;
- $a < |x| < b \implies 0 < \lambda(x) < 1$;
- $|x| \geq b \implies \lambda(x) = 0$

è detta *funzione a foruncolo* (o anche *partizione dell'unità di Paley-Littlewood*).⁴

Osservazione 27. Nei punti in cui $|x| = a$ tutte le derivate sono nulle, dunque λ non è analitica.

⁴In fondo alla dimostrazione del lemma di Morse (Teorema 59) c'è un esempio di come costruire funzioni di questo tipo.

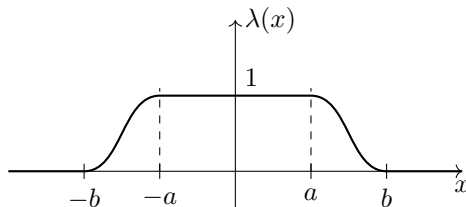


Figura 7: Funzione a foruncolo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Le funzioni a foruncolo si usano per estendere funzioni lisce $U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ a tutto \mathbb{R}^n : se il dominio contiene una palla, si moltiplica la funzione per una funzione a foruncolo che sia nulla fuori dalla palla.

2.7 Varietà con bordo

Per definire le varietà come oggetti che localmente somigliano a \mathbb{R}^n , abbiamo usato omeomorfismi locali con aperti di \mathbb{R}^n . Per definire le varietà con bordo, considereremo omeomorfismi locali con aperti di un sottoinsieme di \mathbb{R}^n che abbia bordo. In particolare useremo il *semipiano superiore*:

$$\mathbb{H}^n := [0; \infty)^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : x_i \geq 0\}$$

Definizione 61 (Diffeomorfismo fra sottoinsiemi arbitrari di \mathbb{R}^n). Sia $f : A \rightarrow B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. f è un *diffeomorfismo* se

- è un omeomorfismo;
- $\forall x \in A \exists (U_x, \phi)$ carta locale di \mathbb{R}^n tale che $f|_{U \cap A} = \phi|_{U \cap A}$.

Definizione 62 (Varietà con bordo). M è una n -varietà con bordo se

- è uno spazio topologico T_2 e 2-numerabile;
- è munito di atlante massimale $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$ a valori in \mathbb{H}^n , cioè si ha $\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow W_\lambda$ omeomorfismo con U_λ aperto di M e W_λ aperto di \mathbb{H}^n ;
- $\forall \mu, \lambda : \phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ è un diffeomorfismo nel senso della Definizione 61.

Definizione 63 (Bordo). Il *bordo* di una n -varietà con bordo M è costituito dai punti la cui immagine attraverso una carta è contenuta nella frontiera del semipiano superiore:

$$\partial M := \{x \in M \mid \exists (U_x, \phi) \text{ carta locale : } \phi(x) \in \mathcal{F} \mathbb{H}^n\}$$

$$\mathcal{F} \mathbb{H}^n = \mathbb{H}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists i : x_i = 0\}$$

Può essere $\partial M = \emptyset$, nel qual caso diciamo che M è senza bordo o *chiusa*.

Esercizio 10. Se un punto è di bordo per una carta, lo è per tutte le carte che lo contengono.

Fatto 12. Le nozioni di applicazione liscia e quindi di diffeomorfismo si estendono alle varietà con bordo.

Come abbiamo fatto con le varietà differenziabili, d'ora in poi chiameremo “varietà” le varietà con bordo. Comunque, le varietà non con bordo rientrano nel caso di varietà con bordo chiuse.

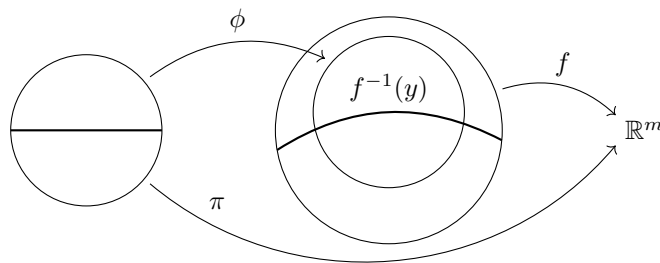


Figura 8: ϕ^{-1} è una carta locale per $f^{-1}(y)$ (“vede dritto”).

2.8 Sottovarietà

Definizione 64 (Sottovarietà). Sia M una m -varietà chiusa e $N \subseteq M$. N è una *sottovarietà* di dimensione $n \leq m$ se $\forall x \in N$ esiste una carta locale $\phi : U \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$ con $\phi(U \cap N) = W \cap \mathbb{R}^n$, dove \mathbb{R}^n è incluso in modo naturale in \mathbb{R}^m .

Osservazione 28. Una sottovarietà è una varietà.

Vediamo un esempio abbastanza generale di sottovarietà:

Definizione 65 (Valore regolare). Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ liscia con U aperto. $y \in f(U)$ è un *valore regolare* per f se $\forall x \in f^{-1}(y)$, $d_x f$ è surgettivo.

Proposizione 60. y valore regolare $\implies f^{-1}(y)$ sottovarietà di U di dimensione $n - m$.

Dimostrazione. Segue dal teorema della funzione implicita, versione surgettiva (vedi Figura 8). \square

Usando l'ultima proposizione otteniamo S^n come sottovarietà di \mathbb{R}^{n+1} :

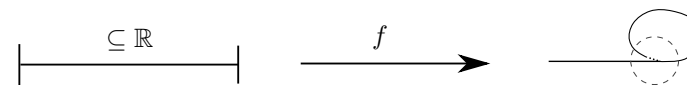
$$S^n = r^{-1}(1), \quad r(x) := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$$

Segue un risultato analogo con il differenziale iniettivo:

Proposizione 61. Se $\forall x \in U : d_x f$ è iniettiva e $f : U \rightarrow f(U)$ è un omeomorfismo, allora $f(U)$ è una sottovarietà di \mathbb{R}^m con f diffeomorfismo.

Dimostrazione. Segue dal teorema della funzione implicita, versione iniettiva. \square

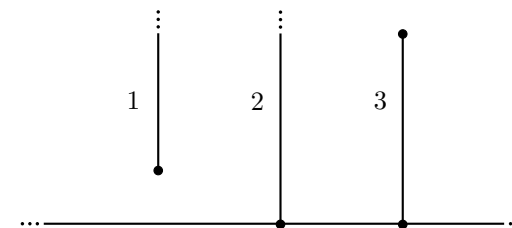
Osservazione 29. Nel teorema sopra l'ipotesi di omeomorfismo è necessaria! Come controesempio basta prendere:



Nel cerchio tratteggiato si ha il problema: ci sono 3 “rami”!

Bordo Nel caso di varietà non chiuse abbiamo tre modelli locali possibili al variare del domicilio di una n -sottovarietà contenuta in una m -varietà:

1. il bordo di \mathbb{H}^n non sta nel bordo di \mathbb{H}^m ;
2. il bordo sta nel bordo;
3. caso misto.



Definizione 66 (Sottovarietà propria). $N \subseteq M$ è *sottovarietà propria* se l'unico modello che si realizza è (2), ossia $\partial N = N \cap \partial M$.

2.9 Fibrato tangente

2.9.1 Modello locale

Si definisce di seguito il fibrato tangente di un aperto di \mathbb{R}^n e altre nozioni ad esso connesse. Queste definizioni non saranno generali, poiché la teoria che si intende affrontare non si limita a sottovarietà di \mathbb{R}^n , esse però costituiranno il modello locale delle strutture più generali sulle varietà.

Definizione 67 (Spazio totale). Si definisce *spazio totale del fibrato tangente* di un aperto U di \mathbb{R}^n l'insieme $T(U) := U \times \mathbb{R}^n$. Ogni $x \in U$ è detto *punto* di U mentre ogni $v \in \mathbb{R}^n$ è detto *vettore* di \mathbb{R}^n .

Si nota che, fissato un x punto di U , la traslazione $v \mapsto v + x \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ consente di identificare \mathbb{R}^n con lo spazio dei vettori tangenti a U nel punto x .

Definizione 68 (Proiezione naturale). Si definisce *proiezione naturale* $\pi_U : T(U) \rightarrow U$ la mappa $(x, v) \mapsto x$.

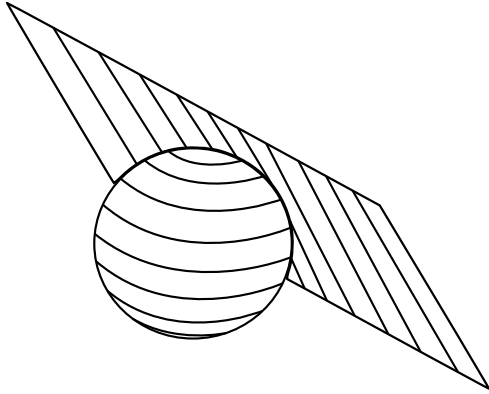


Figura 9: Esempio di fibrato tangente.

Nella precedente definizione l'aggettivo *naturale* serve solamente a specificare che la mappa cui ci si riferisce è quella indotta dalla definizione come prodotto. In seguito ci si riferirà ad essa anche solo come proiezione.

Definizione 69 (Fibrato tangente). La coppia $(T(U), \pi_U)$ è il *fibrato tangente* con spazio di base U .

Definizione 70 (Fibra). Si definisce fibra la controimmagine di un punto tramite la proiezione naturale, e si scrive $T_x U = \pi_U^{-1}(x)$.

Alla luce di quest'ultima definizione si identificano:

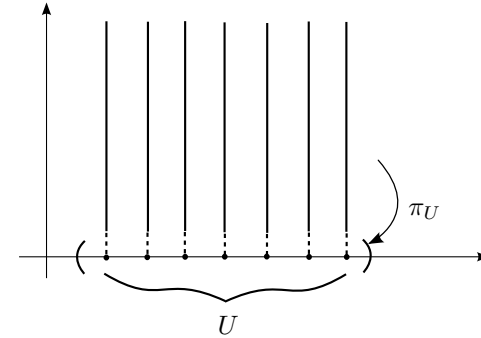
- $T_x U = \{x\} \times \mathbb{R}^n = \{(x, v) \in T(U) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$
- $T(U) = \bigsqcup_{x \in U} T_x U$

Cioè si identifica la fibra come lo spazio tangente del punto x , quindi lo spazio dei vettori applicati, mentre l'intero fibrato come unione disgiunta delle fibre.

Definizione 71 (Applicazione tangente). Data un'applicazione liscia tra aperti $f : U \rightarrow W$ si definisce l'*applicazione tangente* di f la funzione $Df : T(U) \rightarrow T(W)$ che manda $(x, v) \mapsto (f(x), d_x f(v))$.

Osservazione 30. L'applicazione tangente fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} T(U) & \xrightarrow{Df} & T(W) \\ \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi_W \\ U & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Figura 10: Esempio di proiezione naturale di U .

Osservazione 31. L'applicazione tangente manda fibre in fibre in modo lineare, poiché $\forall x \in U \quad d_x f : T_x U \rightarrow T_x W$, e il differenziale è un'applicazione lineare per definizione. L'applicazione tangente gode inoltre delle seguenti proprietà:

- è un'applicazione liscia in tutte le sue variabili (infatti f è liscia e $d_x f$ è liscia perché lineare);
- è functoriale: $D(g \circ f) = Dg \circ Df$, $D(\text{id}) = \text{id}$;
- se f è un diffeomorfismo anche Df è un diffeomorfismo e manda fibra in fibra attraverso isomorfismi lineari.

Definizione 72 (Applicazioni fibrato). Un'applicazione che ha la proprietà di Df di mandare fibra in fibra in modo lineare è detta applicazione *fibrato*.

Se f è un diffeomorfismo si ha che Df è quindi un diffeomorfismo fibrato (come si è già enunciato tra le proprietà di Df).

2.9.2 Caratterizzazione differenziale di $T_x U$

Di seguito sarà esposta una caratterizzazione più intrinseca delle definizioni che sono state nella sezione precedente.

Definizione 73 (Spazio dei germi). Dato un punto $x \in U$ aperto di \mathbb{R}^n , si definisce *spazio dei germi* \mathcal{E}_x l'insieme delle funzioni lisce da un intorno aperto di x in U a valori in \mathbb{R} , quozientato con la seguente relazione di equivalenza:

$$(f_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}) \sim (f_2 : W_2 \rightarrow \mathbb{R}) :\Leftrightarrow \exists W_3 \subseteq W_1 \cap W_2 : \begin{cases} W_3 \text{ intorno aperto di } x \\ f_1|_{W_3} = f_2|_{W_3} \end{cases}$$

Lo spazio dei germi \mathcal{E}_x ha una naturale struttura di \mathbb{R} -algebra, cioè:

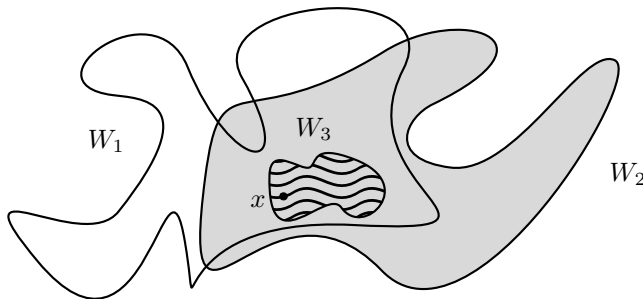


Figura 11: Un germe è definito da ciò che accade in un intorno del punto.

- è un \mathbb{R} -spazio vettoriale;
- è munito di un prodotto (in questo caso commutativo).

Per verificarlo è sufficiente mostrare che la somma e il prodotto di due germi è un germe fissato, indipendentemente dai rappresentanti scelti.

Osservazione 32. Si ha che lo spazio \mathcal{E}_x non dipende dall'aperto U , che costituisce in questo caso la struttura locale, infatti è caratterizzato dalle proprietà locali.

Definizione 74 (Derivata direzionale). Dato $v \in T_x U$ la *derivata direzionale* lungo il vettore v nel punto x è un'applicazione lineare sullo spazio dei germi definita nel modo seguente:

$$\delta_v : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[f] \mapsto \sum_j v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$$

Dove i v^j sono le componenti del vettore v nella base canonica di \mathbb{R}^n .

Osservazione 33 (Proprietà della derivata direzionale). Si verifica facilmente che la derivata direzionale, in un punto x fissato, ha le seguenti proprietà:

- è ben definita (cioè non dipende dal rappresentante del germe);
- è \mathbb{R} -lineare;
- ha la proprietà di Leibniz:

$$\delta_v(f \circ g) = f(x)\delta_v(g) + g(x)\delta_v(f)$$

Che si riassumono dicendo che δ_v è una *derivazione* su \mathcal{E}_x (questa definizione corrisponde agli ultimi due punti).

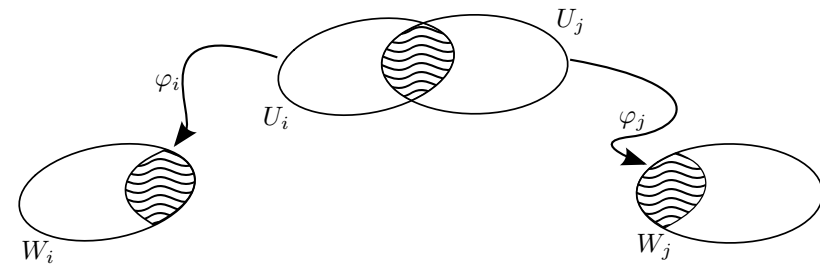


Figura 12: Cambiamento di carte su cui si definisce il cociclo.

Si ha dunque che, sempre fissato il punto x , è definita la funzione $\delta : T_x U \rightarrow \text{Der}(\mathcal{E}_x)$ che manda $v \mapsto \delta_v$, dove $\text{Der}(\mathcal{E}_x)$ è lo spazio delle derivazioni su \mathcal{E}_x .

Lemma 62. L'applicazione δ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Dimostrazione. Si verificano le proprietà di un isomorfismo singolarmente:

Linearità È evidente dalla definizione.

Iniettività Il nucleo di δ è $\{0\}$, infatti la derivazione nulla è quella in cui $v^j = 0 \forall j$.

Suriettività Si deve verificare che $\forall d \in \text{Der}(\mathcal{E}_x) \exists v \in T_x U$ t.c. $d = \delta_v$. Dato $f \in \mathcal{E}_x$ sia $h(y) := f(y) - f(x)$. Poiché f è un germe si può restringere a piacere il dominio fino a renderlo convesso. Si applica dunque ad h il Lemma 57: $h(y) = \sum_j g_j(y)(y - x)^j$ con le g_j lisce e tali che $g_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$. Allora si ha:

$$d(f) = d(h) = \sum_j g_j(x) d(y \mapsto y^j)$$

e quindi v è definito per componenti $v^j = d(y \mapsto y^j)$. \square

Osservazione 34. Sia $\varphi : U \rightarrow W$ un'applicazione liscia, e $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ un'altra applicazione liscia. Allora $\delta_v : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathbb{R}$ ha la seguente proprietà:

$$\delta_v(f \circ \varphi) = \delta_{d_x \varphi(v)}(f)$$

2.9.3 Costruzione del fibrato tangente su varietà

Si vogliono ora estendere le definizioni date a generiche varietà. Sia dunque M una n -varietà con atlante massimale $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$.

Osservazione 35. Dato un cambiamento di carte $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ si ha che esso è una funzione tra aperti di \mathbb{R}^n ed è perciò definita l'applicazione tangente:

$$D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) : (x, v) \mapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x), d_x(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(v))$$

Si considerano ora le applicazioni μ_{ji} definite come segue:

$$\begin{aligned}\mu_{ji} : U_i \cap U_j &\rightarrow \mathrm{GL}_n \\ x &\mapsto d_{\phi_i(x)}(\phi_j \circ \phi_i^{-1})\end{aligned}$$

Osservazione 36 (Proprietà delle μ_{ji}). Si ha che le funzioni ora definite hanno le seguenti proprietà:

- ogni μ_{ji} è liscia;
- $\forall i$ si ha che $\mu_{ii} : U_i \rightarrow \mathrm{GL}_n$ ha come immagine $\{\mathrm{id}\}$;
- $\mu_{ji}(x) = \mu_{ij}(x)^{-1}$;
- $\forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ si ha che $\mu_{ij}(x)\mu_{jk}(x)\mu_{ki}(x) = \mathrm{id}$.

Una famiglia di funzioni che verifica le ultime tre proprietà è detta *cociclo*.

Un cociclo è una *colla* che incolla le fibre.

R.Benedetti

Procediamo ora con la costruzione del fibrato tangente su M . Definiamo lo spazio topologico $T := M \times \mathbb{R}^n \times I$. Questo è uno spazio topologico in quanto prodotto di spazi topologici (si intenda I con la topologia discreta).⁵ Sia ora $T' \subseteq T : (x, v, i) \in T' :\leftrightarrow x \in U_i$. Si pensi a T' come uno spazio topologico munito della topologia di sottospazio.

Si definisca ora la relazione di equivalenza \sim su T' tale che: $(x, v, i) \sim (x', v', j) :\leftrightarrow x' = x \wedge v' = \mu_{jk}(x)v$ (dove $\mu_{\alpha\beta}$ è il cociclo definito un precedenza).⁶ Definiamo $T(M)^7 = T'/\sim$ dotato della topologia quoziente. Chiamiamo q la proiezione di T' su $T(M)$.

⁵Lo spazio topologico T , dato che M , \mathbb{R}^n e I sono T_2 è T_2 . Non è invece 2-numerabile non essendolo I . Vediamo che I non è 2-numerabile: Preso infatti un aperto, possiamo scegliere un punto x_0 in questo. Tramite una carta a caso ϕ_i rimbalziamo il problema in una nostra copia di \mathbb{R}^n . Qui possiamo prendere la famiglia (non numerabile, per esempio una per ogni raggio maggiore di zero) di palle aperte concentriche su x_0 . Le controimmagini $\phi^{-1}(B_r(x_0))$ sono aperti nell'aperto originario e la restrizione di ϕ a ognuno di questi aperti è una legittimissima carta, dunque sta nell'atlante massimale dunque l'insieme degli indici non potrà essere numerabile. Questo non ci spaventa in quanto i trattamenti successivi risolveranno il problema.

⁶ \sim è effettivamente una relazione di equivalenza grazie alle proprietà del cociclo. In particolare:

- $\mu_{ii}(x) = \mathrm{id}_n \implies a \sim a$
- $\mu_{ik}(x)\mu_{ki}(x) = \mathrm{id}_n \implies (a \sim b \iff b \sim a)$
- $\mu_{ij}(x)\mu_{jk}(x)\mu_{ki}(x) \implies ((a \sim b \wedge b \sim c) \implies a \sim c)$

⁷Come spazio topologico

Si dovrebbe ora verificare che $T(M)$ è 2-numerabile e T_2 . La seconda è banale avendo operato sempre con spazi T_2 e passando la proprietà attraverso le operazioni fatte. La prima non la dimostriamo.

Definiamo ora la funzione $\pi_M : T(M) \rightarrow M$ tale che $\pi_M([(x, v, i)]) = x$.

Osservazione 37. La mappa π_M è continua in quanto se $A \subseteq M$ è un aperto $(\pi_M \circ q)^{-1}(A)$ è l'intersezione di T' con $A \times \mathbb{R}^n \times J$ che è un aperto. Questo, dato che gli aperti in T' erano gli insiemi la cui controimmagine attraverso q è aperta, ci dice che $\pi^{-1}(A)$ è effettivamente aperto in T' .

Ora bisogna collegare quanto abbiamo definito con la struttura tangente su \mathbb{R}^n .

Definizione 75 (Banalizzazioni locali). Una banalizzazione locale di $T(M)$ è una mappa $\Psi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow T(M)$ tale che $\Psi_i(x, v) = [(x, v, i)]$

Osservazione 38. Si possono dimostrare i seguenti fatti:

- Le Ψ_i sono funzioni continue
- $(\pi_M \circ \Psi)(x, v) = x$ per ogni $x \in U_i$
- Ψ_i è un omeomorfismo di spazi topologici fra $U_i \times \mathbb{R}^n$ e $\pi_M^{-1}(U_i)$. Ψ_i è surgettiva perchè se $\pi_M([(x, v, k)]) \in U_i$ allora $\Psi_i(x, \mu_{ki}(x)v) = [(x, \mu_{ki}(x)v, i) \sim (x, v, k)]$. Ψ_i è chiaramente iniettiva. E' dunque invertibile. Basta dimostrare che è una mappa aperta ovvero preso A aperto in $U_i \times \mathbb{R}^n$ che $A' = \Psi_i(A)$ è aperto. Data la topologia come quoziente di $T(M)$ basterà dimostrare che $q^{-1}(A')$ è aperto in T' . Ma la famiglia di insiemi $\{(U_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\})\}$ sono un ricoprimento aperto di T' . Basta quindi dimostrare che $q^{-1}(A') \cap (U_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\})$ è un aperto. Ma su questa intersezione $q = \Psi_i \circ r$ dove $r : T' \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ t.c. $r(x, v, k) = (x, \mu_{ik}(x)v)$.

Dotiamo ora $T(M)$ di un atlante differenziale.

Definizione 76 (Carte di $T(M)$). $\Phi_i : \Psi_i(U_i \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \phi(U_i) \times \mathbb{R}^n$ definita come $\Phi_i(\Psi_i((x, v))) := (\phi_i(x), v)$ è una carta locale di $T(M)$. L'insieme $\{(\Psi(U_i \times \mathbb{R}^n), \Phi_i)_{i \in I}\}$ è un atlante di $T(M)$.

Componendo tutto a dovere si può controllare che, grazie all'azione dell'cociclo sui vettori, le mappe di transizione:

$$K_{ij} : \Phi_j(\Psi_j(U_j \times \mathbb{R}^n)) \rightarrow \Phi_i(\Psi_i(U_i \times \mathbb{R}^n))$$

sono proprio:

$$K_{ij}((x, v)) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), \mu_{ij}(\phi_j^{-1}(x))v) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(x)v)$$

Che è proprio quello che volevamo!

Non rimane ora che sollevare la definizione di applicazione tangente da aperti di \mathbb{R}^n al livello delle varietà.

Definizione 77 (funzione tangente). La funzione tangente ad $f : U \rightarrow W$ è la $Df : T(U) \rightarrow T(W)$ che fa commutare il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Df'} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & & \\
 (\phi_i, \text{id}_{\mathbb{R}^n}) \uparrow & \nwarrow \Phi_i \Psi_i & & \nearrow \Phi_j & \\
 U_i \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Psi_i} & T(U) & \xrightarrow{Df} & T(W) & \xleftarrow{\Psi_j} & U_j \times \mathbb{R}^n \\
 & & \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi_W & & \\
 & & U & \xrightarrow{f} & W & & \\
 & & \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_j & & \\
 \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f'} & \phi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^n & & & &
 \end{array}$$

Indicando con f' la composizione attraverso le mappe di f e sollevandola alla sua funzione tangente Df' (cosa già ben definita nella lezione precedente) e ricalandola attraverso le mappe a Df .

2.10 Fibrati

Definizione 78 (gruppo di Lie). Si dice *gruppo di Lie* un gruppo che è anche una varietà liscia e dove sia la moltiplicazione che la funzione che associa ad ogni elemento il suo inverso sono applicazioni lisce (esempi: $\text{GL}(n)$ e G finito con τ_D sono gruppi di Lie).

Definizione 79 (automorfismi lisci). Data F una varietà liscia sia $\text{Aut}(F) := (\{f : F \rightarrow F \mid f \text{ diffeomorfismo}\}, \circ)$ il gruppo degli automorfismi lisci di F .

Sia $G \subseteq \text{Aut}(F)$ un sottogruppo che agisce su F mediante l'azione

$$\begin{aligned}
 G \times F &\rightarrow F \\
 (g, f) &\rightarrow g(f)
 \end{aligned}$$

Definizione 80 (fibrato). Per costruire il *fibrato* ripetiamo parola per parola la costruzione di $T(M)$ sostituendo F a \mathbb{R}^n e G a $\text{GL}(n)$ ottenendo un *fibrato* $\pi : E \rightarrow M$ che viene detto di *gruppo strutturale* G e *fibra (tipica)* F .

Osservazione 39. E è una varietà di dimensione $\dim(E) = \dim(F) + \dim(M)$. π è liscia ed è localmente un prodotto di fibra F grazie alla banalizzazione locale

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \times F \supseteq (W_i, F) & \xleftarrow{(\phi, \text{id})} & U_i \times F \xrightarrow{\Psi_i} \pi^{-1}(U_i) \\
 & & \downarrow p_i \quad \quad \downarrow \pi \\
 & & U_i \hookrightarrow M
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times F \\
 (x, f) &\mapsto (x, \mu_{ji}(x)[f])
 \end{aligned}$$

Definizione 81. Se per qualche k ho $G = \text{GL}(k, \mathbb{R})$ e $F = \mathbb{R}^k$ si ottengono i cosiddetti *fibrati vettoriali reali* di rango k .

Se invece $F = G$ e ho R_g (la *rappresentazione regolare*, cioè quella definita dall'azione di G su se stesso mediante la moltiplicazione a destra) si ottengono i *fibrati principali* di gruppo strutturale G .

2.11 Fatti di algebra lineare

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n .

Sia $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ lo *spazio duale* di V e $V^{**} := (V^*)^* = \text{Hom}(V^*, \mathbb{R})$ il *biduale*.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{B} = \{v^1, \dots, v^n\}$ base di V^* dove $v^j(v_i) = \delta^j_i$.

Poiché esiste un isomorfismo canonico

$$\begin{aligned}
 \varphi : V &\rightarrow V^{**} \\
 v &\mapsto f_v : V^* \rightarrow \mathbb{R} \\
 f_v(\psi) &= \psi(v)
 \end{aligned}$$

d'ora in poi con un piccolo abuso identificheremo V con V^{**} .

Definizione 82 (tensori).

$$T_h^k(V) := V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes h} := \text{Mult}((V^*)^k \times V^h, \mathbb{R})$$

Un elemento $t \in T_h^k(V)$ è detto *tensore* di tipo (k, h) su V .

Esempio 12. $T_0^0(V) = \mathbb{R}$, $T_1^0(V) = V^*$, $T_0^1(V) = V^{**} = V$.

Un prodotto scalare è un $t \in T_2^0(V) = \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ con t simmetrico.

Osservazione 40. Esiste un isomorfismo canonico

$$\begin{aligned}
 \varphi : \text{End}(V) &\rightarrow T_1^1(V) = \text{Bil}(V^* \times V, \mathbb{R}) \\
 f &\mapsto ((\psi, v) \mapsto \psi(f(v)))
 \end{aligned}$$

Definizione 83 (basi \mathcal{B}_h^k). Abbiamo visto che una base \mathcal{B} determina una base duale $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1^0$, vorremmo generalizzare questo fatto ad un qualsiasi (k, h) costruendo una

base \mathcal{B}_h^k di $T_h^k(V)$. Cominciamo con $T_2^0(V)$.

Si definisce in modo canonico l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned}\Phi : V^* \times V^* &\rightarrow T_2^0(V) \\ (\phi, \psi) &\mapsto ((v, w) \mapsto \phi(v)\psi(w))\end{aligned}$$

Utilizzeremo la notazione $\Phi(\phi, \psi) = \phi \otimes \psi$ e chiameremo gli elementi del tipo $\phi \otimes \psi$ *tensori decomponibili* di $T_2^0(V)$.

Si verifica che la funzione Φ ha le seguenti proprietà:

- Data una base e la base duale $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ allora $\mathcal{B}_2^0 = \{v^i \otimes v^j\}_{i,j=1,\dots,n}$ è una base di $T_2^0(V)$.
- (*proprietà universale*) Per ogni applicazione bilineare $g : V^* \times V^* \rightarrow Z$ esiste un'unica applicazione lineare $G : T_2^0(V) \rightarrow Z$ tale che $g = G \circ \Phi$. Infatti G è univocamente determinata dalla relazione $G(v^i \otimes v^j) = g(v^i, v^j)$.

Lo stesso argomento si può ripetere per $T_0^2(V)$ e in generale per $T_h^k(V)$ ottenendo le basi

$$\mathcal{B}_h^k = \{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h}\}$$

2.12 Richiami della scorsa lezione

Sia M una varietà differenziabile con atlante massimale $\{(U_i, \phi_i)\}$ e sia $\{\mu_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$ un cociclo a valori in un gruppo $G \subseteq \text{Aut}(F)$ (con F varietà liscia). Ripetendo la costruzione usata per realizzare il fibrato tangente $T(M)$ (per cui s'era usato $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $F = \mathbb{R}^n$, $n = \dim M$), ottengo un fibrato $E \xrightarrow{\pi} M$ di fibra F e gruppo strutturale G .

2.13 Altri fibrati su M

Vogliamo innanzitutto definire i *fibrati tensoriali* su M .

Si ricorda dalla scorsa lezione che dato V spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione n , chiamando V^* il suo duale e identificando V^{**} con V (in virtù dell'isomorfismo canonico tra di essi), i corrispondenti spazi tensoriali sono definiti come:

$$T_h^k(V) := V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes h} := \text{Mult}((V^*)^k \times V^h, \mathbb{R})$$

Osservazione 41. $T_0^0(V) = \mathbb{R}$, $T_1^0(V) = V^*$, $T_0^1(V) = V^{**} = V$

Inoltre, data $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V , posso costruire \mathcal{B}_h^k base di $T_h^k(V)$: sia innanzitutto $\mathcal{B}^* = \{v^i\}_{i \leq n}$ la base duale di \mathcal{B} . Allora:

$$\mathcal{B}_h^k = \mathcal{B}^{\otimes k} \otimes (\mathcal{B}^*)^{\otimes h} := \left\{ v_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_h} := v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h} \right\}_{i_l, j_m \leq n}$$

Dunque $\dim T_h^k(V) = n^{k+h}$ e dare una base \mathcal{B} di V stabilisce un isomorfismo (non canonico) tra $T_h^k(V)$ e $T_{h'}^{k'}(V)$ quando $k+h = k'+h'$.

Un $t \in T_h^k(V)$ è detto *tensore di tipo (k, h) su V* e si esprime in termini di \mathcal{B}_h^k come:

$$t = t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} v_{j_1 \dots j_h}^{j_1 \dots j_h}$$

Dove gli indici ripetuti si intendono sommati, e i $t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ sono le coordinate di t rispetto a \mathcal{B}_h^k . Ha dunque senso chiedersi che forma abbiano i cambi di coordinate in $T_h^k(V)$: siano $\mathcal{B} = v_i$, $\mathcal{B}' = w_i$ basi di V (e $\mathcal{B}_h^k, \mathcal{B}'_h^k$ le basi corrispondenti di $T_h^k(V)$), e sia A la matrice di cambio di base (in V) corrispondente, ovvero $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$.

Innanzitutto, per quanto riguarda il cambio di base in V^* , abbiamo

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}^*}(\text{id}_{V^*}) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_{V^*}) \right)^{-1} = (A^t)^{-1}$$

Osservazione 42. L'applicazione $A \mapsto (A^t)^{-1}$ è, coefficiente per coefficiente, funzione razionale dei coefficienti. Inoltre, è un automorfismo di $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Sia ora $B = (A^t)^{-1}$, e siano i loro coefficienti $A = (a_{si})$, $B = (b^{rj})$, cosicché $v_i = a_{si}w_s$ e $v^j = b^{rj}w^r$. Allora:

$$\begin{aligned}t &= t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} v_{j_1 \dots j_h}^{j_1 \dots j_h} = t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h} = \\ &= t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} a_{s_1 i_1} w_{s_1} \otimes \dots \otimes a_{s_k i_k} w_{s_k} \otimes b^{r_1 j_1} w^{r_1} \otimes \dots \otimes b^{r_h j_h} w^{r_h} = \\ &= t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} a_{s_1 i_1} \dots a_{s_k i_k} b^{r_1 j_1} \dots b^{r_h j_h} w_{s_1} \otimes \dots \otimes w_{s_k} \otimes w^{r_1} \otimes \dots \otimes w^{r_h} = \\ &= t'_{r_1 \dots r_h}^{s_1 \dots s_k} w_{s_1 \dots s_k}^{r_1 \dots r_h}\end{aligned}$$

Dunque, indicando i prodotti $a_{s_1 i_1} \dots a_{s_k i_k}$ e $b^{r_1 j_1} \dots b^{r_h j_h}$ con $a_{i_1 \dots i_k}^{s_1 \dots s_k}$ e $b_{r_1 \dots r_h}^{j_1 \dots j_h}$, otteniamo:

$$t'_{r_1 \dots r_h}^{s_1 \dots s_k} = a_{i_1 \dots i_k}^{s_1 \dots s_k} b_{r_1 \dots r_h}^{j_1 \dots j_h} t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k}$$

Il cambio di coordinate resta dunque una funzione razionale nei coefficienti di A .

Ora, sia $\rho_h^k : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(T_h^k(\mathbb{R}^n))$ l'applicazione che manda cambi di coordinate in cambi di coordinate corrispondenti: $A \mapsto A_h^k$, dove A_h^k è la trasformazione lineare $t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} \mapsto a_{i_1 \dots i_k}^{s_1 \dots s_k} b_{r_1 \dots r_h}^{j_1 \dots j_h} t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k}$, ovvero quella che ha coefficienti $(a_{i_1 \dots i_k}^{s_1 \dots s_k} b_{r_1 \dots r_h}^{j_1 \dots j_h})$.

Avendo su M il fibrato tangente $T(M)$ definito dal cociclo $\{\mu_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)\}$, il cociclo $\{(\mu_h^k)_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(T_h^k(\mathbb{R}^n))\}$, dove

$(\mu_h^k)_{ij} = \rho_h^k \circ \mu_{ij}$, definisce un fibrato $T_h^k(M) \xrightarrow{\pi_h^k} M$ di fibra $T_h^k(\mathbb{R}^n)$, e si ha $(\pi_h^k)^{-1}(x) = T_h^k(T_x M)$.

Definizione 84 (Fibrato Tensoriale). $T_h^k(M)$ è detto *fibrato tensoriale* di tipo (k, h) su M .

In particolare, $T_1^0(M) =: T^*(M)$ è detto *fibrato cotangente*.

Osservazione 43. Un fibrato tensoriale di tipo (k, h) è sempre un fibrato vettoriale di rango n^{k+h} .

Vediamo altri esempi di fibrati, realizzabili a partire dal cociclo $\{\mu_{ij}\}$ del fibrato tangente.

Definizione 85 (Fibrato delle basi). Il fibrato principale $B \xrightarrow{\hat{\pi}} M$ di gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (ovvero quello che ha per fibra $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ stesso) costruito mediante il cociclo $\{\mu_{ij}\}$ è detto *fibrato delle basi* su M .

Infatti, $\hat{\pi}^{-1}(x) (\simeq \{x\} \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$ è l'insieme delle basi di $T_x M (\simeq \{x\} \times \mathbb{R}^n)$.

Osservazione 44. $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ e $\mathrm{sgn} : \mathbb{R}^* \rightarrow \{\pm 1\}$ sono omomorfismi di gruppi.

Definizione 86. $\{\det(\mu_{ij}) : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^*\}$ è un cociclo, detto *cociclo determinante*. Il fibrato risultante di fibra \mathbb{R} è detto *fibrato determinante*.

Definizione 87. Cociclo segno $\{\mathrm{sgn}(\det(\mu_{ij})) : U_i \cap U_j \rightarrow \{\pm 1\}\}$ è detto *cociclo segno*, e naturalmente vi si può costruire il fibrato principale, con fibra $\{\pm 1\}$, detto *fibrato dei segni*.

Osservazione 45. Per n pari, $S^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$ è un caso particolare di quest'ultimo tipo di fibrati.

2.14 Equivalenza tra fibrati

Siano $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M_1$ e $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2$ fibrati con stessa fibra e stesso gruppo strutturale G . Essi sono *isomorfi* se $\exists f, F$ diffeomorfismi tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

e valga $\forall x \in M_1 : F|_{\pi_1^{-1}(x)} \in G$.

Il prototipo di questo tipo di equivalenza si realizza tra fibrati tangenti di varietà diffeomorfe:

$$\begin{array}{ccc} T(M_1) & \xrightarrow{Df} & T(M_2) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Se $M_1 = M_2 = M$, posso definire una relazione di *equivalenza forte* tra fibrati su M imponendo ulteriormente che sia $f = \mathrm{id}$.

2.15 Richiami della lezione scorsa

Sia M una varietà differenziabile con atlante massimale $\{(U_i, \phi_i)\}$ e sia $\{\mu_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$ un cociclo a valori in un gruppo $G \subseteq \mathrm{Aut}(F)$ (con F varietà liscia). Ripetendo la costruzione usata per realizzare il fibrato tangente $T(M)$ (per cui s'era usato $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $F = \mathbb{R}^n$, $n = \dim M$), ottengo un fibrato $E \xrightarrow{\pi} M$ di fibra F e gruppo strutturale G .

Definizione 88 (Equivalenza tra fibrati in termini di cocicli). Siano dati due fibrati su M con lo stesso gruppo di struttura e la stessa fibra: $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$. Siano $\{\mu_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$ e $\{\lambda_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$ rispettivamente cocicli di E_1 e E_2 . E_1 ed E_2 sono fibrati equivalenti (nel senso dei cocicli) se $\exists \gamma_i : U_i \rightarrow G$ tale che $\forall x \in U_i \cap U_j$ dati λ_{ij} e μ_{ij} sia $\lambda_{ji} = \gamma_j^{-1} \times \mu_{ji} \times \gamma_i^{-1}$. (Quest'ultima è la moltiplicazione tra elementi del gruppo G)

Definizione 89 (Immersione liscia). Sia $f : X \rightarrow Y$, f è una immersione se $\forall x \in X Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ (restrizione dell'applicazione tangente alla fibra) è iniettiva.

Definizione 90 (Embedding). Una immersione f è un embedding se $f : X \rightarrow f(X)$ è un omeomorfismo (funzione continua fra spazi topologici tale che ha inversa continua).

2.16 Teorema di Embedding

Teorema 63 (Di embedding elementare di Whitney). *Se X è una varietà compatta allora esiste un N abbastanza grande tale che \exists un embedding $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$*

Dimostrazione. Poiché X è compatta esiste un atlante finito $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1, \dots, m}$ tale che

- $B_2(0) \subseteq \phi_i(U_i)$
- $\phi_i^{-1}(B_1(0))$ ricopre tutto X

Sia $\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, 1]$ la funzione a foruncolo relativa alle palle B_1 e B_2 . Definisco la funzione $\lambda_i : U_i \subseteq X \rightarrow [0, 1]$ come $\lambda \circ \phi_i$ in U_i e 0 in $X \setminus U_i$.

B_i ricopre X e $B_i = \lambda^{-1} \subseteq U_i$. Poiché λ_i vale 1 quando sono su $\phi_i^{-1}(B_1(0))$ ho un ricoprimento.

Definisco $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ come $\lambda_i \phi_i$ in U_i e 0 in $X \setminus U_i$. Considero le funzioni $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita come $x \mapsto (f_i(x), \lambda_i(x))$. Definisco ancora la funzione g che: $x \mapsto (g_1, g_2, \dots, g_m)$.

Dico che g così definita è un embedding, devo dunque dimostrare che è una immersione (cioè che il suo differenziale è iniettivo) e che la funzione stessa g è omomorfismo nella sua immagine cioè ha funzione inversa continua.

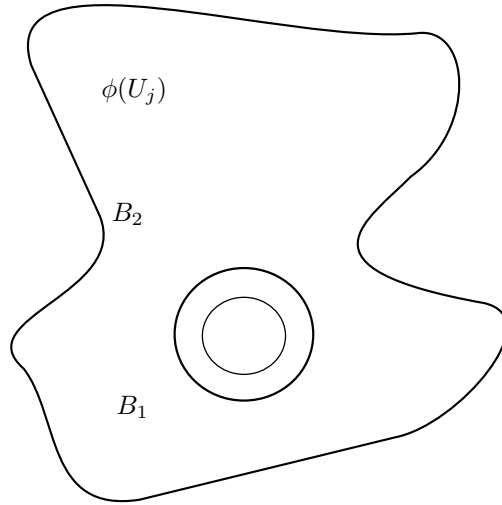
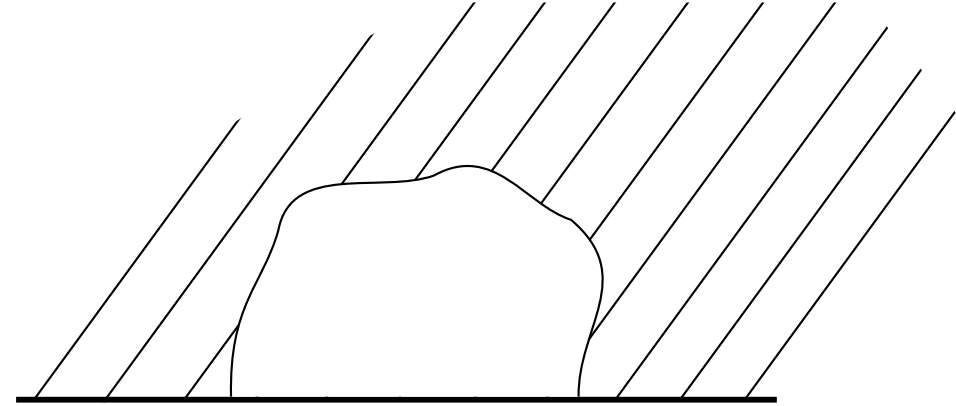
Figura 13: Palle B_1 e B_2 

Figura 14: Varietà con bordo

- è diffeomorfismo per costruzione
- tutte le g_i per come son state costruite sono immersioni ogniuna nel suo $\psi^{-1}(B_1(0))$
- g è iniettiva: se ho $x \neq y$ ho due possibilità: $x, y \in B_i$ allora la f_i coincide con la ϕ_i sulla palla B_i , che è iniettiva sulla palla. Oppure x, y stanno in due palle diverse in particolare $y \in B_i$ allora $\lambda_i(y) = 1$ e $\lambda_i(x) = 0$. Dunque ogni funzione g_i è iniettiva e quindi lo è anche la funzione g . \square

Se ho una varietà X con bordo $\partial X \neq 0$ si può rafforzare la costruzione in modo che $(X, \partial X)$ sia una sottovarietà del semipiano $(\mathbb{H}^N, \partial\mathbb{H}^N)$ con $\partial X = X \cup \partial\mathbb{H}^N$ e su ∂X ho $X \perp \partial\mathbb{H}^N$.

Inoltre se $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ sono punti della varietà con bordo non nullo si può rafforzare la costruzione in modo che un intorno di x_j va in un piano di \mathbb{R}^N .

Definizione 91 (Metrica Riemanniana). Una metrica riemanniana su una varietà X è un campo di tensori di tipo $(0,2)$ su X simmetrici e definiti positivi. Cioè è una sezione del fibrato tangente tale che ogni tensore associato ad un punto della varietà è simmetrico e definito positivo: $R : TX \rightarrow T_2^0$

Teorema 64. Ogni X compatta ha una metrica Riemanniana.

Dimostrazione. Esistendo un embedding, per il teorema sopra, posso vedere la varietà come immersa in un \mathbb{R}^n dotato del suo prodotto scalare canonico g_0 . $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Posso definire la metrica riemanniana sulla varietà X come $g_x = g_0|_{T_x X}$. Ad

ogni punto x prendo dunque come metrica il tensore associato al prodotto canonico ristretto all'immagine del $T_x X$ attraverso l'embedding. \square

2.17 Topologia sullo spazio delle applicazione lisce tra varietà - fede

2.18 Spazi di applicazioni lisce

Definizione 92 (Topologia sulle applicazioni lisce tra varietà in \mathbb{R}^N). Definisco $\mathcal{E} := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ liscia}\}$, con X e Y varietà lisce. Voglio munire $\mathcal{E} := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ liscia}\}$ di una topologia. Se $X \subseteq \mathbb{R}^N$ e $Y = \mathbb{R}^N$ considero la base di intorni data $U_{r,K,\epsilon}$ e $r \in \mathbb{N}$ e $K \subseteq X$ è un compatto e $\epsilon > 0$. Questa base di intorni è definita da

$$U_{r,K,\epsilon} := \left\{ g : X \rightarrow \mathbb{R}^N \mid \left\| \frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} - \frac{\partial g}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right\| \leq \epsilon \text{ per } x \in K \text{ e } \forall k \text{ tale che } 0 < k \leq r \right\}$$

Posso considerare un ricoprimento compatto finito, K_i (che trovo se la varietà X è compatta) e posso prendere l'intersezione dei $U_{r,K_i,\epsilon}$, in questo modo ottengo dei $U_{r,\epsilon}$ che sono indipendenti dal compatto K , questo è ora un intorno della funzione $f : X \rightarrow Y$. Unendo gli intorni per tutte le funzioni ottengo effettivamente una base di intorni per lo spazio delle funzioni lisce \mathcal{E} .

Definizione 93. Per definire una topologia tra varietà generiche mi riduco al caso di varietà reali. Definisco una base di intorno $U_{r,K,\epsilon,(U,\phi),(U',\phi')} = \{g : X \rightarrow \mathbb{R}^N\}$ tale che $g(U) \subseteq U'$ e valga $\phi \circ g \circ \phi^{-1} \in U_{r,K,\epsilon}(\phi \circ g \circ \phi^{-1})$ cioè che $\phi \circ g \circ \phi^{-1}$ sia intorno di una funzione da \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^N . Posso considerare un ricoprimento compatto finito, K_i (che trovo se la varietà X è compatta) e posso prendere l'intersezione dei $U_{r,K_i,(U_i,\psi_i),(U'_i,\psi'_i)}$, in questo modo ottengo dei $U_{r,\epsilon,(U,\phi),(U',\phi')}$ che sono indipendenti dal compatto K , questo è ora un intorno della funzione $f : X \rightarrow Y$. Si procede similmente a quanto fatto precedentemente per rimuovere la dipendenza dal compatto K . Unendo gli intorno per tutte le funzioni ottengo effettivamente una base di intorno per lo spazio delle funzioni lisce \mathcal{E} .

Osservazione 46. La topologia che ottengo è metrizzabile.

Date due varietà X e Y consideriamo $\mathcal{E}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ lisce}\}$ con la topologia definita precedentemente. Restringiamoci al caso X compatta. Consideriamo alcuni sottoinsiemi:

- le immersioni $\text{Imm}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ immersioni}\}$
ovvero $\forall x \in X \ Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ è iniettiva
(la funzione tangente ristretta alla fibra x che manda lo spazio tangente a x nello spazio tangente a $f(x)$ è iniettiva)
- gli embedding $\text{Emb}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ embedding}\}$
ovvero, poiché X compatta f è un'immersione iniettiva.
- i diffeomorfismi $\text{Diff}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ diffeomorfismi}\}$

Osservazione 47. Questi insiemi possono anche essere vuoti.

Teorema 65. *Questi elencati sono sottoinsiemi aperti di $\mathcal{E}(X, Y)$.*

Moralmente, se una funzione è “abbastanza vicina” a un'immersione (o embedding o diffeom.) è essa stessa un'immersione (o embedding o diffeom.).

Dimostrazione.

$\text{Imm}(X, Y)$ La condizione di essere immersione è una condizione che si verifica sul comportamento di iniettività delle tangenti che è una condizione aperta. (La formalizzazione di questa idea è lasciata per esercizio)

$\text{Emb}(X, Y)$ Suppongo g funzione “vicina” ad un embedding f . Per il punto precedente g un'immersione, resta da mostrare che è iniettiva.

Supponiamo per assurdo che sia falso. Allora potrò costruire una successione $g_n \rightarrow f$ e tali che esistano due successioni di punti distinti x_n e y_n tali che $g_n(x_n) = g_n(y_n)$. Poiché X compatta, posso estrarre due sottosuccessioni $x_n \rightarrow x_0$ e $y_n \rightarrow y_0$. Se per assurdo $x_0 \neq y_0$, valuto f in questi punti e dovrei

avere $f(x_0) = f(y_0)$, ch'è assurdo poiché f è iniettiva, ma allora $x_0 = y_0$ e entrambe le serie convergono allo stesso punto x_0 .

Leggendo tutto attraverso una carta intorno a x_0 posso pensare x_0 e le successioni x_n e y_n in \mathbb{R}^n . Poiché $g_n(y_n) - g_n(x_n) = 0$, per il teorema del valor medio $\exists z_n$ t.c. $d_{z_n} g_n[y_n - x_n] = 0$. Ho inoltre che $z_n \rightarrow x_0$ perché $z_n \in [x_n, y_n]$.

Considero adesso $v_n := \frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|} \in S^{n-1}$. Poiché S^n è compatto a meno di estrarre una sottosuccessione $v_n \rightarrow v_0 \in S^{n-1}$. Segue che $d_{x_0} f[v_0] = 0$, assurdo perché anche il differenziale di f è iniettivo. ζ

$\text{Diff}(X, Y)$ Per i punti precedenti presa g funzione “vicina” a f diffeomorfismo, g è un embedding. Mi resta da mostrare la surgettività.

Poiché g è un embedding $g(X) \subseteq Y$ è aperto, inoltre X è compatta, quindi $g(X)$ è anche chiuso (nelle ipotesi in cui lavoriamo compatto \iff chiuso).

Ma se X e Y sono connesse (ipotesi di comodo) allora $g(X) = Y$, ovvero g è diffeomorfismo. In mancanza dell'ipotesi di comodo mi posso restringere alle singole componenti connesse in partenza e in arrivo. \square

2.19 Orientazione

Siano \mathcal{B} e \mathcal{B}' due basi di \mathbb{R}^n , e sia $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ la matrice di cambiamento di base. Due basi inducono la stessa orientazione se $\det M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} > 0$.

Proposizione 66. *Questa è una relazione di equivalenza sulle basi di \mathbb{R}^n .*

Dimostrazione. Infatti grazie alle proprietà del determinante e Binet:

- $\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \det \text{id} = 1$
- $\det M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} = \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}) = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot \det M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$
- $\det M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ \square

Ci sono quindi due classi di equivalenza.

Definizione 94 (Orientazione). Una *orientazione* di \mathbb{R}^n è una classe di equivalenza per la relazione prima definita.

Estendiamo questa definizione alle varietà.

Definizione 95 (Atlante orientato). Sia X una varietà e $A = \{U_j, \phi_j\}$ un atlante di X (non necessariamente il massimale). Diciamo che tale atlante è *orientato* se il cociclo $\{\det \lambda_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ è in effetti a valori in \mathbb{R}^+ (è lo stesso cociclo usato per definire il fibrato tangente, ristretto però all'atlante).

Definizione 96 (Atlanti compatibili). Due atlanti orientati (ammesso che esistano) sono *compatibili* se la loro unione è un atlante orientato.

Definizione 97 (Orientazione su varietà). Un'orientazione su una varietà è determinata da un atlante orientato massimale. Una varietà è *orientabile* se ammette un'orientazione, *non orientabile* altrimenti.

Osservazione 48. Se una varietà è orientabile potrebbe avere più di una orientazione.

Proposizione 67. Se una varietà è connessa e orientabile, allora ha esattamente due orientazioni.

DA FINIRE

2.20 Cobordismo

Considereremo solo varietà compatte se non diversamente specificato. Facciamo prima una versione non orientata, poi faremo quella orientata.

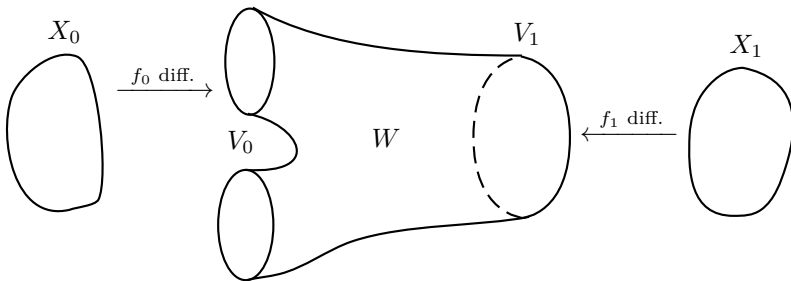
Definizione 98 (Triade). Una tripletta (W, V_0, V_1) è una *triade* se W è una varietà con bordo $\partial W = V_0 \sqcup V_1$.

Fisicamente potete pensare W come una transizione da V_0 a V_1 .

Osservazione 49. Le componenti del bordo V_0 e V_1 possono anche essere vuote. Ad esempio se W è chiusa avremo $V_0 = V_1 = \emptyset$.

Definizione 99 (Cobordismo). Siano X_0, X_1 n -varietà chiuse. Diciamo che X_0 è *cobordante* a X_1 se esiste una triade le cui componenti del bordo sono diffeomorfe a X_0 e X_1 :

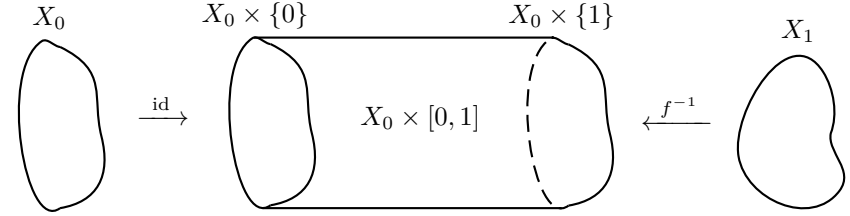
$$X_0 \text{ cobordante a } X_1 \Leftrightarrow \exists W, V_0, V_1, f_0, f_1 : \begin{cases} \partial W = V_0 \sqcup V_1 \\ f_0 : X_0 \rightarrow V_0 \text{ diffeomorfismo} \\ f_1 : X_1 \rightarrow V_1 \text{ diffeomorfismo} \end{cases}$$



Il concetto di cobordismo estende quello di diffeomorfismo:

Proposizione 68. Due varietà diffeomorfe sono cobordanti.

Dimostrazione. Sia $f : X_0 \rightarrow X_1$ diffeomorfismo. Poniamo $W := X_0 \times [0, 1]$ cilindro di base X_0 . Allora $(W, X_0 \times \{0\}, X_0 \times \{1\}, \text{id}, f^{-1})$ è il cobordismo cercato. \square



Osservazione 50. Essere diffeomorfe è una relazione di equivalenza, perché:

- $X \xrightarrow{\text{id}} X$
- $X \xrightarrow{f} Y \implies Y \xrightarrow{f^{-1}} X$
- $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \implies X \xrightarrow{g \circ f} Z$

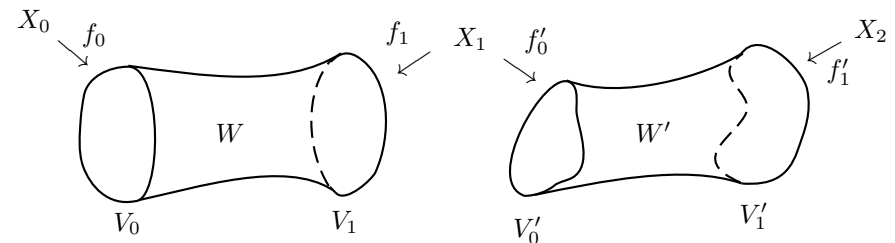
Lemma 69. Essere cobordanti è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Verifichiamo le tre proprietà dell'equivalenza:

Riflessiva Per vedere che X è cobordante a se stesso considerare il cilindro $X \times [0, 1]$, oppure osservare che X è diffeomorfo a se stesso e usare la Proposizione 68.

Simmetrica Basta osservare che se (W, V_0, V_1) è una triade, lo è anche (W, V_1, V_0) .

Transitiva Sia X_0 cobordante a X_1 tramite la triade (W, V_0, V_1) e X_1 cobordante a X_2 tramite (W', V'_0, V'_1) . Per la seguente Proposizione 70, esiste una varietà W "incollaggio" di W e W' lungo le componenti del bordo diffeomorfe a X_1 con, intuitivamente, $\partial W = V_0 \sqcup V'_1$. Allora X_0 è cobordante a X_2 tramite (W, V_0, V'_1) . \square



Proposizione 70 (Incollaggio). *Siano W e W' n -varietà con due sottovarietà dei loro bordi diffeomorfe:*

$$Z \subseteq \partial W, \quad Z' \subseteq \partial W', \quad \varphi : Z \rightarrow Z' \text{ diffeomorfismo}$$

Sia \mathcal{H} il quoziente dell'unione di W e W' rispetto all'equivalenza indotta da φ :

$$\mathcal{H} = W \sqcup W' / \sim, \quad x \sim y : \Leftrightarrow x = \varphi(y) \vee y = \varphi(x)$$

Allora \mathcal{H} ammette una struttura di n -varietà con bordo dato dalle parti non diffeomorfe dei bordi e con W e W' che possono essere considerate sottovarietà di \mathcal{H} , cioè le immersioni di W e W' in \mathcal{H} sono embedding:

$$\mathcal{H} \text{ } n\text{-varietà, } \partial\mathcal{H} = (\partial W \setminus Z) \sqcup (\partial W' \setminus Z'),$$

$$W \xrightarrow{j} \mathcal{H}, \quad W' \xrightarrow{j'} \mathcal{H} \text{ embedding}$$

Dimostrazione. In generale, se ho una varietà A con bordo, il bordo ammette un *collare* nella varietà, cioè esiste un embedding $c : \partial A \times [0, 1] \rightarrow A$ tale che $c|_{\partial A \times \{0\}} = \text{id}$. Siano g_1 e g_2 due collari di Z e Z'

$$\begin{aligned} g_1 : Z \times (0, 1] &\rightarrow W \\ g_2 : Z' \times [1, 2) &\rightarrow W' \end{aligned}$$

che danno il bordo in 1:

$$\begin{aligned} g_1|_{Z \times \{1\}} &= \text{id} \\ g_2|_{Z' \times \{1\}} &= \text{id} \end{aligned}$$

Definiamo una concatenazione g in \mathcal{H} dei collari:

$$g : Z \times (0, 2) \rightarrow \mathcal{H}$$

$$g(x, t) := \begin{cases} j(g_1(x, t)) & t \in (0, 1) \\ j'(g_2(\varphi(x), t)) & t \in (1, 2) \end{cases}$$

Osserviamo che \mathcal{H} è ricoperto dagli aperti $j(W \setminus Z)$, $j'(W' \setminus Z')$ e $g(Z \times (0, 2))$ e che le mappe j , j' e g inducono un atlante liscio su \mathcal{H} con le proprietà volute. Basta verificare che queste “carte generalizzate” siano compatibili. \square

Osservazione 51. Abbiamo dimostrato l'esistenza di un incollaggio, ma in verità si può mostrare anche l'unicità: dati due incollaggi di due varietà fissate, sono diffeomorfi e il diffeomorfismo è l'identità fuori da un intorno compatto del bordo d'incollaggio.

Consideriamo ora l'insieme η_n delle n -varietà compatte chiuse quozientate per cobordismo:

$$\eta_n := \{X \mid X \text{ } n\text{-varietà compatta} \wedge \partial X = \emptyset\} / \sim_{\text{cob}}$$

Definiamo un'operazione su η_n che lo rende un gruppo abeliano:

$$[X], [Y] \in \eta_n \quad [X] + [Y] := [X \sqcup Y]$$

L'elemento neutro è $[\emptyset]$, cioè la classe dei bordi:

$$[\emptyset] = \{X \mid \exists W : X = \partial W\}$$

L'unione disgiunta di due varietà chiuse cobordanti è un bordo, per definizione. Ma ogni varietà chiusa è cobordante a se stessa, quindi:

$$[X \sqcup X] = [\emptyset] \implies -[X] = [X]$$

Cioè in particolare $2[X] = [\emptyset]$. Allora $(\eta_n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sul campo finito $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, con prodotto:

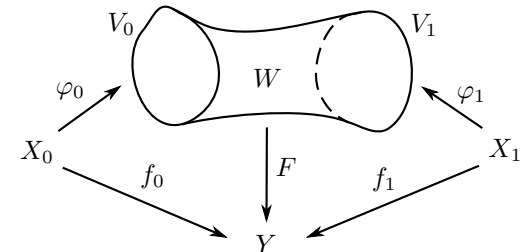
$$0 \cdot [X] = [\emptyset], \quad 1 \cdot [X] = [X]$$

Vedremo poi che in generale η_n non è banale. Adesso generalizziamo η_n : sia Y una *varietà obiettivo*, non necessariamente compatta; vogliamo definire un oggetto $\eta_n(Y)$ che si riduca a η_n quando $\#Y = 1$. Poniamo:

$$\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow Y \mid X \text{ } n\text{-varietà compatta chiusa} \wedge f \text{ liscia}\}$$

Osserviamo che \mathcal{F} si riduce alle varietà compatte chiuse se Y è un punto. Analogamente alla costruzione di η_n , vogliamo quozientare \mathcal{F} per cobordismo, ma prima dobbiamo definire il cobordismo tra fuzioni:

Definizione 100 (Cobordismo tra funzioni). Siano X_0 e X_1 n -varietà compatte chiuse, Y una varietà e $f_0 : X_0 \rightarrow Y$, $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ lisce. Diciamo che (X_0, f_0) è cobordante a (X_1, f_1) se X_0 è cobordante a X_1 tramite la varietà W e i diffeomorfismi φ_0 e φ_1 ed esiste una funzione liscia $F : W \rightarrow Y$ tale che $F \circ \varphi_0 = f_0$ e $F \circ \varphi_1 = f_1$, cioè che fa commutare il diagramma:



Si verifica che anche questa è una relazione di equivalenza e poniamo dunque:

$$\eta_n(Y) := \mathcal{F} / \sim_{\text{cob}}$$

Analogamente a η_n l'unione dei grafici ci dà una somma su $\eta_n(Y)$ con le proprietà già viste, e $\eta_n(Y)$ è un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -spazio vettoriale.

Ora per evitare complicazioni assumiamo che le varietà obiettivo siano compatte. Consideriamo una funzione liscia $g : Y_1 \rightarrow Y_2$. Questa induce una funzione lineare $g_* : \eta_n(Y_1) \rightarrow \eta_n(Y_2)$ così definita:

$$g_*([X, f]) := [X, g \circ f]$$

Si verifica facilmente che è ben definita e funtoriale, infatti $g_{1*} \circ g_{2*} = (g_1 \circ g_2)_*$ e $\text{id}_* = \text{id}$. Inoltre se g è un diffeomorfismo, g_* è un isomorfismo.

Rispetto alla varietà obiettivo questi spazi vettoriali perdono informazioni, cioè è possibile avere varietà non diffeomorfe con spazi uguali. Però se gli spazi sono diversi le varietà non sono diffeomorfe, quindi li possiamo usare per distinguere varietà che siano abbastanza diverse.

Osservazione 52. $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$, $\text{id}_* = \text{id}$

$$g_* \left(\left[X \xrightarrow{f} Y_1 \right] \right) = \left[X \xrightarrow{g \circ f} Y_2 \right]$$

Osservazione 53. Se $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ è diffeomorfismo, $\exists g^{-1} : Y_2 \rightarrow Y_1$ liscia $\implies g_*$ è isomorfismo di spazi vettoriali.

Definizione 101 (Omotopia). $g_0 : Y_1 \rightarrow Y_2$, $g_1 : Y_1 \rightarrow Y_2$ sono *omotope* se $\exists G : Y_1 \times [0, 1] \rightarrow Y_2$ tale che, detta $G_t := G|_{Y_1 \times \{t\}}$, $G_0 = g_0$, $G_1 = g_1$.

Osservazione 54. L'omotopia è un particolare cobordismo (basta considerare il cilindro associato!)

Proposizione 71. g_0, g_1 omotope $\implies g_{0*} = g_{1*}$.

Dimostrazione. Costruisco ora il cobordismo. Pongo $\forall t \in [0, 1], F(x, t) = (f(x, t), t)$

□

Osservazione 55. $\eta_S(\mathbb{R}^n) = \eta(\text{punto})_S = \eta_S$

Definizione 102 (Cobordismo orientato). $X_0 \sim_{\text{cob}^+} X_1$ se \exists triade (W, Z_0, Z_1) con $W, \partial W$ orientata e isomorfismi $\phi_0 : X_0 \rightarrow Z_0, \phi_1 : X_1 \rightarrow Z_1$ che preservano l'orientazione.

Definizione 103. $\Omega_n(\text{punto}) = \Omega_n = \{Xn\text{-varietà compatta, chiusa, orientata}\} / \sim_{\text{cob}^+}$

Osservazione 56. Anche in questo caso possiamo equipaggiare Ω_n , con la stessa operazione definita nella lezione precedente. In particolare valgono:

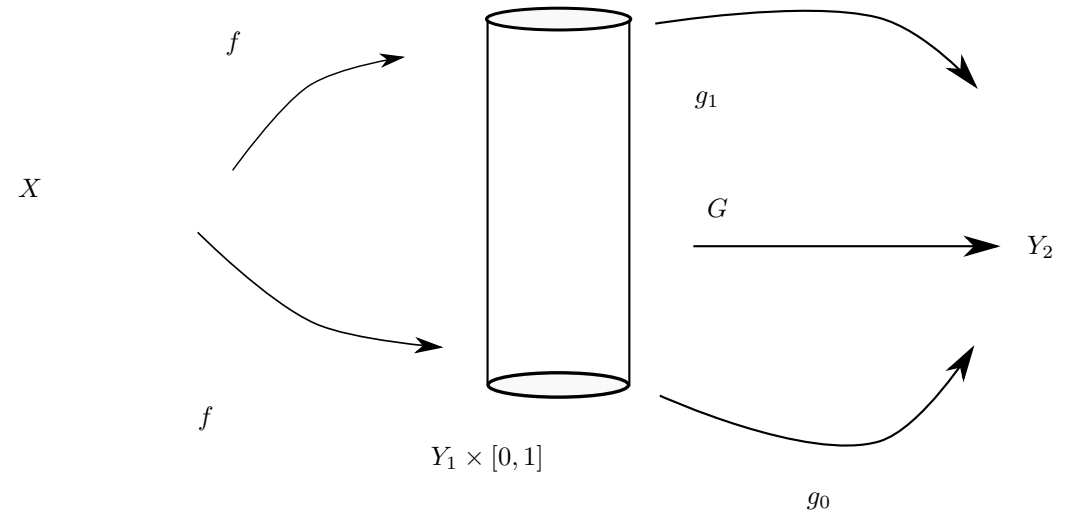


Figura 15: dimostrazione teorema

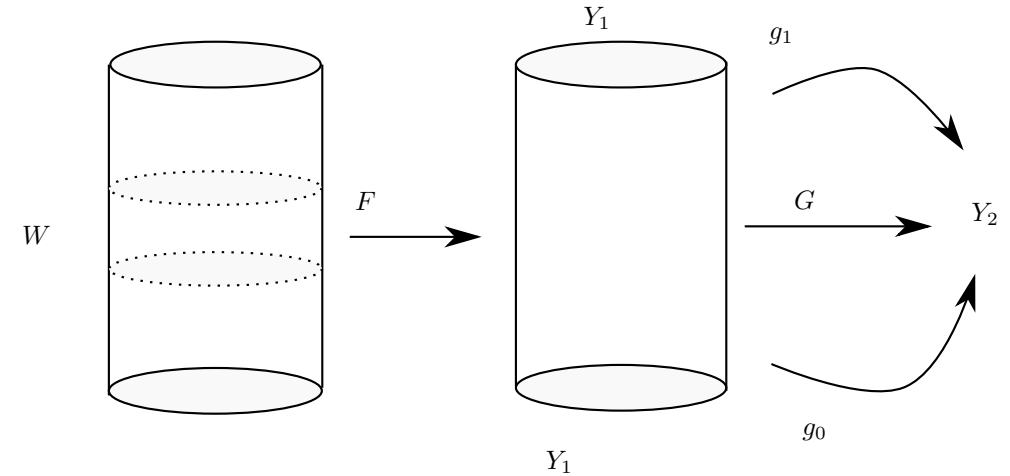


Figura 16: $G \circ F(W) = Y_2$

- $[X] + [Y] = [X \sqcup Y]$
- $0 = [\emptyset]$ ossia i bordi orientati.
- $-[X] = [-X]$. (Viene scambiata l'orientazione di tutte le componenti connesse).

Così $(\Omega_n, +)$ assuma la struttura di gruppo abeliano.

Possiamo adesso ripercorrere lo schema precedente e cambiare la varietà obiettivo.

Definizione 104. $\Omega_n(Y) = \{X \text{ } n\text{-varietà liscia tale che } \exists f : X \rightarrow Y \text{ liscia}\}$

Osservazione 57. Non ho chiesto nessuna condizione di orientabilità sulla varietà Y in arrivo.

Adesso ripetiamo la costruzione e creiamo degli omomorfismi di gruppi $g_* : \Omega_n(Y_1) \rightarrow \Omega_n(Y_2)$ tale che $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$, $\text{id}_* = \text{id}$.

Teorema 72. Vale la proprietà di omotopia

Questi si chiamano oggetti topologico-algebrici e servono a fare i conti. Un esempio di questi è il seguente.

2.21 Gruppo fondamentale

$y_0 \in Y$ varietà connessa per archi. Considero la coppia (Y, y_0)

Definizione 105 (Omotopia puntata). Una omotopia F è detta *puntata* (o *o.p.*) se $F(P, t) = y_0 \forall t$

Considero ora l'insieme $\{f : (S^1, P) \rightarrow (Y, y_0), f(P) = y_0\} / \sim_{o.p.}$, ossia considero i cammini chiusi a meno di omotopia puntata. Lo dotto di una operazione in modo da renderlo un gruppo.

Definizione 106. $f_0 * f_1 : (S^1, P) \rightarrow (Y, y_0) \begin{cases} f_1(2t), & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ f_0(2t - 1), & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$. In pratica è percorrere i 2 cammini in successione a velocità doppia. E' ben definita e $[f_0] * [f_1] = [f_0 * f_1]$

Osservazione 58. Moralmente il partire da S^1 sente se \mathbb{R}^2 ha buchi (stiamo "lanciando" nella varietà di arrivo un laccio chiuso). Se partivo da un punto, avrei sentito solo la connessione per archi, non la semplice connessione.

Definizione 107 (Gruppo fondamentale). L'insieme $\pi_1(Y, y_0) = \{f : (S^1, P) \rightarrow (Y, y_0), f(P) = y_0\} / \sim_{o.p.}$ è detto *gruppo fondamentale* della varietà Y .

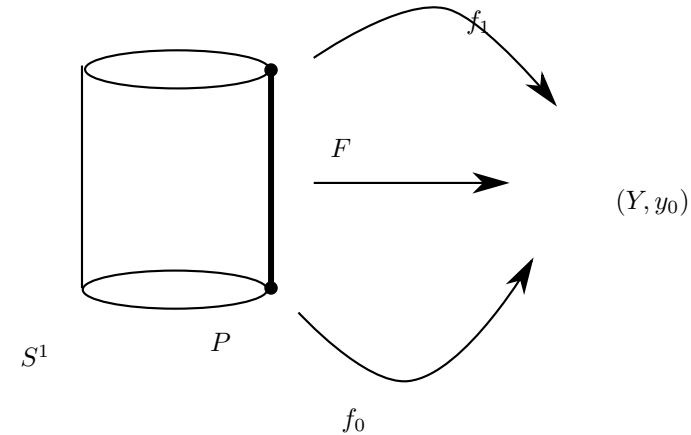


Figura 17: Esempio nel caso si sia preso (S^1, P) .

2.21.1 Alcuni $\eta_n(Y)$ e $\Omega_n(Y)$

Al fine di mostrare che gli spazi in esame non sono tutti banali si esaminano alcuni di questi in particolare. Prima di tutto si esamina la struttura di varietà differenziabili in dimensione bassa (in particolare $n = 0, 1$).

n = 0 $X \in \{0\text{-varietà compatte connesse}\} / \{\text{diffeomorfismi}\} \implies X = \{pt.\}$, mentre in generale, in mancanza di connessione, si avrà un'unione disgiunta di punti;

$X \in \{0\text{-varietà compatte orientate connesse}\} / \{\text{diffeomorfismi che preservano l'orientamento}\} \implies X = \{pt., \pm\}$, dove il segno specifica l'orientazione, e nel caso generale non connesso si ha un'unione disgiunta di punti con segno;

n = 1 $X \in \{1\text{-varietà compatte connesse}\} / \{\text{diffeomorfismi}\} \implies X = [a, b]$ nel caso di varietà con bordo $\vee X = S^1$ nel caso di mancanza di bordo, al solito nel caso generale si ha un'unione disgiunta degli spazi descritti (quest'ultimo fatto è vero, ma la dimostrazione è non banale);

$X \in \{1\text{-varietà compatte orientate}\} / \{\text{diffeomorfismi che preservano l'orientamento}\}$ allora X è uno spazio di quelli descritti nel caso non orientato, dove l'orientazione è definita per ogni componente connessa scegliendo il verso orario o antiorario per ogni componente senza bordo (di tipo S^1) e positivo o negativo (con riferimento alla struttura ordinata di \mathbb{R}) per le componenti con bordo (di tipo intervallo chiuso).

Sulle componenti con bordo si ha inoltre un'orientazione indotta, conformemente alla convenzione stabilita "prima la normale uscente". Perciò nell'in-

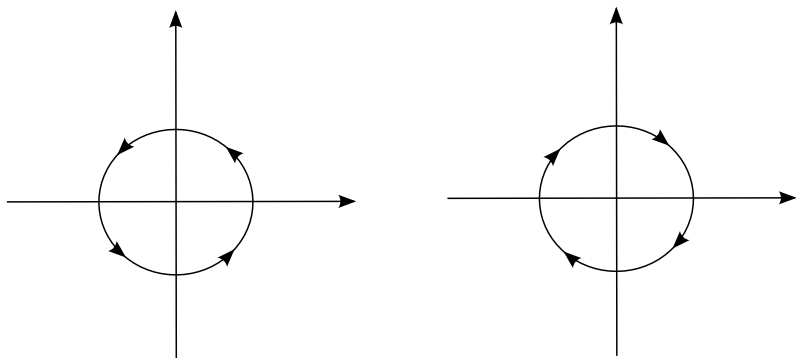
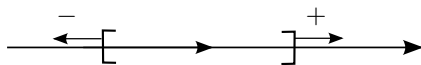
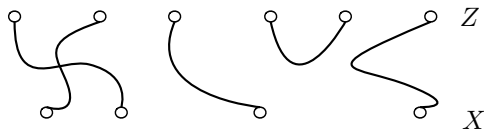
Figura 18: Orientamenti su S^1 

Figura 19: Orientamento indotto sul bordo di un intervallo

tervallo $[a, b]$ si ha che il punto a ha segno $+$ se la normale uscente è concorde con l'orientamento dell'intervallo, cioè se $[a, b]$ è preso con verso negativo, $-$ altrimenti. Stessa cosa per b .

Spazio η_0 Si passa ora a $\eta_0(Y)$, con Y varietà compatta chiusa (cioè senza bordo). Si ha che $\eta_0(Y) = \{f : X \rightarrow Y\} / \{\text{cobordismi}\}$ con X 0-varietà compatta, cioè $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, e $f(x_i) = y_i$. Prese due varietà compatte $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, $f(x_i) = y_i$ e $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$, $g(z_j) = y'_j$, allora $X \text{ cob. } Z \implies \exists W \text{ t.c. } \partial W = \{x_1, \dots, x_k\} \sqcup \{z_1, \dots, z_k\}$ con $\dim W = 1$ e $F : W \rightarrow Y$ che ristretta al bordo torna ad essere f e g .

Figura 20: I tratti costituiscono la transizione W

Esempio 13. Da questo si può osservare che riesco sempre a connettere tutti i punti con degli archi, ammesso che il totale sia pari (ogni arco ha un principio e una fine).

Perciò una condizione necessaria è che le due varietà abbiano cardinalità con la stessa parità. Inoltre poiché c'è bisogno anche di un diffeomorfismo F su W (che si identifica con l'unione disgiunta degli archi), se si considerano le immagini degli estremi di ogni arco si ha che anch'esse sono connesse da un arco immagine. Perciò, considerando una sola componente connessa di Y , la condizione di parità espressa precedentemente sulle intere varietà si deve quindi restringere alle controimmagini delle componenti connesse.

Si ottiene infine che due varietà sono cobordanti *se e solo se* le controimmagini di una componente connessa in entrambe le varietà hanno la stessa parità.

Si è così ottenuta la struttura dello spazio:

$$\eta_0(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

tanti termini quante sono le componenti connesse di Y .

Figura 21: Un generatore dello spazio $\eta_0(Y)$

Gruppo Ω_0 Come nel caso non orientato si hanno le stesse condizioni necessarie sugli archi (riguardanti la parità delle controimmagini delle componenti connesse). Si ha in più una condizione sull'orientamento, infatti ogni arco ha due estremi orientati in modo opposto. Perciò stavolta ciò che identifica la relazione tra le controimmagini delle componenti connesse non è la parità, ma la somma dei segni, che complessivamente deve essere nulla, da cui si ottiene che fissate tali somme in una varietà, l'altra, per essere cobordante, deve avere le stesse con segno opposto, in modo che tutte sommino a 0.

La struttura del gruppo è dunque:

$$\Omega_0(Y) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$$

anche qui il numero di termini è pari al numero di componenti connesse.

Un paio di claim

- C'è una mappa d'oblio $f : \Omega_n(Y) \rightarrow \eta_n Y$, che perde parte delle informazioni, quelle derivanti dall'orientamento;
- Si possono classificare le superfici (2-varietà), mediante gli invarianti $\eta_1(Y)$ e $\Omega_1(Y)$, con Y superficie.

2.22 Trasversalità

Se io vi dico che una cosa è vera, potete anche fregarvene del perché sia vero, insomma... potete anche fregarvene della dimostrazione!
In fondo siete fisici... siete abituati a digerire anche di più!

R. Benedetti

Si vuole introdurre un concetto secondo cui ci siano alcuni oggetti siano “speciali” rispetto ad altri. Seguono dunque alcuni esempi:

Esempio 14.

- In \mathbb{R}^2 quali sono i sottospazi di $\dim = 1$ rispetto ad una data retta? Solo se stesso, se come discriminante si considera lo spazio generato dalla retta fissata con l'altra arbitraria. Infatti tutti generano il piano di $\dim = 2$, tranne la retta stessa, che con se stessa genera uno spazio di $\dim = 1$ (sempre sé);
- Per i piani nello spazio relativamente a una retta, o le rette relativamente ai piani, o sottospazi in dimensione più elevata si hanno delle estensioni naturali;
- Per le curve in uno spazio di $\dim \geq 2$ si ottiene una nozione analoga considerando i punti di intersezione e gli spazi tangenti in tali punti. Cioè sugli spazi tangenti si hanno le stesse relazioni descritte mediante l'algebra lineare.

Osservazione 59. La relazione di essere “non speciale” è aperta, poiché per piccole deviazioni da un elemento generico si continuano ad avere elementi generici, inoltre gli elementi generici sono densi nell'insieme di tutti gli elementi.

Ancora nelle precedente osservazione si stava trattando con concetti intuitivi, si da dunque ora una definizione formale del concetto di “speciale”.

Definizione 108 (Trasversalità). Sia Y una varietà e $A \subseteq Y$ una sottovarietà, con $\partial Y = \partial A = \emptyset$. Sia X compatta e chiusa ($\partial X = \emptyset$), e sia $f : X \rightarrow Y$ liscia.

Si definisce allora f *trasversa* ad A se: $\forall x \in X$ t.c. $y = f(x) \in A$ si ha che $T_y Y = T_y A + D_x f(T_x X)$.

Si scrive inoltre che $f \pitchfork A$.

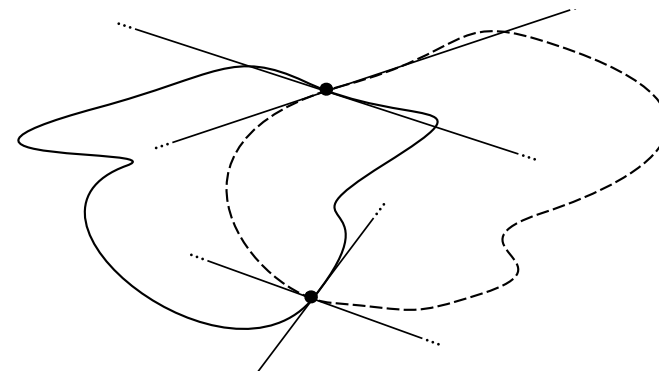


Figura 22: Due curve trasverse e relativi spazi tangenti nei punti d'interesse

Esempio 15. $Y = \mathbb{R}^2$, $X \xhookrightarrow{f} \mathbb{R}^2$. I punti su cui verificare la proprietà di trasversalità sono l'intersezione, cioè:

$\forall x \in X \cap A$ allora $T_x A + \text{id}(T_x X) = \mathbb{R}^2 \iff T_x A \oplus T_x X$, infatti, essendo f un'immersione, allora la sua applicazione tangente coincide con l'identità.

Definizione 109 (Trasversalità per superfici con bordo). Se $\partial X \neq \emptyset$ definisco f *trasversa* ad A se si ha $f|_{\partial X} \pitchfork A$ (infatti il bordo di una varietà è senza bordo).

Focus Si ha allora che:

- Se $f(X) \cap A = \emptyset$ allora $f \pitchfork A$ per vacuità;
- $X \xhookrightarrow{i} A \subseteq Y$ sottovarietà, allora $i \pitchfork Y \iff X \pitchfork Y$, cioè $\forall x \in X \cap Y : T_x X + T_x A = T_x Y$.
Inoltre se $\dim X + \dim A = \dim Y \implies T_x X \oplus T_x A = T_x Y$ (cioè $T_x X \cap T_x A = \{0\}$);
- Se $A = \{y_0\}$, $f \pitchfork \{y_0\}$:
 $\forall x \in X$ t.c. $f(x) = y_0$ allora $T_{y_0}(A) + D_x f(T_x X) = T_{y_0} Y \iff D_x f$ è surgettiva $\forall x \in f^{-1}(y_0)$, poiché $T_{y_0}(A)$

Definizione 110. Si dice che $y_0 \in Y$ è un *valore regolare* per f se $\forall x \in f^{-1}(y_0)$ si verifica $D_x f$ è surgettiva, mentre $x \in X$ è un *punto critico* per f se $D_x f$ non è surgettiva.

In questa lezione si svilupperanno tre “tipi” di teoremi di trasversalità. Non verrà subito data una dimostrazione degli stessi, né ora, né durante il corso, tranne qualche idea riguardo la terza.

Tipo 1

Teorema 73 (Teorema 1). *Siano X e Y varietà differenziabili, $A \subseteq Y$ e $f : X \rightarrow Y$ tale che $f \pitchfork A$. Allora $f^{-1}(A)$ è una sottovarietà di X .*

Tipo 2

Teorema 74 (Teorema 2). *Le funzioni trasverse ad $A \subseteq Y$ sono un aperto denso in $\epsilon(X, Y)$.*

Teorema 75 (Teorema 2++). *Sia $f \not\pitchfork A$. Esiste una funzione g arbitrariamente vicina a f tale che $g \pitchfork A$. Se X non è chiusa ed $f|_{B(X)} \pitchfork A$ puoi scegliere g tale che coincida con f in un collare del bordo di X .*

Tipo 3

Teorema 76 (Teorema 3). *Siano X_1 e X_2 varietà compatte e senza bordo della stessa dimensione, Y varietà e A sottovarietà di Y . Siano inoltre $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ e $f_2 : X_2 \rightarrow Y$. Se $f_1 \pitchfork A$ e $f_1 \sim_{cob} f_2$ detti $Z_1 = f_1^{-1}(A)$ e $Z_2 = f_2^{-1}(A)$ si ha che $(Z_1, f_1|_{Z_1}) \sim_{cob} (Z_2, f_2|_{Z_2})$.*

Dimostrazione. Diamo un po' di idee per la dimostrazione, dando per noti gli altri teoremi già esposti. Per il teorema 1 Z_1 e Z_2 sono delle sottovarietà di X_1 e di X_2 . Chiamiamo W la varietà che realizza il cobordismo ($\partial W = X_1 \sqcup X_2$) ed F la relativa funzione ($F|_{X_1} = f_1$ e $F|_{X_2} = f_2$). Grazie al teorema 2 esiste una funzione $G : W \rightarrow Y$ vicina a piacere ad F , che ristretta su ∂W valga $f_1 \sqcup f_2$ (anzi, il teorema ci garantisce che la possiamo scegliere in modo che coincida con F in un collare di $X_1 \sqcup X_2$) e che sia trasversa ad A . Chiaramente la controimmagine di G in W è una sottovarietà per il teorema 1 e, grazie al fatto che G coincide con F in un collare di $X_1 \sqcup X_2$ ne segue che $G|_{G^{-1}(A)}$ realizza il cobordismo fra Z_1 e Z_2 . \square

Vediamo ora qualche semplice applicazione della teoria della trasversalità. Perdonatemi per quello che sto per fare.

Definizione 111 (Retrazione). Sia X una varietà con bordo. $\tau : X \rightarrow \partial X$ è una retrazione se $\tau|_{\partial X} = \text{id}_{\partial X}$.

Teorema 77. *Non esistono retrazioni!*

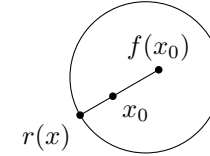
Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Sia $y_0 \in \partial X$. Prendo τ retrazione. $\tau|_{\partial X}$ è ha differenziale iniettivo in y_0 , dunque è trasversa ad $\{y_0\}$. Prendo una funzione τ' vicina a piacere a τ che coincida con τ sul bordo e trasversa ad $\{y_0\}$. Considero $Y = \tau'^{-1}(y_0)$. Y è una varietà 1-dimensionale e $y_0 \in Y$. Dunque Y ha bordo non vuoto. Ma, per la caratterizzazione delle varietà 1-dimensionali deve avere almeno un altro punto y_1 nel bordo. Dunque $y_1 = \tau(y_1) = \tau'(y_1) = y_0$. Assurdo. \square

2.23. CENNI ALLE DIMOSTRAZIONI DEI TEOREMI DI TRASVERSALITÀ

Forse potreste perdonarmi grazie a questo:

Teorema 78 (Teorema del punto fisso di Brouwer). *Sia D^n il disco chiuso di raggio 1 in \mathbb{R}^n . Sia $f : D^n \rightarrow D^n$. Esiste $x_0 \in D^n$ punto fisso per f .*

Dimostrazione. Sia $r : D^n \rightarrow \partial D^n$ tale che $r(x)$ sia l'intersezione di ∂D^n con la semiretta di origine $f(x_0)$ passante per x_0 . r è una retrazione. \square

**2.23 Cenni alle dimostrazioni dei teoremi di trasversalità**

Teorema 79 (Teorema 1 di \pitchfork). *Siano X, Y e $A \subseteq Y$ varietà differenziabili, (X compatta, Y e A chiuse) e $f : X \rightarrow Y$ tale che $f \pitchfork A$. Allora $Z := f^{-1}(A)$ è una sottovarietà di X e $\text{codim}_X Z = \text{codim}_Y A$.*

Dimostrazione. Per semplicità supponiamo $\partial X = \emptyset$.

- Caso particolare: $A = \{y_0\}$ è composto da un solo punto.

L'idea è che possiamo "localizzare" il problema per ricondurci al caso in cui $X = U$ aperto di \mathbb{R}^n , $Y = \mathbb{R}^m$, $A = \{0\}$ e applicare il teorema della funzione implicita (versione suriettiva). Quindi, poichè $f \pitchfork A \iff y_0$ è un valore regolare per f , abbiamo che $\forall x \in f^{-1}(y_0)$ $D_x f : T_x X \rightarrow Y$ è suriettiva.

- Riduzione del caso generale al caso particolare.

L'idea è che possiamo localizzare in arrivo:

$$(Y, A) = (U \times V, U \times \{0\}) \subseteq (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p \times \{0\})$$

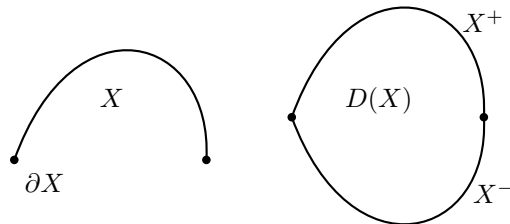
e (eventualmente restringendo π all'immagine di f)

$$\begin{array}{c} X \xrightarrow{f} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline U \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi} \begin{array}{|c|} \hline V \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Sia $g = \pi \circ f$, mostrare per esercizio che $f \pitchfork A \iff g \pitchfork \{0\}$.

La dimostrazione nel caso $\partial X \neq \emptyset$ è sostanzialmente analoga, con qualche complicazione: l'idea è considerare la varietà *Doppio*

$$D(X) := X \sqcup X / (\text{id} : \partial X \rightarrow \partial X)$$



$$D(f) : D(X) \rightarrow Y \supseteq A$$

Sarà quindi $D(Z) = (D(f))^{-1}(A)$ una sottovarietà di $D(X)$ e allora $Z = f^{-1}(A) = D(Z) \cap X$ sarà una sottovarietà di X . Basta verificare che $D(Z) \pitchfork \partial X$ in $D(X)$. \square

Ora ci prepariamo ad affrontare la dimostrazione del (Teorema 2). Faremo un po' di nomenclatura e poi caleremo dal cielo senza dimostrazione qualche cannone come il teorema di Brown. Infatti se non bariamo un po' non riusciamo ad arrivare in fondo.

Definizione 112. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione liscia. Ricordiamo che un punto $x \in X$ si dice *critico* per f se $D_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ non è suriettiva. Chiameremo $C(f)$ l'insieme dei punti critici di f .

Osservazione 60. $Y \setminus f(C(f))$ è l'insieme dei *valori regolari* di f .

Teorema 80 (Brown). $Y \setminus f(C(f))$ è denso in Y .

Dimostrazione. È un corollario del Teorema di Morse-Sard⁸ (cannone di analisi). \square

Teorema 81 (Teorema 2 di \pitchfork). $\pitchfork(X, Y, A) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \pitchfork A\}$ è un aperto denso in $\mathcal{E}(X, Y)$.

Dimostrazione.

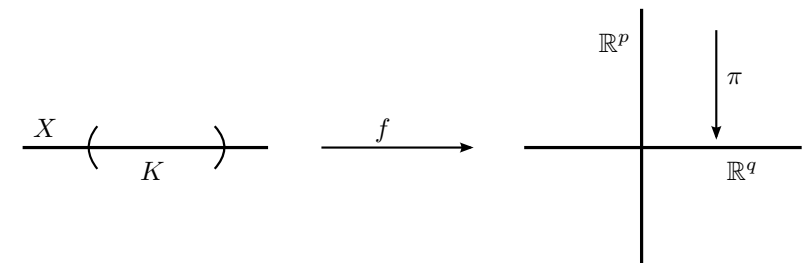
Apertura Idea: l'algebra lineare ci da dei controlli locali (teorema del rango massimo) e la compattezza ci permette di estendere i controlli a livello globale.

⁸Baro: gioca questa carta insieme ad un oggetto, puoi possedere ed usare l'oggetto anche se è contro le regole.

Densità X è compatto $\implies f(X) \subseteq Y$ è compatto, quindi posso ricoprire $f(X)$ con un numero finito di carte locali di Y .

Localmente vedo Y come \mathbb{R}^n : $Y = U \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e $A = \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Per ogni punto prendo una palla aperta B e la sua controimmagine $K := f^{-1}(B) \subseteq X$; poichè i K ricoprono X , che è compatta, allora posso estrarre un sottoricoprimento finito.

Sia $\pitchfork_K(X, Y, A) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \pitchfork A \text{ lungo } K\}$. Dimostriamo che $\forall K \pitchfork_K(X, Y, A)$ è (un aperto) denso.



La condizione di trasversalità si traduce quindi nel richiedere che, dato $f(x) \in A$, x non sia un punto critico per $\pi \circ f$. Per il teorema di Brown esiste $\{y_n\} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tale che $y_n \rightarrow 0$ e $(\pi \circ f)(y_n)$ è un valore regolare per $\pi \circ f$. Otteniamo $\{f_n(x)\} = \{f(x) - y_n\}$ che è una successione di funzioni trasverse ad A e che converge uniformemente a f in K .

Abbiamo ottenuto che $\pitchfork_K(X, Y, A)$ è (un aperto) denso, dobbiamo estendere questa conquista a tutto X , ma questo non è difficile perché

1. per estendere le f_n basta usare le funzioni a foruncolo;
2. basta notare che $\pitchfork(X, Y, A) = \bigcup_K \pitchfork_K(X, Y, A)$ e poichè l'intersezione è finita ottengo che anche $\pitchfork(X, Y, A)$ è denso.

Per il caso $\partial X \neq \emptyset$ si usa anche qui il trucco del *Doppio*. \square

Fra le potenti applicazioni di questi teoremi di trasversalità c'è il teorema di immersione (vedi lezione successiva).

Teorema 82 (Cannone buffo). Sia $i(n) := \min\{N \mid \forall X^n \exists \varphi : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N\}$, allora $i(n) = n + (\text{numero di "1" nella scrittura in base 2 di } n)$, mentre per gli embedding è ancora un problema aperto.

2.24 Immersioni e embedding

Teorema 83. Una varietà compatta chiusa X di dimensione n ammette embedding $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ e immersione $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Dimostrazione. Si è già visto che $\exists N$ t.c. \exists embedding $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$.

Scomponiamo \mathbb{R}^N in $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Ora, $\forall v \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1} : \mathbb{R}^N = \text{span}(v) \oplus \mathbb{R}^{N-1}$ e ad ogni tale v corrisponde una proiezione $\pi_v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$. Proiettiamo dunque X su \mathbb{R}^{N-1} tramite $\pi_v|_X$: vogliamo dunque trovare una condizione su v per cui questa sia un'immersione. Si ha $\ker \pi_v = \text{span}(v)$, dunque $\pi_v|_X$ è immersione se $\forall x \in X, \forall z \in T_x X : z \notin \text{span}(v)$ (WLOG possiamo supporre $\|v\| = \|z\| = 1$, dunque se $z \neq \pm v$).

Sia $\nu : T(X) \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione $(x, z) \mapsto \|z\|$ e sia $T_1(X) := \nu^{-1}(1)$ (ovvero l'unione delle sfere unitarie di ogni $T_x X$). $T_1(X)$ è dunque sottovarietà di $T(X)$ (per teoremi di trasversalità) di dimensione $2n - 1$, e si ha $T_1(X) \subseteq X \times S^{N-1}$. sia ora $\rho : T_1(X) \rightarrow S^{N-1}$ la proiezione $(x, v) \mapsto v$; allora $\pi_v|_X$ è immersione $\Leftrightarrow v \in S^{N-1} \setminus \text{Im } \rho$.

Per i teoremi di trasversalità avevamo visto che se $\dim X < \dim Y$ e $f : X \rightarrow Y$ liscia, $Y \setminus f(X)$ è denso in Y . Dunque se $\dim S^{N-1} > \dim T_1(X)$ (ovvero se $N > 2n$) esiste un insieme denso (aperto per compattezza di X) di vettori v che danno $\pi_v|_X$ immersione. Dunque se esiste un embedding in dimensione maggiore di $2n$, esiste un'immersione in una dimensione in meno.

Per mostrare l'esistenza di un embedding in \mathbb{R}^{2n+1} ragioniamo in modo analogo: a partire da un embedding $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ cerco v t.c. $\pi_v|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ sia un embedding (ovvero, per compattezza di X , un'immersione iniettiva).

Consideriamo $X \times X \setminus \Delta$, con $\Delta := \{(a, b) \in X \times X \mid a = b\}$; si tratta di una varietà non compatta di dimensione $2n$. Sia ora $\alpha : X \times X \setminus \Delta \rightarrow S^{N-1}$ l'applicazione $(x, y) \mapsto \frac{x-y}{\|x-y\|}$.

Se π_v non è iniettiva, $\exists x, y \in X$ t.c. $x - y \in \text{span}(v)$, ovvero (supponendo WLOG $\|v\| = 1$) π_v è iniettiva se $v \notin \text{Im } \alpha$. Dunque, se $\dim S^{N-1} > \dim X \times X \setminus \Delta$ (ovvero se $N > 2n + 1$) esiste un insieme denso di vettori v che rendono π_v iniettiva; siccome inoltre esiste un denso aperto che la rende immersione, l'intersezione (non nulla per le proprietà di densità) contiene vettori che rendono π_v immersione iniettiva, ovvero embedding. Procedendo induttivamente concludiamo che esiste un embedding in \mathbb{R}^{2n-1} e dunque per quanto visto prima un'immersione in \mathbb{R}^{2n} . \square

2.25 Versione orientata dei teoremi di trasversalità

Proposizione 84. *Siano $X, Y \supseteq A$ varietà orientate e $f : X \rightarrow Y$, $f \pitchfork A$. Allora $Z = f^{-1}(A)$ oltre a essere una sottovarietà di X ammette una procedura di orientazione.*

Prima di esibire questa procedura, usiamo questo fatto per mostrare la versione

2.25. VERSIONE ORIENTATA DEI TEOREMI DI TRASVERSALITÀ

orientata di un fatto già noto: sappiamo che per

$$\begin{array}{ccc} X_0 & & \\ & \searrow f_0 & \\ W & \xrightarrow{F} & Y \supseteq A \\ & \nearrow f_1 & \\ X_1 & & \end{array}$$

con $(X_0, f_0) \sim_{cob} (X_1, f_1)$ mediante (W, F) e $f_0, f_1 \pitchfork A$, abbiamo per le preimmagini $Z_0 = f_0^{-1}(A)$, $Z_1 = f_1^{-1}(A)$ che $(Z_0, f_0|_{Z_0}) \sim_{cob} (Z_1, f_1|_{Z_1})$ ed il cobordismo è realizzato da $(U, \tilde{F}|_U)$, dove \tilde{F} è un'applicazione su W vicina ad F e trasversa ad A per cui $\tilde{F}|_{X_0} = f_0$, $\tilde{F}|_{X_1} = f_1$, e $U = \tilde{F}^{-1}(A) \subseteq W$.

Ora, se $(X_0, f_0) \sim_{cob+} (X_1, f_1)$ con il cobordismo orientato realizzato da W, F , applicando la procedura di orientazione alle controimmagini di A otteniamo che $(U, \tilde{F}|_U)$ realizza il cobordismo orientato $(Z_0, f_0|_{Z_0}) \sim_{cob+} (Z_1, f_1|_{Z_1})$.

Mostriamo ora la procedura di orientazione, partendo dal caso $A = \{y_0\}$, $\dim X = \dim Y$.

Si ha $f \pitchfork A \Leftrightarrow y_0$ è valore regolare per f , dunque $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\}$ (finito per compattezza di X) è un insieme di punti non critici, e per l'uguaglianza delle dimensioni $D_{x_i} f : T_{x_i} X \rightarrow T_{y_0} Y$ è un isomorfismo.

Ora, se Y, y_0 e X sono orientati, fisso in $T_{y_0} Y$ una base \mathcal{B}_{y_0} nella classe di orientazione di Y e assegno a x_i il segno (dunque l'orientazione) $+$ se la controimmagine di questa base per $D_{x_i} f$ è una base nella classe di orientazione di X , ed il segno $-$ se è nell'altra classe di orientazione.

Rilassando la condizione sulle dimensioni (dunque passando al caso $\dim X \geq \dim Y$, altrimenti non si potrebbe avere $D_x f$ suriettivo) e ponendo $Z = f^{-1}(y_0)$, per $x \in Z$ abbiamo $T_x X = T_x Z \oplus \nu(x)$, con $\nu(x)$ l'iperpiano ortogonale a $T_x Z$. $D_x f : \nu(x) \rightarrow T_{y_0} Y$ è quindi isomorfismo, dunque $(D_x f)^{-1}(\mathcal{B}_{y_0})$ è base di $\nu(x)$; scelgo pertanto per Z l'orientazione tale per cui una base di $T_x Z$ compatibile con essa completa la base di $\nu(x)$ appena esibita ad una base di $T_x X$ compatibile con l'orientazione di X .

Il caso $\dim A > 0$ si riconduce a quanto mostrato per $A = \{pt\}$, come si vedrà nella lezione seguente.

2.26 Ripasso della lezione sulla trasversalità

Sia $f : X \rightarrow Y$ e $A \in Y$ tale che $f \pitchfork A$, le varietà sono tutte orientate, allora $Z = f^{-1}(A)$ è orientabile, precedentemente abbiamo dato una procedura per orientarla. Sia $A = \{y_0\}$, y_0 è un valore regolare per f . Localmente ho la situazione linearizzata del teorema della funzione implicita surgettiva.

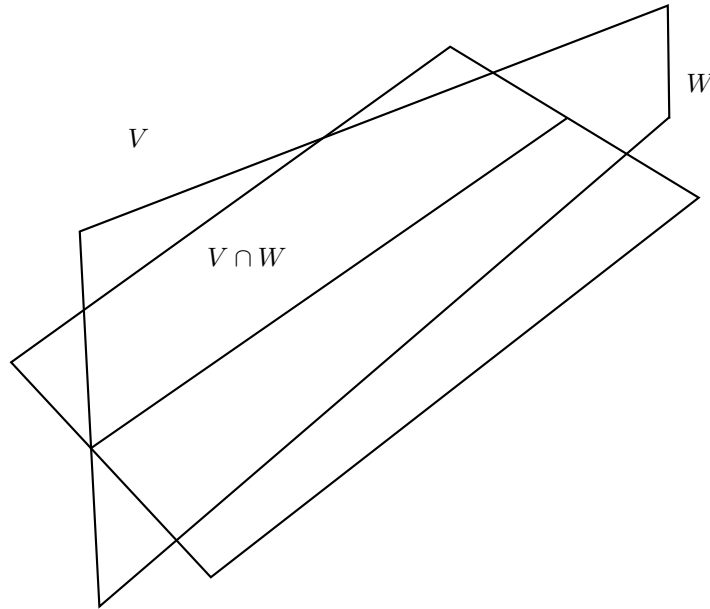


Figura 23: Intersezione di spazi vettoriali

Sia i una immersione cioè $X \hookrightarrow A \subset Y$ e definisco $i^{-1}(A) = X \pitchfork A$. Si ha anche $T_x X + T_y A = T_y Y$ e definisco $T_x(X \cap A) = T_x X \cap T_y A$. Nella lezione precedente ho dato una procedura per orientare $i^{-1}(A) = X \pitchfork A$. Ora voglio orientare $T_x(X \cap A)$ sapendo che l'unione degli spazi di cui è intersezione da tutto l'ambiente $T_x Y$. Per fare ciò si darà una procedura per orientare l'intersezione di due spazi vettoriali. Ho che \mathbb{R}^N è lo spazio ambiente e vale $V + W = \mathbb{R}^N$. Sia \mathcal{B} una base dell'intersezione $V \cap W$. Le basi \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W sono basi di V e W così come lo sono rispettivamente anche $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_V)$ e $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_W)$.

L'orientazione di V e W è data da queste ultime basi. L'insieme $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ è base di \mathbb{R}^N e produce quindi una orientazione di \mathbb{R}^N . L'orientazione della base \mathcal{B} di $V \cap W$ è quella per cui la procedura specificata produce una base per \mathbb{R}^N che ha la stessa orientazione data in partenza.

Osservazione 61. Se scambio l'ordine delle varietà ottengo $A \pitchfork X$ e $X \pitchfork A$. Si può verificare che vale la relazione: $A \pitchfork X = (-1)^{\text{codim}(X) \cdot \text{codim}(Y)} X \pitchfork A$ Dove il segno significa semplicemente l'orientazione (stessa orientazione o orientazione opposta).

Se è $f : X \rightarrow Y$ con $A \subseteq Y$ generico per dimostrare che $f^{-1}(A)$ è una varietà e dargli una orientazione ci si riconduce al caso in cui $A = \{y_0\}$, a questo punto si applica la procedura esposta precedentemente.

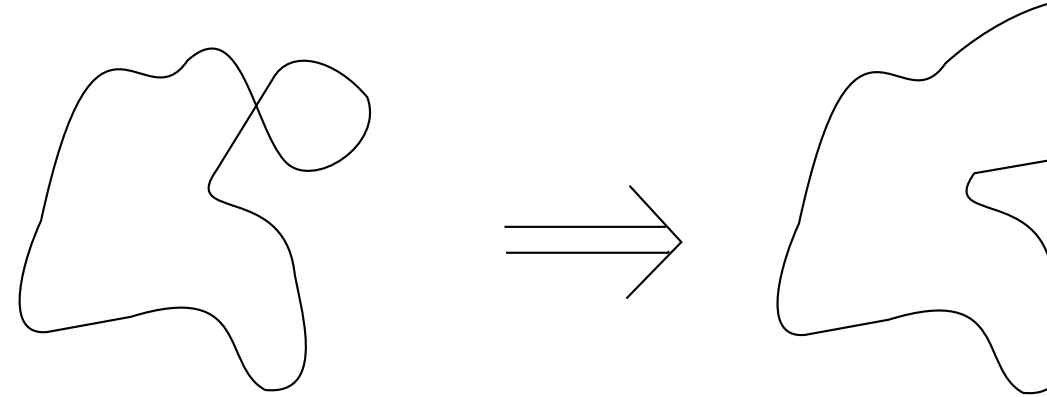


Figura 24: Whitney Trick

Definizione 113 (Trasversalità di funzioni). Siano date $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ e $f_2 : X_2 \rightarrow Y$. Voglio dare un senso alla scrittura $f_1 \pitchfork f_2$. Definiamo $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y \times Y$ come $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Considero l'insieme diagonale $\Delta = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid y_1 = y_2\}$. Diciamo $f_1 \pitchfork f_2 \Leftrightarrow f_1 \times f_2 \pitchfork \Delta$.

Teorema 85. Data $f_2 : X_2 \rightarrow Y$, definiamo $\pitchfork (A, f_2) := \{f : X_1 \rightarrow A \supseteq Y \mid f \pitchfork f_2\}$ l'insieme così definito è un aperto denso di $\mathcal{E}(X_1, Y)$.

Abbiamo visto nelle lezioni precedenti:

- Non esistono retrazioni $r : X \rightarrow \partial X$ diffeomorfismi, da cui segue il teorema del punto fisso di Brouwer
- Vale il teorema di embedding cioè ogni varietà X^n di dimensione n si può immergere con un embedding in \mathbb{R}^{2n+1} se non richiedo iniettività della funzione nella sua immagine (condizione per avere embedding) posso comunque trovare un'immersione in \mathbb{R}^{2n} .

Teorema 86 (Di Whitney versione difficile). $\forall X^n$ trovo un embedding $X^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Osservazione 62. Per dimostrarlo non basta usare considerazioni di trasversalità. Devo definire una procedura a partire dalla immersione in \mathbb{R}^{2n} per eliminare tutte le autointersezioni della varietà immersa, questa procedura è nota come Whitney Trick.

Osservazione 63. In tutte le dimensioni ($n \neq 4$) ogni varietà omeomorfa a \mathbb{R}^n è diffeomorfa a \mathbb{R}^n . In \mathbb{R}^4 questo non vale e c'è un continuo di varietà non diffeomorfe tra loro.

2.27 Teoria del grado

$f : X^n \rightarrow Y^n$ con X^n compatta e chiusa e Y^n connessa. Voglio definire il grado della funzione f , dimostreremo che è un invariante per cobordismo.

Definizione 114 (Versione non orientata). Procederemo seguendo una serie di semplici passi:

- Fisso $y_0 \in Y$.
- Prendo g vicina a f nel senso della topologia definita su $\mathcal{E}(X, Y)$ tale che $g \pitchfork \{y_0\}$ si vede che g è omomorfa a f dai teoremi dimostrati nelle lezioni precedenti sulla trasversalità.
- $g^{-1}(y_0) = x_1, x_2, \dots, x_k$ è un insieme di cardinalità finita, infatti X è compatta
- Definisco $\text{grad}_2(f) = k \pmod 2$

Dunque vediamo che il grado di una funzione tra varietà non orientate è una funzione $\mathcal{E}(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Teorema 87 (Buona definizione del grado). $f: \text{grad}_2(f)$ è ben definita cioè non dipende né dalla scelta di y_0 né dalla scelta di g .

Teorema 88. Se $f_1 : X_0 \rightarrow Y$ e $f_2 : X_0 \rightarrow Y$ sono cobordanti allora $\text{grad}_2(f_1) = \text{grad}_2(f_0)$. In particolare questo vale quando sono omotope, infatti l'omotopia è un particolare cobordismo.

Dimostrazione. Sappiamo che g_1 è omotopa a f_1 e che g_2 è omotopa a f_2 , poiché l'omotopia è una relazione di equivalenza e sappiamo che le f_1 e f_2 sono omotope lo sono anche le funzioni g_1 e g_2 , che sono dunque cobordanti. Da questo posso concludere che per il terzo teorema di trasversalità $Z_1 = g_1^{-1}(A)$ e $Z_2 = g_2^{-1}(A)$ sono varietà cobordanti quindi la parità della loro cardinalità è uguale. Questo conclude la dimostrazione della buona positura del grado.

Dimostreremo che a y_0 fissato il grado non dipende dalla scelta della g . Siano g_1 e g_2 tali che $g_1 \pitchfork y_0$ e $g_2 \pitchfork y_0$.

Ora devo eliminare l'arbitrarietà del punto y_0 . Prendo due punti x e y faremo vedere nella prossima lezione che si può utilizzare il fatto che Y è connessa per costruire una isotopia $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che posto $H_t = H|_{Y \times t}$ ho che H_t è un diffeomorfismo di $Y \forall t \in [0, 1]$ e vale che $H_0 = \text{id}$ e $H_1(x) = y$. Comunque prendo due punti esiste un diffeomorfismo che manda un punto nell'altro, in questo senso nessun punto è privilegiato. Questo significa che una varietà è omogenea, cioè a meno di diffeomorfismi ogni punto è equivalente. \square

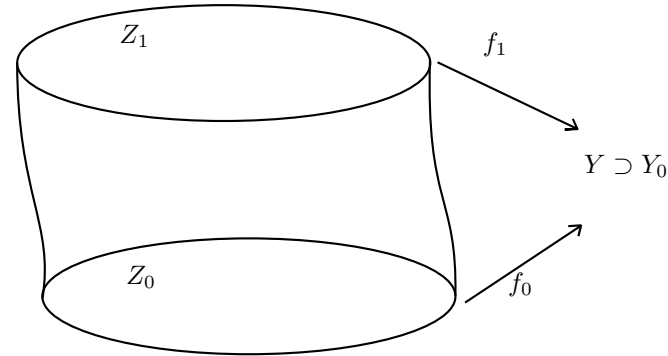


Figura 25: Cobordismo di funzioni

Teorema 89 (Lemma di omogeneità). Sia Y una varietà connessa, allora $\forall y_0, y_1 \in Y, \exists f$ diffeomorfismo $f : Y \rightarrow Y$ t.c. $f(y_0) = y_1$. Inoltre posso richiedere che f sia a supporto compatto (ovvero è l'identità fuori da un compatto) e che sia isotopa all'identità (ovvero $\exists H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ t.c. $H_t \text{ diffeo } \forall t, H_0 = \text{Id}, H_1 = f$)

Dimostrazione. Partiamo dal caso particolare in cui $Y = \mathbb{R}^n$.

Prendiamo due punti x e y in \mathbb{R}^n e sia $\text{WLOG } x \equiv 0$, (l'origine). La funzione cercata potrebbe essere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $g(x) = x + y$. $f(0) = y$ e f è isotopa all'identità ($H(x, t) = x + ty$), tuttavia f non è a supporto compatto, poiché la traslazione muove tutto \mathbb{R}^n . Per rimediare sfruttiamo le funzioni a foruncolo precedentemente definite.

Sia $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione a foruncolo da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} . La funzione cercata potrà quindi essere scritta come $g(x) = x + \lambda(x)y$

Passiamo adesso ad una varietà Y connessa qualunque.

Definiamo una relazione di equivalenza: $x \sim y \leftrightarrow \exists f$ con le proprietà richieste. È facile verificare che si tratta di una relazione di equivalenza. A questo punto se dimostro che le classi di equivalenza sono aperte posso concludere: poiché Y è connesso esiste un'unica classe di equivalenza, tutto Y . Devo mostrare quindi che $\forall x \in Y \exists U_x \subseteq Y$ t.c. $\forall y \in U_x x \sim y$.

Considero una carta locale intorno a x . Suppongo $\text{WLOG } x = 0$. All'interno della carta locale posso considerare la funzione g definita prima. \square

Sia $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ diffeomorfismo con $f(0) = 0$. Definiamo $\hat{f} : S^n \rightarrow S^n$ come $\hat{f}(x) := \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$. Abbiamo che $\text{grad } \hat{f} = \text{sgn det } D_0 f$. Ciò segue dalla linearizzazione a meno di isotopia dei diffeomorfismi $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ più il fatto che il grado è invariante di omotopia.

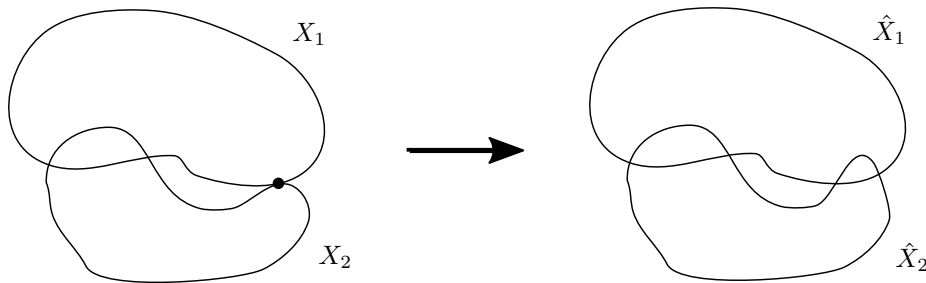


Figura 26: Per definire il numero di intersezioni di due varietà, le spostiamo un po' in modo che siano trasverse.

2.28 Numero d'intersezione

Sia Y^n la varietà ambiente e X_1, X_2 sottovarietà compatte chiuse codimensionali ($\dim X_1 + \dim X_2 = \dim Y$). Siano $X_1 \xrightarrow{i_1} Y$ e $X_2 \xrightarrow{i_2} Y$ le inclusioni. Diciamo che $X_1 \pitchfork X_2 \iff i_1 \pitchfork i_2$. Ricordiamo la definizione di trasversalità per le funzioni: $i_1 \pitchfork i_2 \iff ((x_1, x_2) \mapsto (i_1(x_1), i_2(x_2))) =: i_1 \times i_2 \pitchfork \Delta := \{(y, y) \in Y \times Y\}$.

Siano \hat{i}_1 e \hat{i}_2 piccole perturbazioni di i_1 e i_2 . Poiché gli embedding sono aperti, possiamo scegliere \hat{i}_1 e \hat{i}_2 embedding, omotopi a i_1 e i_2 e $\hat{i}_1 \pitchfork \hat{i}_2$. Siano $\hat{X}_1 := \hat{i}_1(X_1)$ e \hat{X}_2 analogamente (vedi Figura 26).

Definizione 115 (Numero d'intersezione). Il numero d'intersezione di X_1 e X_2 è $(X_1 \cdot X_2) := \#(\hat{X}_1 \cap \hat{X}_2) \pmod 2$.

Teorema 90. È una buona definizione.

2.28.1 Versione orientata

Se Y, X_1, X_2 sono orientate, ogni punto di $\hat{X}_1 \cap \hat{X}_2$ ha un segno. Allora abbiamo naturalmente

Definizione 116 (Numero d'intersezione intero).

$$(X_1 \cdot X_2) := \sum_{x \in \hat{X}_1 \cap \hat{X}_2} \text{sgn } x$$

Teorema 91. È una buona definizione.

Osservazione 64. Nella versione non orientata $(X_1 \cdot X_2) = (X_2 \cdot X_1)$, mentre in quella orientata $(X_1 \cdot X_2) = (-1)^{\text{codim } X_1 \text{ codim } X_2} (X_2 \cdot X_1)$.

Osservazione 65. Poiché X_1 e X_2 sono codimensionali, $\text{codim } X_1 \text{ codim } X_2 = \dim X_1 \dim X_2$.

2.28.2 Autointersezione

Sia X compatta chiusa orientata, e non lo ripeteremo. C'è un'immersione canonica $X \hookrightarrow TX$ come sezione nulla: $X \ni x \mapsto \underline{0} \in T_x X$. Allora è definito il numero di autointersezione di X dentro TX . Siccome è importante ha un nome:

Definizione 117 (Caratteristica di Eulero-Poincaré). $\chi(X) := (X \cdot X)$.

In generale una sezione è un'applicazione s che fa commutare questo diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & TX \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

ovvero è un campo di vettori tangenti. La sezione nulla è il campo nullo, chiamiamola s_0 . Ha senso chiedersi se $s \pitchfork s_0$. I punti in cui s'intersecano sono gli zeri di s . Per definizione, $s \pitchfork s_0$ se e solo se in carte locali centrate sugli zeri $D_0 s$ è iniettivo.

Rivediamo la costruzione di $(X \cdot X)$. Sia $X \xrightarrow{h} TX$ vicina, omotopa e trasversa a s_0 . Non è detto che h sia una sezione, e invece:

Lemma 92. Non è restrittivo assumere che h sia una sezione.

Dimostrazione. La composizione $\pi \circ h$ è vicina a $\pi \circ s_0 = \text{id}$ che è un diffeomorfismo e i diffeomorfismi sono aperti, allora **WLOG** $\pi \circ h$ è un diffeomorfismo $X \rightarrow X$. Componendo ancora, $s := h \circ (\pi \circ h)^{-1}$ è una sezione e $s \pitchfork s_0^9$. \square

Dunque siamo in questa situazione:

- s_0 campo nullo
- s campo trasverso a s_0
- $\{x_1, \dots, x_k\}$ zeri di s

Quindi per definizione $(X \cdot X) = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(x_i)$, dove $\text{sgn } x = \text{sgn } \det D_0 s$ in una carta locale centrata in x .

Osservazione 66. Ogni s è omotopo a s_0 , vicino o lontano che sia.

Allora abbiamo dimostrato che

$$\forall s \text{ campo trasverso a } s_0 : (X \cdot X) = \sum_{x \text{ zero di } s} \text{sgn } x$$

Osservazione 67. In carte locali, $\text{sgn } x = \text{grad } \hat{s}^{10}$.

⁹La dimostrazione di quest'ultimo fatto è non banale.

¹⁰Vedi inizio lezione.

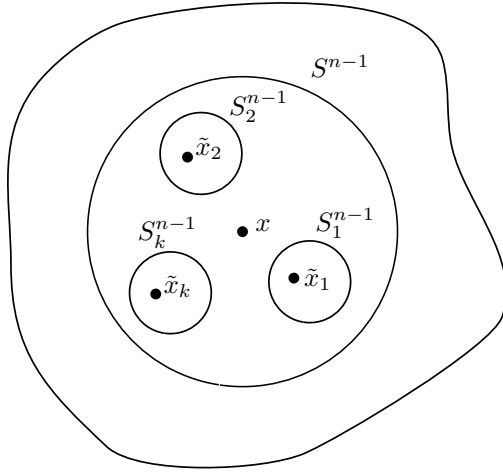


Figura 27: Faccio esplodere uno zero eventualmente degenere del campo in più zeri regolari.

Da cui sorge naturalmente un tentativo di generalizzazione.

Sia s campo su X con un numero finito di zeri, non necessariamente trasverso a s_0 . Possiamo sostituire il segno di uno zero con il grado di \hat{s} in carte locali, questo si può fare anche se lo zero è degenere.

Definizione 118. Dato x zero isolato di un campo s chiamiamo *indice di x* : $i(x) := \text{grad } \hat{s}$.

Osservazione 68. x non degenere $\implies i(x) = \text{sgn } x$.

Definizione 119. Sia s campo con zeri tutti isolati $\{x_1, \dots, x_k\}$. La *caratteristica di s* è:

$$\chi(s) := \sum_{i=1}^k i(x_i)$$

Osservazione 69. $s \pitchfork s_0 \implies \chi(s) = \chi(X)$.

Teorema 93 (di Hopf). *In verità vale $\chi(s) = \chi(X)$ anche se $\neg(s \pitchfork s_0)$.*

Dimostrazione. Sia x zero di s . Mi metto in una carta locale centrata in x con dentro un S^{n-1} . Considero un \tilde{s} omotopo a s e $\tilde{s} \pitchfork s_0$, con gli zeri contenuti nell' S^{n-1} (vedi Figura 27). Allora ho che $i_s(x) = \text{grad } \hat{s}_{S^{n-1}} = \text{grad } \hat{\tilde{s}}_{S^{n-1}}$ per omotopia. Siano \tilde{x}_i gli zeri di \tilde{s} , intorno a ognuno prendo un S_i^{n-1} . Ho che $i_{\tilde{s}}(\tilde{x}_i) = \text{grad } \hat{\tilde{s}}_{S_i^{n-1}}$ e dunque che $\sum_i i_{\tilde{s}}(\tilde{x}_i) = i_s(x)$ per cobordismo. \square

Osservazione 70. Condizione necessaria per avere campi non nulli è che la varietà abbia caratteristica nulla.

Definizione 120 (Varietà parallelizzabile). Una varietà X si dice *parallelizzabile* se $TX \simeq X \times \mathbb{R}$.

Tutte le varietà sono parallelizzabili?

Osservazione 71. Se questo fosse vero, allora su ogni varietà X avremmo l'esistenza di un campo vettoriale mai nullo: infatti se $TX \simeq X \times \mathbb{R}$, abbiamo un diffeomorfismo ϕ tra i due insiemi. Ma su $X \times \mathbb{R}$ posso prendere il campo costante $s(x) = e_1$, e poi portarlo indietro tramite ϕ^{-1} , ottenendo un campo vettoriale su X mai nullo.

Analizziamo intanto i casi delle sfere S^n .

Esempio 16 (S^1). E' facile mostrare che esiste un campo di vettori mai nullo: basta prendere quello tangente in verso antiorario e modulo costante.

Esempio 17 (S^2). Mostro che esiste un campo vettoriale che si annulla solo sul polo nord e sul polo sud. Dunque ho due zeri isolati. Per calcolare $\chi(S^2)$ devo dunque sommare $i_N(s)$, $i_S(s)$ con $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$.

Osservazione 72. Per il lemma di Morse, dato che N , S sono punti critici della mappa t , esiste un sistema di coordinate in cui la funzione è quadratica. In particolare, esiste intorno di N in cui la funzione è nella forma $-(y_1^2 + y_2^2)$ e un intorno di S in cui è nella forma $y_1^2 + y_2^2$.

Segue che $i(N) = i(S) = 1$ (ho due autovalori negativi o due positivi). Dunque $\chi(S^2) = 2$.

Proposizione 94. $\chi(S^{2n+1}) = 0$ e $\chi(S^{2n}) = 2$.

Dimostrazione. Basta considerare un campo analogo a quello esibito per S^2 e concludere tramite Morse. \square

Corollario 95. *Per n pari non è possibile che esista un campo mai nullo ("la sfera non è pettinabile").*

Proposizione 96. *Ci chiediamo se effettivamente per le sfere S^{2n+1} esista un campo di vettori mai nullo. La risposta è affermativa.*

Dimostrazione. La risposta è affermativa: $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$. Considero la mappa

$$f : S^{2n+2} \rightarrow TS^{2n+2}$$

$$(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \mapsto ((x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}), (-x_1, y_1, \dots, -x_{n+1}, y_{n+1}))$$

\square

Osservazione 73. Questo fatto è vero più in generale: X varietà, $\chi(X) = 0 \implies \exists$ campo vettoriale mai nullo.

Teorema 97. X ammette un campo tangente mai nullo $\iff \chi(X) = 0$

Dimostrazione.

\Rightarrow già visto

\Leftarrow ci si appoggia al:

Teorema 98 (Teorema di Hopf). f_0 omotopa $f_1 \iff \text{grad } f_0 = \text{grad } f_1$

Caso particolare: $f : S^n \rightarrow S^n$ è omotopa ad una costante $\iff \text{grad } f = 0$

Si ha dunque che $\chi(X) = 0$. Sia $s \pitchfork s_0$, con x_j zero isolato di s . Applicando il lemma di omogeneità non è restrittivo supporre che $x_1, \dots, x_k \in B$, palla dentro una carta di X . Inoltre considero per ogni x_j una palletta di centro x_j e raggio abbastanza piccolo da non contenere altri x_i . Si ha che la figura realizza un cobordismo esplicito.

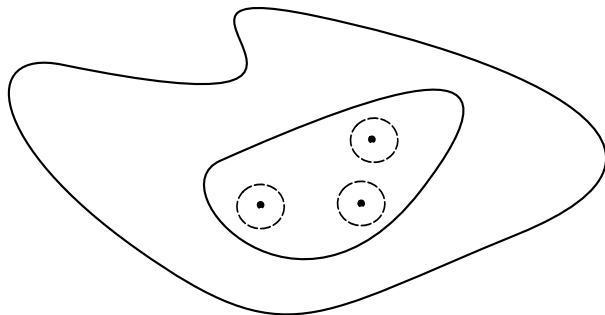


Figura 28: Punti di Morse in carta locale

Perciò la somma dei gradi interni è pari al grado esterno

$$\sum_{j=1}^k i_s(x_j) = 0 \quad (2.1)$$

Perciò la sezione sulla sfera esterna è omotopa ad una costante, dunque taglio all'interno della palla e sostituisco con il vettore costante e in questo modo non ho più zeri $\rightarrow \hat{s}$ si estende ad un'applicazione $F : D^{n+1} \rightarrow S^n$, sostituisco \hat{s} definito su D^{n+1} , con il campo F che estende $\hat{s}|_{S^n}$.

□

Osservazione 74.

- Per semplicità si consideri X connesso, quindi ha 2 orientazioni possibili. $\chi(X) = X \cdot X$ in TX , il fibrato tangente, e si ha che non dipende dall'orientazione di X fissata, infatti passando da un'orientazione all'altra si ha che

cambia anche quella delle fibre, perciò in TX quando si cambia base si ha che nel Jacobiano cambia di segno un blocco di dimensione pari, e perciò il determinante rimane 1;

- Lo stesso ragionamento vale anche se X non è orientabile, ma solo a livello locale, questo però è sufficiente per far sì che $\chi(X)$ è ben definita anche in questo caso;
- Sia $f : X \rightarrow Y$ con entrambe le varietà compatte e connesse, f diffeomorfismo locale, e sia $p = \# f^{-1}(y)$. Si ha che p è costante come funzione di y .

Esercizio 11. allora $\chi(X) = p \chi(Y)$.

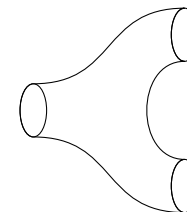
Esempio 18. L'ultima osservazione ci permette ad esempio di calcolare la caratteristica di Eulero,

$$\chi(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$$

Esercizio 12. La caratteristica di Eulero è "moltiplicativa" $\chi(X_1 \times X_2) = \chi(X_1)\chi(X_2)$

2.29 Funzioni di Morse

Si consideri la triade (W, V_0, V_1)



Definizione 121 (Funzioni di Morse). Una funzione sulla triade, $f : W \rightarrow [0, 1]$ con $f^{-1}(0) = V_0$ e $f^{-1}(1) = V_1$, è detta di Morse se:

- non ci sono punti critici di f in un intorno di $\partial W = V_0 \sqcup V_1$
- tutti i punti critici sono non degeneri

Perciò per una funzione di Morse si ha che $\forall x$ critico per $f \exists$ una carta locale, in cui (ponendo $\mathbf{WLOG} \ x = 0$) la funzione coincide con il modello locale di Morse $f(x) = -(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + (x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2)$, dove n è la dimensione di W e λ l'indice del punto critico.

Si ha che l'applicazione tangente di una funzione $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ è dunque un campo di funzionali su TW , cioè un elemento di T^*W , il fibrato cotangente. Fissiamo su W una metrica Riemanniana g , cosicché $\nabla_g f$ è il campo di vettori che rappresenta Df tramite g .

Si applica ora quest'ultimo risultato alle funzioni di Morse. Fissiamo dunque una metrica che nelle carte di Morse della funzione in oggetto appaia come la metrica standard di \mathbb{R}^n .

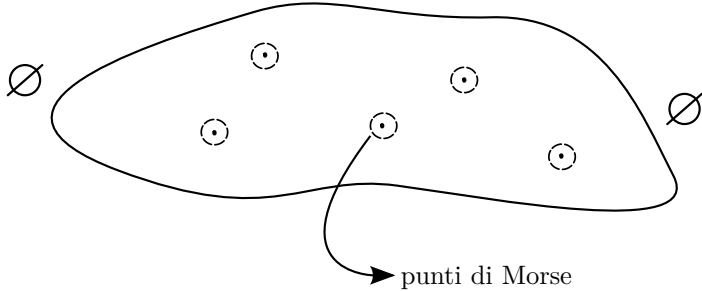


Figura 29: Transizione da vuoto a vuoto

Sia ora W chiusa, quindi una transizione dal vuoto al vuoto. $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, e sia g la metrica scelta. Allora si ha che:

$$\{\text{gli zeri di } \nabla_g f\} = \{\text{punti critici di } f\}$$

In quanto punto critico x ha associato un indice di Morse λ , mentre come campo di vettori ha associato il segno del Jacobiano, che si legge esplicitamente dal gradiente.

Teorema 99. *W compatta chiusa, $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ di Morse allora $\chi(W) = \sum_{x \text{ p.to critico}} (-1)^\lambda$ con λ indice di Morse del punto.*

Teorema 100 (Altro teorema di trasversalità). $\mathcal{M}(W) = \{f : W \rightarrow \mathbb{R} \text{ di Morse}\}$ è aperto in $\mathcal{E}(W, \mathbb{R})$.

Osservazione 75. Se $f : W^n \rightarrow \mathbb{R}$ è di Morse anche $-f$ lo è, e calcolando la caratteristica di Eulero mediante queste due funzioni dobbiamo perciò ottenere lo stesso risultato. Da cui si ottiene che:

$$\chi(W) = \sum_{x_j \text{ p.to critico}} (-1)^{\lambda_j} = \sum_{x_j \text{ p.to critico}} (-1)^{n-\lambda_j}$$

con λ_j indice di Morse di x_j .

Dall'ultima osservazione si ottiene:

Proposizione 101. *Se $\dim W$ è dispari $\implies \chi(W) = 0$*

Corollario 102. *Ogni varietà di dimensione dispari ammette un campo di vettori mai nullo.*

Nella lezione precedente si era visto come il doppio modo di calcolare la caratteristica di Eulero (per mezzo delle funzioni di Morse e per mezzo dei zeri di gradienti) ci fornisse dei bei risultati come il fatto che $\chi(X) = 0$ se $\dim(X)$ è dispari. Ora si cerca di estendere tutto questo alle triadi.

Definizione 122 (Funzione di Morse su una triade). Sia (W, V_0, V_1) una triade per cobordismo (non orientato). Una funzione $f : W \rightarrow [a_0, a_1] \subseteq \mathbb{R}$ è di Morse se:

- $f^{-1}(a_0) = V_0$ e $f^{-1}(a_1) = V_1$
- f non ha punti critici in un intorno di ∂W .
- tutti i punti critici sono non degeneri.

Si ha ora il seguente teorema di "trasversalità".

Teorema 103. *Le funzioni di Morse sulla triade (W, V_0, V_1) sono un aperto denso di $\mathcal{E}(W, \mathbb{R})$.*

Definizione 123 (Campo di vettori sulla triade). Un campo di vettori sulla triade (W, V_0, V_1) è una sezione di $T(W)$ tale che sia entrante in V_0 e uscente in V_1 .

Teorema 104. *Sia s un campo di vettori su (W, V_0, V_1) . La funzione $\chi(s) := \sum_{x \text{ zeri di } s} i_s(x)$ è indipendente da s .*

Definizione 124 (Caratteristica di Eulero di una triade). Si definisce $\chi(W, V_0) := \sum_{x \text{ zeri di } s} i_s(x)$ per qualsiasi s campo di vettori su (W, V_0, V_1) . Inoltre per ogni f funzione di Morse sulla triade si ha $\chi(W, V_0) = \sum_{x \text{ punti critici di } f} (-1)^{\lambda(x)}$ dove $\lambda(x)$ è l'indice di positività del punto critico x .

Osservazione 76. Questo ci fornisce un modo agevole per calcolare la caratteristica della triade "opposta". Infatti presa f una qualsiasi funzione di Morse sulla triade (W, V_0, V_1) $-f$ è una funzione di Morse su (W, V_1, V_0) . Dato che la matrice hessiana cambia segno $\chi(W, V_1) = \sum_{x \text{ p.c. di } -f} (-1)^{n-\lambda(x)} = (-1)^n \sum_{x \text{ punti critici di } f} (-1)^{\lambda(x)} = (-1)^n \chi(W, V_0)$.

Definizione 125. Si può definire la caratteristica di Eulero per varietà anche non chiuse come $\chi(W) = \chi(W, \emptyset)$ ¹¹

¹¹Si intende dunque W pensato come $(W, \emptyset, \partial W)$

Dimostriamo ora un po' di caratteristiche simpatiche di χ sotto le usuali nozioni di cobordismo.

Definizione 126 (incollamento di triadi). Se si ha la triade (W, V_0, V_1) e (W', V'_0, V'_1) e V_1 è diffeomorfa a V'_0 allora è ben definito l'incollamento $(W, V_0, V_1)^\circ (W', V'_0, V'_1) = (W'', V_0, V'_1)$.

Teorema 105. $\chi((W, V_0, V_1)^\circ (W', V'_0, V'_1)) = \chi(W, V_0, V_1) + \chi(W', V'_0, V'_1)$

Dimostrazione. È facile se si calcola il cobordismo se, avendo le sezioni a e b , rispettivamente di (W, V_0, V_1) e (W', V'_0, V'_1) si crea la sezione di $(W, V_0, V_1)^\circ (W', V'_0, V'_1)$. \square

Teorema 106. Sia X una varietà chiusa. Sia $W = X \times [-1, 1]$. $\chi(X) = \chi(W, \emptyset)$.

Dimostrazione. Detta z la coordinata verticale, si considera il campo vettoriale s su W che ha come componente verticale z^2 . Chiaramente gli unici zeri di s sono nella copia di $X \times 0$. Tutti le matrici hessiane sono poi con un 1 in più... \square

Questo risultato ci permette subito di vedere che esistono varietà chiuse che non sono bordo di una qualche altra varietà.

Teorema 107. Esistono varietà compatte chiuse non bordo di qualche altra varietà.

Dimostrazione. Indichiamo con $D(X)$ il doppio di X . Chiaramente $D(X)$ è una varietà compatta chiusa ed è diffeomorfa a due copie di W incollate per mezzo di un cilindro $X \times [-1, 1]$. Inoltre, grazie ai teoremi precedenti ¹² $\chi(D(X)) = \chi(X) + 2\chi(W, \partial W)$. Supponiamo ora che la dimensione di X sia pari, dunque che la dimensione di W sia dispari. Si ottiene allora che $\chi(D) = 0$, dunque $\chi(X) = -2\chi(W, \partial W)$. Dunque $\chi(X)$ è pari. Ma $\chi(S^{2n}) = 2\chi(P^{2n}) = 2$ dunque P^{2n} non è il bordo di alcuna varietà $2n + 1$ dimensionale. \square

TQFT in soldoni In questa sezione diamo un'idea di che cosa sia una TQFT, pensata come "rappresentazione del cobordismo nell'algebra lineare".

Vediamo di capire che cosa stiamo facendo nel linguaggio delle categorie. Da un lato gli oggetti in esame sono le n varietà, i morfismi sono i possibili cobordismi fra esse. Dall'altro gli oggetti sono gli spazi vettoriali, i morfismi sono le applicazioni lineari.

Supponiamo che io abbia da un lato delle varietà connesse X_i , dall'altro uno spazio vettoriale Z . Quello che devo avere è una mappa ¹³ che mandi una $X_i \rightarrow Z$, $X_1 \cup \dots \cup X_k = Z^{n \otimes}$ e mandi $(W, X_1 \cup \dots \cup X_k, X'_1 \cup \dots \cup X'_{k'})$ in un $\text{Hom}(Z^{k \otimes}, Z^{k' \otimes})$. Chiediamo che tutte queste richieste siano functoriali, che $F(\emptyset) = C$, e che $F((V \times [0, 1], V, V)) = \text{id}_{F(V)}$.

Bisogna a questo punto chiedersi se non abbiamo chiesto troppo. Purtroppo sembra di no poiché la caratteristica di Eulero ci fornisce un esempio.

¹²additività della caratteristica sotto incollamento e invarianza per omologia

¹³non bisognerebbe vedere questa mappa come una funzione ma come un funtore

Esempio stupido di TQFT

- Mandiamo tutte le varietà connesse in C
- Preso il cobordismo (W, X_1, X_2) lo mandiamo in $F((W, X_1, X_2)) : C \rightarrow C$ che manda $v \in C \rightarrow e^{\chi(W, X_1)} v$.

Questa è un onestissima TQFT.

Classificazione delle varietà bidimensionali a meno di cobordismo Ricordate che cosa è $\mathfrak{D}_1(X)$? Bene, questo è uno spazio finito-dimensionale (forse lo dimostreremo).

Usando la definizione di numero di intersezione lo muniremo di un prodotto scalare. Problema: siamo in caratteristica 2! Dunque molti dei teoremi di algebra lineare visti a geometria 1 vanno rivisti.

2.30 Superfici

In questa sezione S sarà una superficie, cioè una 2-varietà compatta, chiusa, connessa. L'obiettivo sarà studiare le superfici a meno di diffeomorfismi, come al solito andremo a caccia di invarianti.

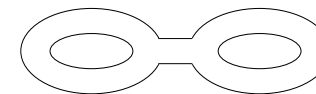
Attenzione: S_1, S_2, \dots saranno qui superfici, mentre S^1, S^2, \dots saranno circonferenza, sfera, ...

Esempio 19. Seguono alcuni esempi di superfici

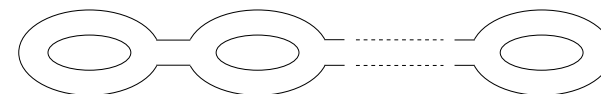
Sfera S^2

Toro $T := T_1 := S^1 \times S^1$

Tori siamesi $T_2 := 2$ tori incollati con un tubicino

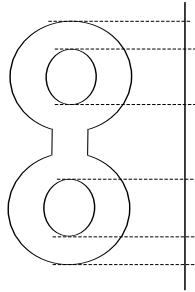


Toro-catena $T_k := k$ tori incollati con $k - 1$ tubicini



Osservazione 77. Gli esempi precedenti non sono tra loro diffeomorfi, infatti sono distinti dalla χ di Eulero.

$\chi(S^2) = 2$. Per calcolare la $\chi(T_k)$ usiamo la funzione di Morse "altezza" definita come in figura.



Notiamo che ci sono $2k + 2$ punti critici di cui

- 1 massimo: $\lambda = 1$
- $2k$ punti di sella (2 per ogni buco): $\lambda = -1$
- 1 minimo: $\lambda = 1$

Pertanto $\chi(T_k) = 2 - 2k$. Un modo alternativo per calcolarla è mostrare solamente che $\chi(T) = 0$ (notiamo in particolare che è facile trovare per T un campo di vettori mai nullo, ad esempio il campo di vettori tangenti al toro che “girano” in senso antiorario) e poi usare la proprietà di additività della χ .

Esercizio 13. Sia \mathbb{P}_2^2 la varietà ottenuta incollando due \mathbb{P}^2 analogamente a quanto fatto per i tori siamesi. Dimostrare che $\chi(\mathbb{P}_2^2) = 0$. *Hint:* usare l’additività di χ .

Osservazione 78. Notiamo, grazie all’esercizio, che la χ non distingue tra il toro T e \mathbb{P}_2^2 , tuttavia osserviamo che queste non sono diffeomorfe perché \mathbb{P}_2^2 non è orientabile. Urge un invariante più fine: la forma di intersezione.

2.31 La forma di intersezione su $\eta_1(S)$

Ricordiamo che $\eta_1(S) = \{f : M \rightarrow S\} / \sim_{\text{cob}}$ dove $M = S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ è una 1-varietà compatta, chiusa, che $\eta_1(S)$ è uno $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -spazio vettoriale e che dato un diffeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ questo induce un isomorfismo $f_* : \eta_1(S_1) \rightarrow \eta_1(S_2)$ (vedi lezione dell’11 aprile).

Teorema 108. $\dim \eta_1(S)$ è finita (per dimostrarlo si userebbe la compattezza di S).

Corollario 109. $\dim \eta_1(S)$ è un invariante per diffeomorfismi.

Definizione 127 (forma di intersezione β). β sarà una

$$\beta : \eta_1(S) \times \eta_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Cerchiamo un modo di definire $\beta([M_1, f_1], [M_2, f_2])$.

$$f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow S \times S \hookrightarrow \Delta \text{ diagonale}$$

2.31. LA FORMA DI INTERSEZIONE SU $\eta_1(S)$

Dai teoremi di trasversalità sappiamo trovare una \tilde{f}_1 e una \tilde{f}_2 omotope rispettivamente a f_1 e f_2 e tali che $\tilde{f}_1 \pitchfork \tilde{f}_2$ e, sempre per i teoremi di trasversalità, abbiamo che $(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2)^{-1}(\Delta)$ è una sottovarietà di $M_1 \times M_2$, che ha dimensione 2; inoltre $\text{codim}(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2)^{-1}(\Delta) = 2$ pertanto $(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2)^{-1}(\Delta)$ ha dimensione 0, ovvero è un insieme finito di k punti $\{x_1, \dots, x_k\}$.

Ha dunque senso definire

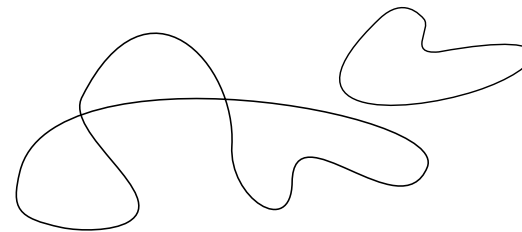
$$\beta([M_1, f_1], [M_2, f_2]) := k \pmod{2}$$

Esercizio 14. β è ben definita, bilineare e simmetrica.

La forma d’intersezione β misura la parità del numero di intersezioni tra le immagini di due curve su una superficie. Grazie ai teoremi di trasversalità (grazie anche alla dimensione finita e al teorema di immersione di Whitney) possiamo supporre che le f_1 e f_2 siano fin da subito immersioni e che i punti in comune alle due immagini su S non siano dei punti di tangenza, ma siano degli incroci “normali”, infatti se le f_1 e f_2 non avessero tali requisiti basterebbe perturbarle un poco per trovare delle \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 , omotope alle precedenti, che abbiano i suddetti requisiti.

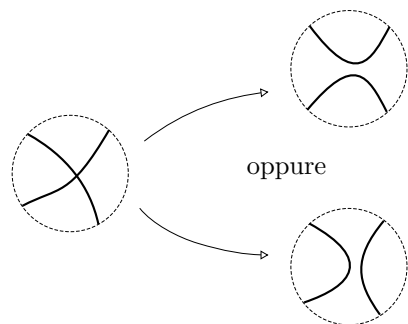
Caratterizzazione di $\eta_1(S)$ Cercheremo ora di capire come sono fatte le classi di equivalenza $[M, f]$. Con lo stesso spirito di quando caliamo i cannoni per “perturbare un poco” le funzioni e ricondurci a studiare casi semplici, il nostro intento sarà introdurre alcune “mosse” che pur perturbando una curva non ne cambiano la classe. In questo modo potremo scegliere, senza perdita di generalità, un rappresentante particolarmente semplice: scopriremo che possiamo prendere un rappresentante connesso.

Per quanto già discusso prendiamo una $f : M \rightarrow S$ che sia fin da subito un’immersione



faremo ora due semplificazioni:

1. Eliminare i punti doppi

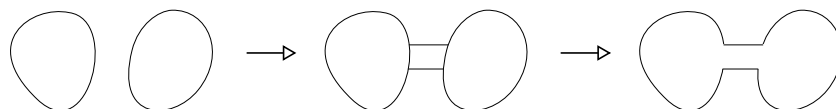


Notiamo che, non avendo orientazione, la scelta è indifferente.

Quindi da una $f : M \rightarrow S$ abbiamo ottenuto un embedding $i : M' \rightarrow S$ senza punti doppi.

Esercizio: mostrare che $[M, f] = [M', i]$ in $\eta_1(S)$.

2. Connettere l'immagine



Dove il cobordismo è “esplicitato” dalla figura seguente: i cerchi interni vanno immaginati come sollevati di qualche centimetro rispetto al piano del foglio e la parte colorata vista come una bolla di sapone.



Pertanto, grazie alla semplificazione (1), ogni classe di equivalenza $\alpha \in \eta_1(S)$ può essere rappresentata per mezzo di una 1-sottovarietà di S e, grazie alla (2), α può essere rappresentata da una curva connessa. D'ora in poi le curve che considereremo saranno belle lisce, iniettive e connesse.

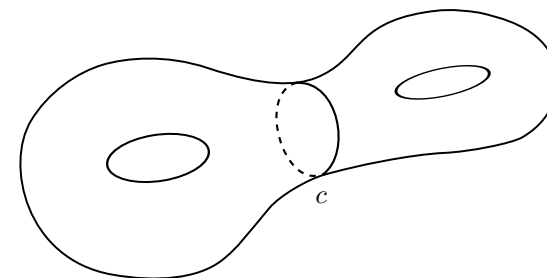
Teorema 110. *La forma di intersezione è non degenera.*

Dimostrazione. Utilizzeremo la notazione $\alpha \cdot \gamma := \beta(\alpha, \gamma)$.

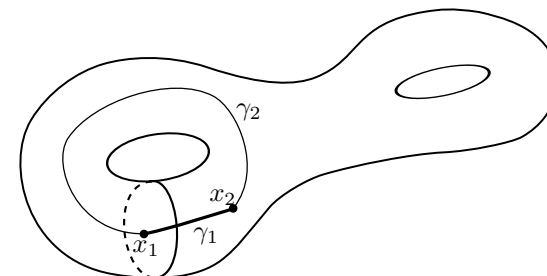
Sia $\alpha \in \eta_1(S)$ tale che $\alpha \cdot \gamma = 0 \forall \gamma$, vogliamo mostrare che $\alpha = 0$.

Supponiamo per assurdo che $\alpha \neq 0$, sia dunque $\alpha = [c]$ con c connessa su S .

Mostriamo che c non sconnette S . Infatti se $S \setminus c$ fosse sconnesso allora c sarebbe cobordante al vuoto, come si vede dalla figura, e sarebbe dunque $\alpha = 0$.



Dunque c non sconnette S , prendiamo quindi un piccolo arco γ_1 trasverso a c di estremi x_1 e x_2 . Poiché c non sconnette S allora esiste un arco γ_2 che collega x_1 e x_2 . Sia $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, abbiamo dunque costruito un γ tale che $\alpha \cdot \gamma = 1 \neq 0 \nmid$. \square



Osservazione 79. Abbiamo visto che β è bilineare, simmetrica e non degenera, dunque β è un *prodotto scalare*.

Inoltre $\dim \eta_1(S)$ è finita, allora dato un diffeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ questo induce un isomorfismo $f_* : \eta_1(S_1) \rightarrow \eta_1(S_2)$ tale che $\beta_1(\alpha, \gamma) = \beta_2(f_*(\alpha), f_*(\gamma))$ dunque f_* è un *isometria* tra $(\eta_1(S_1), \beta_1)$ e $(\eta_1(S_2), \beta_2)$.

Abbiamo costruito un nuovo invariante per diffeomorfismi: la classe di isometria di $(\eta_1(S), \beta)$.

2.32 Forme d'intersezione

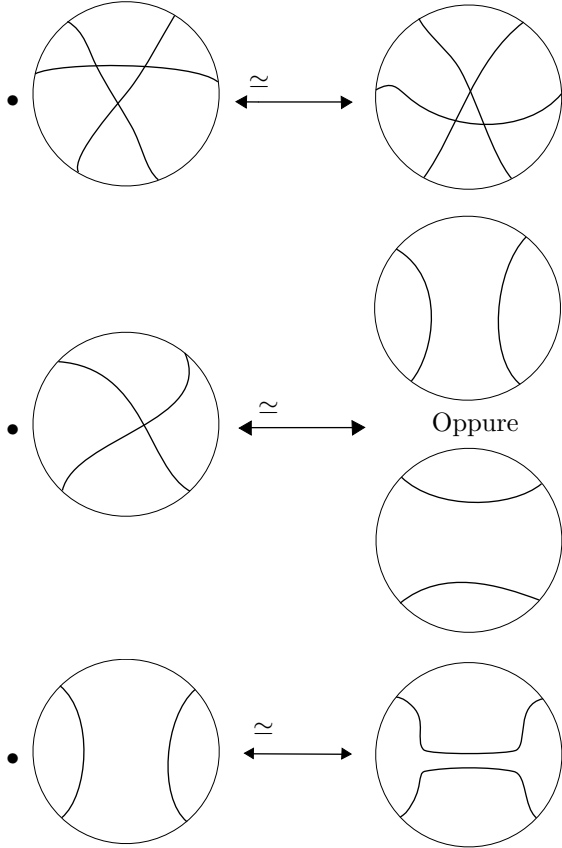
2.32.1 Una costruzione alternativa

Sia X superficie, su $\eta_1(X)$ abbiamo la forma d'intersezione $\beta : \eta_1(X) \times \eta_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Consideriamo le curve su X lisce a meno di un numero finito di incroci normali; ogni tale curva γ può essere decomposta in circuiti (ovvero immersioni di S^1): $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \dots$. Siano $f : S^1 \sqcup S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow X$ immersioni, allora queste curve sono date da $\{\gamma\} = \{\text{Im } f\}$.

Su queste curve posso definire una relazione di equivalenza specificando operazioni rispetto a cui le classi di equivalenza siano chiuse (ovvero, specificando come

posso modificare una di queste curve in modo da ottenere una curva equivalente); sia la relazione \simeq generata dalle operazioni seguenti:

- Isotopia ambiente (ovvero, $\gamma \simeq H(1, \gamma)$ con $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$ isotopia e $H|_{\{0\} \times X} = \text{id}_X$)



Posso allora pensare $\eta_1(X)$ come $\{\gamma\}/\simeq$, e la somma $[\gamma_1] + [\gamma_2]$ è data da $[\gamma_1 \cup \gamma_2]$, con γ_1, γ_2 rappresentanti trasversi tra loro (dunque che s'incrociano solo normalmente e in un numero finito di punti), che certamente esistono (ad esempio per isotopia).

Definisco allora $\beta([\gamma_1], [\gamma_2]) = [\gamma_1] \cdot [\gamma_2]$ come la parità del numero di intersezioni di $\gamma_1 \cup \gamma_2$ (avendo sempre cura di scegliere rappresentanti trasversi tra loro), ovvero come $\#(\gamma_1 \cap \gamma_2) \pmod 2$.

Per mostrare che β è non degenere, notiamo che con la nostra relazione \simeq possiamo supporre che per $[\gamma] \neq 0$, γ sia liscia e connessa e non può sconnettere X , dunque ripetendo la costruzione della lezione precedente posso trovare una curva che intersechi trasversalmente γ esattamente una volta.

2.32.2 Caratterizzazione delle classi d'isometria

Ricordiamo che la classe d'isometria di $(\eta_1(X), \beta)$ è invariante per diffeomorfismi.

Sia in generale V vettoriale su \mathbb{Z}_2 e β prodotto scalare non degenere su V . Il lettore ricorderà che per spazi vettoriali su \mathbb{R} o \mathbb{C} un prodotto scalare non degenere ammette almeno un vettore non isotropo, poiché se ogni vettore è isotropo si ottiene $0 = \langle v + w, v + w \rangle = 2\langle v, w \rangle \forall v, w$. È chiaro però che su \mathbb{Z}_2 (e in generale per campi con caratteristica 2) quest'identità risulta banale e non implica che β sia degenere; poiché la non totale isotropia era necessaria con gli spazi su \mathbb{R} o \mathbb{C} per dimostrare (induttivamente) l'esistenza di una base ortonormale, segue che non potremo concludere altrettanto per V .

Lemma 111 (Lemma 1). $V = A \oplus B$, con (A, β) avente una base ortonormale e (B, β) totalmente isotropo.

Dimostrazione. Infatti, essendo β non degenere vi sono due possibilità: o V è totalmente isotropo, oppure $\exists v \in V$ non isotropo. Nel primo caso il lemma è banalmente vero, nel secondo ho $V = \text{span}(v) \oplus \{v\}^\perp$ e ripetendo induttivamente il ragionamento su $\{v\}^\perp$ ottengo $V = U \oplus U \oplus \dots \oplus U \oplus B$, con B totalmente isotropo e U sottospazio di dimensione 1 tale che $\beta = (1)$ in U (ovvero, U generati da vettori ortonormali). \square

Consideriamo ora un sottospazio $H \subseteq V$ totalmente isotropo (con $\beta|_H$ non degenere). Prendiamo una base di H $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ e consideriamo la base duale $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*, \dots, v_n^*\}$. Allora dal teorema di rappresentazione sappiamo che $v \mapsto (\phi_v : w \mapsto \beta(v, w))$ è isomorfismo, siano dunque $\{w_1, \dots, w_n\}$ i vettori che rappresentano i covettori di \mathcal{B}^* (ovvero la controimmagine di \mathcal{B}^* per l'isomorfismo indicato). Abbiamo quindi $\beta(w_i, v_j) = \delta_{ij}$, e in particolare $\beta(v_1, w_1) = 1$. Pertanto in $\text{span}(v_1, w_1)$ si ha $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e dunque H si decompone come $\text{span}(v_1, w_1) \oplus \{v_1, w_1\}^\perp$, e continuando per induzione ottengo una base di H rispetto a cui

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Definizione 128 (Piano iperbolico). Chiameremo uno spazio vettoriale di dimensione 2 con prodotto scalare $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ un *piano iperbolico*.

Notiamo che su \mathbb{Z}_2 un tale prodotto scalare è totalmente isotropo e non degenere.

Da quanto abbiamo appena visto segue il seguente lemma:

Lemma 112 (Lemma 2). *Se β su V (vettoriale su \mathbb{Z}_2) è non degenera e totalmente isotropa, $\dim V$ è pari e V è somma diretta ortogonale di piani iperbolici.*

Dunque in generale V vettoriale su \mathbb{Z}_2 con β non degenera si decompone come $V = \bigoplus U_i \oplus \bigoplus H_i$, con $\beta|_{U_i} = (1)$ e $\beta|_{H_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lemma 113 (Lemma 3). *$U \oplus H = U \oplus U \oplus U$ (con H piano iperbolico e U generato da un vettore non isotropo).*

La dimostrazione segue nella lezione successiva; i tre lemmi visti ci permettono di dimostrare quanto segue:

Teorema 114 (Teorema di classificazione). *Dato un prodotto scalare β non degenera su V di dimensione n , si ha a meno di isometrie:*

$$V = \bigoplus_{i=1}^n U_i \quad \text{oppure} \quad V = \bigoplus_{i=1}^{n/2} H_i$$

2.33 Classificazione spazi vettoriali su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Daremo una classificazione completa a meno di isometrie degli spazi vettoriali V su campo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ di dimensione $\dim(V) = n$. Lo spazio vettoriale è dotato di un prodotto scalare non degenera. Decomporremo lo spazio vettoriale in somme ortogonali (rispetto al prodotto scalare dato) di spazi vettoriali isometrici a U , H di dimensioni rispettivamente 1 e 2. Questi spazi si scrivono in qualche base rispettivamente come: $[1]$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. H è totalmente isotropo ma non è identicamente nullo (ricorda che sono in caratteristica 2!).

Reminder: Un prodotto scalare totalmente isotropo è uno per cui $(v, v) = 0$, $\forall v \in V$.

Teorema 115. *Posso scrivere V in due e due sole forme:*

- $V = U \perp U \perp \cdots \perp U$. V è somma di n copie di U e in questo caso V ha una base ortogonale e $\dim(V) = n$.
- $V = H \perp H \perp \cdots \perp H$. V è somma di n copie di H , il prodotto scalare è totalmente isotropo ma non è nullo. $\dim(V) = 2n$.

Il caso intermedio in cui: $V = (H \perp H \perp \cdots \perp H) \perp (U \perp U \perp \cdots \perp U)$ si può eliminare grazie al lemma seguente:

Lemma 116. $U \perp H \simeq 3U$, cioè $U \perp H$ è isometrico a tre copie di U .

Dimostrazione. $U \perp H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Trovo W di dimensione 2 tale che in una certa base la sua matrice sia: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Chiamati u, v, z rispettivamente i tre vettori della

base in cui ho scritto $U \perp H$ considero $W = \text{span}(u + v, u + z)$. Si verifica che si può scrivere W come somma di due sottospazi vettoriali di dimensione 1 generati da $u + v$ e $u + z$ rispettivamente. Di conseguenza $V = W \perp U$ dove U è uno spazio di dimensione 1 (non degenera per dimensione!) \square

Dunque V è caratterizzato totalmente dall'avere una base ortogonale o dall'essere totalmente isotropo rispetto al prodotto scalare associato.

Sia X una superficie compatta, chiusa, connessa. $V = \eta_1(x)$, il prodotto scalare non degenera è la forma di intersezione precedentemente definita. Dato un diffeomorfismo tra due varietà: $f : S_1 \rightarrow S_2$ questo induce un isomorfismo tra gli spazi vettoriali. Questo isomorfismo è in realtà un'isometria poiché conserva la forma di intersezione definita come sopra. Dunque se due varietà sono diffeomorfe allora gli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare $(\eta_1(S_1), \beta_1)$ e $(\eta_1(S_2), \beta_2)$ sono isometrici. In particolare se gli spazi non sono isometrici le varietà non possono essere diffeomorfe.

Per ogni classe di isometria degli spazi vettoriali in caratteristica due esiste una varietà X che realizza la classe di isometria data tramite lo spazio $(\eta(S), \beta)$.

2.33.1 $\eta(S^2)$

Studio $\eta(S^2)$, dimostro che esso ha $\dim \eta(S^2) = 0$, in particolare contiene una sola classe di equivalenza. Sia $f : S^1 \rightarrow S^2$ per quanto detto in precedenza per caratterizzare gli elementi di $\eta(S^2)$ è sufficiente considerare le funzioni da una 1-varietà connessa a S^2 . f è liscia, $S^2/f(S^1)$ è aperto denso, dunque f non è surgettiva. Considero $S^1 \xrightarrow{f} S^2$ e $S^1 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n$, dove p è la proiezione stereografica dunque ho una proiezione $S^1 \xrightarrow{p \circ f} \mathbb{R}^n$. La proiezione stereografica deve essere presa rispetto ad un certo punto $P \in f(S^1)$. Considero la retrazione su \mathbb{R}^2 del laccio proiettato: $r_t : x \rightarrow tx$ che manda il laccio nell'origine, questo corrisponde a retractione il laccio nel punto P . Dunque tutti i lacci sono equivalenti tra di loro.

2.33.2 $\eta(T_2) = H$

Studio $\eta(S^1 \times S^1 = T_2)$, sappiamo che $\eta(T_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Voglio mostrare che questo spazio è un modello per $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Considero due lacci sul toro che si intersecano in un punto ma non si autointersecano, questi generano un sottospazio di η in cui la restrizione di β è chiaramente H . Voglio dimostrare che questo sottospazio genera tutto $\eta(S^1)$. Apro il toro lungo i due lacci e ottengo un quadrato.

Metto sul piano reale la relazione di equivalenza: $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exists (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ tale che $(x', y') - (x, y) = (n, m)$.

Dunque divido il piano in celle (dominio fondamentale del toro) attraverso il reticolo \mathbb{Z}^2 . ottengo le identificazioni $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \leftarrow S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $(x, y) \leftarrow (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Dunque posso srotolare un laccio sul toro come in figura e si vede che ogni laccio

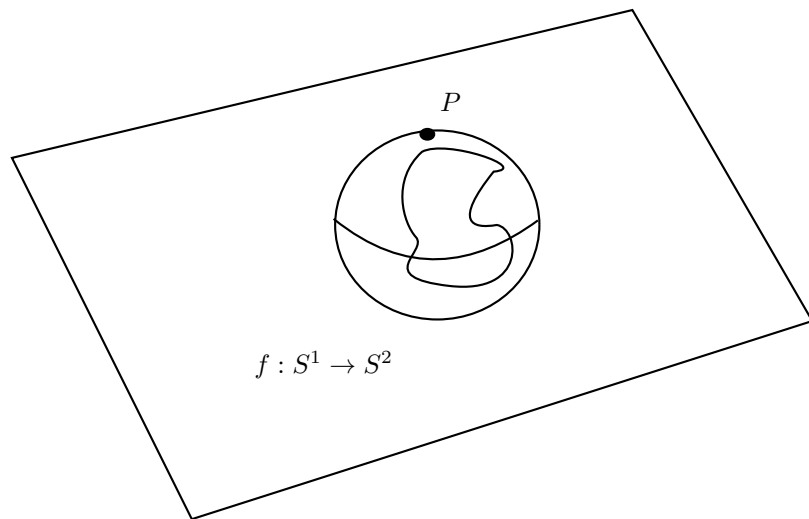


Figura 30: Proiezione Stereografica

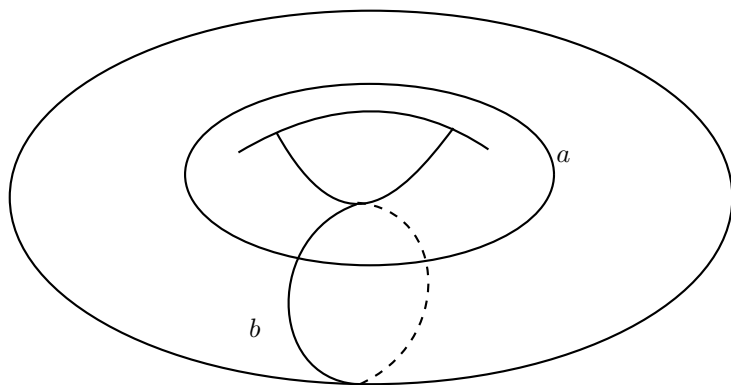


Figura 31: Due lacci su un toro

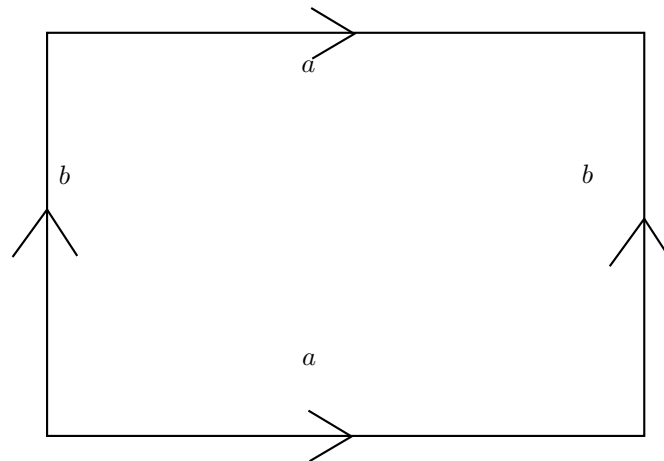


Figura 32: Toro tagliato lungo due lacci

è omotopo al segmento tra l'origine e il punto $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, dove p e q indicano il numero di volte in cui il laccio si avvolge orizzontalmente e verticalmente sul toro.

Teorema 117. $(p, q) = 1 \iff$ il laccio non ha autointersezioni

Se tolgo un punto al toro posso retrainare tutto il laccio nel punto (come si vede nel disegno).

Si può rappresentare un laccio sul toro come un “bucket a due petali” cioè due circonferenze S^1 attaccate per un punto che vengono percorse tante volte quanti sono i giri orizzontali e verticali che il laccio compie.

Quello di cui dovrei convincermi è che non è assolutamente chiaro e che due lacci disgiunti che compiono un giro verticale e uno orizzontale generano tutto. Se questo è vero allora $\eta(T_2)$ è una realizzazione di H .

2.33.3 $\eta(\mathbb{P}^2) = U$

Studio $\eta(\mathbb{P}^2)$, cioè η del piano proiettivo. Considero la calotta sferica di S^2 . I punti non del bordo della calotta rappresentano un solo punto del piano proiettivo mentre identifico i punti del bordo. La calotta sferica S^2/\sim mi dà un dominio fondamentale del proiettivo.

Come si vede nella figura costruisco un S^1 identificando i punti antipodali (S^1/\sim), si vede che il bordo della calotta ricopre due volte S^1/\sim . Il collare che ha per bordo questi due anelli è chiamato nastro di Möbius e si indica con \mathcal{M} . L'anima del nostro di Möbius è il proiettivo $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$, si vede inoltre che il bordo $\partial\mathcal{M}$ ha una sola componente connessa. Sempre dalle figure è chiaro che $\mathbb{P}^2 = \mathcal{M} \cup D^2$ incollati lungo il bordo.

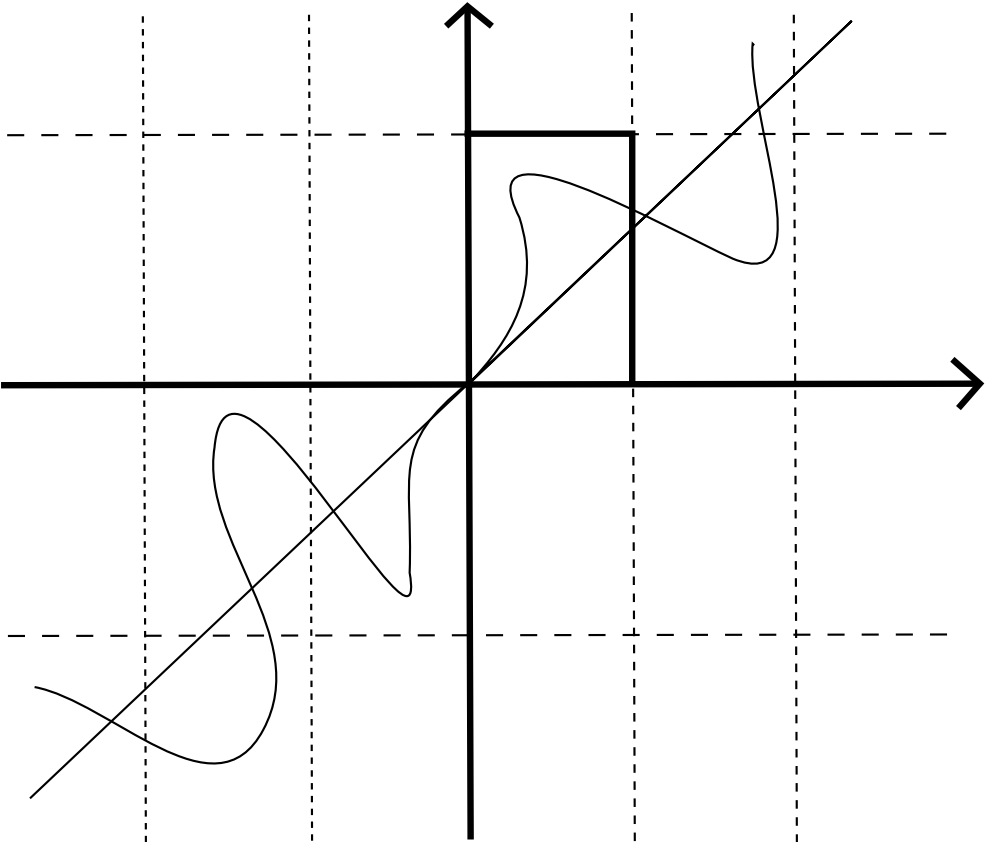


Figura 33: Sviluppo del dominio fondamentale del toro nel piano xy

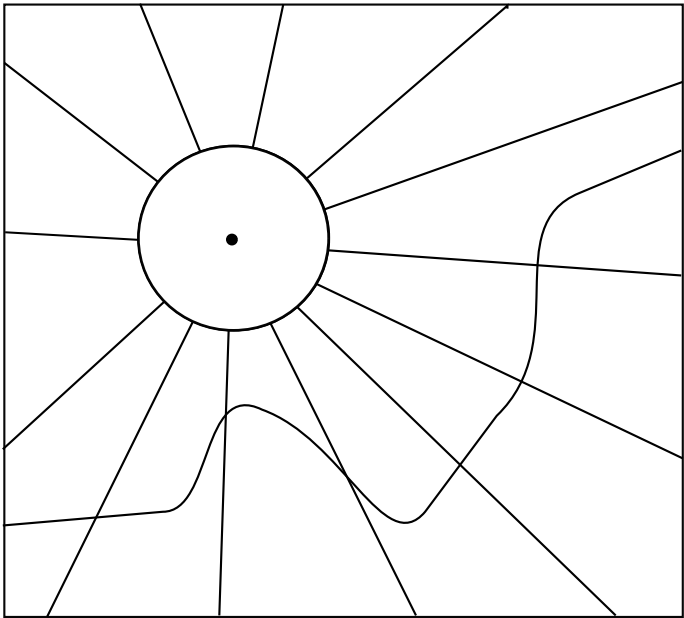


Figura 34: Retrazione dei lacci dopo aver tolto un punto al toro

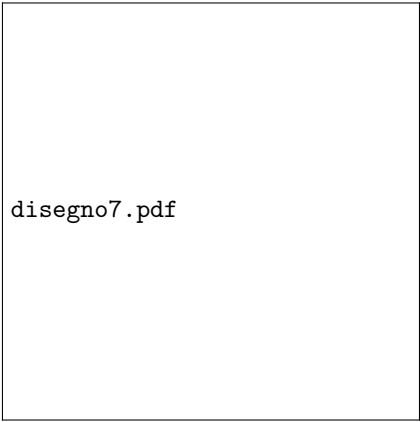


Figura 35: Bucket a due petali

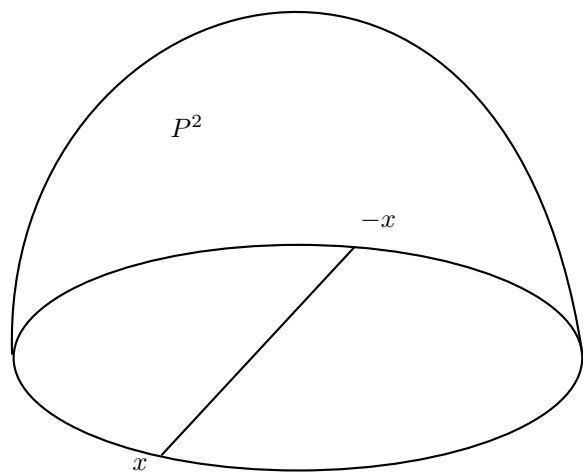


Figura 36: Identificazione dei punti antipodali

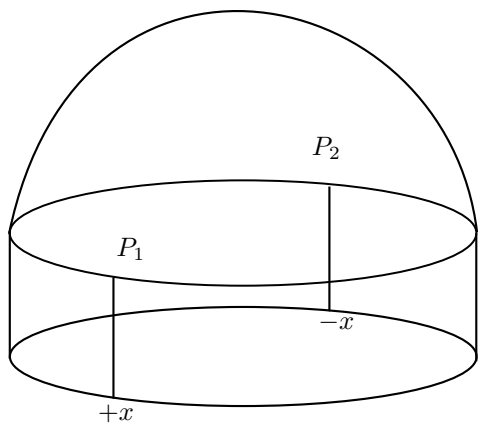


Figura 37: Proiettivo ottenuto come somma di un disco più un nastro di Moebius

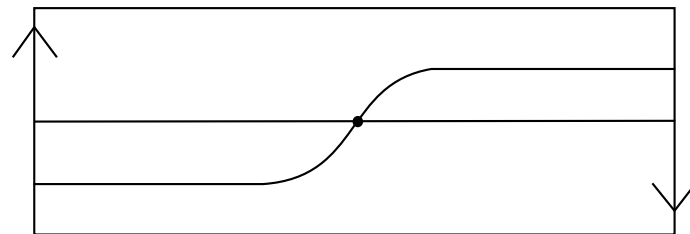


Figura 38: Autointersezione necessaria per un nastro di Möbius

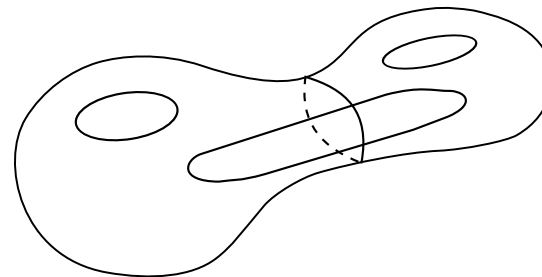


Figura 39: Intersezione di due lacci su somma connessa di due tori

Se tolgo un punto al disco e prendo \mathbb{P}^2/P ottengo una varietà completamente retraibile nell'anima del nastro di Möbius cioè in \mathbb{P}^1 .

Un laccio sul nastro di Möbius è costretto all'autointersezione, dunque \mathcal{M} è un modello per U . A questo punto non si capisce perchè lo è anche \mathbb{P}^2 ?

Ricordiamo che $\eta_1(T_2) \sim H$ e $\eta_1(P^2) \sim U$

2.33.4 Modelli per spazi di dimensione maggiore

Un modello per $H \perp H \perp H \dots H$ (somma ortogonale di g spazi vettoriali isomorfi a H) si può ottenere considerando g tori separati. Essi infatti sono g componenti connesse e i lacci su tori diversi non si intersecano. Quindi la matrice associata è diagonale e ogni blocco corrisponde a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Per quanto detto vale dunque $\text{eta}_2(T_2 \sqcup T_2 \sqcup \dots \sqcup T_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \dots \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Voglio dimostrare che la relazione sopra scritta vale anche nel caso in cui sostituisca l'unione disgiunta di g tori con la somma connessa, cioè: $\text{eta}_2(T_2 \sharp T_2 \sharp T_2 \sharp \dots \sharp T_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \dots \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Due lacci diversi sulla somma connessa di più tori si intersecano sempre in un due punti quindi li posso accoppiare a due a due e la relazione rimane vera poichè lo spazio vettoriale è proprio in caratteristica 2.

Si può dimostrare che prendere la somma connessa rispetto alla somma disgiunta non cambia la classe di cobordismo.

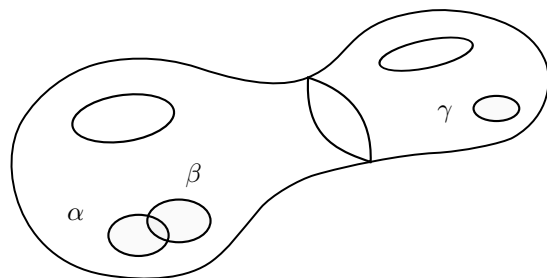


Figura 40: _

Teorema 118. *Le classi di equivalenza di lacci su tori diversi non si intersecano*

Dimostrazione.

□

Osservazione 80. Posso realizzare $H \perp H \dots H$ tramite la varietà $T_2 \# T_2 \# T_2 \# \dots \# T_2$ e realizzo $U \perp U \perp U \dots bot U$ tramite la varietà $(P)^2 \# (P)^2 \# \dots (P)^2$. Tutti gli spazi vettoriali in caratteristica due sono realizzabili attraverso una varietà che è una superficie.

E' vero che la classe di isometria è un invariante completo? Cioè è vero che a meno di isomorfismi le superfici (compatte e chiuse) sono solamente somme connesse di \mathbb{P}^2 e di tori T_2 .

Operazione di somma connessa tra due superfici: è ben definita a meno di diffeomorfismi.

Studio delle superfici per mezzo della teoria di Morse. Studio come si modifica la varietà nel passaggio tra prima e dopo il punto critico (teoria di Morse).

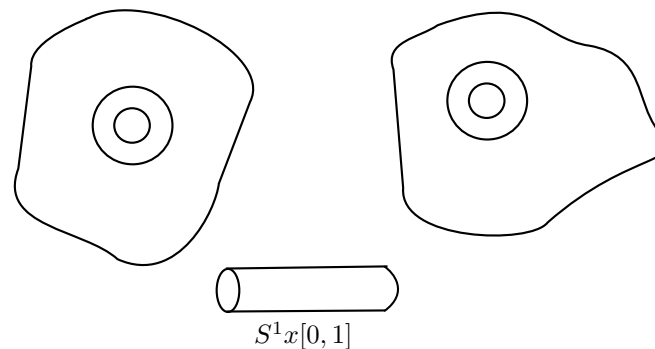
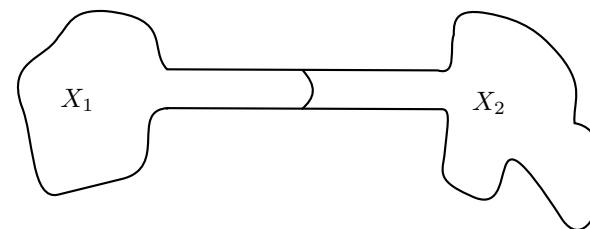


Figura 41: _

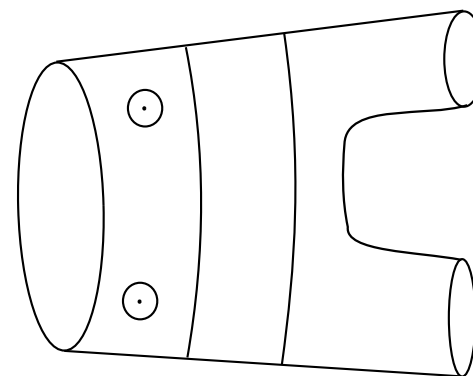


Figura 42: _

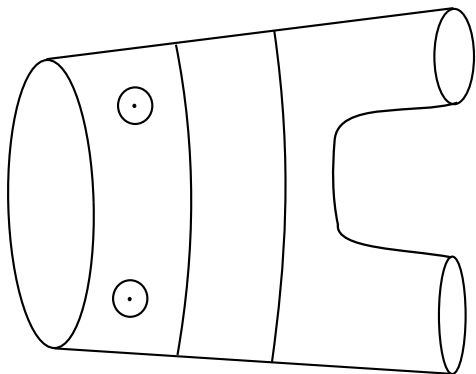


Figura 43: _

2.34 Somma connessa

In questo paragrafo preciseremo la nozione di somma connessa che precedentemente abbiamo usato in maniera intuitiva.

Siano X_1 e X_2 due n -varietà compatte, chiuse e connesse. Si delineano due diversi procedimenti per la definizione di somma connessa, andiamo ad analizzarli e confrontarli.

Procedimento 1

Considero per ciascuna varietà un embedding da un disco D^n nella varietà: $j_1 : D^n \rightarrow X_1$; $j_2 : D^n \rightarrow X_2$. Considero quindi gli insiemi così definiti: $W_1 := X_1 \setminus \mathring{D}_1$; $W_2 := X_2 \setminus \mathring{D}_2$ (ovvero le varietà a cui ho tolto la parte interna del disco).

In questa maniera ho ottenuto $\partial W_1 = \partial D_1 \approx S^{n-1}$. In pratica i bordi coincidono e sono diffeomorfi ad una sfera di dimensione $n-1$.

Fissiamo un diffeomorfismo $\phi : D_1 \rightarrow D_2$. Chiamo $\psi := \phi|_{\partial D_1}$, la restrizione al bordo di $\psi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$.

Considero adesso $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$.

Teorema 119. *Se almeno una tra X_1 e X_2 è non orientabile, allora $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$ è univocamente definito a meno di diffeomorfismi.*

Se entrambe sono orientate e si inverte l'orientazione dei bordi, allora $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$ è orientato e univocamente determinato a meno di diffeomorfismi che preservano l'orientazione.

Definizione 129. Dal teorema precedente segue che $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$ è ben definito, lo chiameremo somma connessa di W_1 e W_2 e scriveremo: $W_1 \sharp W_2 := (W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$

Dimostrazione. Diamo qualche idea sulla dimostrazione.

Il punto chiave è mostrare che $W_1 \sharp W_2$ non dipenda dalla scelta del disco.

Procedimento 2

Prendiamo $X_1, X_2, D_1 \subseteq X_1, D_2 \subseteq X_2, W_1, W_2$ con le stesse definizioni date nel Procedimento 1.

Sia data $\psi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Considero $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$.

In cosa differiscono le due procedure?

Nella prima prendo un diffeomorfismo ϕ su tutto il disco e lo restringo al bordo. Nella seconda procedura prendo direttamente un diffeomorfismo ψ sul bordo.

Le due procedure coincidono se $\forall \psi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ posso estendere a $\phi : D^n \rightarrow D^n$, ma quando questa assunzione è vera? Dipende dalla dimensione n delle varietà X di partenza.

Osservazione 81. Immaginiamo di fare lo stesso discorso con gli omomorfismi al posto che con i diffeomorfismi: estendere un omeomorfismo dal bordo a tutta la varietà è banale, basta estendere lungo i raggi. In regime topologico è quindi semplice, non lo è altrettanto in regime differenziale.

Quando si passa ai diffeomorfismi l'estensione è possibile in dimensione 2,3,4,5,6. Oltre la dimensione 7 è in generale falso: è possibile ad esempio trovare una $\psi : S^6 \rightarrow S^6$ che non si estende alla varietà X^7 di cui è bordo. Esistono quindi 7-varietà che sono omomorfe alla sfera ma non diffeomorfe. Tali sfere sono dette sfere esotiche.

Da questa osservazione segue che per le superfici le due procedure sono equivalenti. (Per $n = 2$ la dimostrazione dell'estensibilità può essere affrontata per esercizio). Quindi $X_1 \sharp X_2$ è sempre ben definito per le superfici.

Possiamo dimenticare la storia delle orientazioni, credeteci...

R. Benedetti

2.35 Relazione tra somma connessa e caratteristica di Eulero

In questa sezione ci restringeremo al caso delle superfici ($n=2$). Vogliamo capire qual è l'andamento della caratteristica di Eulero rispetto alla somma connessa. $\chi(X_1 \sharp X_2) = ?$.

2.36 Teoria di Morse

Lemma 120 (del cilindro). *Siano (W, V_0, V_1) una triade, W compatta, $f : W \rightarrow [0, 1]$ di Morse senza punti critici; allora $\exists h : V_0 \times [0, 1] \rightarrow W$ diffeomorfismo*

tale che questo diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} V_0 \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & W \\ & \searrow \pi & \downarrow f \\ & & [0, 1] \end{array}$$

Dimostrazione. Fissiamo una metrica Riemanniana g su W . Consideriamo ∇f rispetto a g . $\nabla f > 0$ ovunque perché f non ha punti critici. Allora lo posso normalizzare:

$$\nu(f) := \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \rightarrow \|\nu(f)\| = 1$$

Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria associata al campo:

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\rightarrow W \\ \frac{d}{dt}(f \circ \varphi) &= \|\nu(f)\| \rightarrow f(\varphi(t)) = t + \text{costante} \end{aligned}$$

A meno di riparametrizzazione, $f(\varphi(s)) = s$. Poiché W è compatta, φ è definita su tutto $[0, 1]$. Allora $\forall y \in W \exists!$ curva integrale $\psi_y : [0, 1] \rightarrow W$ passante per y tale che $f(\psi_y(s)) = s$. Infine $h(y, s) := \psi_y(s)$. \square

Definizione 130 (Manico). Fissiamo n dimensione e $0 \leq \lambda \leq n$. Il *manico standard di indice λ (e dimensione n)* ovvero λ -manico è $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$.

Osservazione 82. Topologicamente $D^\lambda \times D^{n-\lambda} \simeq D^n$.

Definizione 131 (Cuore). Il *cuore* del λ -manico è $D^\lambda \times \{0\}$.

Definizione 132 (A-sfera). L'*a-sfera* è il bordo del cuore.

Definizione 133 (A-tubo). L'*a-tubo* del λ -manico è $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$.

Definizione 134 (Cocuore). Il *cocuore* del λ -manico è $\{0\} \times D^{n-\lambda}$.

Definizione 135 (B-sfera). La *b-sfera* è il bordo del cocuore.

Definizione 136 (B-tubo). Il *b-tubo* del λ -manico è $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$.

Osservazione 83. Il cuore e il cocuore sono duali: sono codimensionali, trasversi e si intersecano in un punto.

Definizione 137 (Attaccamento). Sia W n -varietà. Fissato un embedding $\varphi : (\text{a-tubo}) \hookrightarrow \partial W$ detto *funzione di attaccamento del manico*, considerando la relazione di equivalenza indotta da φ , l'insieme:

$$\tilde{W} = (W \sqcup (D^\lambda \times D^{n-\lambda})) / \varphi$$

è l'*attaccamento del λ -manico a W* .

Osservazione 84. Vale sempre $\dim(\text{a-tubo}) = \dim \partial W$.

Teorema 121. A meno di allisciamento sistematico degli angoli, \tilde{W} è una n -varietà differenziabile univocamente definita a meno di diffeomorfismi.

Osservazione 85. $\partial \tilde{W} = \overline{\partial W \setminus \varphi(\text{a-tubo})} \cup (\text{b-tubo})$

Osservazione 86. L'attaccamento di un manico in generale cambia la topologia.

Teorema 122 (della teoria di Morse). Siano (W, V_0, V_1) triade, $f : W \rightarrow [0, 1]$ di Morse, x punto critico di f di indice λ ; poniamo $c := f(x)$, $W_t := f^{-1}([0, t])$, $V_t := f^{-1}(\{t\})$; sia ε abbastanza piccolo tale che $V_{c-\varepsilon}$ e $V_{c+\varepsilon}$ intersecano una carta di Morse centrata in x . Allora $W_{c+\varepsilon}$ è l'attaccamento di un λ -manico a $W_{c-\varepsilon}$ lungo la componente del bordo $V_{c-\varepsilon}$.

Dimostrazione. Mettiamoci nella carta di Morse. Allora $f = -\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$ e i livelli $V_{-\varepsilon}$, $V_{+\varepsilon}$ sono iperboloidi definiti dalle equazioni $f = -\varepsilon$, $f = \varepsilon$. Scegliamo una metrica riemanniana su W tale che nella carta di Morse sia standard, in particolare $\nabla f = 2(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$.

Consideriamo l'unione delle linee integrali di ∇f passanti per l'origine che provengono da $V_{-\varepsilon}$. Ha la dimensione giusta per essere il cuore di un λ -manico. La ingrassiamo a un manico tra le due componenti di $V_{-\varepsilon}$. Per completare la dimostrazione, basta integrare lungo ∇f per ottenere un diffeomorfismo tra questo attaccamento e $V_{+\varepsilon}$. \square

Fissata una triade (W, V_0, V_1) e una funzione di Morse $f : W \rightarrow [0, 1]$, posso ottenere una decomposizione in manici della suddetta triade.

Esempio 20. Sia W una superficie compatta, chiusa, connessa. $\chi(W) = \# 0\text{-manici} - \# 1\text{-manici} + \# 2\text{-manici}$.

Per contarli, vorrei potermi dimenticare dei massimi e minimi e selle. Pertanto, vogliamo trovare una serie di mosse che semplifichino la superficie lasciandone invariate le proprietà cercate.

1. Cancellazione di una coppia (0-manico, 1-manico) in posizione complementare. Infatti nel conteggio di $\chi(W)$, conteggiando con il segno giusto i manici da semplificare, si ottiene $1 - 1 = 0$

Teorema 123. Posso cancellare 0-manici e 1-manici fino a restare con un solo 0-manico

Dimostrazione. Siccome la superficie è connessa, posso cancellare a coppie per induzione i manici. Se parto infatti con una collezione di 0-manici, questi possono essere connessi solo tramite rete di 1-manici. Li retraggo a 2 a 2 e resto con un solo 0-manico. \square

Corollario 124. Esiste una funzione di Morse con un solo punto di minimo.

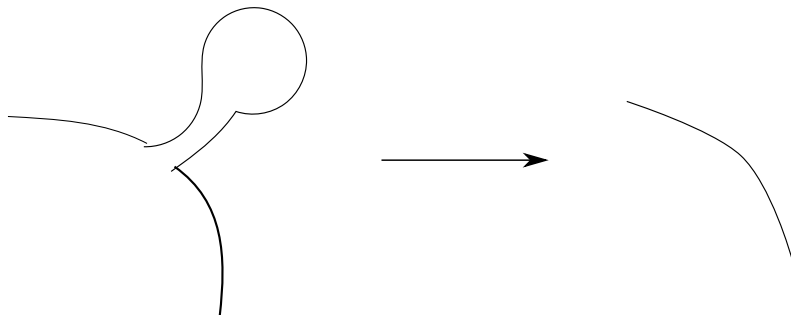


Figura 44: retrazione 1-manico

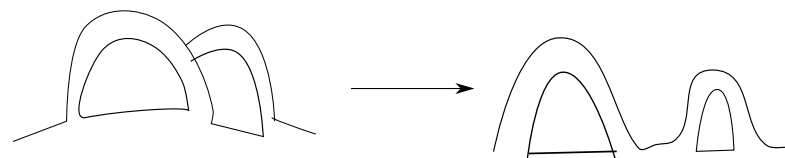


Figura 45: procedura di scivolamento

Osservazione 87. Per un ragionamento duale ($f \rightarrow -f$) ho anche un solo 2-manico (e dunque esiste una funzione di Morse con un solo massimo).

2. Scivolamento. Posso assumere che tutti gli 1-manici si attachino solamente lungo il bordo dello 0-manico, che deve essere uno solo perchè lo devo poterappare con un solo 2-manico.

Segue che ogni superficie compatta connessa ammette una decomposizione in manici del seguente tipo

1. Un solo 0-manico D^2 .
2. Si attaccano solamente k 1-manici lungo ∂D^2 . Da questo punto e dal precedente risulta una S connessa con $\partial S \sim S^1$
3. Si tappa ∂S con un unico 2-manico.

Osservazione 88. $\chi(W) = 2 - k$, ossia, più volgarmente, ci dice che la χ conta i buchi.

Esempio 21. Per $k = 0$ si ha S^2 . Per $k = 1$ si ha il \mathbb{P}^2 (che è un nastro di Moebius); un toro non può essere tappato con un 2-manico. Per $k = 2$ vanno bene solo la superficie disegnata, che tappata con un 2-manico diviene un toro T_2 , e $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.

Siccome la χ è troppo difficile da calcolare, usiamo la forma di intersezione. Supponiamo di avere una superficie W e una forma di intersezione β totalmente isotropa.

Osservazione 89. esiste una curva semplice $[c] \neq 0$, $c \cdot c = 0$. Dato che c non sconnette W , c ha un intorno a nastro diffeomorfo a $c \times [0]$

Segue che esiste c' tale che $c' \cdot c = 1$ e $[c'] \neq 0$. Ma dato che β è completamente isotropo, $c' \cdot c' = 0$. Allora abbiamo ottenuto un toro: $W = T_2 \# Z$, dove Z non la conosco, ma so che ha un numero di manici inferiore (scatta l'induzione!).

Osservazione 90. β è totalmente isotropo anche ristretta a Z

Osservazione 91. Z ha una decomposizione in manici con 2 manici in meno rispetto a W .

Teorema 125. Se W ha una β totalmente isotropa, allora $W \simeq \underbrace{T_2 \# \dots \# T_2}_{g \text{ addendi}}$ e

$$\chi(W) = 2 - 2g.$$

Supponiamo ora che $W \neq S^2$ e β non totalmente isotropa, ossia esiste c semplice su W tale che $c \cdot c = 1$.

Osservazione 92. Allora c ha un intorno che è diffeomorfo ad un nastro di Moebius, ossia $W = \mathbb{P}^2 \# Z$

Anche qui adesso vogliamo far scattare l'induzione come sopra! Abbiamo due casi:

1. $W \simeq \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2}_{k \text{ addendi}}$ e $\chi(W) = 2 - k$
2. $W \simeq \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2}_{r \text{ volte}} \# Z$ con Z totalmente isotropo. Tuttavia se Z è totalmente isotropo, possiamo applicare i ragionamenti fatti in precedenza. Così otteniamo la scomposizione $W \simeq \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2}_{r \text{ volte}} \# \underbrace{T_2 \# \dots \# T_2}_{g \text{ volte}}$. Segue che $\chi(W) = 2 - r - 2g$.

Lemma 126. da farselo spiegare.