

# Appunti di Geometria 2, corso di fisica

Federico Belliardo  
Alberto Bordin  
Alessandro Candido  
Marco Costa  
Valerio Lomanto  
Andrea Luzio  
Giacomo Petrillo  
Roberto Ribatti

Anno accademico 2015–2016

# Indice

<b>1</b>	<b>Spazi topologici</b>	<b>4</b>
1.1	Definizioni generali . . . . .	4
1.2	Spazi metrici e metrizzabili . . . . .	4
1.3	Sottospazi . . . . .	6
1.4	Chiusura, parte interna, frontiera . . . . .	6
1.5	Morfismi degli spazi topologici . . . . .	7
1.6	Separazione . . . . .	8
1.7	Numerabilità . . . . .	9
1.8	Connessione . . . . .	10
1.9	Compattezza . . . . .	11
1.9.1	Compattezza in spazi metrizzabili . . . . .	13
1.9.2	Compattezza e funzioni continue . . . . .	13
1.10	Topologia prodotto e topologia quoziente . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Varietà</b>	<b>15</b>
2.1	Definizioni di base . . . . .	15
2.1.1	Esempi di varietà . . . . .	15
2.2	Spazio proiettivo (reale) . . . . .	16
2.2.1	Filtrazione di $\mathbb{P}^n$ . . . . .	17
2.3	Varietà prodotto . . . . .	17
2.4	Varietà differenziabili . . . . .	17
2.5	Linearizzazioni di applicazioni lisce tra spazi euclidei . . . . .	19
2.6	Funzioni a foruncolo . . . . .	22
2.7	Varietà con bordo . . . . .	22
2.8	Sottovarietà . . . . .	23
2.9	Fibrato tangente . . . . .	23
2.9.1	Modello locale . . . . .	23
2.9.2	Caratterizzazione differenziale di $T_x U$ . . . . .	24
2.9.3	Costruzione del fibrato tangente su varietà . . . . .	26
2.10	Fibrati . . . . .	27
2.11	Fatti di algebra lineare . . . . .	28

2.12	Richiami della scorsa lezione . . . . .	28
2.13	Altri fibrati su $M$ . . . . .	28
2.14	Equivalenza tra fibrati . . . . .	29
2.15	Richiami della lezione scorsa . . . . .	30
2.16	Teorema di Embedding . . . . .	30
2.17	Topologia sullo spazio delle applicazione lisce tra varietà - fede . . . . .	31
2.18	Spazi di applicazioni lisce . . . . .	31
2.19	Orientazione . . . . .	32
2.20	Cobordismo . . . . .	32
2.21	Gruppo fondamentale . . . . .	36
2.21.1	Alcuni $\eta_n(Y)$ e $\Omega_n(Y)$ . . . . .	36
2.22	Trasversalità . . . . .	38
2.23	Cenni alle dimostrazioni dei teoremi di trasversalità . . . . .	39
2.24	Immersioni e embedding . . . . .	41
2.25	Versione orientata dei teoremi di trasversalità . . . . .	41
2.26	Ripasso della lezione sulla trasversalità . . . . .	42
2.27	Teoria del grado . . . . .	43
2.28	Numero d'intersezione . . . . .	44
2.28.1	Versione orientata . . . . .	44
2.28.2	Autointersezione . . . . .	44
2.29	Funzioni di Morse . . . . .	47
2.30	Superfici . . . . .	49
2.31	La forma di intersezione su $\eta_1(S)$ . . . . .	49
2.32	Forme d'intersezione . . . . .	51
2.32.1	Una costruzione alternativa . . . . .	51
2.32.2	Caratterizzazione delle classi d'isometria . . . . .	52
2.33	Classificazione spazi vettoriali su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . . . . .	52
2.33.1	$\eta(S^2)$ . . . . .	53
2.33.2	$\eta(T_2) = H$ . . . . .	53
2.33.3	$\eta(\mathbb{P}^2) = U$ . . . . .	54
2.33.4	Modelli per spazi di dimensione maggiore . . . . .	56
2.34	Somma connessa . . . . .	57
2.35	Relazione tra somma connessa e caratteristica di Eulero . . . . .	58
2.36	Teoria di Morse . . . . .	58

# Capitolo 1

## Spazi topologici

### 1.1 Definizioni generali

**Definizione 1** (Topologia). Sia dato un insieme  $X$  e una famiglia  $\tau$  di sottoinsiemi di  $X$ .  $\tau$  è detta *topologia* se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\emptyset, X \in \tau$
- $\tau$  è chiusa per intersezioni finite, ovvero:  $\forall A_1, A_2 \in \tau \implies A_1 \cap A_2 \in \tau$
- $\tau$  è chiusa per unioni arbitrarie, ovvero:  $\forall \mathcal{B} \subseteq \tau \implies \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A \in \tau$ .

Gli elementi di  $\tau$  sono detti *aperti* per la topologia  $\tau$ .

**Definizione 2** (Spazio topologico). Sia  $X \neq \emptyset$  un insieme munito di una topologia  $\tau$ . La coppia  $(X, \tau)$  è detta *spazio topologico*.

**Definizione 3** (Chiuso). Un sottoinsieme  $Y \subseteq X$  è detto *chiuso* se  $\mathcal{C}Y$  è aperto.

*Osservazione 1.*  $\emptyset$  e  $X$  sono sia aperti che chiusi.

**Proposizione 1.** Sia  $F_\tau$  la famiglia dei sottoinsiemi chiusi di  $X$ . Questa gode delle seguenti proprietà:

- $\emptyset, X \in F_\tau$
- $F_\tau$  è chiusa per unioni finite
- $F_\tau$  è chiusa per intersezioni arbitrarie.

*Osservazione 2.* Un insieme  $X \neq \emptyset$  ammette sempre due topologie degeneri:

- $\tau_B = \{\emptyset, X\}$  detta topologia banale
- $\tau_D = \mathcal{P}(X)$  detta topologia discreta.

**Definizione 4** (Finezza). Date due topologie  $\tau$  e  $\tau'$  su  $X$ , si dice che  $\tau$  è *più fine* di  $\tau'$  se  $\tau \supset \tau'$ , ovvero tutti gli aperti di  $\tau'$  sono anche aperti di  $\tau$ , ma esistono aperti in  $\tau$  non presenti in  $\tau'$ .

*Osservazione 3.* La topologia banale è quella meno fine, mentre quella discreta è la più fine.

### 1.2 Spazi metrici e metrizzabili

**Definizione 5** (Spazio metrico). Sia dato un insieme  $X \neq \emptyset$  e una funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

**non degenerare**  $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0 \wedge (d(x, y) = 0 \iff x = y)$

**simmetrica**  $d(x, y) = d(y, x)$

**triangolare**  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

La funzione  $d$  è detta *distanza* e la coppia  $(X, d)$  è detta *spazio metrico*.

*Esempio 1.* Esempi di spazi metrici sono:

- $\mathbb{R}^n$  munito della distanza euclidea  $d_E$
- Un insieme  $X$  qualsiasi munito della distanza discreta  $d_D = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

**Definizione 6** (Palla aperta). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, definiamo la *palla aperta centrata in  $x$  di raggio  $r$*  come:

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

**Proposizione 2** (Topologia indotta). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $\tau_d$  una famiglia di sottoinsiemi così definita:*

$$\tau_d := \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \exists B_r(x) \subseteq A\}$$

*Affermo che  $\tau_d$  è una topologia su  $X$  (la chiamerò topologia indotta).*

*Dimostrazione.* Verifico che si tratti di una topologia:

- $\emptyset \in \tau_d$  per vacuità,  $X \in \tau_d$  perché le palle aperte sono a valori in  $X$  per definizione.
- Siano  $A_1, \dots, A_n$  sottoinsiemi di  $X$ . Considero la loro intersezione  $\bigcap A_k$ . Per ogni punto  $x$  nell'intersezione considero tutti gli  $A_k$  tali che  $x \in A_k$ . Prendo quindi una palla aperta  $B^k(x)$  per ognuno di questi (posso farlo per definizione di  $\tau_d$ ). Tra queste prendo quella con raggio minore: questa è contenuta in  $\bigcap A_k$ , segue che  $\tau_d$  è chiuso per intersezioni finite.
- Se  $x \in \bigcup A_j$  allora  $x$  appartiene almeno ad uno degli  $A_j$ . Poiché questi sono aperti segue che  $\exists B_{r_i}(x) \subseteq A_i \subseteq \bigcup A_j$ .  $\square$

**Definizione 7.** Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice *metrizzabile* se esiste una distanza  $d$  tale che  $\tau = \tau_d$ , ovvero la topologia sia uguale alla topologia indotta dalla distanza  $d$ .

*Esempio 2.* Esempi di topologie indotte sono:

- $(\mathbb{R}^n, d_E)$  induce  $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ .
- La topologia indotta da  $(X, d_D)$  (dove  $d_D$  è la distanza discreta dell'Esempio 1) è  $\tau_D$  (la topologia discreta). Infatti  $B_{1/2}(x) = \{x\}$ , quindi ogni punto è un aperto.

**Proposizione 3.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $(X, \tau_d)$  lo spazio topologico indotto. Si verifica che:*

- le palle aperte sono aperti per la topologia indotta;
- ogni  $A \in \tau_d$  è unione di palle aperte.

*Dimostrazione.*

- Sia  $y \in B_r(x)$ , devo trovare un  $r'$  tale che  $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x)$ . Prendo  $r' < r - d(x, y)$ . Segue:

$$\forall z \in B_{r'}(y) : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r - d(x, y) < r$$

- Sia  $A$  un qualsiasi aperto per la topologia indotta.  $A$  è unione dei suoi punti e per ogni punto  $x$  ho una palla aperta centrata in  $x$  e contenuta in  $A$ . Segue che  $A$  è unione di palle aperte.  $\square$

**Definizione 8.**  $(X, d)$  e  $(X, d')$  si dicono *topologicamente equivalenti* se le topologie indotte coincidono.

*Osservazione 4.* È chiaro che uno spazio metrico ha una “struttura” più rigida di uno spazio topologico e conseguentemente spazi metrici diversi possono indurre la stessa topologia.

**Teorema 4.** *Tutte le distanze indotte da un prodotto scalare sono topologicamente equivalenti.*

*Dimostrazione.* Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un prodotto scalare definito positivo. Indichiamo con  $B_r^E(x)$  le palle della metrica euclidea e con  $B_r^{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x)$  quelle della metrica con distanza  $d_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ . Poiché gli aperti di una topologia metrizzabile sono unione di palle aperte centrate su ogni punto, ci basta mostrare che:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \forall r > 0 : \begin{cases} \exists r' : B_{r'}^E(x) \subseteq B_r^{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x) \\ \exists r'' : B_{r''}^{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x) \subseteq B_r^E(x) \end{cases}$$

Consideriamo le matrici del prodotto scalare canonico (che induce  $d_E$ ) e di  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Commutano e sono simmetriche, quindi sono diagonalizzabili simultaneamente, in particolare con una matrice ortogonale. Nelle nuove coordinate, la palla  $B_r^{\langle \cdot, \cdot \rangle}(0)$  è definita dalla condizione:

$$d_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x, 0) = \sqrt{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2} < r$$

Quindi per trovare  $r'$  e  $r''$  basta considerare gli assi minore e maggiore dell'ellissoide:

$$r' \leq r \min \{\lambda_i\}, \quad r'' \max \{\lambda_i\} \leq r \quad \square$$

**Definizione 9** (Intorno). Dato  $x \in (X, \tau)$ , si dice *intorno* di  $x$  (rispetto a  $\tau$ ) un insieme  $U_x$  che contiene un aperto  $A$  tale che  $x \in A \subseteq U_x$ .

**Definizione 10** (Base di aperti). Dato uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si dice *base di aperti* una famiglia di aperti  $\mathcal{B}$  tale che ogni elemento di  $\tau$  è ottenibile come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

**Definizione 11** (Base di interni). Una *base di interni* è un insieme di interni di un punto  $x$  tale che qualsiasi intorno di  $x$  contenga almeno uno degli elementi della base.

*Osservazione 5.* Le palle aperte sono una base di interni per una topologia indotta, e grazie al secondo punto della Proposizione 3 sono anche una base di aperti.

**Lemma 5.** *Un insieme è aperto se e solo se ogni punto ha un intorno contenuto nell'insieme:*

$$A \text{ aperto} \iff \forall x \in A \exists U_x \subseteq A$$

*Dimostrazione.* L'implicazione verso destra è verificata perché  $A$  è un intorno dei suoi punti. Mostriamo l'altra: per definizione di intorno possiamo prendere gli  $U_x$  aperti. Sia  $A' := \bigcup_{x \in A} U_x$ .  $A'$  è aperto perché unione di aperti ed è contenuto in  $A$ , però contiene tutti i punti di  $A$  quindi  $A = A'$ .  $\square$

### 1.3 Sottospazi

Si può definire una topologia sui sottoinsiemi di uno spazio topologico:

**Proposizione 6** (Topologia dei sottospazi). *Sia  $(X, \tau)$  spazio topologico e  $\chi \subseteq X$ , l'insieme  $\tau_\chi := \{A \cap \chi \mid A \in \tau\}$  è una topologia su  $\chi$ .*

*Dimostrazione.* Verifichiamo le tre proprietà della topologia:

- Il vuoto c'è perché  $\emptyset \cap \chi = \emptyset$ ;  $\chi$  c'è perché  $X \cap \chi = \chi$ .
- Siano  $a_1, \dots, a_n \in \tau_\chi$ . Allora  $\forall k \exists A_k \in \tau : a_k = A_k \cap \chi$ . Quindi:

$$\bigcap a_k = \bigcap (A_k \cap \chi) = \left( \bigcap A_k \right) \cap \chi$$

Ma  $\bigcap A_k$  è aperto in  $(X, \tau)$ .

- Sia  $\{a_k\}_{k \in I} \subseteq \tau_\chi$ . Definiti come sopra gli  $A_k$ , abbiamo:

$$\bigcup a_k = \bigcup (A_k \cap \chi) = \left( \bigcup A_k \right) \cap \chi$$

$\square$

**Definizione 12** (Sottospazio). Chiamiamo  $(\chi, \tau_\chi)$  *sottospazio* di  $(X, \tau)$ .

È interessante che la topologia dello spazio di partenza si colleghi direttamente alla topologia di sottospazio di ogni aperto:

**Proposizione 7.**  *$A$  aperto  $\iff$  tutti gli aperti in  $A$  come sottospazio topologico sono aperti nella topologia dello spazio ambiente*

*Dimostrazione.* Mostriamo le due implicazioni:

$\Rightarrow$  Infatti ogni aperto in  $A$  è intersezione di due aperti.

$\Leftarrow$  Infatti  $A$  è aperto in  $A$ .  $\square$

### 1.4 Chiusura, parte interna, frontiera

In generale i sottoinsiemi di uno spazio topologico non sono né aperti né chiusi. Tuttavia possiamo associare a ognuno in modo naturale un aperto e un chiuso.

**Definizione 13** (Chiusura). La *chiusura* di un insieme  $Y$  è l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono:

$$\bar{Y} := \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supseteq Y}} C$$

**Proposizione 8.** *La chiusura di  $Y$  è il più piccolo chiuso che contiene  $Y$ , cioè:*

$$\left. \begin{array}{l} Y \subseteq C \subseteq \bar{Y} \\ C \text{ chiuso} \end{array} \right\} \implies C = \bar{Y}$$

*Dimostrazione.* Infatti dalla definizione di  $\bar{Y}$  segue  $\bar{Y} = \bar{Y} \cap C$ .  $\square$

**Definizione 14** (Parte interna). La *parte interna* di un insieme  $Y$  è l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $Y$ :

$$\mathring{Y} := \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq Y}} A$$

**Proposizione 9.** *La parte interna di  $Y$  è il più grande aperto contenuto in  $Y$ , cioè:*

$$\left. \begin{array}{l} \mathring{Y} \subseteq A \subseteq Y \\ A \text{ aperto} \end{array} \right\} \implies A = \mathring{Y}$$

*Dimostrazione.* Infatti dalla definizione di  $\mathring{Y}$  segue  $\mathring{Y} = \mathring{Y} \cup A$ .  $\square$

**Osservazione 6.** La parte interna e la chiusura sono rispettivamente aperta e chiusa.

Definiamo ora alcune proprietà che collegano singoli punti di un insieme alle nozioni di chiusura e parte interna.

**Definizione 15** (Punto interno). Gli elementi della parte interna di  $Y$  si chiamano *punti interni* di  $Y$ :

$$x \text{ interno a } Y \iff x \in \mathring{Y}$$

Si dice invece *esterno* un punto che non è interno.

**Definizione 16** (Punto di accumulazione). Un elemento  $x$  (non necessariamente in  $Y$ ) è *punto di accumulazione per  $Y$*  se ogni intorno di  $x$  contiene punti di  $Y$  diversi da  $x$ :

$$x \text{ di accumulazione per } Y \iff \forall U_x : (U_x \setminus \{x\}) \cap Y \neq \emptyset$$

**Definizione 17** (Punto isolato). I punti di  $Y$  non di accumulazione sono *isolati*:

$$x \text{ isolato in } Y : \Leftrightarrow \begin{cases} x \in Y \\ \neg(x \text{ di accumulazione per } Y) \end{cases}$$

**Lemma 10.** La chiusura di un insieme è l'insieme stesso unito ai suoi punti di accumulazione:

$$\bar{Y} = Y \cup \{x \mid x \text{ di accumulazione per } Y\}$$

*Dimostrazione.* Mostriamo le due inclusioni:

( $\subseteq$ ) Ci basta verificare che  $y \in \bar{Y} \setminus Y \implies y$  di accumulazione per  $Y$ . Per assurdo:

$$y \text{ non di accumulazione} \rightarrow \exists A \text{ aperto} : \begin{cases} y \in A \\ A \cap Y = \emptyset \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y \notin \mathcal{C} A \\ Y \subseteq \mathcal{C} A \end{cases}$$

Ma  $\mathcal{C} A$  è chiuso, quindi avremmo  $y \notin \bar{Y}$ .  $\nmid$

( $\supseteq$ ) Ci basta verificare che  $y \notin Y \wedge y$  di accumulazione per  $Y \implies y \in \bar{Y}$ . Per assurdo,  $y \notin \bar{Y} \rightarrow y \in \mathcal{C} \bar{Y}$ . Ma  $\mathcal{C} \bar{Y}$  è aperto, quindi  $\mathcal{C} \bar{Y}$  sarebbe un intorno di  $y$  disgiunto da  $Y$ .  $\nmid$   $\square$

Vogliamo ora formalizzare il concetto di “bordo” di un insieme, cioè la famiglia dei punti che lo “separa” dal suo complementare. Diamo questa definizione:

**Definizione 18** (Frontiera). La famiglia dei punti della chiusura di  $Y$  esterni a  $Y$  è la *frontiera* di  $Y$ :

$$\mathcal{F} Y := \bar{Y} \setminus \mathring{Y}$$

**Proposizione 11.** La frontiera consta dei punti esterni isolati o di accumulazione:

$$\mathcal{F} Y = (\{x \mid x \text{ isolato in } Y\} \cup \{x \mid x \text{ di accumulazione per } Y\}) \setminus \mathring{Y}$$

che, nel caso che i punti interni siano di accumulazione (vedi l'Osservazione 7), diventa:

$$\mathcal{F} Y = \{x \mid x \text{ isolato in } Y\} \cup \{x \mid x \text{ di accumulazione esterno per } Y\}$$

*Dimostrazione.* Basta usare il Lemma 10 e osservare che:

$$Y \setminus \{x \mid x \text{ di accumulazione}\} = \{x \mid x \text{ isolato}\} \quad \square$$

**Proposizione 12.** La frontiera di un insieme è anche frontiera del complementare:

$$\mathcal{F} Y = \mathcal{F} \mathcal{C} Y$$

*Dimostrazione.* Passando al complementare le unioni diventano intersezioni quindi parte interna e chiusura si scambiano:

$$(\mathcal{C} \mathring{Y}) = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq \mathcal{C} Y}} A = \mathcal{C} \left( \bigcap_{\substack{\mathcal{C} A \text{ chiuso} \\ \mathcal{C} A \supseteq Y}} \mathcal{C} A \right) = \mathcal{C} \bar{Y}$$

Un conto analogo mostra che  $\overline{\mathcal{C} Y} = \mathcal{C} \mathring{Y}$ . Quindi:

$$\mathcal{F} \mathcal{C} Y = \overline{\mathcal{C} Y} \setminus (\mathcal{C} \mathring{Y}) = \mathcal{C} \mathring{Y} \setminus \mathcal{C} \bar{Y} = \bar{Y} \setminus \mathring{Y} = \mathcal{F} Y \quad \square$$

*Osservazione 7.* Sia  $X$  l'insieme ambiente e  $x \in Y \subseteq X$ . Si ha che:

$$x \text{ interno a } Y \not\Rightarrow x \text{ di accumulazione per } Y$$

Ad esempio per  $(X, \tau_D)$  preso  $Y := \{x\}$  allora  $x$  è interno a  $Y$ , poiché quest'ultimo è aperto, ma  $\{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$  quindi non è di accumulazione. Tuttavia, basta supporre che i singoletti non siano aperti affinché invece l'implicazione sia valida. <sup>1</sup>

## 1.5 Morfismi degli spazi topologici

In generale, dati degli spazi con certe proprietà, i *morfismi* sono funzioni tra gli spazi che mantengono in qualche modo le proprietà. Ad esempio i morfismi degli spazi vettoriali sono le funzioni lineari, che mandano 0 in 0, sottospazi in sottospazi, ecc.

In particolare gli *isomorfismi* mettono in corrispondenza due spazi in modo che siano completamente indistinguibili relativamente alle proprietà considerate. Data una famiglia di spazi, si può definire su di essa un'equivalenza per isomorfismo e considerare le sottofamiglie di spazi *isomorfi* come singoli elementi.

Vediamo ora che i naturali morfismi degli spazi topologici sono le funzioni *continue*. Siano da qui in poi  $X, Y$  spazi topologici<sup>2</sup> e  $f : X \rightarrow Y$ .

**Definizione 19** (Continuità).  $f$  si dice *continua* se le controimmagini di aperti sono aperte:

$$f \text{ continua} : \Leftrightarrow \forall A \subseteq Y, A \text{ aperto} : f^{-1}(A) \text{ aperto}$$

Possiamo definire una forma *locale* di continuità e collegarla alla nozione globale:

<sup>1</sup>In realtà sono sufficienti ipotesi più deboli, cioè che il solo singoletto di  $x$  non sia aperto perché l'essere interno implichi essere un punto di accumulazione. La dimostrazione è lasciata al lettore.

<sup>2</sup>Identificheremo, quando non ci siano ambiguità, lo spazio topologico  $(X, \tau)$  con  $X$  o con  $\tau$ . Si noti che comunque  $\tau$  contiene tutta l'informazione perché  $X = \bigcup \tau$ .

**Definizione 20** (Continuità locale).  $f$  è continua in  $x \in X$  se la controimmagine di un intorno di  $f(x)$  è un intorno di  $x$ :

$$f \text{ continua in } x : \Leftrightarrow \forall U_{f(x)} : f^{-1}(U_{f(x)}) \text{ è un intorno di } x$$

**Proposizione 13.**  $f$  continua  $\iff \forall x \in X : f$  continua in  $x$

*Dimostrazione.* Mostriamo le due implicazioni:

( $\Rightarrow$ )  $\forall x \in X \forall U_{f(x)}$  definiamo  $U_x := f^{-1}(U_{f(x)})$ .  $f^{-1}$  manda aperti in aperti, quindi manda intorni in intorni.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $A \subseteq Y$ ,  $A$  aperto. Poiché  $A$  è un intorno dei suoi punti, abbiamo che  $\forall x \in f^{-1}(A)$  si ha che  $f^{-1}(A)$  è un suo intorno, e dunque vi è un aperto in esso contenuto che contiene il punto. Il Lemma 5 conclude.  $\square$

Definiamo gli isomorfismi topologici, che chiameremo *omeomorfismi*:

**Definizione 21** (Omeomorfismo).  $f$  è un *omeomorfismo* se è continua, bigettiva e con inversa continua:

$$f \text{ omeomorfismo} : \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bigettiva} \\ f, f^{-1} \text{ continue} \end{cases}$$

È necessario specificare che  $f^{-1}$  sia continua perché la continuità di una funzione invertibile non implica la continuità dell'inversa:

*Esempio 3.* Consideriamo due spazi topologici sullo stesso insieme  $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ . Sia  $\tau_1$  più fine di  $\tau_2$ , cioè  $\tau_1 \supset \tau_2$ . Sia  $\text{id} : X \rightarrow X$  l'identità.  $\text{id}$  è invertibile e continua rispetto a  $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ , ma non continua rispetto a  $\tau_2 \rightarrow \tau_1$ .

## 1.6 Separazione

Per adesso gli spazi topologici sono un concetto molto generale. Cominciamo a definire delle proprietà che ci permettano di avere un'idea più intuitiva di come sono fatti certi spazi topologici.

**Definizione 22** (Proprietà di separazione). Uno spazio topologico si dice *di Hausdorff*<sup>3</sup> o *separato* o  $T_2$  se per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti:

$$X \text{ è } T_2 : \Leftrightarrow \forall x \neq y \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$$

**Proposizione 14.** *Gli spazi metrizzabili sono separati:*

$$X \text{ metrizzabile} \implies X \text{ è } T_2$$

<sup>3</sup>Preferiremo la notazione  $T_2$  perché ci da fastidio dire che uno spazio topologico sia “di Hausdorff”.

*Dimostrazione.*  $x \neq y \rightarrow r := d(x, y) \neq 0 \rightarrow B_{r/3}(x) \cap B_{r/3}(y) = \emptyset$   $\square$

**Proposizione 15.** *Negli spazi separati i singoletti sono chiusi:*

$$X \text{ è } T_2 \implies \forall x \in X : \{x\} \text{ chiuso}$$

*Dimostrazione.* Abbiamo che  $\forall y \in \mathcal{C}\{x\} \exists U_y, U_x : U_y \cap U_x = \emptyset$  cioè in particolare  $U_y \subseteq \mathcal{C}\{x\}$ . Quindi  $\mathcal{C}\{x\}$  è aperto.  $\square$

Vediamo che non vale il viceversa:

*Esempio 4* (Topologia cofinita). Sia  $\tau_z$  una topologia su  $\mathbb{R}$  i cui aperti sono i complementari di insiemi finiti:

$$\tau_z := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A = \emptyset \vee (A = \mathcal{C}F \wedge \#F \in \mathbb{N})\}$$

Gli aperti non vuoti non sono disgiunti, quindi  $(\mathbb{R}, \tau_z)$  non è  $T_2$ . Però i singoletti sono chiusi.

*Osservazione 8.* La topologia euclidea è più fine di  $\tau_z$ .

**Proposizione 16.** *La proprietà  $T_2$  passa ai sottospazi.*

*Dimostrazione.* Sia  $\chi \subseteq X$ .  $\forall x \neq y \in \chi \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$ , per  $x, y \in \chi$  prendiamo come intorni  $U_x \cap \chi$  e  $U_y \cap \chi$ .  $\square$

**Proposizione 17.** *La proprietà  $T_2$  è invariante per omeomorfismo.*

*Dimostrazione.* Sia  $f : X \rightarrow Y$  un omeomorfismo. Mostriamo che  $Y$  è  $T_2 \implies X$  è  $T_2$ :

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X :$$

$$y_1 := f(x_1), y_2 := f(x_2)$$

$$f \text{ iniettiva} \rightarrow y_1 \neq y_2$$

$$Y \text{ è } T_2 \rightarrow \exists U_{y_1}, U_{y_2} \text{ aperti} : U_{y_1} \cap U_{y_2} = \emptyset$$

$$U_{x_1} := f^{-1}(U_{y_1}), U_{x_2} := f^{-1}(U_{y_2})$$

$$U_{y_1} \cap U_{y_2} = \emptyset \rightarrow U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$$

$$f \text{ continua} \rightarrow U_{x_1}, U_{x_2} \text{ sono aperti}$$

Applicando lo stesso ragionamento a  $f^{-1}$  si mostra che  $X$  è  $T_2 \implies Y$  è  $T_2$ .  $\square$

*Osservazione 9.* In generale le proprietà che dipendono solo dalla topologia sono invarianti per omeomorfismo, perché un omeomorfismo induce una bigezione tra le topologie tale che due aperti corrispondenti sono messi in bigezione dall'omeomorfismo.

*Esempio 5.* Sia  $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'identità e  $\tau_E$  la topologia euclidea.  $\text{id}$  è continua rispetto a  $\tau_E \rightarrow \tau_z$  perché  $\tau_E \supseteq \tau_z$ , però non nell'altro verso. Infatti  $(\mathbb{R}, \tau_E)$  è  $T_2$  ma  $(\mathbb{R}, \tau_z)$  no, quindi non possono essere omeomorfi.



## 1.7 Numerabilità

Di solito con insieme numerabile si intende un insieme con la cardinalità dei numeri naturali. Per brevità di notazione chiameremo numerabili anche gli insiemi finiti:

**Definizione 23** (Numerabilità).  $S$  numerabile  $:\Leftrightarrow \#S \leq \#\mathbb{N}$

**Definizione 24** (1-numerabilità). Uno spazio topologico è *1-numerabile* se ogni punto ha una base di intorni numerabile.

*Esempio 6.* Due topologie non *1-numerabili* sono:

- la topologia cofinita;
- $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ , dove la relazione di equivalenza<sup>4</sup> indotta da  $\mathbb{N}$  è:  $x \sim y \iff x, y \in \mathbb{N}$ .

**Proposizione 18.** *metrizzabile*  $\implies$  *1-numerabile*

*Dimostrazione.* Avevamo già osservato che le palle aperte centrate in un punto formano una base di intorni per il punto. Ci basta scegliere la sottofamiglia numerabile  $\{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ , che è ancora una base perché  $\forall r \exists n : B_{1/n}(x) \subseteq B_r(x)$ .  $\square$

**Definizione 25** (2-numerabilità). Uno spazio topologico è *2-numerabile* se ha una base di aperti numerabile.

**Lemma 19.** *2-numerabile*  $\implies$  *1-numerabile*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  una base di aperti di  $X$  numerabile.  $\forall x \in X$  sia  $\mathcal{B}_x := \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$ .  $\mathcal{B}_x$  è numerabile ed è una base di intorni di  $x$ .  $\square$

**Definizione 26** (Densità). Un sottospazio è denso se interseca tutti gli aperti:

$$Y \text{ denso in } X :\Leftrightarrow \begin{cases} Y \subseteq X \\ \forall A \text{ aperto, } A \neq \emptyset : A \cap Y \neq \emptyset \end{cases}$$

**Lemma 20.** *Uno spazio metrizzabile che contiene un denso numerabile è 2-numerabile:*

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ metrizzabile} \\ Y \text{ denso in } X \text{ e numerabile} \end{array} \right\} \implies X \text{ 2-numerabile}$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $\{B_{1/n}(y) \mid y \in Y \wedge n \in \mathbb{N}\}$  è una base di aperti di  $X$ . Ogni aperto  $A$  si può scrivere come  $A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x)$ . Scegliamo  $\rho_x < r_x$  abbastanza piccolo tale che  $\exists n_x \in \mathbb{N} : \rho_x \leq 1/n_x \leq r_x - \rho_x$  (vedi Figura 1). Consideriamo  $B_{\rho_x}(x)$ : è un aperto non vuoto quindi  $\exists y_x \in Y \cap B_{\rho_x}(x)$ . Poniamo  $A' := \bigcup_{x \in A} B_{1/n_x}(y_x)$ . Allora  $A' \subseteq A$  perché  $B_{1/n_x}(y_x) \subseteq B_{r_x}(x)$  e  $A \subseteq A'$  perché  $x \in B_{1/n_x}(y_x)$ , quindi  $A = A'$ .  $\square$

<sup>4</sup>Per la definizione di topologia quoziente si veda la fine del capitolo.

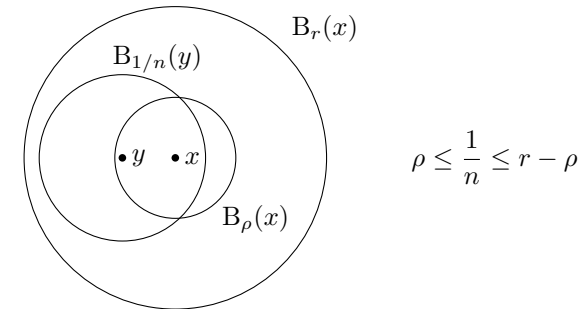


Figura 1: Costruzione di  $B_{1/n}(y)$  tale che  $B_{1/n}(y) \subseteq B_r(x)$  e  $x \in B_{1/n}(y)$ .

*Esempio 7.*  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$  e numerabile, quindi  $\mathbb{R}$  è 2-numerabile. Si noti che nel dimostrare il Lemma 20 abbiamo usato la densità di  $\mathbb{Q}$ .

Costruiamo ora una topologia che sia 1-numerabile ma non 2-numerabile:

**Definizione 27.** Sia  $\tau_s$  una topologia su  $\mathbb{R}$  generata dagli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra:

$$\tau_s := \left\{ \bigcup \mathcal{I} \mid \mathcal{I} \subseteq \{[a; b) \mid a \leq b\} \right\}$$

**Proposizione 21.**  $\tau_s$  è più fine di  $\tau_E$ .

*Dimostrazione.* Infatti la topologia euclidea è generata dagli intervalli aperti, e ogni intervallo aperto si può scrivere come:

$$(c; d) = \bigcup_{\substack{a > c \\ a < d}} [a; d) \quad \square$$

**Proposizione 22.**  $\tau_s$  è 1-numerabile.

*Dimostrazione.* Infatti  $\{[x; x + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$  è una base di intorni di  $x$  numerabile.  $\square$

**Proposizione 23.**  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$  secondo  $\tau_s$ .

*Dimostrazione.* Segue dalla densità di  $\mathbb{Q}$  secondo  $\tau_E$ .<sup>5</sup> Infatti per ogni aperto di  $\tau_s$  abbiamo un intervallo aperto (quindi una palla di  $\tau_E$ ) in esso contenuto. Poiché quest'ultimo interseca  $\mathbb{Q}$  per densità rispetto a  $\tau_E$  allora anche l'aperto di partenza fa altrettanto.  $\square$

**Proposizione 24.**  $\tau_s$  è  $T_2$ .

<sup>5</sup>Non è ovvio, poiché  $\tau_s$  è più fine di  $\tau_E$ . Lo sarebbe se valesse il viceversa, lo si dimostri per esercizio.

*Dimostrazione.* Presi  $x < y \exists z : x < z < y$  quindi  $[x; z) \cap [y; \infty) = \emptyset$ .  $\square$

**Proposizione 25.**  $\tau_s$  non è 2-numerabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  una base di aperti. Abbiamo che:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists B_x \in \mathcal{B} : \begin{cases} x \in B_x \\ B_x \subseteq [x; \infty) \end{cases}$$

Quindi  $y \neq x \rightarrow B_y \neq B_x$ , cioè l'applicazione  $(x \mapsto B_x)$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathcal{B}$  è iniettiva, ovvero  $\#\mathcal{B} \geq \#\mathbb{R}$ .  $\square$

*Osservazione 10.* Quindi 1-numerabilità non implica 2-numerabilità.

Seguono due proposizioni analoghe a quelle mostrate per la proprietà  $T_2$ :

**Proposizione 26.** Le proprietà di numerabilità passano ai sottospazi.

**Proposizione 27.** Le proprietà di numerabilità sono invarianti per omeomorfismo.

Gli spazi numerabili si possono studiare usando le successioni, cioè le applicazioni con dominio  $\mathbb{N}$ . Indichiamo con  $(a_n)$  l'applicazione  $(n \mapsto a_n)$ :

**Definizione 28** (Convergenza). Si dice che  $(a_n)$  converge a  $x$  se è definitivamente contenuta in ogni intorno di  $x$ :

$$a_n \rightarrow x :\Leftrightarrow \forall U_x \exists N \forall n \geq N : a_n \in U_x$$

Diamo ora una definizione che ci servirà per dimostrare la Proposizione 29:

**Definizione 29.** Una base di intorni annidati è una base di intorni numerabile ordinata per inclusione:

$$\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ base di intorni annidati } :\Leftrightarrow \begin{cases} \{U_n\} \text{ base di intorni} \\ \forall n : U_{n+1} \subseteq U_n \end{cases}$$

**Proposizione 28.** Una base di intorni numerabile induce una base di intorni annidati.

*Dimostrazione.* Sia  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base di intorni. Definiamo  $U'_k = \bigcap_{n=0}^k U_n$ .  $U'_k$  è un intorno perché è un'intersezione finita di intorni.  $\{U'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è una base di intorni annidati perché gli  $U'_k$  sono tutti contenuti negli  $U_n$ , e per costruzione sono annidati.  $\square$

**Proposizione 29.** In uno spazio 1-numerabile, ai punti di accumulazione di un insieme convergono sottosuccessioni a valori nell'insieme:

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ 1-numerabile} \\ Y \subseteq X \\ x \text{ accumulazione per } Y \end{array} \right\} \Rightarrow \exists (a_n) \subseteq Y : a_n \rightarrow x$$

*Dimostrazione.* Sia  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base di intorni annidati di  $x$ . Poiché  $x$  è di accumulazione per  $Y$ ,  $\forall n \exists a_n \in (U_n \setminus \{x\}) \cap Y$ . La successione  $(a_n)$  converge a  $x$  perché gli  $U_n$  sono una base annidata.  $\square$

## 1.8 Connessione

Con la proprietà di connessione vogliamo rendere l'idea intuitiva che uno spazio sia “tutto attaccato”.

**Definizione 30** (Connessione). Uno spazio è connesso se non è esprimibile come unione di due aperti disgiunti non vuoti:

$$X \text{ sconnesso } :\Leftrightarrow \exists A, B \text{ aperti } : \begin{cases} X = A \cup B \\ A \cap B = \emptyset \\ A, B \neq \emptyset \end{cases}$$

**Proposizione 30.** In uno spazio connesso, gli unici insiemi sia aperti che chiusi sono lo spazio stesso e il vuoto:

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ connesso} \\ A \subseteq X \\ A \text{ aperto e chiuso} \end{array} \right\} \Rightarrow A = X \vee A = \emptyset$$

*Dimostrazione.*  $A$  è chiuso quindi  $\mathcal{C} A$  è aperto, e  $X = A \cup \mathcal{C} A$ . Se fosse  $A, \mathcal{C} A \neq \emptyset$ ,  $X$  sarebbe sconnesso.  $\square$

**Proposizione 31.** I connessi di  $\mathbb{R}$  sono gli intervalli:

$$Y \subseteq \mathbb{R} \text{ connesso secondo } \tau_E \iff Y \text{ è un intervallo}$$

*Dimostrazione.* Mostriamo le due implicazioni:

- $(\Rightarrow)$  Se  $Y$  non fosse un intervallo, avremmo  $\exists x \in (\inf Y; \sup Y) : x \notin Y$ . Ma allora  $Y = (Y \cap (-\infty; x)) \cup (Y \cap (x; \infty)) \not\subseteq$ .
- $(\Leftarrow)$  Supponiamo per assurdo che  $Y$  sia sconnesso. Allora  $Y = A_1 \cup A_2$  aperti (nella topologia di  $Y$ ) disgiunti non vuoti. In particolare  $\exists x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$  WLOG  $x_1 < x_2$ . Poiché  $Y$  è un intervallo,  $[x_1; x_2] \subseteq Y$ . Poniamo:

$$\xi := \sup(A_1 \cap [x_1; x_2])$$

$\xi$  è dunque di accumulazione per  $A_1$  e  $A_2$ , poiché se per assurdo fosse isolato per quest'ultimo vi sarebbe una palla tutta contenuta nel complementare, cioè in  $A_1$ , e quindi non sarebbe il sup, quindi  $\xi \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ . Ma essendo gli  $A_i$  complementari in  $Y$ ,  $A_i = \overline{A_i} \not\subseteq$ .  $\square$

**Teorema 32.** *L'immagine continua di connessi è connessa:*

$$\left. \begin{array}{l} f : X \rightarrow Y \text{ continua} \\ X \text{ connesso} \end{array} \right\} \implies f(X) \text{ connesso}$$

*Dimostrazione.* Per assurdo supponiamo  $f(X) = B_1 \cup B_2$ ,  $B_1, B_2$  aperti disgiunti non vuoti.  $A_1 := f^{-1}(B_1)$  e  $A_2 := f^{-1}(B_2)$  sono aperti per continuità di  $f$ . Inoltre sono non vuoti, disgiunti e  $X = A_1 \cup A_2$ , assurdo.  $\square$

*Osservazione 11.* La connessione è invariante per omeomorfismo, ma *non* passa ai sottospazi.

**Definizione 31** (Arco). Un arco in  $X$  è un'applicazione  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  continua con topologia euclidea sul dominio.

Diciamo che un arco  $\gamma$  collega due punti  $x_0, x_1$  se  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x_1$ .

**Definizione 32** (Connessione per archi). Uno spazio topologico è *connesso per archi* se ogni sua coppia di punti è collegata da un arco:

$$X \text{ connesso per archi} \iff \forall x_0, x_1 \in X \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X : \begin{cases} \gamma \text{ continua} \\ \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = x_1 \end{cases}$$

**Proposizione 33.**  $X \text{ connesso per archi} \implies X \text{ connesso}$

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo  $X = A_0 \cup A_1$  aperti non vuoti disgiunti. Siano  $x_0 \in A_0$  e  $x_1 \in A_1$ , e  $\gamma$  un arco che li collega. L'intervallo  $[0, 1]$  è connesso quindi  $\gamma([0, 1])$  è connesso per continuità di  $\gamma$ . Ma posso anche scriverlo come  $\gamma([0, 1]) = (A_0 \cap \gamma([0, 1])) \cup (A_1 \cap \gamma([0, 1]))$  che è sconnesso  $\nmid$ .  $\square$

*Esercizio 1.* Non è vero il viceversa! Si prendano gli insiemi in  $\mathbb{R}^2$ :

$$Y_1 := \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \quad Y_2 := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$Y = Y_1 \cup Y_2$  è connesso ma non per archi.

Invece per gli aperti di  $\mathbb{R}^n$  il viceversa vale:

**Proposizione 34.**  $A \subseteq (\mathbb{R}^n, \tau_E)$  aperto connesso  $\implies A$  connesso per archi

*Dimostrazione.* Introduciamo la seguente relazione di equivalenza su  $A$ :

$$x \sim y \iff x \text{ e } y \text{ sono collegati da un arco}$$

È una buona definizione perché, dati  $x, y$  collegati da  $\gamma$  e  $y, z$  collegati da  $\eta$ , la concatenazione  $\zeta$  di  $\gamma$  e  $\eta$ :

$$\zeta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \eta(2t - 1) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è continua. Infatti  $\zeta^{-1}(S \subseteq A) = \gamma^{-1}(S) \cup \eta^{-1}(S)$ .

Andiamo a mostrare che, fissato  $x \in A$ , la sua classe di equivalenza  $[x]$  è un insieme sia aperto che chiuso. La Proposizione 30 conclude.

Sia  $y \in [x]$  cioè  $y \in A$ ,  $y \sim x$ . Per ipotesi esiste una palla aperta  $B_r(y) \subseteq A$ . Abbiamo che  $\forall z \in B_r(y) : z \sim y$  perché  $z$  è collegato a  $y$  tramite l'arco radiale:

$$\rho(t) = y + t(z - y), \quad d_E(y, \rho) \leq d_E(y, z)$$

Dunque  $B_r(y) \subseteq [x]$ .

Per mostrare che l'insieme è chiuso basta vedere che il complementare è aperto. Ma se un punto  $y$  non è collegato a  $x$ , allora i punti  $z$  in una palletta intorno a lui non possono essere collegati a  $x$ : altrimenti potrei collegare  $y$  a  $x$  passando per  $z$  con un arco radiale tra  $z$  e  $y$ .  $\square$

**Definizione 33** (Componenti connesse per archi). Su uno spazio topologico  $X$  arbitrario, le classi di equivalenza per la relazione sopra definita sono dette *componenti connesse per archi* di  $X$ .

## 1.9 Compattezza

Generalmente la proprietà di compattezza è utile in spazi  $T_2$ , tuttavia non esiste una convenzione globalmente accettata riguardo al richiedere o meno che uno spazio compatto sia necessariamente  $T_2$ . Noi intenderemo sempre implicitamente che sia  $T_2$ .

Esistono due nozioni di compattezza, non sempre equivalenti:

**Definizione 34** (Ricoprimento). Un *ricoprimento* di un insieme  $A$  è una famiglia di sottoinsiemi, dello stesso ambiente di  $A$ , la cui unione è  $A$ .

**Definizione 35** (Compattezza per ricoprimenti). Uno spazio topologico  $X$  è *compatto per ricoprimenti* se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

**Definizione 36** (Compattezza per successioni).  $X$  è *compatto per successioni* se ogni successione a valori in  $X$  ammette una sottosuccessione convergente in  $X$ .

Generalmente quando diciamo solo “compatto” intendiamo “compatto per ricoprimenti”.

**Proposizione 35.** *I sottospazi compatti di un compatto sono i chiusi:*

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ compatto} \\ Y \subseteq X \end{array} \right\} \implies (Y \text{ compatto} \iff Y \text{ chiuso})$$

*Dimostrazione.* Mostriamo le due implicazioni:

( $\Leftarrow$ ) Un ricoprimento aperto di  $Y$  corrisponde a una famiglia  $\mathcal{A}$  di aperti di  $X$  tale che  $Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ . La famiglia  $\mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$  è un ricoprimento aperto di tutto  $X$ , da cui per compattezza posso estrarre un sottoricoprimento finito  $\mathcal{F}$  di  $X$ .  $\mathcal{F}$  dovrà necessariamente contenere solo elementi di  $\mathcal{A}$ , allora  $\{F \cap Y \mid F \in \mathcal{F}\}$  è il sottoricoprimento di  $Y$  cercato.<sup>6</sup>

( $\Rightarrow$ ) Voglio mostrare che  $X \setminus Y$  è aperto. Fisso  $y \in X \setminus Y$ . Per  $T_2$ ,  $\forall x \in Y \exists U_x, W_x$  aperti disgiunti,  $x \in U_x$ ,  $y \in W_x$ .

Si osservi che  $\bigcup_{x \in Y} U_x$  è ricoprimento di  $Y$ . Per compattezza, posso estrarre un sottoricoprimento finito  $U_1, \dots, U_n$ . Considero i rispettivi insiemi aperti  $W_1, \dots, W_n$  che assieme agli  $U_i$  separavano i punti.

Allora  $W := \bigcap_{i=1}^n W_i$  è un intorno di  $y$ , che contiene solo punti di  $X \setminus Y$  perché gli  $U_i$  ricoprono  $Y$ .  $\square$

Ci accingiamo ora a mostrare sotto che ipotesi la compattezza per ricoprimenti equivale alla compattezza per successioni.

**Lemma 36.** *I sottoinsiemi infiniti di uno spazio compatto hanno punti di accumulazione:*

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ compatto} \\ Y \subseteq X \\ Y \text{ infinito} \end{array} \right\} \implies \exists y \in X \text{ punto di accumulazione per } Y$$

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che tutti gli  $x \in X$  non siano di accumulazione per  $Y$ . Abbiamo due casi:

- $x \in X \setminus Y \implies \exists U_x : U_x \cap Y = \emptyset$
- $x \in Y \implies \exists U_x : U_x \cap Y = \{x\}$

La famiglia di intorni  $\{U_x\}_{x \in X}$  ricopre  $X$  (posso scegliere gli intorni aperti). Per compattezza estraggo  $U_1, \dots, U_n$  sottoricoprimento finito. Ma allora  $Y$  è contenuto in un insieme finito:

$$Y = \bigcup_{i=1}^n (U_i \cap Y) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \quad \nexists \quad \square$$

<sup>6</sup>Si osservi che non abbiamo usato la proprietà  $T_2$  di  $X$ .

**Proposizione 37.**  *$X$  1-numerabile e compatto  $\implies X$  compatto per successioni*

*Dimostrazione.* Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione a valori in  $X$ . Si hanno allora due casi:

- se assume un numero finito di valori ne assumerà uno di questi infinite volte, quindi posso estrarre una sottosuccessione costante;
- se assume un numero infinito di valori distinti allora per il Lemma 36 si ha che  $\exists x \in X$  di accumulazione per  $\{a_n\}$ .

Nel secondo caso la sottosuccessione si estrae per 1-numerabilità, infatti, presa una base di intorni  $\{U_n\}$  di  $x$  **WLOG** annidati, costruisco induttivamente la sottosuccessione  $(a_{n_k})$  in modo che  $a_{n_k} \in U_k$ :

$$\begin{aligned} n_0 &:= \min\{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in U_0\} \\ n_k &:= \min\{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in U_k \wedge m > n_{k-1}\} \end{aligned}$$

Questa è una buona definizione perché gli  $n_k$  sono strettamente crescenti e perché  $x$  è di accumulazione per  $\{a_n\}$ . La sottosuccessione converge a  $x$  perché abbiamo preso gli intorni annidati.  $\square$

*Osservazione 12.* Se un punto  $x$  è di accumulazione per un dato insieme in uno spazio  $T_2$  si ha che ogni intorno di  $x$  interseca l'insieme in infiniti punti. Infatti, supponendo che l'intersezione sia invece finita, sottraggo questi punti (tranne eventualmente  $x$ ) all'intorno, che rimane un intorno di  $x$  perché in uno spazio  $T_2$  i singoletti sono chiusi e l'intersezione finita di aperti è aperta, ma non ha punti in comune con l'insieme a parte al più  $x$ , assurdo.

**Proposizione 38.**  *$X$  2-numerabile e compatto per successioni  $\implies X$  compatto*

*Dimostrazione.* Dato un ricoprimento  $\mathcal{R}$  di  $X$ , da esso ne devo estrarre uno finito.

Otteniamo prima un risultato intermedio, cioè l'estrazione di un sottoricoprimento numerabile. In questo primo passaggio non è coinvolta l'ipotesi di compattezza per successioni. Sia dunque  $\mathcal{B}$  una base numerabile di aperti di  $X$ . Allora dalle definizioni di ricoprimento e base abbiamo che:

$$\forall x \in X \quad \exists R_x \in \mathcal{R} : x \in R_x \quad \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq R_x$$

La famiglia dei  $B_x$  è numerabile. Se per ogni  $B \in \{B_x\}_{x \in X}$  scelgo un solo  $R_B \in \{R_x \mid B_x = B\}$  ho un sottoricoprimento numerabile.

Il secondo passaggio è estrarre da un ricoprimento numerabile un sottoricoprimento finito. Per assurdo, se il ricoprimento  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non ammette un sottoricoprimento finito, posso costruire una successione tale che  $a_n \notin \bigcup_{i=0}^n R_i$  (altrimenti  $\{R_i\}_{i \leq n}$  ricopre). Ma una sottosuccessione convergente di  $(a_n)$  sarebbe definitivamente contenuta in un  $R_i$ .  $\square$

**Corollario 39.** *Per uno spazio 2-numerabile si ha che: compatto  $\iff$  compatto per successioni.*

### 1.9.1 Compattezza in spazi metrizzabili

Se uno spazio metrizzabile è compatto questa proprietà risulta avere conseguenze “importanti” su ogni spazio metrico che induce la topologia.

**Definizione 37.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Esso si dice *totalmente limitato* se  $\forall \varepsilon > 0 : X$  è ricoperto da un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon$ .

**Proposizione 40.** Sia  $(X, \tau_d)$  compatto per successioni, allora ogni metrica inducente  $(X, d)$  è *totalmente limitata*.

*Dimostrazione.* Per assurdo, supponiamo  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $X$  non è ricoperto da un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon$ . Allora dato  $x_0 \in X$  esiste una successione  $(x_n)$  tale che  $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=0}^n B_\varepsilon(x_i)$ . Questa successione non ammette una sottosuccessione convergente perché i punti distano fra loro almeno  $\varepsilon$ , da cui l'assurdo.  $\square$

**Proposizione 41.**  $(X, \tau_d)$  compatto per successioni  $\implies X$  2-numerabile

*Dimostrazione.*  $\forall n \in \mathbb{N}$  esiste una famiglia finita  $\mathcal{F}_n$  di palle aperte di raggio  $2^{-n}$  che ricopre  $X$ , per totale limitatezza. Sia  $\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ . Abbiamo che  $\mathcal{B}$  è numerabile, per verificare che è anche una base di  $\tau_d$  mostriamo prima che se  $\mathcal{A}$  è un ricoprimento di  $X$  allora esiste un  $\bar{n}$  tale che ogni palla di  $\mathcal{F}_{\bar{n}}$  è contenuta in uno degli aperti di  $\mathcal{A}$ . Poniamo:

$$\forall x \in X \quad n_x := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists A \in \mathcal{A} : B_{2^{-n}}(x) \subseteq A\}$$

È una buona definizione perché le palle  $B_{2^{-n}}(x)$  sono arbitrariamente piccole. Ora invertiamo  $n_x$ , cioè per ogni  $n \in \{n_x\}_{x \in X}$  scegliamo un  $x_n$  tale che  $n_{x_n} = n$ . Per assurdo, supponiamo che gli  $n_x$  non abbiano massimo: allora  $(x_n)$  è una successione e ha una sottosuccessione convergente a un punto  $\bar{x}$ . Quindi gli  $x_n$  sono frequentemente contenuti in  $B_{2^{-(1+n_{\bar{x}})}}(\bar{x})$ , e quindi c'è un  $m > 1 + n_{\bar{x}}$  tale che  $n_{x_m} \leq 1 + n_{\bar{x}} < m$ . Il massimo degli  $n_x$  è  $\bar{n}$  che cercavamo.

$\forall A \in \tau_d \forall x \in A$  consideriamo  $\mathcal{A} := \{A, X \setminus \{x\}\}$ . È un ricoprimento perché in uno spazio metrico i singoletti sono chiusi. Allora le palle di  $\mathcal{F}_{\bar{n}}$  che contengono  $x$  sono contenute in  $A$  e al variare di  $x$  queste palle ricoprono  $A$ .  $\square$

**Corollario 42.** metrizzabile  $\implies$  (compatto  $\iff$  compatto per successioni)

**Proposizione 43.** Per un insieme in  $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$  vale che: compatto  $\iff$  chiuso e limitato.

*Dimostrazione.*  $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$  è metrizzabile quindi compatto equivale a compatto per successioni. Mostriamo le due implicazioni:

$\Rightarrow$  Per assurdo:

**Limitatezza** Se l'insieme è illimitato allora contiene una successione che tende a  $\infty$ . Le sottosuccessioni di questa tendono necessariamente anch'esse a  $\infty$ .

**Chiusura** Se l'insieme non è chiuso allora è più piccolo della sua chiusura, quindi c'è un punto di accumulazione  $x$  fuori dall'insieme. Lo spazio è 1-numerabile quindi c'è una successione contenuta nell'insieme che tende a  $x$ . Tutte le sottosuccessioni di questa convergono a  $x$ .

$\Leftarrow$  È sostanzialmente il teorema di Bolzano-Weierstrass. Osserviamo che funziona perché  $\mathbb{R}^n$  ha dimensione finita.  $\square$

*Esercizio 2.*  $(X, \tau_d)$  compatto  $\iff (X, d)$  completo e totalmente limitato

### 1.9.2 Compattezza e funzioni continue

**Lemma 44.** L'immagine continua di un compatto è compatta.<sup>7</sup>

*Dimostrazione.* Sia  $X$  compatto e  $f : X \rightarrow Y$  continua. Vogliamo dimostrare che  $f(X)$  con la topologia di sottospazio è compatto.

Prendiamo dunque un ricoprimento aperto  $\mathcal{A}$  di  $f(X)$ . Consideriamo  $\mathcal{A}_X := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ . Per definizione di continuità, gli elementi di  $\mathcal{A}_X$  sono aperti, mentre per ragioni insiemistiche ricoprono  $X$ . Allora da  $\mathcal{A}_X$  posso estrarre un sottoricoprimento finito  $\mathcal{A}_X^F$ . Tornando indietro, l'insieme  $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}_X^F\}$  è un sottoricoprimento finito di  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Lemma 45.** L'immagine continua di un compatto per successioni è compatta per successioni.

*Dimostrazione.* Siano  $X$  compatto per successioni e  $f : X \rightarrow Y$  continua, vogliamo dimostrare che  $f(X)$  è compatto per successioni.

Sia  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione in  $Y$ . Per ognuno degli  $y_n$  scelgo un  $x_n \in f^{-1}(y_n)$ , definendo così una successione in  $X$ . Estraggo da essa una sottosuccessione convergente  $(x_{n_k})$  (esiste poiché  $X$  è compatto per successioni). Tornando indietro,  $(f(x_{n_k}))$  è una sottosuccessione di  $(y_n)$  e converge per continuità di  $f$ .  $\square$

**Lemma 46.** Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e  $X$  è compatto allora  $f$  ammette massimo e minimo assoluti.

*Dimostrazione.* L'immagine continua di compatti è compatta, dunque  $f(X)$  è compatto. Ma in  $\mathbb{R}$  compatto equivale a chiuso e limitato. Dalla limitatezza segue che esiste, in  $\mathbb{R}$ , estremo superiore e inferiore, dalla chiusura che essi sono in  $f(X)$ .  $\square$

**Lemma 47.** Se  $X$  è compatto e  $f : X \rightarrow Y$  è continua e invertibile, allora  $f^{-1}$  è continua (corollario: è un omeomorfismo).

<sup>7</sup>Non stiamo dimostrando che l'immagine continua di  $T_2$  è  $T_2$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa mostriamo che  $f$  è chiusa (cioè manda chiusi in chiusi). Sia  $C \subseteq X$  chiuso.  $X$  è compatto quindi  $C$  è compatto. L'immagine continua di compatti è compatta quindi  $f(C)$  e  $Y = f(X)$  sono compatti.  $f(C)$  è un sottospazio compatto di  $Y$  quindi è chiuso.

Sia ora  $A \subseteq X$  aperto. Il suo complementare  $\mathcal{C} A$  è un chiuso di  $X$ , allora la sua immagine  $f(\mathcal{C} A)$  è un chiuso di  $Y$  ovvero  $\mathcal{C} f(\mathcal{C} A)$  è aperto. Per invertibilità,  $\mathcal{C} f(\mathcal{C} A) = f(A)$ . Abbiamo quindi che  $f^{-1}$  è continua.  $\square$

## 1.10 Topologia prodotto e topologia quoziente

Definiamo ora delle operazioni fra spazi topologici che ci permettano di costruirne altri in maniera “naturale”.

**Definizione 38** (Topologia prodotto). Siano  $X, Y$  spazi topologici. La *topologia prodotto* è la topologia meno fine su  $X \times Y$  tale che le proiezioni canoniche  $(x, y) \mapsto x$  e  $(x, y) \mapsto y$  sono continue.

*Osservazione 13.* Si vede come la condizione sulle proiezioni non sia impossibile da soddisfare. Infatti la topologia discreta sul prodotto cartesiano soddisfa banalmente.

**Fatto 1.** La topologia prodotto esiste ed è generata dalle controimmagini secondo le proiezioni canoniche di aperti di  $X$  e di  $Y$ , ovvero dalla base di aperti:

$$\{A_X \times A_Y \mid A_X \text{ aperto di } X \wedge A_Y \text{ aperto di } Y\}$$

**Fatto 2.** Proprietà comuni di compattezza, connessione,  $T_2$ , 1- o 2-numerabilità si propagano allo spazio prodotto.

*Osservazione 14.* Il prodotto si estende a prodotto di più fattori, e si ha:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

*Osservazione 15.* Data una funzione surgettiva  $f : X \rightarrow Y$ , la relazione  $a \sim b : \Leftrightarrow f(a) = f(b)$  è di equivalenza, e l'insieme quoziente si identifica con  $Y$  perché  $X/\sim = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$ .

Viceversa, data una relazione di equivalenza  $\sim$  su  $X$ , la proiezione che manda un elemento nella sua classe di equivalenza

$$f := (x \mapsto [x]_\sim) : X \rightarrow X/\sim$$

è surgettiva e ha la proprietà che  $a \sim b \iff f(a) = f(b)$ .

**Definizione 39** (Topologia quoziente). Siano  $X$  uno spazio topologico e  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . La *topologia quoziente* è la topologia più fine su  $X/\sim$  tale che la proiezione  $x \mapsto [x]_\sim$  è continua.

## 1.10. TOPOLOGIA PRODOTTO E TOPOLOGIA QUOZIENTE

*Osservazione 16.* Anche questa volta, se l'esistenza di topologie che rendano continua l'immersione è palese (basti pensare alla topologia banale), non è affatto scontato che esista una “topologia più fine possibile”.

**Definizione 40** (Insieme  $f$ -satturo). Data una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice  $f$ -satturo un  $X' \subseteq X$  tale che  $f^{-1}(f(X')) = X'$ .

**Fatto 3.** La topologia quoziente su  $X/\sim$  esiste ed è data dalle immagini attraverso  $f := (x \mapsto [x]_\sim)$  di aperti  $f$ -satturi di  $X$ .

**Fatto 4.** Le proprietà di connessione e compattezza si propagano al quoziente. Invece le proprietà di separazione, fra cui l'essere  $T_2$ , generalmente non vengono ereditate quando si passa al quoziente.

*Esercizio 3.* La topologia quoziente è data dagli insiemi la cui controimmagine attraverso la proiezione è aperta.

## Capitolo 2

# Varietà

C'era una volta un nero serpentello  
sul verde schermo di un telefonino  
e mosso da veloce polpastrello  
guatava i frutti del suo bel giardino.

Non viveva chiuso da alcun cancello:  
nessun lato fermava il suo cammino,  
e se da questo spariva, da quello  
andava verso il prossimo spuntino.

Di vivere in un ritto piano il moro  
serpente credeva, poiché era dura  
immaginare che se io accosto

dello schermo ogni lato a quello opposto  
di quel mondo si svela la natura:  
non ha forma di un piano, ma di un toro.

### 2.1 Definizioni di base

**Definizione 41** (Localmente euclideo). Uno spazio topologico  $X$  è detto *localmente  $n$ -euclideo* se  $\forall x \in X$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  e un omeomorfismo  $f : U \rightarrow W \subseteq (\mathbb{R}^n, \tau_E)$  con  $W$  aperto. Si hanno le seguenti denominazioni:

- $(U, f)$  è detta *carta locale* di  $X$  intorno a  $x$ ;
- $f^{-1} : W \rightarrow U$  è detta *parametrizzazione locale* di  $X$  intorno a  $x$ ;
- la famiglia delle carte locali è detta *atlante*.

**Definizione 42** (Varietà). Una  *$n$ -varietà* è uno spazio topologico localmente  $n$ -euclideo,  $T_2$  e 2-numerabile.

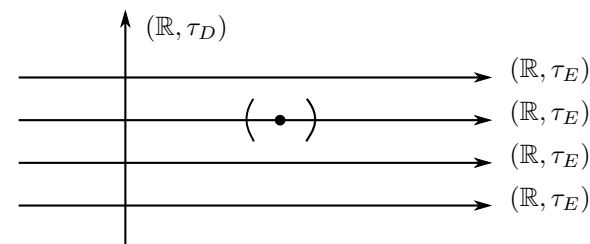


Figura 2:  $(\mathbb{R}, \tau_E) \times (\mathbb{R}, \tau_D)$  è localmente 1-euclideo ma non 2-numerabile.

**Proposizione 48.** *localmente euclideo  $\not\Rightarrow$  2-numerabile*

*Dimostrazione.* Si consideri  $X = (\mathbb{R}^n, \tau_E) \times (\mathbb{R}, \tau_D)$ . Tale spazio è localmente  $n$ -euclideo, ma non 2-numerabile (vedi Figura 2). Un controesempio minimale è  $(X, \tau_D)$  con  $X$  non numerabile, questi è localmente 0-euclideo, ma non 2-numerabile.  $\square$

**Proposizione 49.** *localmente euclideo  $\not\Rightarrow T_2$*

*Dimostrazione.* Prese 2 copie di  $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$  sia  $(x, 0) \in (\mathbb{R}_0^n, \tau_0)$  e  $(x, 1) \in (\mathbb{R}_1^n, \tau_1)$ , e sia  $X = (\mathbb{R}_0^n \cup \mathbb{R}_1^n, \{A_0 \cup A_1 \mid A_0 \in \tau_0, A_1 \in \tau_1\})$ . Si consideri la relazione di equivalenza  $(x, 0) \sim (x, 1)$  se  $x > 0$  mentre gli altri elementi fanno classe a sé. Si consideri l'insieme quoziente  $X/\sim$  e la funzione  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X/\sim$  che manda  $t \mapsto [(t, 0)]$ . Si verifica che  $f$  è un omeomorfismo (esercizio) che rende  $X/\sim$  localmente 1-euclideo. Tuttavia  $X/\sim$  non è  $T_2$  in quanto non è possibile separare i punti  $[(0, 0)]$  e  $[(0, 1)]$  (vedi Figura 3).  $\square$

#### 2.1.1 Esempi di varietà

- $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$

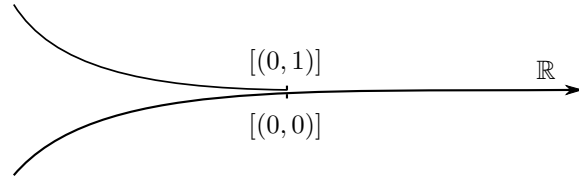


Figura 3:  $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$  quozientato in modo che l'unione non sia disgiunta sulla semiretta positiva; i punti nell'origine sono disgiunti ma non separati.

- Ogni aperto di  $\mathbb{R}^n$
- Le  $n$ -sfere:

$$S^n \subseteq (\mathbb{R}^{n+1}, \tau_E), \quad S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Osservazione 17.  $S^n$  è compatto,  $T_2$  e 2-numerabile.

**Proposizione 50.**  $S^n$  è localmente  $n$ -euclideo.

*Dimostrazione.* Dobbiamo esibire un atlante  $\mathcal{A}$ . Siano  $N := (0, 0, \dots, 1)$  e  $S := (0, 0, \dots, -1)$  il polo Nord e il polo Sud. Siano  $f_N$  e  $f_S$  le proiezioni stereografiche di centro  $N$  ed  $S$  così definite:

$$f_N : (S^n \setminus \{N\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1 - x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

E analogamente  $f_S$ . Allora abbiamo l'atlante:

$$\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{N\}, f_N), (S^n \setminus \{S\}, f_S)\}$$

□

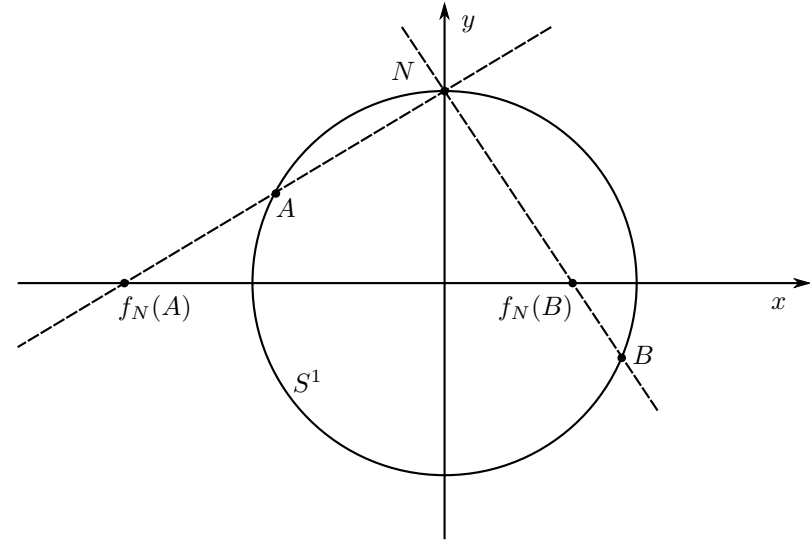


Figura 4: La proiezione stereografica  $f_N$  di centro  $N$  su  $S^1$ .

## 2.2 Spazio proiettivo (reale)

Sia  $\mathbb{R}_0^n := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (come sottospazio topologico); introduciamo su  $\mathbb{R}_0^{n+1}$  la relazione  $\sim$  (di equivalenza proiettiva):

$$x, y \in \mathbb{R}_0^{n+1}, \quad x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x = \lambda y$$

Le relative classi di equivalenza sono date da  $[x]_\sim = \text{span}(x) \setminus \{0\}$ . Inoltre, essendo  $S^n \subset \mathbb{R}_0^{n+1}$ , posso restringere tale relazione di equivalenza a  $S^n$ , ottenendo  $\sim_S$  (rispetto a cui le classi di equivalenza sono date da  $[x]_{\sim_S} = \{x, -x\} = [x]_\sim \cap S^n$ ). Consideriamo ora gli insiemi quoziente  $X := \mathbb{R}_0^{n+1} / \sim$  e  $Y := S^n / \sim_S$ , con le rispettive proiezioni  $\pi : \mathbb{R}_0^{n+1} \rightarrow X$  e  $\pi_S : S^n \rightarrow Y$ .

*Osservazione 18.* L'applicazione  $[x]_\sim \mapsto \text{span}(x)$  è una biiezione tra  $X$  e  $\{V \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \mid V \text{ è SSV}^1 \text{ di dimensione } 1\}$ .

Vogliamo mostrare che  $X$  è omeomorfo a  $Y$ . Si ricorda che gli aperti della topologia quoziente sono le immagini degli aperti saturi rispetto alla proiezione.

**Definizione 43** (Cono). Un sottoinsieme  $C \subseteq \mathbb{R}_0^n$  è un *cono* se  $\text{span}(C) \setminus \{0\} \subseteq C$  (e dunque, poiché  $x \in \text{span}(x)$ , se  $\text{span}(C) \setminus \{0\} = C$ ).

*Esercizio 4.* Valgono le seguenti:

<sup>1</sup>Sottospazio vettoriale.



- $A \subseteq \mathbb{R}_0^{n+1}$  è  $\pi$ -saturato  $\iff A$  è un cono.
- $A \subseteq S^n$  è  $\pi_S$ -saturato  $\iff \forall x \in A : -x \in A$ .

**Proposizione 51.** La biiezione  $[x]_{\sim_S} \mapsto [x]_{\sim}$  (con inversa  $[y]_{\sim} \mapsto [y]_{\sim} \cap S$ ) è un omeomorfismo tra  $X$  e  $Y$  (rispetto alle topologie quoziente).

*Dimostrazione.* Per l'Esercizio 4, la biiezione tra

$$\{A \subseteq \mathbb{R}_0^{n+1} \mid A \text{ è } \pi\text{-saturato}\} \quad \text{e} \quad \{A_S \subseteq S^n \mid A_S \text{ è } \pi_S\text{-saturato}\}$$

data semplicemente da  $A \mapsto A \cap S^n$ ,  $\text{span}(A_S) \setminus \{0\} \leftrightarrow A_S$  manda aperti in aperti e viceversa, mostrando continuità e apertura di  $[x]_{\sim_S} \mapsto [x]_{\sim}$ .  $\square$

**Definizione 44** (Spazio proiettivo). Questi quozienti sono dunque identificati sotto il nome di *spazio proiettivo reale di dimensione  $n$* , indicato con  $\mathbb{P}^n$ .

**Proposizione 52.**  $\mathbb{P}^n$  è una varietà compatta.

*Dimostrazione.* Dobbiamo mostrare che è  $T_2$ , 2-numerabile, compatto e localmente euclideo.

Siano  $[x], [y] \in \mathbb{P}^n$  distinti. Tornando alle controimmagini in  $S^n$  abbiamo:

$$\pi_S^{-1}([x]) = \{x, -x\}; \quad \pi_S^{-1}([y]) = \{y, -y\}; \quad x \neq \pm y$$

Allora possiamo prendere  $U_x, U_{-x}, U_y, U_{-y}$  intorno aperti (rispettivamente di  $x, -x, y, -y$ ) in modo che non si intersechino e che  $U_x = -U_{-x}, U_y = -U_{-y}$ ; le unioni  $U_x \cup U_{-x}$  e  $U_y \cup U_{-y}$  sono dunque  $\pi_S$ -sature e disgiunte, e passando alle loro immagini otteniamo intorno aperti disgiunti di  $[x]$  e  $[y]$ , dunque  $\mathbb{P}^n$  è  $T_2$ . Similmente si può mostrare che è anche 2-numerabile. Inoltre, dalla continuità di  $\pi_S$  e dalla compattezza di  $S^n$  segue che  $\mathbb{P}^n$  è compatto.

Esibiamo ora un atlante: vedendo  $\mathbb{P}^n$  come quoziente di  $\mathbb{R}_0^{n+1}$ , consideriamo il piano affine:

$$\Pi_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_0^{n+1} \mid x_i = 1\}$$

Sia  $\phi_i : \Pi_i \rightarrow \mathbb{P}^n$  la restrizione di  $\pi$  al piano (vedi Figura 5). È iniettiva e continua. Con  $U_i := \phi_i(\Pi_i) \subset \mathbb{P}^n$  e  $\tau_i : \Pi_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'isomorfismo naturale, ho  $f_i := \tau_i \circ \phi_i^{-1} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  biiettiva e continua, dunque se  $U_i$  è aperto,  $(U_i, f_i)$  è una carta per  $\mathbb{P}^n$ . Ma posto

$$G_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_0^{n+1} \mid x_i = 0\}$$

ho  $U_i = \pi(\mathbb{R}_0^{n+1} \setminus G_i)$  e  $\mathbb{R}_0^{n+1} \setminus G_i$  è un aperto  $\pi$ -saturato, ergo  $U_i$  è aperto. L'unione dei  $\mathbb{R}_0^{n+1} \setminus G_i$  è  $\mathbb{R}_0^{n+1}$  quindi gli  $U_i$  ricoprono  $\mathbb{P}^n$ ; dunque  $\{(U_i, f_i)\}_{1 \leq i \leq n+1}$  è un atlante per  $\mathbb{P}^n$ .  $\square$

*Esercizio 5.*  $\pi_S : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  è un omeomorfismo locale, ovvero  $\forall x \in S^n \exists U$  intorno aperto di  $x$  tale che  $\pi_S(U)$  è aperto in  $\mathbb{P}^n$  e  $\pi_S|_U : U \rightarrow \pi_S(U)$  è un omeomorfismo.

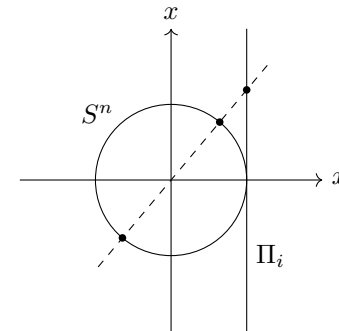


Figura 5: Carta  $i$ -esima di  $\mathbb{P}^n$ .

### 2.2.1 Filtrazione di $\mathbb{P}^n$

Poiché si ha  $\pi^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus U_i) = G_i$ , il quale è identificabile con  $\mathbb{R}_0^n$ , e inoltre  $\pi(\mathbb{R}_0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ , valgono:

- $\mathbb{P}^n = U_i \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$ ;
- $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.3 Varietà prodotto

**Proposizione 53** (Prodotto di varietà). Date  $M_1$  e  $M_2$   $n_1$ -varietà e  $n_2$ -varietà,  $M_1 \times M_2$  è una  $(n_1 + n_2)$ -varietà.

*Dimostrazione.* Devo esibire un atlante. Se  $\{(U_i, f_i)\}$  è un atlante per  $M_1$  e  $\{(W_j, g_j)\}$  è un atlante per  $M_2$  allora  $\{(U_i \times W_j, f_i \times g_j)\}$  è un atlante per il prodotto. Il prodotto di funzioni è definito come segue: sia  $f : U \rightarrow A$  e  $g : W \rightarrow B$ , allora  $f \times g : U \times W \rightarrow A \times B$  è la funzione  $(p, q) \mapsto (f(p), g(q))$ .  $T_2$  e 2-numerabilità sono proprietà che passano al prodotto topologico.  $\square$

*Esempio 8.*

- $S^p \times S^q$  è una  $(p + q)$ -varietà.
- $\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$  è chiamato  $n$ -toro ed è una  $n$ -varietà.

## 2.4 Varietà differenziabili

*Osservazione 19.* Gli omeomorfismi sono isomorfismi anche per le varietà.

**Fatto 5.**  $S^n$  è omeomorfo a  $S^m$  se e solo se  $n = m$ , e  $S^n$  non è omeomorfo a  $\mathbb{P}^n$ , ma non è facile dimostrarlo.

Gli omeomorfismi e in generale le funzioni continue possono essere molto lontani dalla nostra intuizione di “continuo”:

**Esempio 9** (Curva di Peano). Esiste una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  continua e surgettiva.<sup>2</sup>

Dunque vogliamo definire degli oggetti che siano “più continui”.

**Definizione 45** (Differenziabilità in un punto).  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è differenziabile in  $x$  se esiste un'applicazione lineare  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  tale che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0$$

**Fatto 6.** Se  $L$  esiste è necessariamente unica.

**Definizione 46** (Differenziabilità in un insieme).  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è differenziabile in  $\Omega$  se è differenziabile in ogni suo punto.

**Definizione 47** (Funzione differenziale). Data una funzione differenziabile  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , la funzione  $df : \Omega \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \simeq \mathbb{R}^{nk}$  che manda  $x \mapsto L$  è il differenziale di  $f$ . Poiché il valore è una funzione, l'argomento si indica a pedice:  $d_x f$ .

**Osservazione 20.** Il differenziale è *functoriale*, ovvero:

- $d_x \text{id} = \text{id}$ ;
- $d_x(f \circ g) = d_{g(x)}f \circ d_x g$ ;

le quali implicano  $d_x(f^{-1}) = d_{f(x)}f$ .

**Osservazione 21.** Se il differenziale è differenziabile, posso costruire induttivamente  $d(df) = d^2f$ , e analogamente  $d(d^2f) = d^3f$  e così via.

**Definizione 48.**  $f$  è  $n$ -differenziabile se esiste  $d^n f$ .

**Definizione 49** (Funzione liscia).  $f$  è  $C^\infty$  o *liscia* se è  $k$ -differenziabile  $\forall k > 0$ .

**Fatto 7.** Dall'analisi reale sappiamo che  $f$  è  $C^\infty$  se tutte le derivate parziali esistono e sono continue.

**Definizione 50** (Diffeomorfismo).  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subseteq \mathbb{R}^k$  è un *diffeomorfismo* se è  $C^\infty$  ed è invertibile con inversa  $C^\infty$ .

<sup>2</sup>Ma non un omeomorfismo.

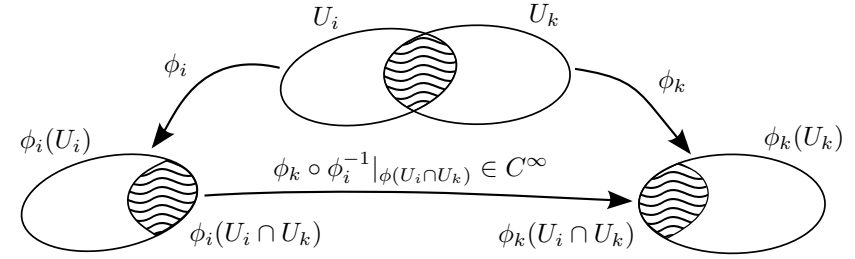


Figura 6: Un atlante è differenziabile se il passaggio da una rappresentazione a un'altra è liscio.

**Proposizione 54.** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è diffeomorfismo allora  $n = k$ , cioè la dimensione è un invariante per diffeomorfismo.

**Dimostrazione.** Sia  $g$  la funzione inversa di  $f$ . Allora  $g \circ f = \text{id}$  e  $f \circ g = \text{id}$ , in particolare vale che  $d(f \circ g) = df \circ dg = \text{id}$  (dall'analisi reale). Dunque valutando il differenziale in un punto ottengo che le due matrici che sono i differenziali della funzione  $f$  e della sua inversa sono una l'inversa dell'altra ma per avere un'inversa la matrice deve essere quadrata, dunque il diffeomorfismo conserva le dimensioni.  $\square$

**Definizione 51** (Atlante differenziabile). Un atlante è *differenziabile* se, per ogni coppia di carte  $(U_i, \phi_i)$ ,  $(U_k, \phi_k)$ , si ha che la funzione  $\phi_k \circ \phi_i^{-1}|_{\phi(U_i \cap U_k)}$  è liscia.<sup>3</sup>

**Osservazione 22.** La richiesta che i cambi di carta siano diffeomorfismi serve per garantire che la “liscezza” di una funzione (e della sua inversa per simmetria della definizione) sia indipendente dalle singole carte all'interno dello stesso atlante, in modo che abbia senso parlare di funzioni lisce (rispetto ad un atlante della varietà) senza far riferimento alle singole carte della varietà. Infatti siano  $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$  carte dello stesso atlante differenziabile di una varietà  $M$ . Sia  $f : M \rightarrow M$  un diffeomorfismo, che visto tramite le carte  $\phi$  diventa  $\phi_1 \circ f \circ \phi_2^{-1}$ . È ancora vero che  $\psi_1 \circ f \circ \psi_2^{-1}$  è un diffeomorfismo? Sì, perché si ha che

$$\psi_1 \circ f \circ \psi_2^{-1} = (\psi_1 \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ f \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \psi_2^{-1})$$

che è diffeomorfismo perché composizione di diffeomorfismi (grazie alle ipotesi fatte).

**Osservazione 23.** Se le carte non si intersecano l'atlante è differenziabile.

**Definizione 52** (Atlanti compatibili). Due atlanti differenziabili sulla stessa varietà sono *compatibili* se la loro unione è ancora un atlante differenziabile.

<sup>3</sup>Per simmetria, è in effetti un diffeomorfismo.

**Definizione 53** (Atlante massimale). Per una certa classe di atlanti compatibili, l'unione di tutti gli atlanti possibili è l'*atlante massimale*.

**Definizione 54** (Varietà differenziabile). Una varietà dotata di atlante differenziabile è una *varietà differenziabile* o *liscia*.

*Osservazione 24.* La struttura di varietà differenziabile si identifica con l'atlante massimale.

**Fatto 8.** Il prodotto di varietà differenziabili è differenziabile.

D'ora in poi chiameremo brevemente “varietà” le varietà lisce e quando vorremo specificare che non è liscia la chiameremo “varietà topologica”.

Data una varietà topologica esiste sempre un atlante differenziabile massimale? È unico? Sono domande a cui non risponderemo.

**Proposizione 55.** Lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n$  è una  $n$ -varietà differenziabile.

*Dimostrazione.* Mostriamo che l'atlante topologico  $\{(U_1, f_1), \dots, (U_{n+1}, f_{n+1})\}$  fornito precedentemente è in effetti un atlante differenziabile.

Ricordiamo che  $U_j$  è l'immagine tramite  $f_j^{-1}$  di  $\mathbb{R}^n$  identificato con il piano  $\Pi_j = \{x_j = 1\}$ , e che  $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  ha quest'espressione:

$$f_j([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left( \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_j} \right)$$

dove infatti si ha  $x_j \neq 0$  per  $[x] \in U_j$ . Conseguentemente avrò  $f_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  con:

$$f_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

Se adesso mi restringo all'intersezione  $U_j \cap U_i$  e considero la composizione:

$$\begin{aligned} f_j \circ f_i^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) &= f_j([\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, 1, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n]) = \\ &= \left( \frac{\xi_1}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_j}, \frac{1}{\xi_j}, \frac{\xi_{i+1}}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_{j-1}}{\xi_j}, \frac{\xi_{j+1}}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_j} \right) \end{aligned}$$

questa funzione è in effetti liscia.  $\square$

*Esercizio 6.* Si verifichi che anche  $S^n$  munito dell'atlante  $\{(S^n \setminus \{N\}, f_N), (S^n \setminus \{S\}, f_S)\}$ , citato precedentemente, è una  $n$ -varietà differenziabile.

**Definizione 55** (Carte  $f$ -adattate). Siano  $M, N$  varietà e  $f : M \rightarrow N$ . Due carte  $(U, \phi)$  e  $(W, \psi)$  rispettivamente di  $M$  e  $N$  sono  $f$ -adattate se  $f(U) \subseteq W$ .

**Definizione 56** ( $C^\infty$  su varietà). Con la stessa notazione della definizione precedente,  $f$  si dice  $C^\infty$  o *liscia* se  $\forall x \in M \exists (U_x, \phi), (W, \psi)$   $f$ -adattate tali che  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  è liscia. La funzione  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  è detta *rappresentazione locale* di  $f$ .

*Esercizio 7.* Se  $f$  è  $C^\infty$  lo sono anche tutte le sue rappresentazioni locali.

*Esercizio 8.*  $C^\infty$  su varietà  $\implies$  continua

**Definizione 57** (Diffeomorfismo su varietà). Una funzione tra varietà è un *diffeomorfismo* se è  $C^\infty$ , invertibile e con inversa  $C^\infty$ . Se tra due varietà esiste un diffeomorfismo, si dicono *diffeomorfe*.

*Osservazione 25.* Essere diffeomorfe è una relazione più debole della compatibilità tra atlanti.

*Esempio 10.* Considero lo spazio topologico  $M := (\mathbb{R}, \tau_E)$  e due funzioni da  $M$  a  $\mathbb{R}$ :

$$\phi_0 := \text{id}; \quad \phi_1(x) := \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

$\{(M, \phi_0)\}$  e  $\{(M, \phi_1)\}$  sono due atlanti differenziabili (banalmente perché costituiti da una sola carta), ma non sono compatibili: infatti  $\{(M, \phi_0), (M, \phi_1)\}$  non è un atlante differenziabile poiché  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1} = \phi_1$  che non è differenziabile in 0. Tuttavia le due varietà differenziabili sono diffeomorfe attraverso  $\phi_1$ , infatti  $\phi_0 \circ \phi_1 \circ \phi_1^{-1} = \text{id}$ , che evidentemente è differenziabile.

*Esempio 11.* Più in generale, sia  $f : M \rightarrow M_0$  omeomorfismo e  $\{(U_i, \phi_i)\}$  atlante differenziabile di  $M_0$ . Allora  $\{(f^{-1}(U_i), \phi_i \circ f)\}$  è un atlante differenziabile su  $M$  che rende  $f$  un diffeomorfismo.

## 2.5 Linearizzazioni di applicazioni lisce tra spazi euclidei

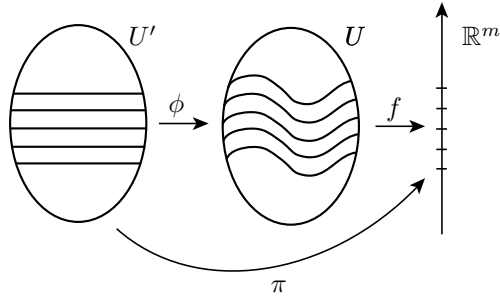
**Fatto 9** (Teorema della funzione inversa). Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  liscia con  $\Omega$  aperto e per un certo  $x \in \Omega$  sia  $d_x f$  invertibile. Allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  tale che  $f(U)$  è aperto e  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  è un diffeomorfismo.

In altre parole, restringendo  $f$  a un intorno aperto opportuno  $U$  di  $x$  in  $\Omega$ ,  $(U, f|_U)$  è una carta locale di  $\Omega$  intorno a  $x$ .

È interessante notare come questo teorema, a partire da un'informazione locale (in un punto), ci restituisce informazioni “localmente globali”.

Vediamo i teoremi della funzione implicita, che sono corollari di questo teorema. Definisco un *modello locale lineare*, ovvero una proiezione  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $n \geq m$  tale che  $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ . Noto che  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_x \pi$  è surgettivo (essendo  $d_x \pi = \pi$  per linearità di  $\pi$ ).

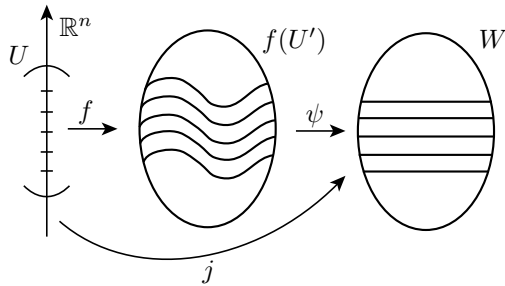
**Fatto 10** (Teorema della funzione implicita, versione surgettiva). Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  liscia con  $U$  aperto e per un certo  $x \in U$  sia  $d_x f$  surgettivo. Allora esiste un diffeomorfismo  $\phi : U' \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U$  con  $U'$  e  $\phi(U')$  aperti tale che  $f \circ \phi = \pi|_{U'}$ , cioè che fa commutare il diagramma:



In termini di varietà,  $\phi$  è una parametrizzazione locale di  $U$  intorno a  $x$ .

Similmente a prima definisco un modello locale lineare, stavolta una inclusione  $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $n \leq m$  tale che  $j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ . Noto che  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_x j$  è iniettivo (essendo  $d_x j = j$  per linearità di  $j$ ).

**Fatto 11** (Teorema della funzione implicita, versione iniettiva). Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  liscia con  $U$  aperto e per un certo  $x \in U$  sia  $d_x f$  iniettivo. Allora esistono un intorno aperto  $U'$  di  $x$  con  $f(U')$  aperto e un diffeomorfismo  $\psi : f(U') \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$  con  $W$  aperto tale che  $\psi \circ f = j|_{U'}$ , cioè che fa commutare il diagramma:



Ancora in termini di varietà,  $(f(U'), \psi)$  è una carta locale di  $f(U)$  intorno a  $f(x)$ .

**Proposizione 56.** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenziabile con  $d_x f$  invertibile ovunque. La composizione del differenziale  $df : \mathbb{R}^n \rightarrow GL_n$ , del determinante  $\det : GL_n \rightarrow \mathbb{R}_0$  e della funzione segno  $\text{sgn} : \mathbb{R}_0 \rightarrow \{\pm 1\}$  è una funzione costante.

*Dimostrazione.*  $\mathbb{R}^n$  è connesso e  $\text{sgn} \circ \det \circ df$  è composizione di funzioni continue, quindi continua.  $\square$

*Osservazione 26.* I diffeomorfismi hanno differenziale invertibile ovunque.

**Definizione 58.** Se  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\det d_x f > 0$ , si dice che  $f$  preserva l'orientazione.

## 2.5. LINEARIZZAZIONI DI APPLICAZIONI LISCE TRA SPAZI EUCLIDEI

*Osservazione 27.* Per la proposizione precedente basta valutare il segno di  $\det(d_x f)$  in un punto. Inoltre se  $f$  non preserva l'orientazione basterà comporla con

$$\tau : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, -x_n)$$

per ottenere una funzione che la preserva. Ci si potrà quindi restringere allo studio delle funzioni che preservano l'orientazione.

Adesso facciamo un teorema che intuitivamente vuol dire: preso un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  in sé stesso che preserva l'orientazione, possiamo deformarlo in modo liscio (“senza strappi”) fino a farlo diventare l'identità. Ma prima, un lemma utilissimo:

**Lemma 57** (Taylor dei geometri). Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  liscia con  $U$  aperto convesso,  $0 \in U$ ,  $f(0) = 0$ . Allora esistono  $n$  funzioni lisce  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  tali che  $f(x) = \sum_i x_i g_i(x)$ .

*Dimostrazione.* Lavorando componente per componente, ci restringiamo al caso  $k = 1$ . Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo:

$$f(x) = f(1 \cdot x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tx)) dt = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx) dt \right) x_i$$

Allora poniamo:

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx) dt$$

$\square$

**Teorema 58** (Linearizzazione dei diffeomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  a meno di isotopia). Gli autodiffeomorfismi euclidei che preservano l'orientazione sono diff-isotopi all'identità:

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ diffeomorfismo} \\ \forall x \in \mathbb{R}^n : \det(d_x f) > 0 \end{array} \right\} \implies \exists F : \begin{cases} F : \mathbb{R}^n \times [0; 1] \rightarrow [0; 1] \text{ liscia} \\ \forall t \in [0; 1] : F_t \text{ diffeomorfismo} \\ F_0 = f \\ F_1 = \text{id} \end{cases} \quad \text{dove } F_t := F|_{\mathbb{R}^n \times \{t\}}$$

*Dimostrazione.* Non costruiamo subito la  $F$ : esibiremo vari cammini del tipo di  $F$  ma che non collegano direttamente  $f$  a  $\text{id}$ ; la loro concatenazione darà  $F$ .

$\boxed{f \rightsquigarrow f(0) = 0}$  Sia  $x_0 := f(0)$ . Allora  $H(x, t) := f(x) - tx_0$  collega  $f = H_0$  a  $f' := H_1$  con  $f'(0) = 0$ , e  $H_t$  è sempre un diffeomorfismo. Per leggerezza di notazione diciamo che  $f(0) = 0$ .

$f \dashrightarrow d_0 f$  Per definizione,  $d_0 f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx)}{t}$ . Allora poniamo:

$$\tilde{F}(x, t) := \begin{cases} \frac{f(tx)}{t} & t \in [0; 1] \\ d_0 f(x) & t = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo che  $\tilde{F}$  è liscia. Applicando il Lemma 57 a  $f$  abbiamo  $\tilde{F}(x, t) = \sum_i x_i g_i(tx)$  per  $t \neq 0$ . Ma, osservando la forma esplicita delle  $g_i$ , vediamo che  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ , quindi l'uguaglianza si estende a  $t = 0$ .

$d_0 f \dashrightarrow B_1 \in \text{SO}_n$  Sia  $A$  la matrice di  $d_0 f$ , per ipotesi  $\det A > 0$ . Allora esiste un unico prodotto scalare definito positivo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  tale che le colonne  $A^i$  sono una base ortonormale; sia invece  $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$  quello canonico. Osserviamo che

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_t := (1 - t)\langle \cdot, \cdot \rangle_A + t\langle \cdot, \cdot \rangle_I \quad t \in [0; 1]$$

ci dà un cammino di prodotti scalari definiti positivi. Per ogni  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  applico Gram-Schmidt alle  $A^i$  ottenendo una base ortonormale  $\{B_t^1, \dots, B_t^n\}$  dove consideriamo le  $B_t^i$  come colonne di una matrice  $B_t$ . Basta dunque osservare che:

- le formule di Gram-Schmidt per le  $B_t^i$  sono lisce;
- $\det B_t > 0$ ;
- $B_0 = A$ ;
- $B_1 \in \text{SO}_n$ .

$B_1 \dashrightarrow \text{id}$  È geometricamente intuitivo collegare una matrice di  $\text{SO}_n$  all'identità.

Per concatenare questi cammini in modo liscio, basta prima comporre la variabile  $t$  con una funzione liscia  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1, \quad \forall k \geq 1 : \frac{d^k \varphi}{dt^k}(0) = \frac{d^k \varphi}{dt^k}(1) = 0.$$

Un esempio di tale funzione è:

$$\varphi(x) = \frac{\phi_{0,2}(x)}{\phi_{0,2}(x) + \phi_{-1,1}(x)}, \quad \phi_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & x \in (a; b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Sia ora  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  liscia con  $U$  aperto,  $0 \in U$ ,  $f(0) = 0$ . Espandiamo in serie la  $f$ :

$$f(x) = d_0 f(x) + x^T (H_0 f) x + R \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R}{\|x\|^2} = 0$$

Dove  $Hf$  è la matrice hessiana, che per le funzioni lisce è simmetrica:

$$(H_0 f)_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0) = (H_0 f)_{ji}$$

Se  $d_0 f \neq 0$ , siamo nelle ipotesi del teorema della funzione implicita, versione surgettiva. Allora esiste una parametrizzazione locale  $\psi$  tale che  $f \circ \psi(x) = x_1$ .

Supponiamo invece che  $d_0 f = 0$ . In questo caso  $f(x) = x^T (H_0 f) x + R$ .

**Definizione 59** (Punto critico). Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  liscia;  $x \in U$  si dice *punto critico* di  $f$  se  $d_x f = 0$ ; un punto critico si dice *non degenero* se  $H_x f$  è invertibile.

Supponiamo dunque che 0 sia un punto critico non degenero, cioè  $\det(H_0 f) \neq 0$ . Allora applichiamo il teorema di Sylvester alla matrice  $H_0 f$  (che è simmetrica e non singolare), avremo indici di positività e negatività  $i_+$  e  $i_- = n - i_+$  tali che:

$$\exists P \in \text{GL}_n : P^T (H_0 f) P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & i_- \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right. & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} =: J$$

**Definizione 60** (Indice del punto critico). Sia  $x$  punto critico non degenero di  $f$ ; chiamiamo *indice* di  $x$  l'indice di negatività di  $H_x f$ .

Sia  $Q_A(x) := x^T A x$  la forma quadratica associata a una matrice  $A$ , allora:

$$Q_H(x) = x^T (H_0 f) x$$

$$Q_J(x) = x_1^2 + \dots + x_{i_+}^2 - (x_{1+i_+}^2 + \dots + x_n^2)$$

$$f(x) = Q_H(x) + R$$

**Esercizio 9.** Sia  $\psi$  una parametrizzazione locale di  $U$  intorno a 0. Allora  $f \circ \psi$  ha un punto critico in  $\psi^{-1}(0)$  con lo stesso indice.

**Teorema 59** (Lemma di Morse). Sia  $f$  come sopra, allora esiste una parametrizzazione locale intorno all'origine che trasforma la  $f$  nella forma quadratica canonica del tipo di  $Q_J$ :

$$\left. \begin{matrix} f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ liscia} \\ U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ intorno di } 0 \\ 0 \text{ punto critico di indice } \lambda \\ f(0) = 0 \end{matrix} \right\} \implies \exists \psi, W, U' : \begin{cases} W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ intorno aperto di } 0 \\ U' \subseteq U \text{ intorno aperto di } 0 \\ \psi : W \rightarrow U' \text{ diffeomorfismo} \\ f \circ \psi(x) = - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2 \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Possiamo restringerci a  $U$  convesso, e applicare due volte il Lemma 57:

$$f(0) = 0 \rightarrow f(x) = \sum_i x_i g_i(x)$$

$$d_0 f \equiv 0 \rightarrow f(x) = \sum_{ij} b_{ij}(x) x_i x_j$$

Dove le  $b_{ij}$  sono lisce. Sia  $B$  la matrice di componenti  $b_{ij}$ , poiché la usiamo in una forma quadratica è **WLOG** simmetrica (in effetti dalla formula esplicita si vedrebbe che è già simmetrica). Essendo  $GL_n$  aperto, a meno di restringere ancora  $U$  le  $B(x)$  sono invertibili e hanno lo stesso indice di negatività di  $B(0) = H_0 f$ .

Applichiamo Gram-Schmidt alle  $B$ :

$$\forall x \in U \exists P(x) \in GL_n : P^T B P = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ & n - \lambda \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} =: J$$

Le formule di Gram-Schmidt sono lisce, quindi anche le  $P(x)$ .

Sia  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\varphi(x) := P(x)^{-1}x$ . Osserviamo che  $d_0 \varphi$  è invertibile, allora applichiamo il teorema della funzione inversa: intorno a 0,  $\varphi$  è un diffeomorfismo (restringendo il codominio). Abbiamo finalmente  $f = \varphi^T (P^T B P) \varphi = \varphi^T J \varphi$ .  $\square$

## 2.6 Funzioni a foruncolo

**Definizione 61** (Funzione a foruncolo). Dati  $b > a > 0$ , una funzione liscia  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  che dipende solo da  $|x|$  tale che

- $|x| \leq a \implies \lambda(x) = 1$ ;
- $a < |x| < b \implies 0 < \lambda(x) < 1$ ;
- $|x| \geq b \implies \lambda(x) = 0$

è detta *funzione a foruncolo* (o anche *partizione dell'unità di Paley-Littlewood*).<sup>4</sup>

*Osservazione 28.* Nei punti in cui  $|x| = a$  tutte le derivate sono nulle, dunque  $\lambda$  non è analitica.

<sup>4</sup>In fondo alla dimostrazione del Teorema 58 c'è un esempio di come costruire funzioni di questo tipo.

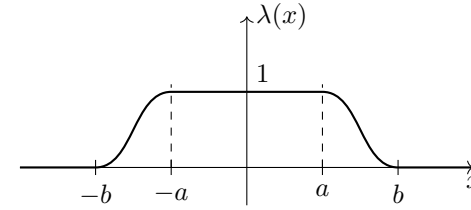


Figura 7: Funzione a foruncolo  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Le funzioni a foruncolo si usano per estendere funzioni lisce  $U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  a tutto  $\mathbb{R}^n$ : se il dominio contiene una palla, si moltiplica la funzione per una funzione a foruncolo che sia nulla fuori dalla palla.

## 2.7 Varietà con bordo

Per definire le varietà come oggetti che localmente somigliano a  $\mathbb{R}^n$ , abbiamo usato omeomorfismi locali con aperti di  $\mathbb{R}^n$ . Per definire le varietà con bordo, considereremo omeomorfismi locali con aperti di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  che abbia bordo. In particolare useremo il *semipiano superiore*:

$$\mathbb{H}^n := [0; \infty)^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : x_i \geq 0\}$$

**Definizione 62** (Diffeomorfismo fra sottoinsiemi arbitrari di  $\mathbb{R}^n$ ). Sia  $f : A \rightarrow B$  con  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $f$  è un *diffeomorfismo* se

- è un omeomorfismo;
- $\forall x \in A \exists (U_x, \phi)$  carta locale di  $\mathbb{R}^n$  tale che  $f|_{U \cap A} = \phi|_{U \cap A}$ .

**Definizione 63** (Varietà con bordo).  $M$  è una  $n$ -varietà con bordo se

- è uno spazio topologico  $T_2$  e 2-numerabile;
- è munito di atlante massimale  $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$  a valori in  $\mathbb{H}^n$ , cioè si ha  $\phi_\lambda : U_\lambda \rightarrow W_\lambda$  omeomorfismo con  $U_\lambda$  aperto di  $M$  e  $W_\lambda$  aperto di  $\mathbb{H}^n$ ;
- $\forall \mu, \lambda : \phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$  è un diffeomorfismo nel senso della Definizione 62.

**Definizione 64** (Bordo). Il *bordo* di una  $n$ -varietà con bordo  $M$  è costituito dai punti la cui immagine attraverso una carta è contenuta nella frontiera del semipiano superiore:

$$\partial M := \{x \in M \mid \exists (U_x, \phi) \text{ carta locale : } \phi(x) \in \mathcal{F} \mathbb{H}^n\}$$

$$\mathcal{F} \mathbb{H}^n = \mathbb{H}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists i : x_i = 0\}$$

Può essere  $\partial M = \emptyset$ , nel qual caso diciamo che  $M$  è senza bordo o *chiusa*.

**Esercizio 10.** Se un punto è di bordo per una carta, lo è per tutte le carte che lo contengono.

**Fatto 12.** Le nozioni di applicazione liscia e quindi di diffeomorfismo si estendono alle varietà con bordo.

Come abbiamo fatto con le varietà differenziabili, d'ora in poi chiameremo “varietà” le varietà con bordo. Comunque, le varietà non con bordo rientrano nel caso di varietà con bordo chiuse.

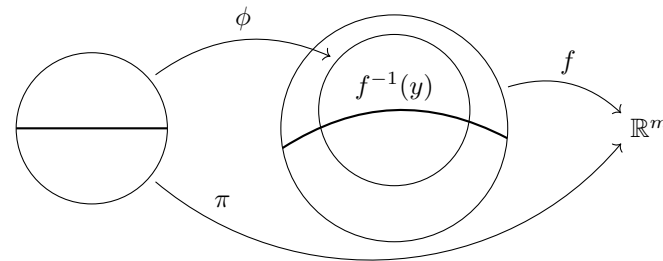


Figura 8:  $\phi^{-1}$  è una carta locale per  $f^{-1}(y)$  (“vede dritto”).

## 2.8 Sottovarietà

**Definizione 65** (Sottovarietà). Sia  $M$  una  $m$ -varietà chiusa e  $N \subseteq M$ .  $N$  è una *sottovarietà* di dimensione  $n \leq m$  se  $\forall x \in N$  esiste una carta locale  $\phi : U \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$  con  $\phi(U \cap N) = W \cap \mathbb{R}^n$ , dove  $\mathbb{R}^n$  è incluso in modo naturale in  $\mathbb{R}^m$ .

*Osservazione 29.* Una sottovarietà è una varietà.

Vediamo un esempio abbastanza generale di sottovarietà:

**Definizione 66** (Valore regolare). Sia  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  liscia con  $U$  aperto.  $y \in f(U)$  è un *valore regolare* per  $f$  se  $\forall x \in f^{-1}(y)$ ,  $d_x f$  è surgettivo.

**Proposizione 60.**  $y$  valore regolare  $\implies f^{-1}(y)$  sottovarietà di  $U$  di dimensione  $n - m$ .

*Dimostrazione.* Segue dal teorema della funzione implicita, versione surgettiva (vedi Figura 8).  $\square$

Usando l'ultima proposizione otteniamo  $S^n$  come sottovarietà di  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

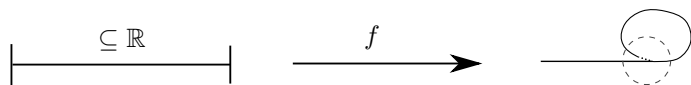
$$S^n = r^{-1}(1), \quad r(x) := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$$

Segue un risultato analogo con il differenziale iniettivo:

**Proposizione 61.** Se  $\forall x \in U : d_x f$  è iniettiva e  $f : U \rightarrow f(U)$  è un omeomorfismo, allora  $f(U)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^m$  con  $f$  diffeomorfismo.

*Dimostrazione.* Segue dal teorema della funzione implicita, versione iniettiva.  $\square$

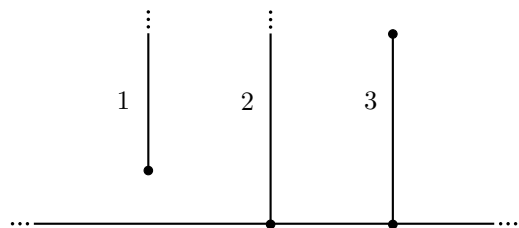
*Osservazione 30.* Nel teorema sopra l'ipotesi di omeomorfismo è necessaria! Come controesempio basta prendere:



Nel cerchio tratteggiato si ha il problema: ci sono 3 “rami”!

**Bordo** Nel caso di varietà non chiuse abbiamo tre modelli locali possibili al variare del domicilio di una  $n$ -sottovarietà contenuta in una  $m$ -varietà:

1. il bordo di  $\mathbb{H}^n$  non sta nel bordo di  $\mathbb{H}^m$ ;
2. il bordo sta nel bordo;
3. caso misto.



**Definizione 67** (Sottovarietà propria).  $N \subseteq M$  è *sottovarietà propria* se l'unico modello che si realizza è (2), ossia  $\partial N = N \cap \partial M$ .

## 2.9 Fibrato tangente

### 2.9.1 Modello locale

Si definisce di seguito il fibrato tangente di un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e altre nozioni ad esso connesse. Queste definizioni non saranno generali, poiché la teoria che si intende affrontare non si limita a sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ , esse però costituiranno il modello locale delle strutture più generali sulle varietà.

**Definizione 68** (Spazio totale). Si definisce *spazio totale del fibrato tangente* di un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$  l'insieme  $T(U) := U \times \mathbb{R}^n$ . Ogni  $x \in U$  è detto *punto* di  $U$  mentre ogni  $v \in \mathbb{R}^n$  è detto *vettore* di  $\mathbb{R}^n$ .

Si nota che, fissato un  $x$  punto di  $U$ , la traslazione  $v \mapsto v + x \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$  consente di identificare  $\mathbb{R}^n$  con lo spazio dei vettori tangenti a  $U$  nel punto  $x$ .

**Definizione 69** (Proiezione naturale). Si definisce *proiezione naturale*  $\pi_U : T(U) \rightarrow U$  la mappa  $(x, v) \mapsto x$ .

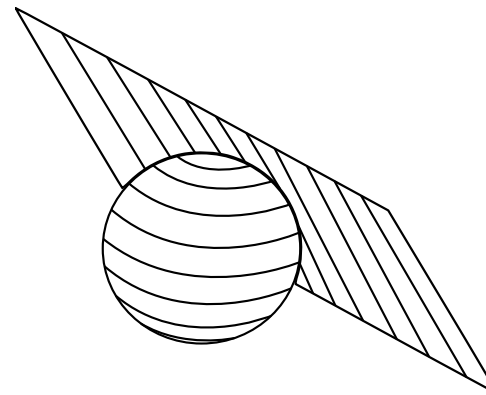


Figura 9: Esempio di fibrato tangente.

Nella precedente definizione l'aggettivo *naturale* serve solamente a specificare che la mappa cui ci si riferisce è quella indotta dalla definizione come prodotto. In seguito ci si riferirà ad essa anche solo come proiezione.

**Definizione 70** (Fibrato tangente). La coppia  $(T(U), \pi_U)$  è il *fibrato tangente* con spazio di base  $U$ .

**Definizione 71** (Fibra). Si definisce *fibra* la controimmagine di un punto tramite la proiezione naturale, e si scrive  $T_x U = \pi_U^{-1}(x)$ .

Alla luce di quest'ultima definizione si identificano:

- $T_x U = \{x\} \times \mathbb{R}^n = \{(x, v) \in T(U) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$
- $T(U) = \bigsqcup_{x \in U} T_x U$

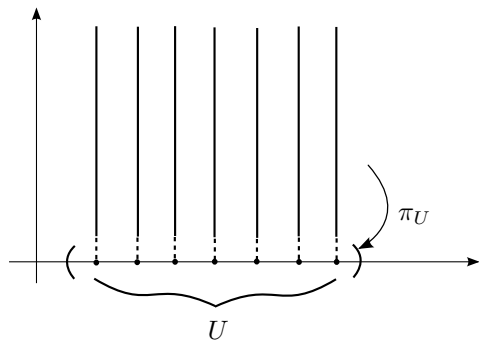
Cioè si identifica la fibra come lo spazio tangente del punto  $x$ , quindi lo spazio dei vettori applicati, mentre l'intero fibrato come unione disgiunta delle fibre.

**Definizione 72** (Applicazione tangente). Data un'applicazione liscia tra aperti  $f : U \rightarrow W$  si definisce l'*applicazione tangente* di  $f$  la funzione  $Df : T(U) \rightarrow T(W)$  che manda  $(x, v) \mapsto (f(x), d_x f(v))$ .

*Osservazione 31.* L'applicazione tangente fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} T(U) & \xrightarrow{Df} & T(W) \\ \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi_W \\ U & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$



Figura 10: Esempio di proiezione naturale di  $U$ .

*Osservazione 32.* L'applicazione tangente manda fibre in fibre in modo lineare, poiché  $\forall x \in U \quad d_x f : T_x U \rightarrow T_x W$ , e il differenziale è un'applicazione lineare per definizione. L'applicazione tangente gode inoltre delle seguenti proprietà:

- è un'applicazione liscia in tutte le sue variabili (infatti  $f$  è liscia e  $d_x f$  è liscia perché lineare);
- è functoriale:  $D(g \circ f) = Dg \circ Df$ ,  $D(\text{id}) = \text{id}$ ;
- se  $f$  è un diffeomorfismo anche  $Df$  è un diffeomorfismo e manda fibra in fibra attraverso isomorfismi lineari.

**Definizione 73** (Applicazioni fibrato). Un'applicazione che ha la proprietà di  $Df$  di mandare fibra in fibra in modo lineare è detta applicazione *fibrato*.

Se  $f$  è un diffeomorfismo si ha che  $Df$  è quindi un diffeomorfismo fibrato (come si è già enunciato tra le proprietà di  $Df$ ).

### 2.9.2 Caratterizzazione differenziale di $T_x U$

Di seguito sarà esposta una caratterizzazione più intrinseca delle definizioni che sono state nella sezione precedente.

**Definizione 74** (Spazio dei germi). Dato un punto  $x \in U$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ , si definisce *spazio dei germi*  $\mathcal{E}_x$  l'insieme delle funzioni lisce da un intorno aperto di  $x$  in  $U$  a valori in  $\mathbb{R}$ , quozientato con la seguente relazione di equivalenza:

$$(f_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}) \sim (f_2 : W_2 \rightarrow \mathbb{R}) : \Leftrightarrow \exists W_3 \subseteq W_1 \cap W_2 : \begin{cases} W_3 \text{ intorno aperto di } x \\ f_1|_{W_3} = f_2|_{W_3} \end{cases}$$

Lo spazio dei germi  $\mathcal{E}_x$  ha una naturale struttura di  $\mathbb{R}$ -algebra, cioè:

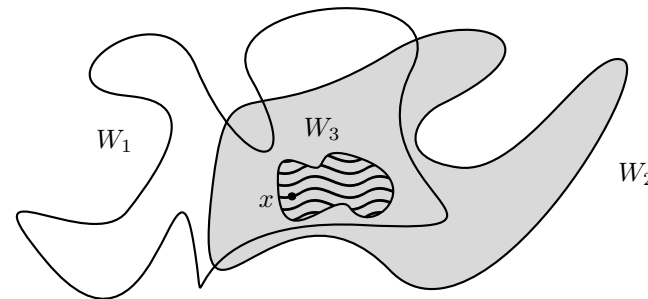


Figura 11: Un germe è definito da ciò che accade in un intorno del punto.

- è un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale;
- è munito di un prodotto (in questo caso commutativo).

Per verificarlo è sufficiente mostrare che la somma e il prodotto di due germi è un germe fissato, indipendentemente dai rappresentanti scelti.

*Osservazione 33.* Si ha che lo spazio  $\mathcal{E}_x$  non dipende dall'aperto  $U$ , che costituisce in questo caso la struttura locale, infatti è caratterizzato dalle proprietà locali.

**Definizione 75** (Derivata direzionale). Dato  $v \in T_x U$  la *derivata direzionale* lungo il vettore  $v$  nel punto  $x$  è un'applicazione lineare sullo spazio dei germi definita nel modo seguente:

$$\delta_v : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathbb{R} \\ [f] \mapsto \sum_j v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$$

Dove i  $v^j$  sono le componenti del vettore  $v$  nella base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

*Osservazione 34* (Proprietà della derivata direzionale). Si verifica facilmente che la derivata direzionale, in un punto  $x$  fissato, ha le seguenti proprietà:

- è ben definita (cioè non dipende dal rappresentante del germe);
- è  $\mathbb{R}$ -lineare;
- ha la proprietà di Leibniz:

$$\delta_v(f \circ g) = f(x)\delta_v(g) + g(x)\delta_v(f)$$

Che si riassumono dicendo che  $\delta_v$  è una *derivazione* su  $\mathcal{E}_x$  (questa definizione corrisponde agli ultimi due punti).

Si ha dunque che, sempre fissato il punto  $x$ , è definita la funzione  $\delta : T_x U \rightarrow \text{Der}(\mathcal{E}_x)$  che manda  $v \mapsto \delta_v$ , dove  $\text{Der}(\mathcal{E}_x)$  è lo spazio delle derivazioni su  $\mathcal{E}_x$ .

**Lemma 62.** *L'applicazione  $\delta$  è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

*Dimostrazione.* Si verificano le proprietà di un isomorfismo singolarmente:

**Linearità** È evidente dalla definizione.

**Iniettività** Il nucleo di  $\delta$  è  $\{0\}$ , infatti la derivazione nulla è quella in cui  $v^j = 0 \forall j$ .

**Suriettività** Per prima cosa si osserva che, detta  $d$  una derivazione e  $c$  un germe costante in un intorno,  $d(c) = d(1 \cdot c) = d(1) \cdot c + d(c) = d(c) + d(c) = 2d(c) \rightarrow d(c) = 0$ .

Si deve verificare che  $\forall d \in \text{Der}(\mathcal{E}_x) \exists v \in T_x U$  t.c.  $d = \delta_v$ . Senza perdita di generalità posso assumere di studiare le derivazioni attorno allo 0 (altrimenti agisco per traslazione). Segue che per studiare una derivazione posso limitarmi a vedere cosa succede se gli do in pasto funzioni  $f$  tali che  $f(0) = 0$ . Inoltre poiché  $f$  è un germe si può restringere a piacere il dominio fino a renderlo convesso. Siamo adesso nelle ipotesi del Lemma 57: posso scrivere

$$f = \sum_i x^i \cdot h_i(x)$$

Per Leibniz e linearità vale

$$d(f) = \sum_i d(x \mapsto x^i) \cdot h_i(0) + 0 \cdot d(h_i) \sum_i h_i(0) d(x \mapsto x^i)$$

Il vettore  $v$  cercato è definito per componenti  $v^j = d(x \mapsto x^j)$ . La verifica che  $\forall f \in \mathcal{E}_x$  vale  $\delta_v(f) = d(f)$  è lasciata al lettore (è un banale conto).  $\square$

**Osservazione 35.** Sia  $\phi : U \rightarrow W$  un'applicazione liscia, e  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  un'altra applicazione liscia. Allora  $\delta_v : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathbb{R}$  ha la seguente proprietà:

$$\delta_v(f \circ \phi) = \delta_{d_x \phi(v)}(f)$$

### 2.9.3 Costruzione del fibrato tangente su varietà

Si vogliono ora estendere le definizioni date a generiche varietà. Sia dunque  $M$  una  $n$ -varietà con atlante massimale  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ .

**Osservazione 36.** Dato un cambiamento di carte  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  si ha che esso è una funzione tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  ed è perciò definita l'applicazione tangente:

$$D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) : (x, v) \mapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x), d_x(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(v))$$

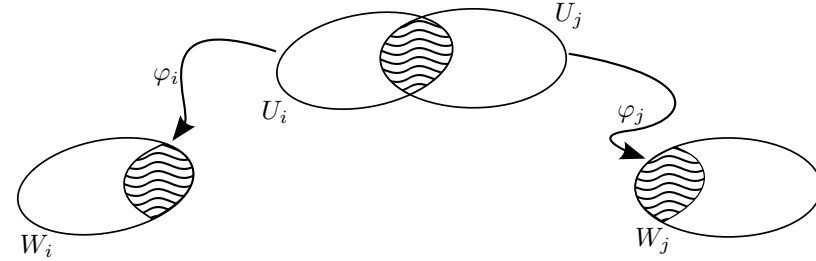


Figura 12: Cambiamento di carte su cui si definisce il cociclo.

Si considerano ora le applicazioni  $\mu_{ji}$  definite come segue:

$$\begin{aligned} \mu_{ji} : U_i \cap U_j &\rightarrow \text{GL}_n \\ x &\mapsto d_{\phi_i(x)}(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) \end{aligned}$$

**Osservazione 37** (Proprietà delle  $\mu_{ji}$ ). Si ha che le funzioni ora definite hanno le seguenti proprietà:

- ogni  $\mu_{ji}$  è liscia;
- $\forall i$  si ha che  $\mu_{ii} : U_i \rightarrow \text{GL}_n$  ha come immagine  $\{\text{id}\}$ ;
- $\mu_{ji}(x) = \mu_{ij}(x)^{-1}$ ;
- $\forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$  si ha che  $\mu_{ij}(x)\mu_{jk}(x)\mu_{ki}(x) = \text{id}$ .

Una famiglia di funzioni che verifica le ultime tre proprietà è detta *cociclo*.

Un cociclo è una *colla* che incolla le fibre.

R.Benedetti

Procediamo ora con la costruzione del fibrato tangente su  $M$ . Definiamo lo spazio topologico  $T := M \times \mathbb{R}^n \times I$ . Questo è uno spazio topologico in quanto prodotto di spazi topologici (si intenda  $I$  con la topologia discreta).<sup>5</sup> Sia ora  $T' := \{(x, v, i) \in T \mid x \in U_i\}$ . Si pensi a  $T'$  come uno spazio topologico munito della topologia di sottospazio.

<sup>5</sup>Lo spazio topologico  $T$ , dato che  $M$ ,  $\mathbb{R}^n$  e  $I$  sono  $T_2$  è  $T_2$ . Non è invece 2-numerabile non essendolo  $I$ . Vediamo che  $I$  non è 2-numerabile: Preso infatti un aperto, possiamo scegliere un punto  $x_0$  in questo. Tramite una carta a caso  $\phi_i$  rimbalziamo il problema in una nostra copia di  $\mathbb{R}^n$ . Qui possiamo prendere la famiglia (non numerabile, per esempio una per ogni raggio maggiore di zero) di palle aperte concentriche su  $x_0$ . Le controimmagini  $\phi_i^{-1}(B_r(x_0))$  sono aperti nell'aperto originario e la restrizione di  $\phi$  a ognuno di questi aperti è una legittimissima carta, dunque sta nell'atlante massimale dunque l'insieme degli indici non potrà essere numerabile. Questo non ci spaventa in quanto i trattamenti successivi risolveranno il problema.

*Osservazione 38.*  $T'$  è unione disgiunta degli aperti  $U_i \times \mathbb{R}^n$ .

Si definisca ora la relazione di equivalenza  $\sim$  su  $T'$  tale che<sup>6</sup>:

$$(x, v, i) \sim (x', v', j) :\leftrightarrow x' = x \wedge v' = \mu_{ji}(x)v$$

Definiamo  $T(M) := T'/\sim$  dotato della topologia quoziente. Chiamiamo  $q$  la proiezione di  $T'$  su  $T(M)$ .

Si dovrebbe ora verificare che  $T(M)$  è 2-numerabile e  $T_2$ . La seconda è banale avendo operato sempre con spazi  $T_2$  e passando la proprietà attraverso le operazioni fatte. La prima non la dimostriamo.

Definiamo ora la funzione  $\pi_M : T(M) \rightarrow M$  tale che  $\pi_M([(x, v, i)]) = x$ .

**Proposizione 63.** *La mappa  $\pi_M$  è continua.*

*Dimostrazione.* Se  $A \subseteq M$  è un aperto allora  $(\pi_M \circ q)^{-1}(A)$  è l'intersezione di  $T'$  con  $A \times \mathbb{R}^n \times I$  che è un aperto. Questo, dato che gli aperti in  $T(M)$  erano gli insiemi la cui controimmagine attraverso  $q$  è aperta, ci dice che  $\pi_M^{-1}(A)$  è effettivamente aperto in  $T(M)$ .  $\square$

Ora bisogna collegare quanto abbiamo definito con la struttura tangente su  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 76** (Banalizzazioni locali). Una banalizzazione locale di  $T(M)$  è una mappa  $\Psi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow T(M)$  tale che  $\Psi_i(x, v) = [(x, v, i)]$ .

*Osservazione 39.*

- Le  $\Psi_i$  sono funzioni continue perché  $q$  è continua;
- $(\pi_M \circ \Psi_i)(x, v) = x$  per ogni  $x \in U_i$ , cioè commuta il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \pi_M^{-1}(U_i) & \xleftarrow{\Psi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi_M & \downarrow p \\ & & U_i \end{array}$$

**Proposizione 64.**  $\Psi_i$  è un omeomorfismo fra  $U_i \times \mathbb{R}^n$  e  $\pi_M^{-1}(U_i)$ .

*Dimostrazione.*  $\Psi_i$  è surgettiva perché se  $\pi_M([(x, v, k)]) \in U_i$  allora  $\Psi_i(x, \mu_{ki}(x)v) = [(x, \mu_{ki}(x)v, i) \sim (x, v, k)]$ .  $\Psi_i$  è chiaramente iniettiva. È dunque invertibile. Basta dimostrare che è una mappa aperta ovvero preso  $A$  aperto in  $U_i \times \mathbb{R}^n$  che  $A_i :=$

<sup>6</sup>  $\sim$  è effettivamente una relazione di equivalenza grazie alle proprietà del cociclo. In particolare:

- $\mu_{ii}(x) = \text{id} \implies a \sim a$
- $\mu_{ik}(x)\mu_{ki}(x) = \text{id} \implies (a \sim b \iff b \sim a)$
- $\mu_{ij}(x)\mu_{jk}(x)\mu_{ki}(x) = \text{id} \implies ((a \sim b \wedge b \sim c) \implies a \sim c)$

$\Psi_i(A)$  è aperto. Data la topologia quoziente di  $T(M)$  basterà mostrare che  $q^{-1}(A_i)$  è aperto in  $T'$ . Ma la famiglia di insiemi  $\{(U_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\})\}$  sono un ricoprimento aperto di  $T'$  e per ogni  $k$  l'insieme

$$q^{-1}(A_i) \cap (U_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\}) = q^{-1}(A_i) \cap ((U_i \cap U_k) \times \mathbb{R}^n \times \{k\})$$

è un aperto: infatti su quest'ultima intersezione  $q = \Psi_i \circ r$  cioè commuta il diagramma

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_k) \times \mathbb{R}^n \times \{k\} & \xrightarrow{r} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow q & \downarrow \Psi_i \\ & & T(M) \end{array}$$

dove  $r$  è l'applicazione continua definita come:

$$\begin{aligned} r : T' &\rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n \\ (x, v, k) &\mapsto (x, \mu_{ik}(x)v) \end{aligned}$$

dunque abbiamo

$$q^{-1}(A_i) = q^{-1}(\Psi_i(A)) = q^{-1}(\Psi_i(r(r^{-1}(A)))) = q^{-1}(q(r^{-1}(A)))$$

con  $q, q^{-1}, r^{-1}$  mappe aperte.  $\square$

Dotiamo ora  $T(M)$  di un atlante differenziale.

**Definizione 77** (Carte di  $T(M)$ ).  $\Phi_i : \Psi(U_i \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \phi(U_i) \times \mathbb{R}^n$  definita come  $\Phi_i(\Psi((x, v))) := (\phi_i(x), v)$  è una carta locale di  $T(M)$ . L'insieme  $\{(\Psi(U_i \times \mathbb{R}^n), \Phi_i)_{i \in I}\}$  è un atlante di  $T(M)$ .

Componendo tutto a dovere si può controllare che, grazie all'azione dell'cociclo sui vettori, le mappe di transizione:

$$K_{ij} : \Phi_j(\Psi_j(U_j \times \mathbb{R}^n)) \rightarrow \Phi_i(\Psi_i(U_i \times \mathbb{R}^n))$$

sono proprio:

$$K_{ij}((x, v)) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), \mu_{ij}(\phi_j^{-1}(x))v) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(x)v)$$

Che è proprio quello che volevamo!

Non rimane ora che sollevare la definizione di applicazione tangente da aperti di  $\mathbb{R}^n$  al livello delle varietà.

**Definizione 78** (funzione tangente). La funzione tangente ad  $f : U \rightarrow W$  è la  $Df : T(U) \rightarrow T(W)$  che fa commutare il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Df'} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & & \\
 (\phi_i, \text{id}_{\mathbb{R}^n}) \uparrow & \nwarrow \Phi_i & \nearrow \Phi_j & \uparrow (\phi_j, \text{id}_{\mathbb{R}^n}) & \\
 U_i \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Psi_i} & T(U) & \xrightarrow{Df} & T(W) \xleftarrow{\Psi_j} U_j \times \mathbb{R}^n \\
 \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi_W & & \\
 U & \xrightarrow{f} & W & & \\
 \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_j & & \\
 \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f'} & \phi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^n & & 
 \end{array}$$

Indicando con  $f'$  la composizione attraverso le mappe di  $f$  e sollevandola alla sua funzione tangente  $Df'$  (cosa già ben definita nella lezione precedente) e ricalandola attraverso le mappe a  $Df$ .

## 2.10 Fibrati

**Definizione 79** (gruppo di Lie). Si dice *gruppo di Lie* un gruppo che è anche una varietà liscia e dove sia la moltiplicazione che la funzione che associa ad ogni elemento il suo inverso sono applicazioni lisce (esempi:  $\text{GL}(n)$  e  $G$  finito con  $\tau_D$  sono gruppi di Lie).

**Definizione 80** (automorfismi lisci). Data  $F$  una varietà liscia sia  $\text{Aut}(F) := (\{f : F \rightarrow F \mid f \text{ diffeomorfismo}\}, \circ)$  il gruppo degli automorfismi lisci di  $F$ .

Sia  $G \subseteq \text{Aut}(F)$  un sottogruppo che agisce su  $F$  mediante l'azione

$$\begin{aligned}
 G \times F &\rightarrow F \\
 (g, f) &\rightarrow g(f)
 \end{aligned}$$

**Definizione 81** (fibrato). Per costruire il *fibrato* ripetiamo parola per parola la costruzione di  $T(M)$  sostituendo  $F$  a  $\mathbb{R}^n$  e  $G$  a  $\text{GL}(n)$  ottenendo un *fibrato*  $\pi : E \rightarrow M$  che viene detto di *gruppo strutturale*  $G$  e *fibra (tipica)*  $F$ .

**Osservazione 40.**  $E$  è una varietà di dimensione  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(M)$ .  $\pi$  è liscia ed è localmente un prodotto di fibra  $F$  grazie alla banalizzazione locale

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \times F \supseteq (W_i, F) & \xleftarrow{(\phi, \text{id})} & U_i \times F \xrightarrow{\Psi_i} \pi^{-1}(U_i) \\
 & & \downarrow p_i \quad \quad \downarrow \pi \\
 & & U_i \hookrightarrow M
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times F \\
 (x, f) &\mapsto (x, \mu_{ji}(x)[f])
 \end{aligned}$$

**Definizione 82.** Se per qualche  $k$  ho  $G = \text{GL}(k, \mathbb{R})$  e  $F = \mathbb{R}^k$  si ottengono i cosiddetti *fibrati vettoriali reali* di rango  $k$ .

Se invece  $F = G$  e ho  $R_g$  (la *rappresentazione regolare*, cioè quella definita dall'azione di  $G$  su se stesso mediante la moltiplicazione a destra) si ottengono i *fibrati principali* di gruppo strutturale  $G$ .

## 2.11 Fatti di algebra lineare

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$ .

Sia  $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R})$  lo *spazio duale* di  $V$  e  $V^{**} := (V^*)^* = \text{Hom}(V^*, \mathbb{R})$  il *biduale*.

Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$  e  $\mathcal{B} = \{v^1, \dots, v^n\}$  base di  $V^*$  dove  $v^j(v_i) = \delta^j_i$ .

Poiché esiste un isomorfismo canonico

$$\begin{aligned}
 \varphi : V &\rightarrow V^{**} \\
 v &\mapsto f_v : V^* \rightarrow \mathbb{R} \\
 f_v(\psi) &= \psi(v)
 \end{aligned}$$

d'ora in poi con un piccolo abuso identificheremo  $V$  con  $V^{**}$ .

**Definizione 83** (tensori).

$$T_h^k(V) := V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes h} := \text{Mult}((V^*)^k \times V^h, \mathbb{R})$$

Un elemento  $t \in T_h^k(V)$  è detto *tensore* di tipo  $(k, h)$  su  $V$ .

*Esempio 12.*  $T_0^0(V) = \mathbb{R}$ ,  $T_1^0(V) = V^*$ ,  $T_0^1(V) = V^{**} = V$ .

Un prodotto scalare è un  $t \in T_2^0(V) = \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$  con  $t$  simmetrico.

**Osservazione 41.** Esiste un isomorfismo canonico

$$\begin{aligned}
 \varphi : \text{End}(V) &\rightarrow T_1^1(V) = \text{Bil}(V^* \times V, \mathbb{R}) \\
 f &\mapsto ((\psi, v) \mapsto \psi(f(v)))
 \end{aligned}$$

**Definizione 84** (basi  $\mathcal{B}_h^k$ ). Abbiamo visto che una base  $\mathcal{B}$  determina una base duale  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1^0$ , vorremmo generalizzare questo fatto ad un qualsiasi  $(k, h)$  costruendo una

base  $\mathcal{B}_h^k$  di  $T_h^k(V)$ . Cominciamo con  $T_2^0(V)$ .

Si definisce in modo canonico l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned}\Phi : V^* \times V^* &\rightarrow T_2^0(V) \\ (\phi, \psi) &\mapsto ((v, w) \mapsto \phi(v)\psi(w))\end{aligned}$$

Utilizzeremo la notazione  $\Phi(\phi, \psi) = \phi \otimes \psi$  e chiameremo gli elementi del tipo  $\phi \otimes \psi$  *tensori decomponibili* di  $T_2^0(V)$ .

Si verifica che la funzione  $\Phi$  ha le seguenti proprietà:

- Data una base e la base duale  $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$  allora  $\mathcal{B}_2^0 = \{v^i \otimes v^j\}_{i,j=1,\dots,n}$  è una base di  $T_2^0(V)$ .
- (*proprietà universale*) Per ogni applicazione bilineare  $g : V^* \times V^* \rightarrow Z$  esiste un'unica applicazione lineare  $G : T_2^0(V) \rightarrow Z$  tale che  $g = G \circ \Phi$ . Infatti  $G$  è univocamente determinata dalla relazione  $G(v^i \otimes v^j) = g(v^i, v^j)$ .

Lo stesso argomento si può ripetere per  $T_0^2(V)$  e in generale per  $T_h^k(V)$  ottenendo le basi

$$\mathcal{B}_h^k = \{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h}\}$$

## 2.12 Richiami della scorsa lezione

Sia  $M$  una varietà differenziabile con atlante massimale  $\{(U_i, \phi_i)\}$  e sia  $\{\mu_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$  un cociclo a valori in un gruppo  $G \subseteq \text{Aut}(F)$  (con  $F$  varietà liscia). Ripetendo la costruzione usata per realizzare il fibrato tangente  $T(M)$  (per cui s'era usato  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$  e  $F = \mathbb{R}^n$ ,  $n = \dim M$ ), ottengo un fibrato  $E \xrightarrow{\pi} M$  di fibra  $F$  e gruppo strutturale  $G$ .

## 2.13 Altri fibrati su $M$

Vogliamo innanzitutto definire i *fibrati tensoriali* su  $M$ .

Si ricorda dalla scorsa lezione che dato  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  di dimensione  $n$ , chiamando  $V^*$  il suo duale e identificando  $V^{**}$  con  $V$  (in virtù dell'isomorfismo canonico tra di essi), i corrispondenti spazi tensoriali sono definiti come:

$$T_h^k(V) := V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes h} := \text{Mult}((V^*)^k \times V^h, \mathbb{R})$$

*Osservazione 42.*  $T_0^0(V) = \mathbb{R}$ ,  $T_1^0(V) = V^*$ ,  $T_0^1(V) = V^{**} = V$

Inoltre, data  $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$ , posso costruire  $\mathcal{B}_h^k$  base di  $T_h^k(V)$ : sia innanzitutto  $\mathcal{B}^* = \{v^i\}_{i \leq n}$  la base duale di  $\mathcal{B}$ . Allora:

$$\mathcal{B}_h^k = \mathcal{B}^{\otimes k} \otimes (\mathcal{B}^*)^{\otimes h} := \left\{ v_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_h} := v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h} \right\}_{i_l, j_m \leq n}$$

Dunque  $\dim T_h^k(V) = n^{k+h}$  e dare una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  stabilisce un isomorfismo (non canonico) tra  $T_h^k(V)$  e  $T_{h'}^{k'}(V)$  quando  $k+h = k'+h'$ .

Un  $t \in T_h^k(V)$  è detto *tensore di tipo*  $(k, h)$  su  $V$  e si esprime in termini di  $\mathcal{B}_h^k$  come:

$$t = t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} v_{j_1 \dots j_h}^{j_1 \dots j_h}$$

Dove gli indici ripetuti si intendono sommati, e i  $t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$  sono le coordinate di  $t$  rispetto a  $\mathcal{B}_h^k$ . Ha dunque senso chiedersi che forma abbiano i cambi di coordinate in  $T_h^k(V)$ : siano  $\mathcal{B} = v_i$ ,  $\mathcal{B}' = w_i$  basi di  $V$  (e  $\mathcal{B}_h^k, \mathcal{B}'_h^k$  le basi corrispondenti di  $T_h^k(V)$ ), e sia  $A$  la matrice di cambio di base (in  $V$ ) corrispondente, ovvero  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$ .

Innanzitutto, per quanto riguarda il cambio di base in  $V^*$ , abbiamo

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'^*}^{\mathcal{B}^*}(\text{id}_{V^*}) = \left( \mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}'^*}(\text{id}_{V^*}) \right)^{-1} = (A^t)^{-1}$$

*Osservazione 43.* L'applicazione  $A \mapsto (A^t)^{-1}$  è, coefficiente per coefficiente, funzione razionale dei coefficienti. Inoltre, è un automorfismo di  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ .

Sia ora  $B = (A^t)^{-1}$ , e siano i loro coefficienti  $A = (a_{si})$ ,  $B = (b^{rj})$ , cosicché  $v_i = a_{si}w_s$  e  $v^j = b^{rj}w^r$ . Allora:

$$\begin{aligned}t &= t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} v_{j_1 \dots j_h}^{j_1 \dots j_h} = t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h} = \\ &= t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} a_{s_1 i_1} w_{s_1} \otimes \dots \otimes a_{s_k i_k} w_{s_k} \otimes b^{r_1 j_1} w^{r_1} \otimes \dots \otimes b^{r_h j_h} w^{r_h} = \\ &= t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} a_{s_1 i_1} \dots a_{s_k i_k} b^{r_1 j_1} \dots b^{r_h j_h} w_{s_1} \otimes \dots \otimes w_{s_k} \otimes w^{r_1} \otimes \dots \otimes w^{r_h} = \\ &= t'_{r_1 \dots r_h}^{s_1 \dots s_k} w_{s_1 \dots s_k}^{r_1 \dots r_h}\end{aligned}$$

Dunque, indicando i prodotti  $a_{s_1 i_1} \dots a_{s_k i_k}$  e  $b^{r_1 j_1} \dots b^{r_h j_h}$  con  $a_{i_1 \dots i_k}^{s_1 \dots s_k}$  e  $b_{r_1 \dots r_h}^{j_1 \dots j_h}$ , otteniamo:

$$t'_{r_1 \dots r_h}^{s_1 \dots s_k} = a_{i_1 \dots i_k}^{s_1 \dots s_k} b_{r_1 \dots r_h}^{j_1 \dots j_h} t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k}$$

Il cambio di coordinate resta dunque una funzione razionale nei coefficienti di  $A$ .

Ora, sia  $\rho_h^k : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(T_h^k(\mathbb{R}^n))$  l'applicazione che manda cambi di coordinate in cambi di coordinate corrispondenti:  $A \mapsto A_h^k$ , dove  $A_h^k$  è la trasformazione lineare  $t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} \mapsto a_{i_1 \dots i_k}^{s_1 \dots s_k} b_{r_1 \dots r_h}^{j_1 \dots j_h} t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k}$ , ovvero quella che ha coefficienti  $(a_{i_1 \dots i_k}^{s_1 \dots s_k} b_{r_1 \dots r_h}^{j_1 \dots j_h})$ .

Avendo su  $M$  il fibrato tangente  $T(M)$  definito dal cociclo  $\{\mu_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)\}$ , il cociclo  $\{(\mu_h^k)_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(T_h^k(\mathbb{R}^n))\}$ , dove

$(\mu_h^k)_{ij} = \rho_h^k \circ \mu_{ij}$ , definisce un fibrato  $T_h^k(M) \xrightarrow{\pi_h^k} M$  di fibra  $T_h^k(\mathbb{R}^n)$ , e si ha  $(\pi_h^k)^{-1}(x) = T_h^k(T_x M)$ .

**Definizione 85** (Fibrato Tensoriale).  $T_h^k(M)$  è detto *fibrato tensoriale* di tipo  $(k, h)$  su  $M$ .

In particolare,  $T_1^0(M) =: T^*(M)$  è detto *fibrato cotangente*.

*Osservazione 44.* Un fibrato tensoriale di tipo  $(k, h)$  è sempre un fibrato vettoriale di rango  $n^{k+h}$ .

Vediamo altri esempi di fibrati, realizzabili a partire dal cociclo  $\{\mu_{ij}\}$  del fibrato tangente.

**Definizione 86** (Fibrato delle basi). Il fibrato principale  $B \xrightarrow{\hat{\pi}} M$  di gruppo  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  (ovvero quello che ha per fibra  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  stesso) costruito mediante il cociclo  $\{\mu_{ij}\}$  è detto *fibrato delle basi* su  $M$ .

Infatti,  $\hat{\pi}^{-1}(x) (\simeq \{x\} \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$  è l'insieme delle basi di  $T_x M (\simeq \{x\} \times \mathbb{R}^n)$ .

*Osservazione 45.*  $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$  e  $\mathrm{sgn} : \mathbb{R}^* \rightarrow \{\pm 1\}$  sono omomorfismi di gruppi.

**Definizione 87.**  $\{\det(\mu_{ij}) : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^*\}$  è un cociclo, detto *cociclo determinante*. Il fibrato risultante di fibra  $\mathbb{R}$  è detto *fibrato determinante*.

**Definizione 88.** Cociclo segno  $\{\mathrm{sgn}(\det(\mu_{ij})) : U_i \cap U_j \rightarrow \{\pm 1\}\}$  è detto *cociclo segno*, e naturalmente vi si può costruire il fibrato principale, con fibra  $\{\pm 1\}$ , detto *fibrato dei segni*.

*Osservazione 46.* Per  $n$  pari,  $S^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$  è un caso particolare di quest'ultimo tipo di fibrati.

## 2.14 Equivalenza tra fibrati

Siano  $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M_1$  e  $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2$  fibrati con stessa fibra e stesso gruppo strutturale  $G$ . Essi sono *isomorfi* se  $\exists f, F$  diffeomorfismi tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

e valga  $\forall x \in M_1 : F|_{\pi_1^{-1}(x)} \in G$ .

Il prototipo di questo tipo di equivalenza si realizza tra fibrati tangenti di varietà diffeomorfe:

$$\begin{array}{ccc} T(M_1) & \xrightarrow{Df} & T(M_2) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Se  $M_1 = M_2 = M$ , posso definire una relazione di *equivalenza forte* tra fibrati su  $M$  imponendo ulteriormente che sia  $f = \mathrm{id}$ .

## 2.15 Richiami della lezione scorsa

Sia  $M$  una varietà differenziabile con atlante massimale  $\{(U_i, \phi_i)\}$  e sia  $\{\mu_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$  un cociclo a valori in un gruppo  $G \subseteq \mathrm{Aut}(F)$  (con  $F$  varietà liscia). Ripetendo la costruzione usata per realizzare il fibrato tangente  $T(M)$  (per cui s'era usato  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  e  $F = \mathbb{R}^n$ ,  $n = \dim M$ ), ottengo un fibrato  $E \xrightarrow{\pi} M$  di fibra  $F$  e gruppo strutturale  $G$ .

**Definizione 89** (Equivalenza tra fibrati in termini di cocicli). Siano dati due fibrati su  $M$  con lo stesso gruppo di struttura e la stessa fibra:  $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$  e  $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ . Siano  $\{\mu_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$  e  $\{\lambda_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$  rispettivamente cocicli di  $E_1$  e  $E_2$ .  $E_1$  ed  $E_2$  sono fibrati equivalenti (nel senso dei cocicli) se  $\exists \gamma_i : U_i \rightarrow G$  tale che  $\forall x \in U_i \cup U_j$  dati  $\lambda_{ij}$  e  $\mu_{ij}$  sia  $\lambda_{ji} = \gamma_j^{-1} \times \mu_{ji} \times \gamma_i^{-1}$ . (Quest'ultima è la moltiplicazione tra elementi del gruppo  $G$ )

**Definizione 90** (Immersione liscia). Sia  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  è una immersione se  $\forall x \in X Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  (restrizione dell'applicazione tangente alla fibra) è iniettiva.

**Definizione 91** (Embedding). Una immersione  $f$  è un embedding se  $f : X \rightarrow f(X)$  è un omeomorfismo (funzione continua fra spazi topologici tale che ha inversa continua).

## 2.16 Teorema di Embedding

**Teorema 65** (Di embedding elementare di Whitney). *Se  $X$  è una varietà compatta allora esiste un  $N$  abbastanza grande tale che  $\exists$  un embedding  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$*

*Dimostrazione.* Poiché  $X$  è compatta esiste un atlante finito  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1, \dots, m}$  tale che

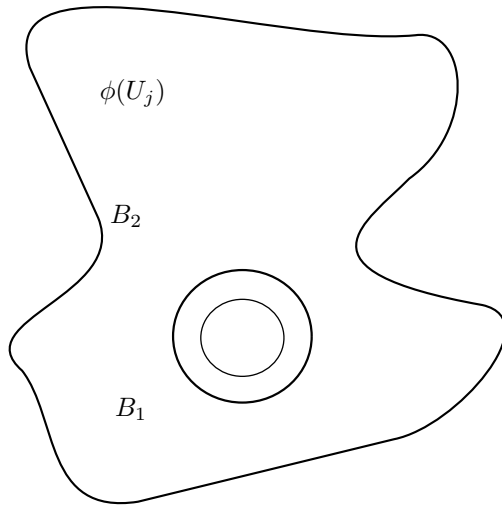
- $B_2(0) \subseteq \phi_i(U_i)$
- la famiglia  $\phi_i^{-1}(B_1(0))$  ricopre l'insieme  $X$

Sia  $\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, 1]$  la funzione a foruncolo relativa alle palle  $B_1$  e  $B_2$ . Definisco la funzione  $\lambda_i : U_i \subseteq X \rightarrow [0, 1]$  come  $\lambda \circ \phi_i$  in  $U_i$  e 0 in  $X \setminus U_i$ .

$C_i = \phi_i^{-1}(B_1(0))$  ricopre  $X$  e  $C_i = \lambda_i^{-1}(1) \subseteq U_i$ . Poiché  $\lambda_i$  vale 1 quando sono su  $\phi_i^{-1}(B_1(0))$ , e quindi i  $C_i$  sono un ricoprimento.

Definisco  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$  come  $\lambda_i \phi_i$  in  $U_i$  e 0 in  $X \setminus U_i$ . Considero le funzioni  $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita come  $x \mapsto (f_i(x), \lambda_i(x))$ . Definisco ancora la funzione  $g$  che:  $x \mapsto (g_1, g_2, \dots, g_m)$ .

Dico che  $g$  così definita è un embedding, devo dunque dimostrare che è una immersione (cioè che il suo differenziale è iniettivo) e che la funzione stessa  $g$  è omeomorfismo nella sua immagine cioè ha funzione inversa continua.

Figura 13: Palle  $B_1$  e  $B_2$ 

- tutte le  $g_i$  per come son state costruite sono immersioni continue. Infatti, fissato un qualunque  $x$ ;  $\exists i : x \in \phi_i^{-1}(B_1(0))$ . Mostriamo che  $g_i$  (e quindi  $g$ ) è una immersione.  $g_i$  vista nelle carte locali e ristretta a  $\phi_i^{-1}(B_1(0))$  è una funzione che va da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^{n+1}$  e vale

$$g_i \circ \phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 1)$$

che è continua e differenziabile. Il differenziale è iniettivo: è una matrice  $(n+1) \times n$  in cui il blocco  $n \times n$  più in alto è l'identità e la cui ultima riga sono 0;

- $g$  è iniettiva: se ho  $x \neq y$  ho due possibilità:  $x, y \in C_i$  allora la  $f_i$  coincide con la  $\phi_i$  sull'aperto  $C_i$ , che è iniettiva su tali aperti, perchè contenuti nelle carte. Oppure  $x, y$  stanno in due  $C_i$  diversi, in particolare  $y \in C_i$  allora  $\lambda_i(y) = 1$  e  $\lambda_i(x) \neq 1$ . Dunque ogni funzione  $g_i$  è iniettiva e quindi lo è anche la funzione  $g$ ;
- $g$  è invertibile sull'immagine: è iniettiva per il punto sopra e, ovviamente, suriettiva.
- $g^{-1}$  è continua. Per mostrarlo faremo vedere che  $g$  manda chiusi in chiusi. Sia  $C$  un chiuso in  $X$ . Essendo  $X$  compatto,  $C$  è anche compatto. Essendo  $g$  continua manda compatti in compatti, da cui  $g(C)$  è compatto. Ma essendo  $X$  compatta e  $T$  compatto in un chiuso implica essere anche chiuso, da cui  $g(C)$  è chiuso.  $\square$

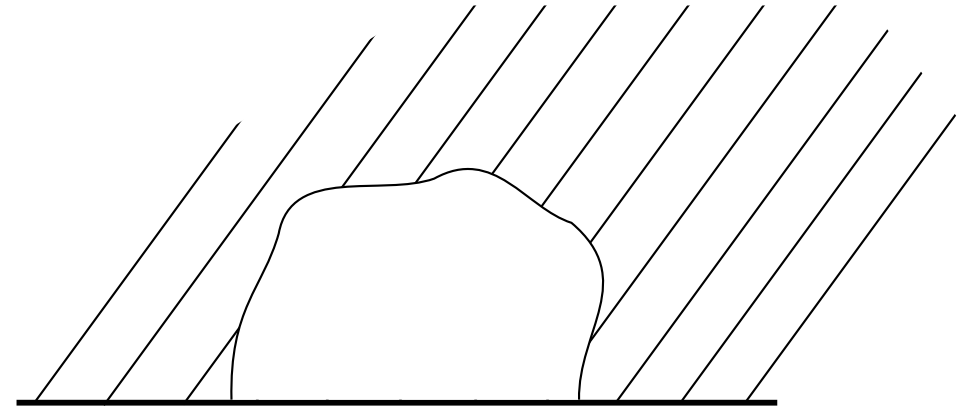


Figura 14: Varietà con bordo

Se ho una varietà  $X$  con bordo  $\partial X \neq \emptyset$  si può rafforzare la costruzione in modo che  $(X, \partial X)$  sia una sottovarietà del semipiano  $(\mathbb{H}^N, \partial \mathbb{H}^N)$  con  $\partial X = X \cup \partial \mathbb{H}^N$  e su  $\partial X$  ho  $X \perp \partial \mathbb{H}^N$ .

Inoltre se  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  sono punti della varietà con bordo non nullo si può rafforzare la costruzione in modo che un intorno di  $x_j$  va in un piano di  $\mathbb{R}^N$ .

**Definizione 92** (Metrica Riemanniana). Una metrica riemanniana su una varietà  $X$  è un campo di tensori di tipo  $(0,2)$  su  $X$  simmetrici e definiti positivi. Cioè è una sezione del fibrato tangente tale che ogni tensore associato ad un punto della varietà è simmetrico e definito positivo:  $R : TX \rightarrow T_x^0$

**Teorema 66.** Ogni  $X$  compatta ha una metrica Riemanniana.

*Dimostrazione.* Esistendo un embedding, per il teorema sopra, posso vedere la varietà come immersa in un  $\mathbb{R}^n$  dotato del suo prodotto scalare canonico  $g_0$ .  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ . Posso definire la metrica riemanniana sulla varietà  $X$  come  $g_x = g_0|_{T_x X}$ . Ad ogni punto  $x$  prendo dunque come metrica il tensore associato al prodotto canonico ristretto all'immagine del  $T_x X$  attraverso l'embedding.  $\square$

## 2.17 Topologia sullo spazio delle applicazione lisce tra varietà - fede

### 2.18 Spazi di applicazioni lisce

**Definizione 93** (Topologia sulle applicazioni lisce tra varietà in  $\mathbb{R}^N$ ). Definisco  $\mathcal{E} := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ liscia}\}$ , con  $X$  e  $Y$  varietà lisce. Voglio munire  $\mathcal{E}$  di una topologia. Se  $X \subseteq \mathbb{R}^N$  e  $Y = \mathbb{R}^N$  considero la base di intorni data  $U_{r,K,\epsilon}$  e  $r \in \mathbb{N}$  e  $K \subseteq X$  è un compatto e  $\epsilon > 0$ . Questa base di intorni è definita da

$$U_{r,K,\epsilon} := \left\{ g : X \rightarrow \mathbb{R}^N \mid \epsilon > \left\| \frac{\partial f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_i}} - \frac{\partial g}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_i}} \right\| \text{ per } x \in K \text{ e } \forall k \text{ tale che } 0 < |k| \leq r \right\}$$

Con  $k$  multindice.

Posso considerare un ricoprimento compatto finito,  $K_i$  (che trovo se la varietà  $X$  è compatta) e posso prendere l'intersezione dei  $U_{r,K_i,\epsilon}$ , in questo modo ottengo dei  $U_{r,\epsilon}$  che sono indipendenti dal compatto  $K$ , questo è ora un intorno aperto della funzione  $f : X \rightarrow Y$ . Unendo gli intorni per tutte le funzioni ottengo effettivamente una base di aperti per lo spazio delle funzioni lisce  $\mathcal{E}$ .

**Definizione 94.** Per definire una topologia tra varietà generiche mi riduco al caso di varietà reali. Definisco una base di intorni  $U_{r,K,\epsilon,(U,\phi),(U',\phi')} = \{g : X \rightarrow \mathbb{R}^N\}$  tale che  $g(U) \subseteq U'$  e valga  $\phi' \circ g \circ \phi^{-1} \in U_{r,K,\epsilon}(\phi' \circ g \circ \phi^{-1})$  cioè che  $\phi \circ g \circ \phi^{-1}$  sia intorno di una funzione da  $\mathbb{R}^N$  a  $\mathbb{R}^N$ . Posso considerare un ricoprimento compatto finito,  $K_i$  (che trovo se la varietà  $X$  è compatta) e posso prendere l'intersezione dei  $U_{r,K_i,(U_i,\psi_i),(U'_i,\psi'_i)}$ , in questo modo ottengo dei  $U_{r,\epsilon,(U,\phi),(U',\phi')}$  che sono indipendenti dal compatto  $K$ , questo è ora un intorno della funzione  $f : X \rightarrow Y$ . Si procede similmente a quanto fatto precedentemente per rimuovere la dipendenza dal compatto  $K$ . Unendo gli intorni per tutte le funzioni ottengo effettivamente una base di intorni per lo spazio delle funzioni lisce  $\mathcal{E}$ .

*Osservazione 47.* La topologia che ottengo è metrizzabile.

Date due varietà  $X$  e  $Y$  consideriamo  $\mathcal{E}(X,Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ liscia}\}$  con la topologia definita precedentemente. Restringiamoci al caso  $X$  compatta. Consideriamo alcuni sottoinsiemi:

- le immersioni  $\text{Imm}(X,Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ immersioni}\}$   
ovvero  $\forall x \in X \ Df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  è iniettiva  
(la funzione tangente ristretta alla fibra  $x$  che manda lo spazio tangente a  $x$  nello spazio tangente a  $f(x)$  è iniettiva)
- gli embedding  $\text{Emb}(X,Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ embedding}\}$   
ovvero, poiché  $X$  compatta  $f$  è un'immersione iniettiva.

- i diffeomorfismi  $\text{Diff}(X,Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ diffeomorfismi}\}$

*Osservazione 48.* Questi insiemi possono anche essere vuoti.

**Teorema 67.** *Questi elencati sono sottoinsiemi aperti di  $\mathcal{E}(X,Y)$ .*

Moralmente, se una funzione è “abbastanza vicina” a un'immersione (o embedding o diffeom.) è essa stessa un'immersione (o embedding o diffeom.).

*Dimostrazione.*

$\text{Imm}(X,Y)$  La condizione di essere immersione è una condizione che si verifica sul comportamento di iniettività delle tangenti che è una condizione aperta. (La formalizzazione di questa idea è lasciata per esercizio)

$\text{Emb}(X,Y)$  Suppongo  $g$  funzione “vicina” ad un embedding  $f$ . Per il punto precedente  $g$  un'immersione, resta da mostrare che è iniettiva.

Supponiamo per assurdo che sia falso. Allora potrò costruire una successione  $g_n \rightarrow f$  e tali che esistano due successioni di punti distinti  $x_n$  e  $y_n$  tali che  $g_n(x_n) = g_n(y_n)$ . Poiché  $X$  compatto, posso estrarre due sottosuccessioni  $x_n \rightarrow x_0$  e  $y_n \rightarrow y_0$ . Se per assurdo  $x_0 \neq y_0$ , valuto  $f$  in questi punti e dovrei avere  $f(x_0) = f(y_0)$ , ch'è assurdo poiché  $f$  è iniettiva, ma allora  $x_0 = y_0$  e entrambe le serie convergono allo stesso punto  $x_0$ .

Leggendo tutto attraverso una carta intorno a  $x_0$  posso pensare  $x_0$  e le successioni  $x_n$  e  $y_n$  in  $\mathbb{R}^n$ . Poiché  $g_n(y_n) - g_n(x_n) = 0$ , per il teorema del valor medio  $\exists z_n$  t.c.  $d_{z_n} g_n(y_n - x_n) = 0$ . Ho inoltre che  $z_n \rightarrow x_0$  perché  $z_n \in [x_n, y_n]$ .

Considero adesso  $v_n := \frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|} \in S^{n-1}$ . Poiché  $S^n$  è compatto a meno di estrarre una sottosuccessione  $v_n \rightarrow v_0 \in S^{n-1}$ . Segue che  $d_{x_0} f(v_0) = 0$ , assurdo perché anche il differenziale di  $f$  è iniettivo.  $\nmid$

$\text{Diff}(X,Y)$  Per i punti precedenti presa  $g$  funzione “vicina” a  $f$  diffeomorfismo,  $g$  è un embedding. Mi resta da mostrare la surgettività.

Poiché  $g$  è un embedding  $g(X) \subseteq Y$  è aperto, inoltre  $X$  è compatta, quindi  $g(X)$  è anche chiuso (nelle ipotesi in cui lavoriamo compatto  $:\leftrightarrow$  chiuso, ad esempio  $Y$  compatto, o  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ).

Ma se  $X$  e  $Y$  sono connesse (ipotesi di comodo) allora  $g(X) = Y$ , ovvero  $g$  è diffeomorfismo. In mancanza dell'ipotesi di comodo mi posso restringere alle singole componenti connesse in partenza e in arrivo.  $\square$

## 2.19 Orientazione

Siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  due basi di  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  la matrice di cambiamento di base. Due basi inducono la stessa orientazione se  $\det M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} > 0$ .



**Proposizione 68.** *Questa è una relazione di equivalenza sulle basi di  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dimostrazione.* Infatti grazie alle proprietà del determinante e Binet:

- $\det M_B^B = \det \text{id} = 1$
- $\det M_{B''}^B = \det(M_B^B M_{B''}^{B'}) = \det M_B^B \cdot \det M_{B''}^{B'}$
- $\text{sgn}(\det M_B^B) = \text{sgn}(\det M_{B''}^{B'})$ , perché essendo una l'inversa dell'altra il determinante è il reciproco, e quindi mantiene il segno  $\square$

Ci sono quindi due classi di equivalenza.

**Definizione 95** (Orientazione). Una *orientazione* di  $\mathbb{R}^n$  è una classe di equivalenza per la relazione prima definita.

Estendiamo questa definizione alle varietà.

**Definizione 96** (Atlante orientato). Sia  $X$  una varietà e  $A = \{U_j, \phi_j\}$  un atlante di  $X$  (non necessariamente il massimale). Diciamo che tale atlante è *orientato* se il cociclo  $\{\det \lambda_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$  è in effetti a valori in  $\mathbb{R}^+$  (è lo stesso cociclo usato per definire il fibrato tangente, ristretto però all'atlante).

**Definizione 97** (Atlanti compatibili). Due atlanti orientati sullo stesso spazio topologico sono *compatibili* se la loro unione è un atlante orientato.

**Definizione 98** (Orientazione su varietà). Un'*orientazione* su una varietà è determinata da un atlante orientato massimale. Una varietà è *orientabile* se ammette un'orientazione, *non orientabile* altrimenti.

*Osservazione 49.* Se una varietà è orientabile potrebbe avere più di una orientazione.

**Proposizione 69.** *Se una varietà è connessa e orientabile, allora ha esattamente due orientazioni.*

DA FINIRE

## 2.20 Cobordismo

Considereremo solo varietà compatte se non diversamente specificato. Facciamo prima una versione non orientata, poi faremo quella orientata.

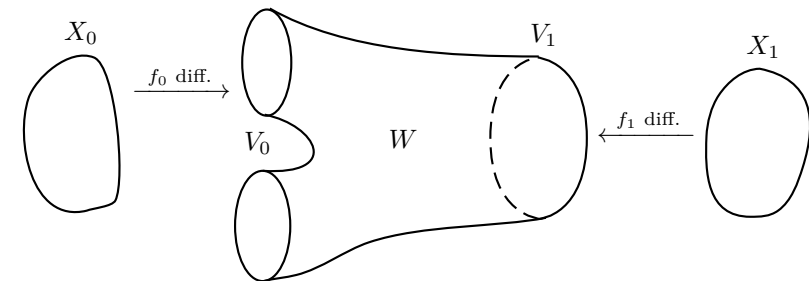
**Definizione 99** (Triade). Una tripletta  $(W, V_0, V_1)$  è una *triade* se  $W$  è una varietà con bordo  $\partial W = V_0 \sqcup V_1$ .

Fisicamente potete pensare  $W$  come una transizione da  $V_0$  a  $V_1$ .

*Osservazione 50.* Le componenti del bordo  $V_0$  e  $V_1$  possono anche essere vuote. Ad esempio se  $W$  è chiusa avremo  $V_0 = V_1 = \emptyset$ .

**Definizione 100** (Cobordismo). Siano  $X_0, X_1$   $n$ -varietà chiuse. Diciamo che  $X_0$  è *cobordante* a  $X_1$  se esiste una triade le cui componenti del bordo sono diffeomorfe a  $X_0$  e  $X_1$ :

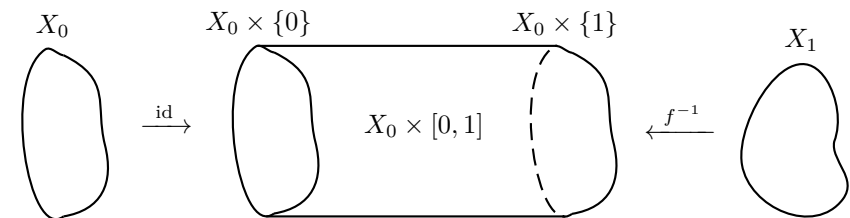
$$X_0 \text{ cobordante a } X_1 : \Leftrightarrow \exists W, V_0, V_1, f_0, f_1 : \begin{cases} \partial W = V_0 \sqcup V_1 \\ f_0 : X_0 \rightarrow V_0 \text{ diffeomorfismo} \\ f_1 : X_1 \rightarrow V_1 \text{ diffeomorfismo} \end{cases}$$



Il concetto di cobordismo indebolisce quello di diffeomorfismo:

**Proposizione 70.** *Due varietà diffeomorfe sono cobordanti.*

*Dimostrazione.* Sia  $f : X_0 \rightarrow X_1$  diffeomorfismo. Poniamo  $W := X_0 \times [0, 1]$  cilindro di base  $X_0$ . Allora  $(W, X_0 \times \{0\}, X_0 \times \{1\}, \text{id}, f^{-1})$  è il cobordismo cercato.  $\square$



*Osservazione 51.* Essere diffeomorfe è una relazione di equivalenza, perché:

- $X \xrightarrow{\text{id}} X$
- $X \xrightarrow{f} Y \implies Y \xrightarrow{f^{-1}} X$
- $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \implies X \xrightarrow{g \circ f} Z$

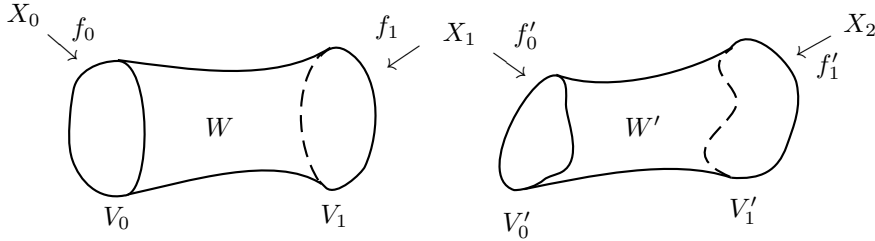
**Lemma 71.** *Essere cobordanti è una relazione di equivalenza.*

*Dimostrazione.* Verifichiamo le tre proprietà dell'equivalenza:

**Riflessiva** Per vedere che  $X$  è cobordante a se stesso considerare il cilindro  $X \times [0, 1]$ , oppure osservare che  $X$  è diffeomorfo a se stesso e usare la Proposizione 70.

**Simmetrica** Basta osservare che se  $(W, V_0, V_1)$  è una triade, lo è anche  $(W, V_1, V_0)$ .

**Transitiva** Sia  $X_0$  cobordante a  $X_1$  tramite la triade  $(W, V_0, V_1)$  e  $X_1$  cobordante a  $X_2$  tramite  $(W', V'_0, V'_1)$ . Per la seguente Proposizione 72, esiste una varietà  $\mathcal{W}$  “incollaggio” di  $W$  e  $W'$  lungo le componenti del bordo diffeomorfe a  $X_1$  con, intuitivamente,  $\partial\mathcal{W} = V_0 \sqcup V'_1$ . Allora  $X_0$  è cobordante a  $X_2$  tramite  $(\mathcal{W}, V_0, V'_1)$ .  $\square$



**Proposizione 72** (Incollaggio). *Siano  $W$  e  $W'$   $n$ -varietà con due sottovarietà dei loro bordi diffeomorfe:*

$$Z \subseteq \partial W, \quad Z' \subseteq \partial W', \quad \varphi : Z \rightarrow Z' \text{ diffeomorfismo}$$

*Sia  $\mathcal{W}$  il quoziente dell'unione di  $W$  e  $W'$  rispetto all'equivalenza indotta da  $\varphi$ :*

$$\mathcal{W} = W \sqcup W' / \sim, \quad x \sim y \Leftrightarrow x = \varphi(y) \vee y = \varphi(x)$$

*Allora  $\mathcal{W}$  ammette una struttura di  $n$ -varietà con bordo dato dalle parti non diffeomorfe dei bordi e con  $W$  e  $W'$  che possono essere considerate sottovarietà di  $\mathcal{W}$ , cioè le immersioni di  $W$  e  $W'$  in  $\mathcal{W}$  sono embedding:*

$$\mathcal{W} \text{ } n\text{-varietà, } \partial\mathcal{W} = (\partial W \setminus Z) \sqcup (\partial W' \setminus Z'),$$

$$W \xhookrightarrow{j} \mathcal{W}, \quad W' \xhookrightarrow{j'} \mathcal{W} \text{ embedding}$$

*Dimostrazione.* In generale, se ho una varietà  $A$  con bordo, il bordo ammette un *collare* nella varietà, cioè esiste un embedding  $c : \partial A \times [0, 1] \rightarrow A$  tale che  $c|_{\partial A \times \{0\}} = \text{id}$ . Siano  $g_1$  e  $g_2$  due collari di  $Z$  e  $Z'$

$$g_1 : Z \times (0, 1] \rightarrow W$$

$$g_2 : Z' \times [1, 2) \rightarrow W'$$

che danno il bordo in 1:

$$g_1|_{Z \times \{1\}} = \text{id}$$

$$g_2|_{Z' \times \{1\}} = \text{id}$$

Definiamo una concatenazione  $g$  in  $\mathcal{W}$  dei collari:

$$g : Z \times (0, 2) \rightarrow \mathcal{W}$$

$$g(x, t) := \begin{cases} j(g_1(x, t)) & t \in (0, 1] \\ j'(g_2(\varphi(x), t)) & t \in (1, 2) \end{cases}$$

Osserviamo che  $\mathcal{W}$  è ricoperto dagli aperti  $j(W \setminus Z)$ ,  $j'(W' \setminus Z')$  e  $g(Z \times (0, 2))$  e che le mappe  $j$ ,  $j'$  e  $g$  inducono un atlante liscio su  $\mathcal{W}$  con le proprietà volute. Basta verificare che queste “carte generalizzate” siano compatibili.  $\square$

*Osservazione 52.* Abbiamo dimostrato l'esistenza di un incollaggio, ma in verità si può mostrare anche l'unicità: dati due incollaggi di due varietà fissate, essi sono diffeomorfi e il diffeomorfismo è l'identità fuori da un intorno compatto del bordo d'incollaggio.

Consideriamo ora l'insieme  $\eta_n$  delle  $n$ -varietà compatte chiuse quozientate per cobordismo:

$$\eta_n := \{X \mid X \text{ } n\text{-varietà compatta} \wedge \partial X = \emptyset\} / \sim_{\text{cob}}$$

Definiamo un'operazione su  $\eta_n$  che lo rende un gruppo abeliano:

$$[X], [Y] \in \eta_n \quad [X] + [Y] := [X \sqcup Y]$$

L'elemento neutro è  $[\emptyset]$ , cioè la classe dei bordi:

$$[\emptyset] = \{X \mid \exists W : X = \partial W\}$$

L'unione disgiunta di due varietà chiuse cobordanti è un bordo, per definizione. Ma ogni varietà chiusa è cobordante a se stessa, quindi:

$$[X \sqcup X] = [\emptyset] \implies -[X] = [X]$$

Cioè in particolare  $2[X] = [\emptyset]$ . Allora  $(\eta_n, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale sul campo finito  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ , con prodotto:

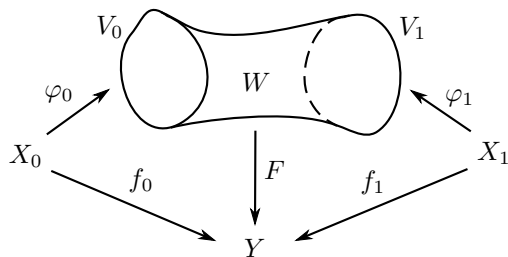
$$0 \cdot [X] = [\emptyset], \quad 1 \cdot [X] = [X]$$

Vedremo poi che in generale  $\eta_n$  non è banale. Adesso generalizziamo  $\eta_n$ : sia  $Y$  una *varietà obiettivo*, non necessariamente compatta; vogliamo definire un oggetto  $\eta_n(Y)$  che si riduca a  $\eta_n$  quando  $\#Y = 1$ . Poniamo:

$$\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow Y \mid X \text{ } n\text{-varietà compatta chiusa} \wedge f \text{ liscia}\}$$

Osserviamo che  $\mathcal{F}$  si riduce alle varietà compatte chiuse se  $Y$  è un punto. Analogamente alla costruzione di  $\eta_n$ , vogliamo quozientare  $\mathcal{F}$  per cobordismo, ma prima dobbiamo definire il cobordismo tra funzioni:

**Definizione 101** (Cobordismo tra funzioni). Siano  $X_0$  e  $X_1$   $n$ -varietà compatte chiuse,  $Y$  una varietà e  $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ ,  $f_1 : X_1 \rightarrow Y$  lisce. Diciamo che  $(X_0, f_0)$  è cobordante a  $(X_1, f_1)$  se  $X_0$  è cobordante a  $X_1$  tramite la varietà  $W$  e i diffeomorfismi  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  ed esiste una funzione liscia  $F : W \rightarrow Y$  tale che  $F \circ \varphi_0 = f_0$  e  $F \circ \varphi_1 = f_1$ , cioè che fa commutare il diagramma:



Si verifica che anche questa è una relazione di equivalenza e poniamo dunque:

$$\eta_n(Y) := \mathcal{F} / \sim_{\text{cob}}$$

Analogamente a  $\eta_n$  l'unione dei grafici ci dà una somma su  $\eta_n(Y)$  con le proprietà già viste, e  $\eta_n(Y)$  è un  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -spazio vettoriale.

Ora per evitare complicazioni assumiamo che le varietà obiettivo siano compatte. Consideriamo una funzione liscia  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ . Questa induce una funzione lineare  $g_* : \eta_n(Y_1) \rightarrow \eta_n(Y_2)$  così definita:

$$g_*([X, f]) := [X, g \circ f]$$

Si verifica facilmente che è ben definita e funtoriale, infatti  $g_{1*} \circ g_{2*} = (g_1 \circ g_2)_*$  e  $\text{id}_* = \text{id}$ . Inoltre se  $g$  è un diffeomorfismo,  $g_*$  è un isomorfismo.

Rispetto alla varietà obiettivo questi spazi vettoriali perdono informazioni, cioè è possibile avere varietà non diffeomorfe con spazi uguali. Però se gli spazi sono diversi le varietà non sono diffeomorfe, quindi li possiamo usare per distinguere varietà che siano abbastanza diverse.

**Osservazione 53.**  $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$ ,  $\text{id}_* = \text{id}$

$$g_* \left( \left[ X \xrightarrow{f} Y_1 \right] \right) = \left[ X \xrightarrow{g \circ f} Y_2 \right]$$

**Osservazione 54.** Se  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$  è diffeomorfismo,  $\exists g^{-1} : Y_2 \rightarrow Y_1$  liscia  $\implies g_*$  è isomorfismo di spazi vettoriali.

**Definizione 102** (Omotopia).  $g_0 : Y_1 \rightarrow Y_2$ ,  $g_1 : Y_1 \rightarrow Y_2$  sono omotope se  $\exists G : Y_1 \times [0, 1] \rightarrow Y_2$  tale che, detta  $G_t := G|_{Y_1 \times \{t\}}$ ,  $G_0 = g_0$ ,  $G_1 = g_1$ .

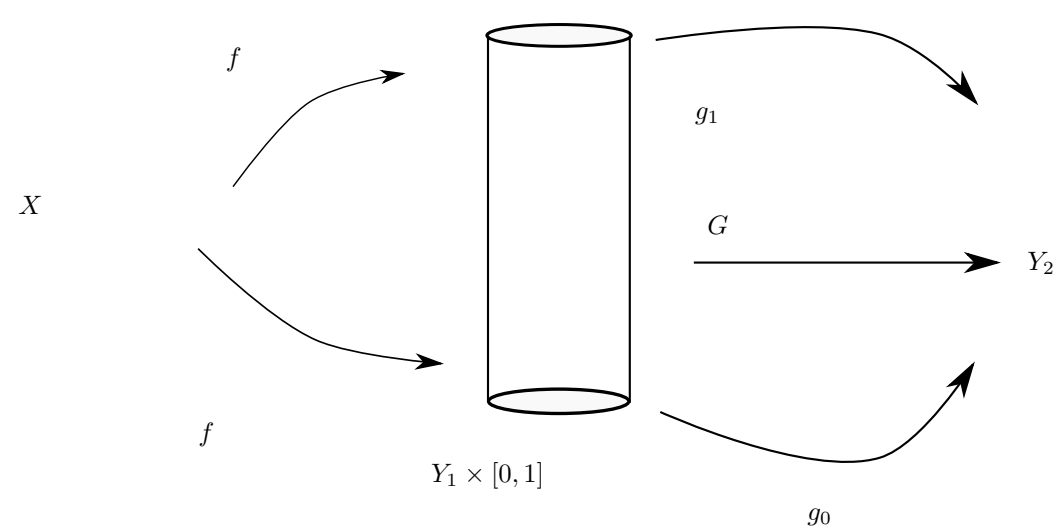


Figura 15: dimostrazione teorema

**Osservazione 55.** L'omotopia è un particolare cobordismo (basta considerare il cilindro associato!), in cui le varietà che costituiscono il bordo sono la stessa, ma la funzione verso la varietà obiettivo è differente.

**Proposizione 73.**  $g_0, g_1 : Y_1 \rightarrow Y_2$  omotope  $\implies g_{0*} = g_{1*}$ .

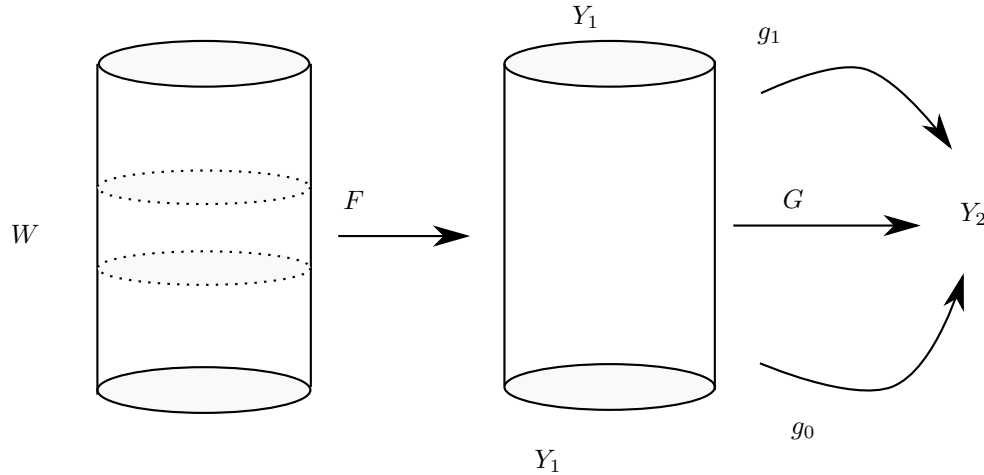
**Dimostrazione.** Per dimostrare che le due funzioni sono uguali verifico che valutate in ogni punto sono uguali, dove un punto di  $\eta_n(Y_1)$  è una varietà con la sua funzione a valori in  $Y_1$ , e l'uguaglianza è ai sensi del cobordismo, quindi se in ogni punto sono cobordanti.

Costruisco ora il cobordismo. Poiché le valuto nello stesso punto, in partenza avrò la coppia  $(X, f)$  con  $X$  varietà e  $f : X \rightarrow Y_1$  liscia.

Ho già un cobordismo tra  $(Y_1, g_1)$  e  $(Y_1, g_2)$ , realizzato dal cilindro di base  $Y_1$  e come funzione sul cilindro l'omotopia  $G$  che congiunge  $g_1$  a  $g_2$ . Considero inoltre, in partenza, il cilindro di base  $X$ , e lo mando nell'altro cilindro mediante la funzione definita da  $\forall t \in [0, 1], F(x, t) = (f(x, t), t)$ . Componendo le funzioni sui due cilindri ottengo un cobordismo fra  $g_{1*}((X, f))$  e  $g_{1*}((X, f))$ , valido per ogni coppia  $(X, f) \in \eta_n(Y_1)$   $\square$

**Corollario 74.**  $\eta_S(\mathbb{R}^n) = \eta_S(\{x\}) = \eta_S$

**Dimostrazione.** Ogni funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$  è omotopa a una funzione a valori in un punto. Infatti, per realizzare l'omotopia, è sufficiente moltiplicare la funzione per il parametro "temporale" dell'omotopia: in questo modo quando  $t = 1$  ho la

Figura 16:  $G \circ F(W) = Y_2$ 

funzione, mentre quando  $t = 0$  ho un punto come immagine. <sup>7</sup>Quindi, poiché omotopa, ogni funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$  è cobordante a una funzione a valori in un punto, quindi lo spazio vettoriale a meno di cobordismi di  $\mathbb{R}^n$  si riduce a quello di un punto.  $\square$

Si noti che la dimostrazione precedente vale nel caso di ogni insieme stellato, è con una piccola aggiunta per ogni insieme connesso per archi.

**Definizione 103** (Cobordismo orientato).  $X_0 \sim_{cob+} X_1$  se  $\exists$  triade  $(W, Z_0, Z_1)$  con  $W, \partial W$  orientata (sul bordo l'orientazione è quella indotta) e diffeomorfismi  $\phi_0 : X_0 \rightarrow Z_0, \phi_1 : X_1 \rightarrow Z_1$  che preservano l'orientazione.

**Definizione 104.**  $\Omega_n(\text{punto}) = \Omega_n = \{X \text{ n-varietà compatta, chiusa, orientata}\} / \sim_{cob+}$

*Osservazione 56.* Anche in questo caso possiamo equipaggiare  $\Omega_n$ , con la stessa operazione definita nella lezione precedente. In particolare valgono:

- $[X] + [Y] = [X \sqcup Y]$
- $0 = [\emptyset]$  ossia i bordi orientati.
- $-[X] = [-X]$ . (Viene scambiata l'orientazione di tutte le componenti connesse).

Così  $(\Omega_n, +)$  assuma la struttura di gruppo abeliano.

Da notare che si perde la struttura di 2-spazio vettoriale, infatti se unisco un insieme con se stesso esso è il bordo di un cilindro, ma non il bordo di un cilindro orientato, perché come detto sopra l'orientazione viene scambiata, dato che la normale esterna punta nel verso opposto ai due lati del cilindro.

Possiamo adesso ripercorrere lo schema precedente e cambiare la varietà obiettivo.

**Definizione 105.**  $\Omega_n(Y) = \{X \text{ n-varietà liscia tale che } \exists f : X \rightarrow Y \text{ liscia}\}$

*Osservazione 57.* Non ho chiesto nessuna condizione di orientabilità sulla varietà  $Y$  in arrivo.

Adesso ripetiamo la costruzione e creiamo degli omomorfismi di gruppi  $g_* : \Omega_n(Y_1) \rightarrow \Omega_n(Y_2)$  tale che  $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$ ,  $\text{id}_* = \text{id}$ .

**Teorema 75.** Vale la proprietà di omotopia

Questi si chiamano oggetti topologico-algebrici e servono a fare i conti. Un esempio di questi è il seguente.

## 2.21 Gruppo fondamentale

$y_0 \in Y$  varietà connessa per archi. Considero la coppia  $(Y, y_0)$

**Definizione 106** (Omotopia puntata). Una omotopia  $F$  è detta *puntata* (o *o.p.*) se  $F(P, t) = y_0 \forall t$ , con  $P$  un punto qualunque nella varietà di partenza.

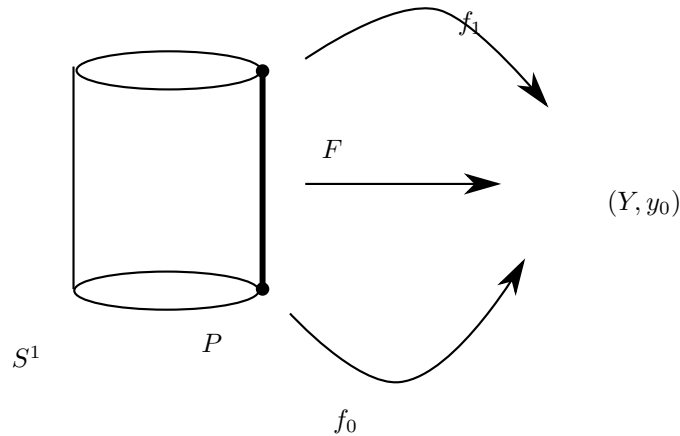
Considero ora l'insieme  $\{f : (S^1, P) \rightarrow (Y, y_0), f(P) = y_0\} / \sim_{o.p.}$ , ossia considero i cammini chiusi a meno di omotopia puntata. Lo dotto di una operazione in modo da renderlo un gruppo.

**Definizione 107.**  $f_0 * f_1 : (S^1, P) \rightarrow (Y, y_0) \begin{cases} f_1(2t), & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ f_0(2t - 1), & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$ . In pratica è percorrere i 2 cammini in successione a velocità doppia. E' ben definita e  $[f_0] * [f_1] = [f_0 * f_1]$

*Osservazione 58.* Moralmente il partire da  $S^1$  sente se  $\mathbb{R}^2$  ha buchi (stiamo "lanciando" nella varietà di arrivo un laccio chiuso). Se partivo da un punto, avrei sentito solo la connessione per archi, non la semplice connessione.

**Definizione 108** (Gruppo fondamentale). L'insieme  $\pi_1(Y, y_0) = \{f : (S^1, P) \rightarrow (Y, y_0), f(P) = y_0\} / \sim_{o.p.}$  è detto *gruppo fondamentale* della varietà  $Y$ .

<sup>7</sup>In realtà è proprio un'omotetia

Figura 17: Esempio nel caso si sia preso  $(S^1, P)$ .

### 2.21.1 Alcuni $\eta_n(Y)$ e $\Omega_n(Y)$

Al fine di mostrare che gli spazi in esame non sono tutti banali si esaminano alcuni di questi in particolare. Prima di tutto si esamina la struttura di varietà differenziabili in dimensione bassa (in particolare  $n = 0, 1$ ).

**$n = 0$**   $X \in \{0\text{-varietà compatte connesse}\}/\{\text{diffeomorfismi}\} \implies X = \{pt.\}$ , mentre in generale, in mancanza di connessione, si avrà un'unione disgiunta di punti;

$X \in \{0\text{-varietà compatte orientate connesse}\}/\{\text{diffeomorfismi che preservano l'orientamento}\} \implies X = \{pt., \pm\}$ , dove il segno specifica l'orientazione, e nel caso generale non connesso si ha un'unione disgiunta di punti con segno;

**$n = 1$**   $X \in \{1\text{-varietà compatte connesse}\}/\{\text{diffeomorfismi}\} \implies X = [a, b]$  nel caso di varietà con bordo oppure  $X = S^1$  nel caso di assenza di bordo, al solito nel caso generale si ha un'unione disgiunta degli spazi descritti (quest'ultimo fatto è vero, ma la dimostrazione è non banale);

$X \in \{1\text{-varietà compatte orientate}\}/\{\text{diffeomorfismi che preservano l'orientamento}\}$  allora  $X$  è uno spazio di quelli descritti nel caso non orientato, dove l'orientazione è definita per ogni componente connessa scegliendo il verso orario o antiorario per ogni componente senza bordo (di tipo  $S^1$ ) e positivo o negativo (con riferimento alla struttura ordinata di  $\mathbb{R}$ ) per le componenti con bordo (di tipo intervallo chiuso).

Sulle componenti con bordo si ha inoltre un'orientazione indotta, conformemente alla convenzione stabilita “*prima la normale uscente*”. Perciò nell'in-

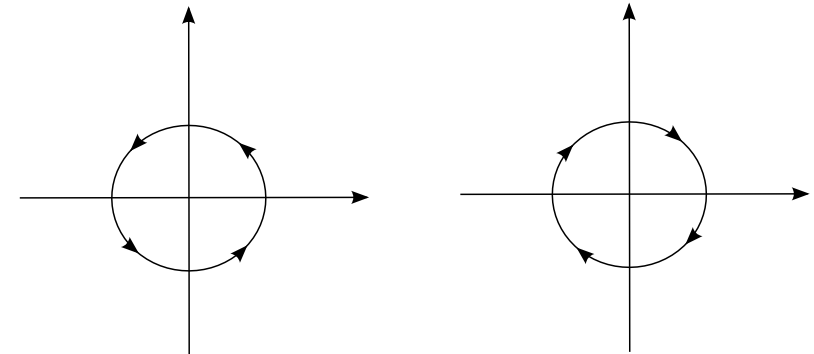
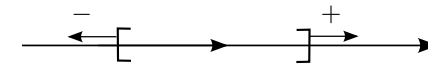
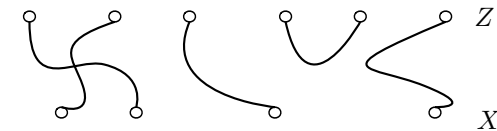
Figura 18: Orientamenti su  $S^1$ 

Figura 19: Orientamento indotto sul bordo di un intervallo

tervallo  $[a, b]$  si ha che il punto  $a$  ha segno  $+$  se la normale uscente è concorde con l'orientamento dell'intervallo, cioè se  $[a, b]$  è preso con verso negativo, – altrimenti. L'opposto per  $b$ .

**Spazio  $\eta_0$**  Si passa ora a  $\eta_0(Y)$ , con  $Y$  varietà compatta chiusa (cioè senza bordo). Si ha che  $\eta_0(Y) = \{f : X \rightarrow Y\}/\{\text{cobordismi}\}$  con  $X$  0-varietà compatta, cioè  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ , e  $f(x_i) = y_i$ . Prese due varietà compatte  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $f(x_i) = y_i$  e  $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ ,  $g(z_j) = y'_j$ , allora  $X \text{ cob. } Z \implies \exists W \text{ t.c. } \partial W = \{x_1, \dots, x_k\} \sqcup \{z_1, \dots, z_k\}$  con  $\dim W = 1$  e  $F : W \rightarrow Y$  che ristretta al bordo torna ad essere  $f$  e  $g$ .

Figura 20: I tratti costituiscono la transizione  $W$ 

*Esempio 13.* Da questo si può osservare che riesco sempre a connettere tutti i punti con degli archi, ammesso che il totale sia pari (ogni arco ha un principio e una fine).

Perciò una condizione necessaria è che le due varietà abbiano cardinalità con la stessa parità. Inoltre poiché c'è bisogno anche di un diffeomorfismo  $F$  su  $W$  (che si identifica con l'unione disgiunta degli archi), se si considerano le immagini degli estremi di ogni arco si ha che anch'esse sono connesse da un arco immagine. Perciò, considerando una per una le componenti connesse di  $Y$ , si ha che la condizione di parità espressa precedentemente sulle intere varietà si deve quindi restringere alle controimmagini delle componenti connesse.

Si ottiene infine che due varietà sono cobordanti *se e solo se* le controimmagini di una componente connessa in entrambe le varietà hanno la stessa parità.

Si è così ottenuta la struttura dello spazio:

$$\eta_0(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

tanti termini quante sono le componenti connesse di  $Y$ .<sup>8</sup>

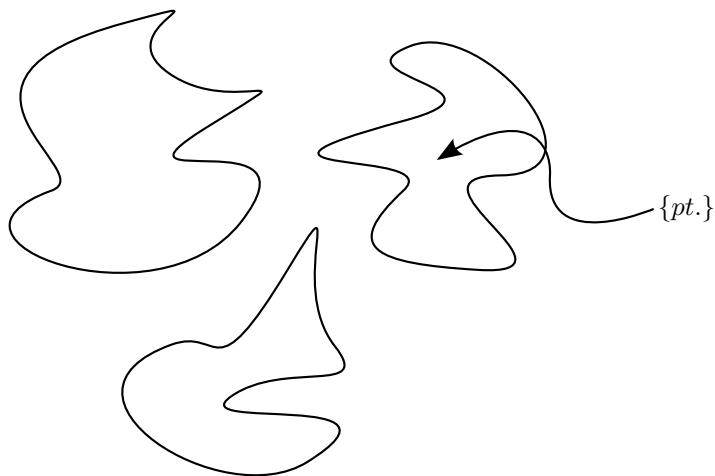


Figura 21: Un generatore dello spazio  $\eta_0(Y)$

**Gruppo  $\Omega_0$**  Come nel caso non orientato si hanno le stesse condizioni necessarie sugli archi (riguardanti la parità delle controimmagini delle componenti connesse). Si ha in più una condizione sull'orientamento, infatti ogni arco ha due estremi orientati in modo opposto. Perciò stavolta ciò che identifica la relazione tra le controimmagini delle componenti connesse non è la parità, ma la somma dei segni, che complessivamente deve essere nulla fra due varietà cobordanti, per ogni componente connessa, da cui si ottiene che fissate tali somme in una varietà, l'altra,

<sup>8</sup>Cioè la dimensione dello spazio vettoriale è pari al numero di componenti connesse della varietà obiettivo

per essere cobordante, deve avere le stesse con segno opposto, in modo che tutte sommino a 0.

La struttura del gruppo è dunque:

$$\Omega_0(Y) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$$

anche qui il numero di termini è pari al numero di componenti connesse.

### Un paio di claim

- C'è una mappa d'oblio  $f : \Omega_n(Y) \rightarrow \eta_n(Y)$ , che perde parte delle informazioni, quelle derivanti dall'orientamento;
- Si possono classificare le superfici (2-varietà), mediante gli invarianti  $\eta_1(Y)$  e  $\Omega_1(Y)$ , con  $Y$  superficie.

## 2.22 Trasversalità

Se io vi dico che una cosa è vera, potete anche fregarvene del perché sia vero, insomma... potete anche fregarvene della dimostrazione!  
In fondo siete fisici... siete abituati a digerire anche di più!

R.Benedetti

Si vuole introdurre un concetto secondo cui ci siano alcuni oggetti siano “speciali” rispetto ad altri. Seguono dunque alcuni esempi:

*Esempio 14.*

- In  $\mathbb{R}^2$  quali sono i sottospazi speciali di  $\dim = 1$  rispetto ad una data retta? Solo se stesso, se come discriminante si considera lo spazio generato dalla retta fissata con l'altra arbitraria. Infatti tutti generano il piano di  $\dim = 2$ , tranne la retta stessa, che con se stessa genera uno spazio di  $\dim = 1$  (sempre sé);
- Per i piani nello spazio relativamente a una retta, o le rette relativamente ai piani, o sottospazi in dimensione più elevata si hanno delle estensioni naturali;
- Per le curve in uno spazio di  $\dim \geq 2$  si ottiene una nozione analoga considerando i punti di intersezione e gli spazi tangenti in tali punti. Cioè sugli spazi tangenti si hanno le stesse relazioni descritte mediante l'algebra lineare.

*Osservazione 59.* La relazione di essere “non speciale” è aperta, poiché per piccole deviazioni da un elemento generico si continuano ad avere elementi generici, inoltre gli elementi generici sono densi nell'insieme di tutti gli elementi.

Ancora nelle precedente osservazione si stava trattando con concetti intuitivi, si da dunque ora una definizione formale del concetto di “speciale”.

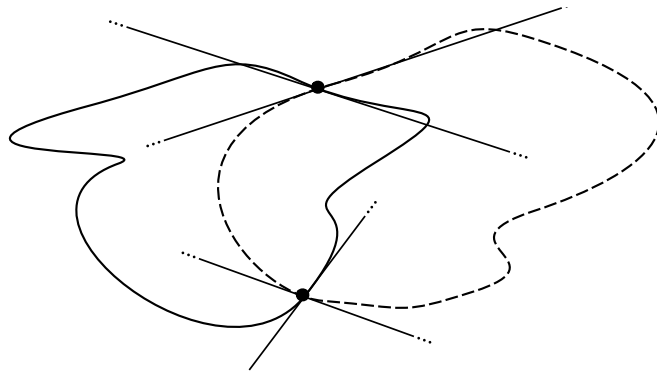


Figura 22: Due curve trasverse e relativi spazi tangenti nei punti d'interesse

**Definizione 109** (Trasversalità). Sia  $Y$  una varietà e  $A \subseteq Y$  una sottovarietà, con  $\partial Y = \partial A = \emptyset$ . Sia  $X$  compatta e chiusa ( $\partial X = \emptyset$ ), e sia  $f : X \rightarrow Y$  liscia.

Si definisce allora  $f$  trasversa ad  $A$  se:  $\forall x \in X$  t.c.  $y = f(x) \in A$  si ha che  $T_y Y = T_y A + D_x f(T_x X)$ .

Si scrive inoltre che  $f \pitchfork A$ .

**Esempio 15.**  $Y = \mathbb{R}^2$ ,  $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ . I punti su cui verificare la proprietà di trasversalità sono l'intersezione, cioè:

$\forall x \in X \cap A$  allora  $T_x A + \text{id}(T_x X) = \mathbb{R}^2 \iff T_x A \oplus T_x X$ , infatti, essendo  $f$  un'immersione, allora la sua applicazione tangente coincide con l'identità.

**Definizione 110** (Trasversalità per superfici con bordo). Se  $\partial X \neq \emptyset$  definisco  $f$  trasversa ad  $A$  se si ha  $f|_{\partial X} \pitchfork A$  (infatti il bordo di una varietà è senza bordo).

**Focus** Si ha allora che:

- Se  $f(X) \cap A = \emptyset$  allora  $f \pitchfork A$  per vacuità;
- Se  $A = Y$  allora qualunque  $f$  è trasversale;
- $X \xrightarrow{i} Y$  sottovarietà, allora  $i \pitchfork A \iff X \pitchfork A$ , cioè  $\forall x \in X \cap A$  :  $T_x X + T_x A = T_x Y$ . Inoltre se  $\dim X + \dim A = \dim Y \implies T_x X \oplus T_x A = T_x Y$  (cioè  $T_x X \cap T_x A = \{0\}$ );
- Se  $A = \{y_0\}$ ,  $f \pitchfork \{y_0\}$ :  $\forall x \in X$  t.c.  $f(x) = y_0$  allora  $T_{y_0}(A) + D_x f(T_x X) = T_{y_0} Y \iff D_x f$  è surgettiva  $\forall x \in f^{-1}(y_0)$ , poiché  $T_{y_0}(A) = \{0\}$

**Definizione 111.** Si dice che  $y_0 \in Y$  è un *valore regolare* per  $f$  se ogni  $x \in f^{-1}(y_0)$  è un *punto regolare* per  $f$ , cioè si verifica  $D_x f$  è surgettiva, mentre  $x \in X$  che non è regolare è detto *punto critico*.

In questa lezione si svilupperanno tre “tipi” di teoremi di trasversalità. Non verrà data una dimostrazione degli stessi, né ora, né durante il corso, tranne qualche idea.

### Tipo 1

**Teorema 76** (Teorema 1). Siano  $X$  e  $Y$  varietà differenziabili,  $A \subseteq Y$  e  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $f \pitchfork A$ . Allora  $f^{-1}(A)$  è una sottovarietà di  $X$ .

### Tipo 2

**Teorema 77** (Teorema 2). Le funzioni trasverse ad  $A \subseteq Y$  sono un aperto denso in  $\mathcal{E}(X, Y)$ .

**Teorema 78** (Teorema 2++). <sup>9</sup>Sia  $f \not\pitchfork A$ . Esiste una funzione  $g$  arbitrariamente vicina a  $f$  tale che  $g \pitchfork A$ . Se  $X$  non è chiusa ed  $f|_{\partial X} \pitchfork A$  puoi scegliere  $g$  tale che coincida con  $f$  in un collare del bordo di  $X$ .

### Tipo 3

**Teorema 79** (Teorema 3). Siano  $X_1$  e  $X_2$  varietà compatte e senza bordo della stessa dimensione,  $Y$  varietà e  $A$  sottovarietà di  $Y$ . Siano inoltre  $f_1 : X_1 \rightarrow Y$  e  $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ . Se  $f_1, f_2 \pitchfork A$  e  $(X_1, f_1) \sim_{cob} (X_2, f_2)$  detti  $Z_1 = f_1^{-1}(A)$  e  $Z_2 = f_2^{-1}(A)$  si ha che  $(Z_1, f_1|_{Z_1}) \sim_{cob} (Z_2, f_2|_{Z_2})$ .

**Dimostrazione.** Diamo un po' di idee per la dimostrazione, dando per noti gli altri teoremi già esposti. Per il teorema 1  $Z_1$  e  $Z_2$  sono delle sottovarietà di  $X_1$  e di  $X_2$ . Chiamiamo  $W$  la varietà che realizza il cobordismo ( $\partial W = X_1 \sqcup X_2$ ) ed  $F$  la relativa funzione ( $F|_{X_1} = f_1$  e  $F|_{X_2} = f_2$ ). Grazie al teorema 2++ esiste una funzione  $G : W \rightarrow Y$  vicina a piacere ad  $F$ , che ristretta su  $\partial W$  valga  $f_1 \sqcup f_2$  (anzi, il teorema ci garantisce che la possiamo scegliere in modo che coincida con  $F$  in un collare di  $X_1 \sqcup X_2$ ) e che sia trasversa ad  $A$ . Chiaramente la controimmagine di  $G$  in  $W$  è una sottovarietà per il teorema 1 e, grazie al fatto che  $G$  coincide con  $F$  in un collare di  $X_1 \sqcup X_2$  ne segue che  $G|_{G^{-1}(A)}$  realizza il cobordismo fra  $Z_1$  e  $Z_2$ .  $\square$

Vediamo ora qualche semplice applicazione della teoria della trasversalità. Perdonatemi per quello che sto per fare.

**Definizione 112** (Retrazione). Sia  $X$  una varietà con bordo.  $\tau : X \rightarrow \partial X$ , liscia, è una retrazione se  $\tau|_{\partial X} = \text{id}_{\partial X}$ .

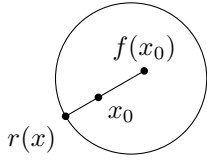
**Teorema 80.** Non esistono retrazioni!

*Dimostrazione.* Procediamo per assurdo. Sia  $y_0 \in \partial X$ . Prendo  $\tau$  retrazione. Prendo una funzione  $\tau'$  vicina a piacere a  $\tau$  che coincida con  $\tau$  sul bordo e trasversa ad  $\{y_0\}$ . Considero  $Y = \tau'^{-1}(y_0)$ .  $Y$  è una varietà 1-dimensionale, per il teorema 1 di trasversalità, e  $y_0 \in Y$ . Dunque  $Y$  ha bordo non vuoto. Ma, per la caratterizzazione delle varietà 1-dimensionali deve avere almeno un altro punto  $y_1$  nel bordo. Dunque  $y_1 = \tau(y_1) = \tau'(y_1) = y_0$ . Assurdo.  $\square$

Forse potreste perdonarmi grazie a questo:

**Teorema 81** (Teorema del punto fisso di Brouwer). *Sia  $D^n$  il disco chiuso di raggio 1 in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $f : D^n \rightarrow D^n$ . Esiste  $x_0 \in D^n$  punto fisso per  $f$ .*

*Dimostrazione.* Per assurdo non vi sia alcun punto fisso per  $f$ . Sia  $r : D^n \rightarrow \partial D^n$  tale che  $r(x)$  sia l'intersezione di  $\partial D^n$  con la semiretta di origine  $f(x_0)$  passante per  $x_0$ .  $r$  è una retrazione.  $\square$



## 2.23 Cenni alle dimostrazioni dei teoremi di trasversalità

**Teorema 82** (Teorema 1 di  $\pitchfork$ ). *Siano  $X, Y$  e  $A \subseteq Y$  varietà differenziabili, ( $X$  compatta,  $Y$  e  $A$  chiuse) e  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $f \pitchfork A$ . Allora  $Z := f^{-1}(A)$  è una sottovarietà di  $X$  e  $\text{codim}_X Z = \text{codim}_Y A$ .*

*Dimostrazione.* Per semplicità supponiamo  $\partial X = \emptyset$ .

- Caso particolare:  $A = \{y_0\}$  è composto da un solo punto.

L'idea è che possiamo “localizzare” il problema per ricondurci al caso in cui  $X = U$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$ ,  $A = \{0\}$  e applicare il teorema della funzione implicita (versione suriettiva). Quindi, poichè  $f \pitchfork A \iff y_0$  è un valore regolare per  $f$ , abbiamo che  $\forall x \in f^{-1}(y_0)$   $D_x f : T_x X \rightarrow Y$  è suriettiva.

- Riduzione del caso generale al caso particolare.

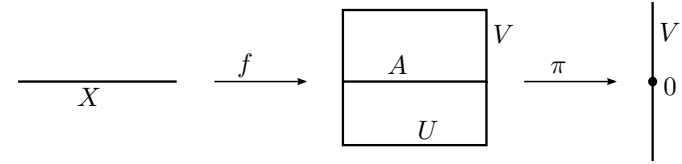
L'idea è che possiamo localizzare in arrivo:

$$(Y, A) = (U \times V, U \times \{0\}) \subseteq (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p \times \{0\})$$

e (eventualmente restringendo  $\pi$  all'immagine di  $f$ )

$$X \xrightarrow{f} U \times V \xrightarrow{\pi} V$$

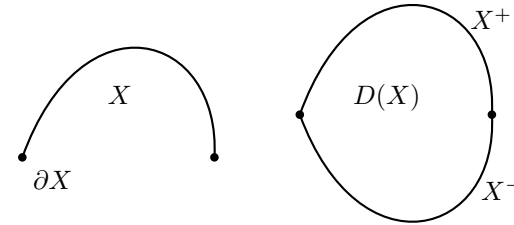
## 2.23. CENNI ALLE DIMOSTRAZIONI DEI TEOREMI DI TRASVERSALITÀ



Sia  $g = \pi \circ f$ , mostrare per esercizio che  $f \pitchfork A \iff g \pitchfork \{0\}$ .

La dimostrazione nel caso  $\partial X \neq \emptyset$  è sostanzialmente analoga, con qualche complicazione: l'idea è considerare la varietà *Doppio*

$$D(X) := X \sqcup X / (\text{id} : \partial X \rightarrow \partial X)$$



$$D(f) : D(X) \rightarrow Y \supseteq A$$

Sarà quindi  $D(Z) = (D(f))^{-1}(A)$  una sottovarietà di  $D(X)$  e allora  $Z = f^{-1}(A) = D(Z) \cap X$  sarà una sottovarietà di  $X$ . Basta verificare che  $D(Z) \pitchfork \partial X$  in  $D(X)$ .  $\square$

Ora ci prepariamo ad affrontare la dimostrazione del (Teorema 2). Faremo un po' di nomenclatura e poi caleremo dal cielo senza dimostrazione qualche cannone come il teorema di Brown. Infatti se non bariamo un po' non riusciamo ad arrivare in fondo.

**Definizione 113.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione liscia. Ricordiamo che un punto  $x \in X$  si dice *critico* per  $f$  se  $D_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  non è suriettiva. Chiameremo  $C(f)$  l'insieme dei punti critici di  $f$ .

*Osservazione 60.*  $Y \setminus f(C(f))$  è l'insieme dei *valori regolari* di  $f$ .

**Teorema 83** (Brown).  $Y \setminus f(C(f))$  è denso in  $Y$ .

*Dimostrazione.* È un corollario del Teorema di Morse-Sard<sup>10</sup> (cannone di analisi).  $\square$

**Teorema 84** (Teorema 2 di  $\pitchfork$ ).  $\pitchfork(X, Y, A) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \pitchfork A\}$  è un aperto denso in  $\mathcal{E}(X, Y)$ .

<sup>10</sup>Baro: gioca questa carta insieme ad un oggetto, puoi possedere ed usare l'oggetto anche se è contro le regole.



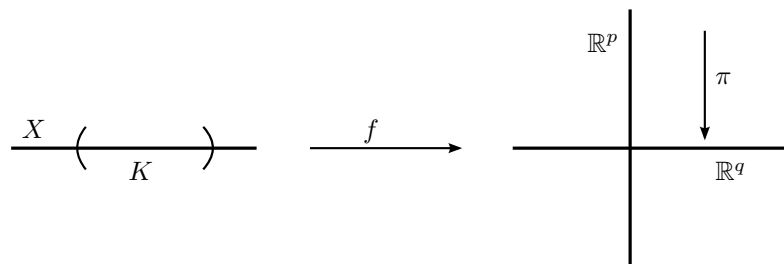
*Dimostrazione.*

**Apertura** Idea: l'algebra lineare da dei controlli locali (teorema della funzione implicita) e la compattezza permette di estendere i controlli a livello globale, estraendo un ricoprimento finito di aperti controllati, nello stesso modo in cui si andrà a fare ora per la densità.

**Densità**  $X$  è compatto  $\implies f(X) \subseteq Y$  è compatto, quindi posso ricoprire  $f(X)$  con un numero finito di carte locali di  $Y$ .

Localmente si vede  $Y$  come  $\mathbb{R}^n$ :  $Y = U \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  e  $A = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ . Per ogni punto si prenda una palla aperta  $B$  e la sua controimmagine  $K := f^{-1}(B) \subseteq X$ ; poiché i  $K$  ricoprono  $X$ , che è compatta, e dunque è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

Sia  $\cap_K (X, Y, A) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \cap A \text{ lungo } K\}$ . Dimostriamo che  $\forall K \cap_K (X, Y, A)$  è (un aperto) denso.



La condizione di trasversalità si traduce quindi nel richiedere che, dato  $f(x) \in A$ ,  $x$  non sia un punto critico per  $\pi \circ f$ , come accennato nella dimostrazione del Teorema 1 di trasversalità.<sup>11</sup> Per il teorema di Brown esiste  $\{y_n\} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  tale che  $y_n \rightarrow 0$  e  $\pi(y_n)$  è un valore regolare per  $\pi \circ f$ . Otteniamo  $\{f_n\} = \{f - y_n\}$  che è una successione di funzioni trasverse ad  $A$  e che converge uniformemente a  $f$  in  $K$ .

Abbiamo ottenuto che  $\cap_K (X, Y, A)$  è denso, dobbiamo estendere questa conquista a tutto  $X$ , ma questo non è difficile perché

1. per estendere le  $f_n$  basta usare le funzioni a foruncolo;
2. basta notare che  $\cap (X, Y, A) = \bigcap_K \cap_K (X, Y, A)$  e poichè l'intersezione è finita ottengo che anche  $\cap (X, Y, A)$  è denso.<sup>12</sup>

Per il caso  $\partial X \neq \emptyset$  si usa anche qui il trucco del *Doppio*.  $\square$

<sup>11</sup>Confrontando più sopra si ha che la scelta della carta ha portato a  $\pi(A) = 0$ , per cui anche  $\pi \circ f(x) = 0$

<sup>12</sup>Infatti intersezione finita di aperti densi è un aperto denso, in generale sarebbe falso: basta pensare a  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  e il suo complementare, entrambi densi con intersezione nulla

Fra le potenti applicazioni di questi teoremi di trasversalità c'è il teorema di immersione (vedi lezione successiva).

**Teorema 85** (Cannone buffo). Sia  $i(n) := \min\{N \mid \forall X^n \exists \varphi : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N\}$ , allora  $i(n) = n + (\text{numero di "1" nella scrittura in base 2 di } n)$ .<sup>13</sup>

## 2.24 Immersioni e embedding

**Teorema 86.** Una varietà compatta chiusa  $X$  di dimensione  $n$  ammette embedding  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  e immersione  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .

*Dimostrazione.* Si è già visto che  $\exists N$  t.c.  $\exists$  embedding  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ .

Scomponiamo  $\mathbb{R}^N$  in  $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ . Ora,  $\forall v \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1} : \mathbb{R}^N = \text{span}(v) \oplus \mathbb{R}^{N-1}$  e ad ogni tale  $v$  corrisponde una proiezione  $\pi_v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ . Proiettiamo dunque  $X$  su  $\mathbb{R}^{N-1}$  tramite  $\pi_v|_X$ : vogliamo dunque trovare una condizione su  $v$  per cui questa sia un'immersione. Si ha  $\ker \pi_v = \text{span}(v)$ , dunque  $\pi_v|_X$  è immersione se  $\forall x \in X, \forall z \in T_x X : z \notin \text{span}(v)$  (WLOG possiamo supporre  $\|v\| = \|z\| = 1$ , dunque se  $z \neq \pm v$ ).

Sia  $\nu : T(X) \rightarrow \mathbb{R}$  l'applicazione  $(x, z) \mapsto \|z\|$  e sia  $T_1(X) := \nu^{-1}(1)$  (ovvero l'unione delle sfere unitarie di ogni  $T_x X$ ).  $T_1(X)$  è dunque sottovarietà di  $T(X)$  (per teoremi di trasversalità) di dimensione  $2n - 1$ , e si ha  $T_1(X) \subseteq X \times S^{N-1}$ . sia ora  $\rho : T_1(X) \rightarrow S^{N-1}$  la proiezione  $(x, v) \mapsto v$ ; allora  $\pi_v|_X$  è immersione  $\Leftrightarrow v \in S^{N-1} \setminus \text{Im } \rho$ .

Per i teoremi di trasversalità avevamo visto che se  $\dim X < \dim Y$  e  $f : X \rightarrow Y$  liscia,  $Y \setminus f(X)$  è denso in  $Y$ . Dunque se  $\dim S^{N-1} > \dim T_1(X)$  (ovvero se  $N > 2n$ ) esiste un insieme denso (aperto per compattezza di  $X$ ) di vettori  $v$  che danno  $\pi_v|_X$  immersione. Dunque se esiste un embedding in dimensione maggiore di  $2n$ , esiste un'immersione in una dimensione in meno.

Per mostrare l'esistenza di un embedding in  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ragioniamo in modo analogo: a partire da un embedding  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  cerco  $v$  t.c.  $\pi_v|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$  sia un embedding (ovvero, per compattezza di  $X$ , un'immersione iniettiva).

Consideriamo  $X \times X \setminus \Delta$ , con  $\Delta := \{(a, b) \in X \times X \mid a = b\}$ ; si tratta di una varietà non compatta di dimensione  $2n$ . Sia ora  $\alpha : X \times X \setminus \Delta \rightarrow S^{N-1}$  l'applicazione  $(x, y) \mapsto \frac{x-y}{\|x-y\|}$ .

Se  $\pi_v$  non è iniettiva,  $\exists x, y \in X$  t.c.  $x - y \in \text{span}(v)$ , ovvero (supponendo WLOG  $\|v\| = 1$ )  $\pi_v$  è iniettiva se  $v \notin \text{Im } \alpha$ , perché in questo caso non vi sono due punti di  $X$  allineati lungo  $v$ . Dunque, se  $\dim S^{N-1} > \dim X \times X \setminus \Delta$  (ovvero se  $N > 2n + 1$ ) esiste un insieme denso di vettori  $v$  che rendono  $\pi_v$  iniettiva; siccome inoltre esiste un denso aperto che la rende immersione, l'intersezione (non nulla per le proprietà di densità) contiene vettori che rendono  $\pi_v$  immersione iniettiva, ovvero

<sup>13</sup>Mentre per gli embedding è ancora un problema aperto.

embedding. Procedendo induttivamente concludiamo che esiste un embedding in  $\mathbb{R}^{2n+1}$  e dunque per quanto visto prima un'immersione in  $\mathbb{R}^{2n}$ .  $\square$

## 2.25 Versione orientata dei teoremi di trasversalità

**Proposizione 87** (Teorema 1 di  $\pitchfork$ , versione orientata). *Siano  $X, Y \supseteq A$  varietà orientate e  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f \pitchfork A$ . Allora  $Z = f^{-1}(A)$  oltre a essere una sottovarietà di  $X$  ammette una procedura di orientazione.*

Prima di esibire questa procedura, usiamo questo fatto per mostrare la versione orientata di un fatto già noto: sappiamo che per

$$\begin{array}{ccc} X_0 & & \\ & \searrow f_0 & \\ W & \xrightarrow{F} & Y \supseteq A \\ & \nearrow f_1 & \\ X_1 & & \end{array}$$

con  $(X_0, f_0) \sim_{cob} (X_1, f_1)$  mediante  $(W, F)$  e  $f_0, f_1 \pitchfork A$ , abbiamo per le preimmagini  $Z_0 = f_0^{-1}(A)$ ,  $Z_1 = f_1^{-1}(A)$  che  $(Z_0, f_0|_{Z_0}) \sim_{cob} (Z_1, f_1|_{Z_1})$  ed il cobordismo è realizzato da  $(U, \tilde{F}|_U)$ , dove  $\tilde{F}$  è un'applicazione su  $W$  vicina ad  $F$  e trasversa ad  $A$  per cui  $\tilde{F}|_{X_0} = f_0$ ,  $\tilde{F}|_{X_1} = f_1$ , e  $U = \tilde{F}^{-1}(A) \subseteq W$ .

Ora, se  $(X_0, f_0) \sim_{cob+} (X_1, f_1)$  con il cobordismo orientato realizzato da  $W, F$ , applicando la procedura di orientazione alle controimmagini di  $A$  otteniamo che  $(U, \tilde{F}|_U)$  realizza il cobordismo orientato  $(Z_0, f_0|_{Z_0}) \sim_{cob+} (Z_1, f_1|_{Z_1})$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo ora la procedura di orientazione, partendo dal caso  $A = \{y_0\}$ ,  $\dim X = \dim Y$ .

Si ha  $f \pitchfork A \Leftrightarrow y_0$  è valore regolare per  $f$ , dunque  $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\}$  (finito per compattezza di  $X$ )<sup>14</sup> è un insieme di punti non critici, e per l'uguaglianza delle dimensioni  $D_{x_i}f : T_{x_i}X \rightarrow T_{y_0}Y$  è un isomorfismo.

Ora, se  $Y, y_0$  e  $X$  sono orientati, fisso in  $T_{y_0}Y$  una base  $\mathcal{B}_{y_0}$  nella classe di orientazione di  $Y$  e assegno a  $x_i$  il segno (dunque l'orientazione)  $+$  se la controimmagine di questa base per  $D_{x_i}f$  è una base nella classe di orientazione di  $X$ , ed il segno  $-$  se è nell'altra classe di orientazione.

Rilassando la condizione sulle dimensioni (dunque passando al caso  $\dim X \geq \dim Y$ , altrimenti non si potrebbe avere  $D_x f$  suriettivo) e ponendo  $Z = f^{-1}(y_0)$ ,

<sup>14</sup>Infatti se fossero infiniti avrebbero un punto di accumulazione, ma allora per continuità anche quel punto starebbe nella controimmagine e in quel punto il differenziale non sarebbe suriettivo, perchè in ogni intorno ha dei punti che hanno il suo stesso valore

## 2.25. VERSIONE ORIENTATA DEI TEOREMI DI TRASVERSALITÀ

per  $x \in Z$  abbiamo  $T_x X = T_x Z \oplus_{\perp} \nu(x)$ , con  $\nu(x)$  l'iperpiano ortogonale a  $T_x Z$ .  $D_x f : \nu(x) \rightarrow T_{y_0} Y$  è quindi isomorfismo, dunque  $(D_x f)^{-1}(\mathcal{B}_{y_0})$  è base di  $\nu(x)$ ; scelgo pertanto per  $Z$  l'orientazione tale per cui una base di  $T_x Z$  compatibile con essa completa la base di  $\nu(x)$  appena esibita ad una base di  $T_x X$  compatibile con l'orientazione di  $X$ .

Il caso  $\dim A > 0$  si riconduce a quanto mostrato per  $A = \{pt\}$ , come si vedrà nella lezione seguente.  $\square$

## 2.26 Ripasso della lezione sulla trasversalità

Sia  $f : X \rightarrow Y$  e  $A \in Y$  tale che  $f \pitchfork A$ , le varietà sono tutte orientate, allora  $Z = f^{-1}(A)$  è orientabile, precedentemente abbiamo dato una procedura per orientarla. Sia  $A = \{y_0\}$ ,  $y_0$  è un valore regolare per  $f$ . Localmente ho la situazione linearizzata del teorema della funzione implicita surgettiva.

Sia  $i$  una immersione cioè  $X \hookrightarrow Y$  e  $A \subset Y$ , definisco quindi  $i^{-1}(A) = X \pitchfork A$ . Si ha anche  $T_x X + T_y A = T_y Y$  e definisco  $T_x(X \pitchfork A) = T_x X \cap T_x A$ . Nella lezione precedente ho dato una procedura per orientare  $i^{-1}(A)$ . Ora voglio orientare  $T_x(X \pitchfork A)$  sapendo che l'unione degli spazi di cui è intersezione da tutto l'ambiente  $T_x Y$ . Per fare ciò si darà una procedura per orientare l'intersezione di due spazi vettoriali. Ho che  $\mathbb{R}^N$  è lo spazio ambiente e vale  $V + W = \mathbb{R}^N$ . Sia  $\mathcal{B}$  una base dell'intersezione  $V \cap W$ . Le basi  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_V)$  e  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_W)$  sono basi di  $V$  e  $W$ .

L'orientazione di  $V$  e  $W$  è data da queste ultime basi. L'insieme  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$  è base di  $\mathbb{R}^N$  e produce quindi una orientazione di  $\mathbb{R}^N$ . L'orientazione della base  $\mathcal{B}$  di  $V \cap W$  è quella per cui la procedura specificata produce una base per  $\mathbb{R}^N$  che ha la stessa orientazione data in partenza.

*Osservazione 61.* Se scambio l'ordine delle varietà ottengo  $A \pitchfork X$  e  $X \pitchfork A$ . Si può verificare che vale la relazione:  $A \pitchfork X = (-1)^{\text{codim}(X) \cdot \text{codim}(Y)} X \pitchfork A$ . Dove il segno significa semplicemente l'orientazione (stessa orientazione o orientazione opposta).

Se è  $f : X \rightarrow Y$  con  $A \subseteq Y$  generico per dimostrare che  $f^{-1}(A)$  è una varietà e dargli una orientazione ci si riconduce al caso in cui  $A = \{y_0\}$ , a questo punto si applica la procedura esposta precedentemente.

**Definizione 114** (Trasversalità di funzioni). Siano date  $f_1 : X_1 \rightarrow Y$  e  $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ . Voglio dare un senso alla scrittura  $f_1 \pitchfork f_2$ . Definiamo  $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y \times Y$  come  $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$ . Considero l'insieme diagonale  $\Delta = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid y_1 = y_2\}$ . Diciamo  $f_1 \pitchfork f_2 : \Leftrightarrow f_1 \times f_2 \pitchfork \Delta$ .

**Teorema 88.** Data  $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ , definiamo  $\pitchfork(A, f_2) := \{f : X_1 \rightarrow A \supseteq Y \mid f \pitchfork f_2\}$  l'insieme così definito è un aperto denso di  $\mathcal{E}(X_1, Y)$ .

Abbiamo visto nelle lezioni precedenti:

- Non esistono retrazioni  $r : X \rightarrow \partial X$  diffeomorfismi, da cui segue il teorema del punto fisso di Brouwer

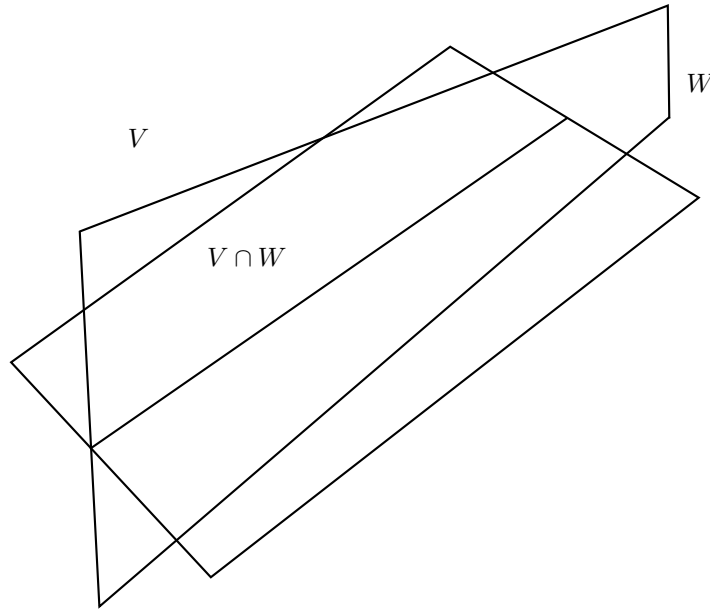


Figura 23: Intersezione di spazi vettoriali

- Vale il teorema di embedding cioè ogni varietà  $X^n$  di dimensione  $n$  si può immergere con un embedding in  $\mathbb{R}^{2n+1}$  se non richiedo iniettività della funzione nella sua immagine (condizione per avere embedding) posso comunque trovare un'immersione in  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Teorema 89** (Di Whitney versione difficile).  $\forall X^n$  trovo un embedding  $X^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .

*Osservazione 62.* Per dimostrarlo non basta usare considerazioni di trasversalità. Devo definire una procedura a partire dalla immersione in  $\mathbb{R}^{2n}$  per eliminare tutte le autointersezioni della varietà immersa, questa procedura è nota come Whitney Trick.

*Osservazione 63.* In tutte le dimensioni ( $n \neq 4$ ) ogni varietà omeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  è diffeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . In  $\mathbb{R}^4$  questo non vale e c'è un continuo di varietà non diffeomorfe tra loro.

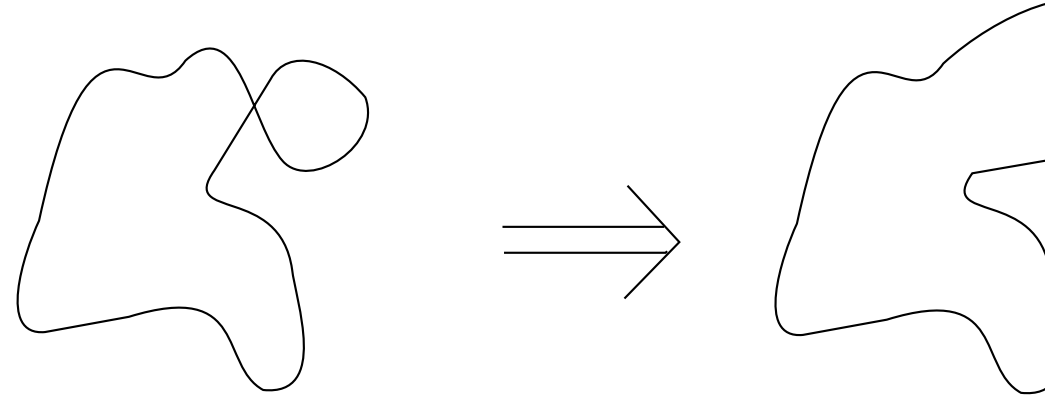


Figura 24: Whitney Trick

## 2.27 Teoria del grado

$f : X^n \rightarrow Y^n$  con  $X^n$  compatta e chiusa e  $Y^n$  connessa. Voglio definire il grado della funzione  $f$ , dimostreremo che è un invariante per cobordismo.

**Definizione 115** (Versione non orientata). Procederemo seguendo una serie di semplici passi:

- Fisso  $y_0 \in f(X)$ .
- Prendo  $g$  vicina a  $f$  nel senso della topologia definita su  $\mathcal{E}(X, Y)$  tale che  $g \pitchfork \{y_0\}$  si vede che  $g$  è omotopa a  $f$  dai teoremi dimostrati nelle lezioni precedenti sulla trasversalità.
- $g^{-1}(y_0) = x_1, x_2, \dots, x_k$  è un insieme di cardinalità finita, infatti  $X$  è compatta
- Definisco  $\text{grad}_2(f) = k \mod 2$

Dunque vediamo che il grado di una funzione tra varietà non orientate è una funzione  $\mathcal{E}(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Teorema 90.** Se  $f_1 : X_0 \rightarrow Y$  e  $f_2 : X_0 \rightarrow Y$  sono cobordanti allora  $\text{grad}_2(f_1) = \text{grad}_2(f_2)$ . In particolare questo vale quando sono omotope, infatti l'omotopia è un particolare cobordismo.<sup>15</sup>

<sup>15</sup>Dire che hanno lo stesso grado è un lieve abuso, dato che non si è ancora dimostrato che è ben posto, si dovrebbe dire che le controimmagini, quelle definite nella definizione di grado, hanno la stessa parità delle cardinalità per le due funzioni, ma alla luce del corollario seguente è, a posteriori, la stessa cosa

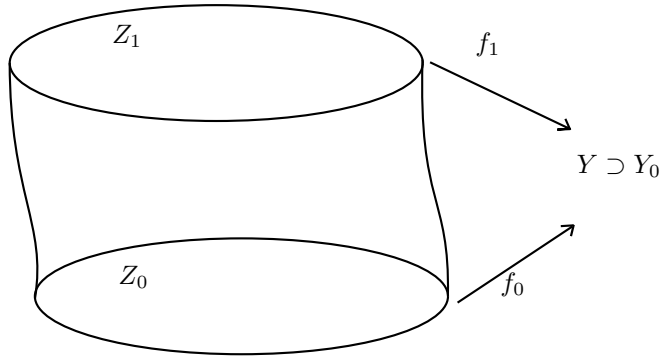


Figura 25: Cobordismo di funzioni

*Dimostrazione.* Siano  $g_1, g_2$  rispettivamente vicine, come da definizione di grado, a  $f_1, f_2$ . Allora ognuna delle  $g$  è omotopa alla rispettiva  $f$ , e quindi cobordante ad essa. Ma essendo il cobordismo una relazione di equivalenza esse sono cobordanti tra loro. Da questo posso concludere che, per il terzo teorema di trasversalità,  $Z_1 = g_1^{-1}(A)$  e  $Z_2 = g_2^{-1}(A)$  sono varietà cobordanti di dimensione 0 (poiché  $y_0$  è un valore regolare per trasversalità) quindi la parità della loro cardinalità è uguale.  $\square$

**Corollario 91** (Buona definizione del grado).  $f: \text{grad}_2(f)$  è ben definita cioè non dipende né dalla scelta di  $y_0$  né dalla scelta di  $g$ .

*Dimostrazione.* Si prendano  $g_1, g_2$ , abbastanza vicine a  $f$  come nella definizione di grado. Sappiamo che  $g_1, g_2$  sono omotope a  $f$  e che, poiché l'omotopia è una relazione di equivalenza, lo sono anche le funzioni  $g_1$  e  $g_2$  fra loro, che sono dunque cobordanti. Dunque, per il teorema precedente, il grado è indipendente dalla scelta della funzione  $g$ .

Ora devo eliminare l'arbitrarietà del punto  $y_0$ . Prendo due punti  $x$  e  $y$  faremo vedere nella prossima lezione che si può utilizzare il fatto che  $Y$  è connessa per costruire una isotopia  $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  tale che posto  $H_t = H|_{Y \times t}$  ho che  $H_t$  è un diffeomorfismo di  $Y \forall t \in [0, 1]$  e vale che  $H_0 = \text{id}$  e  $H_1(x) = y$ . Comunque prendo due punti esiste un diffeomorfismo che manda un punto nell'altro, in questo senso nessun punto è privilegiato. Questo significa che una varietà è omogenea, cioè a meno di diffeomorfismi ogni punto è equivalente (è ovviamente diffeomorfe  $\Leftrightarrow$  cobordanti, tra l'altro il cobordismo è proprio l'isotopia, definita sul cilindro  $Y \times [0, 1]$ ).  $\square$

**Teorema 92** (Lemma di omogeneità). Sia  $Y$  una varietà connessa, allora  $\forall y_0, y_1 \in Y, \exists f$  diffeomorfismo  $f: Y \rightarrow Y$  t.c.  $f(y_0) = y_1$ .

Inoltre posso richiedere che  $f$  sia a supporto compatto (ovvero è l'identità fuori da un compatto) e che sia isotopa all'identità (ovvero  $\exists H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  t.c.  $H_t$  diffeo  $\forall t, H_0 = \text{Id}, H_1 = f$ )

*Dimostrazione.* Partiamo dal caso particolare in cui  $Y = \mathbb{R}^n$ .

Prendiamo due punti  $x$  e  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\text{WLOG } x \equiv 0$ , (l'origine). La funzione cercata potrebbe essere  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  t.c.  $g(x) = x + y$ .  $f(0) = y$  e  $f$  è isotopa all'identità ( $H(x, t) = x + ty$ ), tuttavia  $f$  non è a supporto compatto, poiché la traslazione muove tutto  $\mathbb{R}^n$ . Per rimediare sfruttiamo le funzioni a foruncolo precedentemente definite.

Sia  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione a foruncolo da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$ . La funzione cercata potrà quindi essere scritta come  $g(x) = x + \lambda(x)y$

Passiamo adesso ad una varietà  $Y$  connessa qualunque.

Definiamo una relazione di equivalenza:  $x \sim y \Leftrightarrow \exists f$  con le proprietà richieste. È facile verificare che si tratta di una relazione di equivalenza. A questo punto se dimostro che le classi di equivalenza sono aperte posso concludere: poiché  $Y$  è connesso esiste un'unica classe di equivalenza, tutto  $Y$ . Devo mostrare quindi che  $\forall x \in Y \exists U_x \subseteq Y$  t.c.  $\forall y \in U_x x \sim y$ .

Considero una carta locale intorno a  $x$ . Suppongo  $\text{WLOG } x = 0$ . All'interno della carta locale posso considerare la funzione  $g$  definita prima.  $\square$

Sia  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$  diffeomorfismo con  $f(0) = 0$ . Definiamo  $\hat{f}: S^n \rightarrow S^n$  come  $\hat{f}(x) := \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ . Abbiamo che  $\text{grad } \hat{f} = \text{sgn det } D_0 f$ . Ciò segue dalla linearizzazione a meno di isotopia dei diffeomorfismi  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  più il fatto che il grado è invariante di omotopia.

## 2.28 Numero d'intersezione

Sia  $Y^n$  la varietà ambiente e  $X_1, X_2$  sottovarietà compatte chiuse codimensionali ( $\dim X_1 + \dim X_2 = \dim Y$ ). Siano  $X_1 \xrightarrow{i_1} Y$  e  $X_2 \xrightarrow{i_2} Y$  le inclusioni. Diciamo che  $X_1 \pitchfork X_2 \Leftrightarrow i_1 \pitchfork i_2$ . Ricordiamo la definizione di trasversalità per le funzioni:  $i_1 \pitchfork i_2 \Leftrightarrow ((x_1, x_2) \mapsto (i_1(x_1), i_2(x_2))) =: i_1 \times i_2 \pitchfork \Delta := \{(y, y) \in Y \times Y\}$ .

Siano  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$  piccole perturbazioni di  $i_1$  e  $i_2$ . Poiché gli embedding sono aperti, possiamo scegliere  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$  embedding, omotopi a  $i_1$  e  $i_2$  e  $\hat{i}_1 \pitchfork \hat{i}_2$ . Siano  $\hat{X}_1 := \hat{i}_1(X_1)$  e  $\hat{X}_2$  analogamente (vedi Figura 26).

**Definizione 116** (Numero d'intersezione). Il numero d'intersezione di  $X_1$  e  $X_2$  è  $(X_1 \cdot X_2) := \#(\hat{X}_1 \cap \hat{X}_2) \pmod{2}$ .

**Teorema 93.** È una buona definizione.

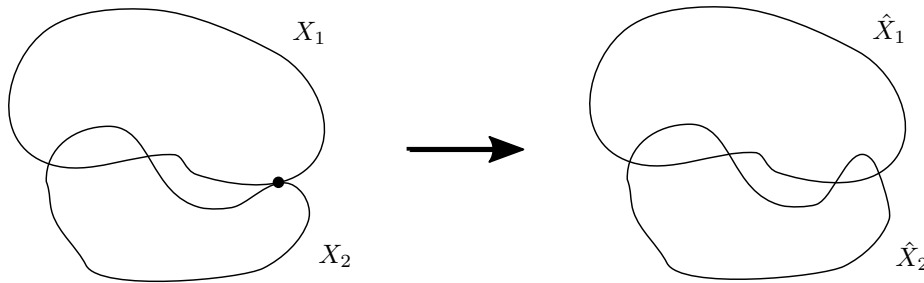


Figura 26: Per definire il numero di intersezioni di due varietà, le spostiamo un po' in modo che siano trasverse.

### 2.28.1 Versione orientata

Se  $Y, X_1, X_2$  sono orientate, ogni punto di  $\hat{X}_1 \cap \hat{X}_2$  ha un segno.<sup>16</sup> Allora abbiamo naturalmente

**Definizione 117** (Numero d'intersezione intero).

$$(X_1 \cdot X_2) := \sum_{x \in \hat{X}_1 \cap \hat{X}_2} \text{sgn } x$$

**Teorema 94.** È una buona definizione.

*Osservazione 64.* Nella versione non orientata  $(X_1 \cdot X_2) = (X_2 \cdot X_1)$ , mentre in quella orientata  $(X_1 \cdot X_2) = (-1)^{\text{codim } X_1 \text{ codim } X_2} (X_2 \cdot X_1)$ .

*Osservazione 65.* Poiché  $X_1$  e  $X_2$  sono codimensionali,  $\text{codim } X_1 \text{ codim } X_2 = \dim X_1 \dim X_2$ .

### 2.28.2 Autointersezione

Sia  $X$  compatta chiusa orientata, e non lo ripeteremo. C'è un'immersione canonica  $X \hookrightarrow TX$  come sezione nulla:  $X \ni x \mapsto \underline{0} \in T_x X$ . Allora è definito il numero di autointersezione di  $X$  dentro  $TX$ . Siccome è importante ha un nome:

**Definizione 118** (Caratteristica di Eulero-Poincaré).  $\chi(X) := (X \cdot X)$ .

In generale una sezione è un'applicazione  $s$  che fa commutare questo diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & TX \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

<sup>16</sup>Che si ricorda essere positivo se l'orientazione della base  $(\mathcal{B}_{X_1}, \mathcal{B}_{X_2})$  è la stessa di  $Y$ , negativo altrimenti

ovvero è un campo di vettori tangenti. La sezione nulla è il campo nullo, chiamiamola  $s_0$ . Ha senso chiedersi se  $s \pitchfork s_0$ . I punti in cui s'intersecano sono gli zeri di  $s$ . Per definizione,  $s \pitchfork s_0$  se e solo se in carte locali centrate sugli zeri  $D_0 s$  è iniettivo.

Rivediamo la costruzione di  $(X \cdot X)$ . Sia  $X \xrightarrow{h} TX$  vicina, omotopa e trasversa a  $s_0$ . Non è detto che  $h$  sia una sezione, e invece:

**Lemma 95.** Non è restrittivo assumere che  $h$  sia una sezione.

*Dimostrazione.* La composizione  $\pi \circ h$  è vicina a  $\pi \circ s_0 = \text{id}$  che è un diffeomorfismo e i diffeomorfismi sono aperti, allora **WLOG**  $\pi \circ h$  è un diffeomorfismo  $X \rightarrow X$ . Componendo ancora,  $s := h \circ (\pi \circ h)^{-1}$  è una sezione e  $s \pitchfork s_0$ <sup>17</sup>.  $\square$

Dunque siamo in questa situazione:

- $s_0$  campo nullo
- $s$  campo trasverso a  $s_0$
- $\{x_1, \dots, x_k\}$  zeri di  $s$

Quindi per definizione  $(X \cdot X) = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(x_i)$ , dove  $\text{sgn } x = \text{sgn det } D_0 s$  in una carta locale centrata in  $x$  (cioè con  $\phi(x) = 0$ ,  $\phi$  è la carta).

*Osservazione 66.* Ogni  $s$  è omotopo a  $s_0$ , vicino o lontano che sia.

Allora abbiamo dimostrato che

$$\forall s \text{ campo trasverso a } s_0 : (X \cdot X) = \sum_{x \text{ zero di } s} \text{sgn } x$$

*Osservazione 67.* In carte locali,  $\text{sgn } x = \text{grad } \hat{s}^{18}$ , con  $\hat{s}$  riferita a una palla di centro  $x$ .

Da cui sorge naturalmente un tentativo di generalizzazione, dato che il grado lo posso definire anche per sezioni non trasverse a  $s_0$ .

Sia  $s$  campo su  $X$  con un numero finito di zeri, non necessariamente trasverso a  $s_0$ . Possiamo sostituire il segno di uno zero con il grado di  $\hat{s}$  in carte locali, questo si può fare anche se lo zero è degenerare.

**Definizione 119.** Dato  $x$  zero isolato di un campo  $s$  chiamiamo *indice di  $x$* :  $i(x) := \text{grad } \hat{s}$ .

*Osservazione 68.*  $x$  non degenerare  $\implies i(x) = \text{sgn } x$ .

**Definizione 120.** Sia  $s$  campo con zeri tutti isolati  $\{x_1, \dots, x_k\}$ . La *caratteristica di  $s$*  è:

$$\chi(s) := \sum_{i=1}^k i(x_i)$$

<sup>17</sup>La dimostrazione di quest'ultimo fatto è non banale.

<sup>18</sup>Vedi inizio lezione.

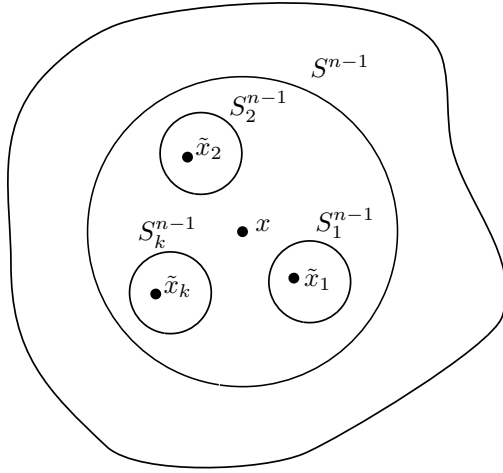


Figura 27: Faccio esplodere uno zero eventualmente degenerare del campo in più zeri regolari.

*Osservazione 69.*  $s \pitchfork s_0 \implies \chi(s) = \chi(X)$ .

**Teorema 96** (di Hopf). *In verità vale  $\chi(s) = \chi(X)$  anche se  $\neg(s \pitchfork s_0)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x$  zero di  $s$ . Mi metto in una carta locale centrata in  $x$  con dentro un  $S^{n-1}$ . Considero un  $\tilde{s}$  omotopo a  $s$  e  $\tilde{s} \pitchfork s_0$ , con gli zeri contenuti nell' $S^{n-1}$  (vedi Figura 27). Allora ho che  $i_s(x) = \text{grad } \hat{s}_{S^{n-1}} = \text{grad } \hat{\tilde{s}}_{S^{n-1}}$  per omotopia. Siano  $\tilde{x}_i$  gli zeri di  $\tilde{s}$ , intorno a ognuno prendo un  $S_i^{n-1}$ . Ho che  $i_{\tilde{s}}(\tilde{x}_i) = \text{grad } \hat{\tilde{s}}_{S_i^{n-1}}$  e dunque che  $\sum_i i_{\tilde{s}}(\tilde{x}_i) = i_s(x)$  per cobordismo.  $\square$

*Osservazione 70.* Condizione necessaria per avere campi non nulli è che la varietà abbia caratteristica nulla.

**Definizione 121** (Varietà parallelizzabile). Una varietà  $X$  si dice *parallelizzabile* se  $TX \simeq X \times \mathbb{R}^n$ .

Tutte le varietà sono parallelizzabili?

*Osservazione 71.* Se questo fosse vero, allora su ogni varietà  $X$  avremmo l'esistenza di un campo vettoriale mai nullo: infatti se  $TX \simeq X \times \mathbb{R}^n$ , abbiamo un diffeomorfismo  $\phi$  tra i due insiemi. Ma su  $X \times \mathbb{R}^n$  posso prendere il campo costante  $s(x) = e_1$ , e poi portarlo indietro tramite  $\phi^{-1}$ , ottenendo un campo vettoriale su  $X$  mai nullo. <sup>19</sup>

<sup>19</sup>Il campo non sarà costante in tutte le carte di  $TX$ , ma lo sarà carta per carta. Abbiamo però che non si annullerà mai, poiché essendo  $\phi$  un diffeomorfismo non può accadere in nessuna presentazione locale che mandi un vettore non nullo in un vettore nullo, dato che il differenziale sarà invertibile.

Analizziamo intanto i casi delle sfere  $S^n$ .

*Esempio 16* ( $S^1$ ). E' facile mostrare che esiste un campo di vettori mai nullo: basta prendere quello tangente in verso antiorario e modulo costante.

*Esempio 17* ( $S^2$ ). Mostro che esiste un campo vettoriale che si annulla solo sul polo nord e sul polo sud. Dunque ho due zeri isolati. Per calcolare  $\chi(S^2)$  devo dunque sommare  $i_N(s)$ ,  $i_S(s)$  con  $N = (0, 0, 1)$ ,  $S = (0, 0, -1)$ .

*Osservazione 72.* Per il lemma di Morse, dato che  $N$ ,  $S$  sono punti critici della mappa  $t$ , esiste un sistema di coordinate in cui la funzione è quadratica. In particolare, esiste intorno di  $N$  in cui la funzione è nella forma  $-(y_1^2 + y_2^2)$  e un intorno di  $S$  in cui è nella forma  $y_1^2 + y_2^2$ .

Segue che  $i(N) = i(S) = 1$  (ho due autovalori negativi o due positivi). Dunque  $\chi(S^2) = 2$ .

**Proposizione 97.**  $\chi(S^{2n+1}) = 0$  e  $\chi(S^{2n}) = 2$ .

*Dimostrazione.* Basta considerare un campo analogo a quello esibito per  $S^2$  e concludere tramite Morse.  $\square$

**Corollario 98.** *Per  $n$  pari non è possibile che esista un campo mai nullo ("la sfera non è pettinabile").*

**Proposizione 99.** *Ci chiediamo se effettivamente per le sfere  $S^{2n+1}$  esista un campo di vettori mai nullo. La risposta è affermativa.*

*Dimostrazione.* La risposta è affermativa:  $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$ . Considero la mappa

$$f : S^{2n+1} \rightarrow TS^{2n+1}$$

$$(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \mapsto ((x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}), (-x_1, y_1, \dots, -x_{n+1}, y_{n+1}))$$

$\square$

*Osservazione 73.* Questo fatto è vero più in generale:  $X$  varietà,  $\chi(X) = 0 \implies \exists$  campo vettoriale mai nullo.

**Teorema 100.**  $X$  ammette un campo tangente mai nullo  $\iff \chi(X) = 0$

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$  già visto

$\Leftarrow$  ci si appoggia al:

**Teorema 101** (Teorema di Hopf).  $f_0$  omotopa  $f_1 \iff \text{grad } f_0 = \text{grad } f_1$  <sup>20</sup>

Caso particolare:  $f : S^n \rightarrow S^n$  è omotopa ad una costante  $\iff \text{grad } f = 0$

<sup>20</sup>La freccia  $\iff$  era stata dimostrata quando si verificò che il grado di una funzione è ben definito

Sia dunque  $\chi(X) = 0$ . Sia  $s \pitchfork s_0$ , con  $x_j$  zero isolato di  $s$ . Applicando il lemma di omogeneità non è restrittivo supporre che  $x_1, \dots, x_k \in B$ , palla dentro una carta di  $X$ . Inoltre considero per ogni  $x_j$  una palletta di centro  $x_j$  e raggio abbastanza piccolo da non contenere altri  $x_i$ . Si ha che la figura realizza un cobordismo esplicito.

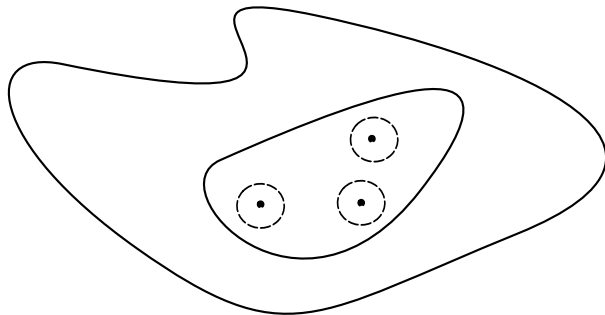


Figura 28: Punti di Morse in carta locale

Perciò la somma dei gradi interni è pari al grado esterno

$$\sum_{j=1}^k i_s(x_j) = 0 \quad (2.1)$$

Perciò la sezione sulla sfera esterna è omotopa ad una costante, dunque taglio all'interno della palla e sostituisco con il vettore costante e in questo modo non ho più zeri  $\rightarrow \hat{s}$  si estende ad un'applicazione  $F : D^{n+1} \rightarrow S^n$ , sostituisco  $\hat{s}$  definito su  $D^{n+1}$ , con il campo  $F$  che estende  $\hat{s}|_{S^n}$ .

□

*Osservazione 74.*

- Per semplicità si consideri  $X$  connesso, quindi ha 2 orientazioni possibili.  $\chi(X) = X \cdot X$  in  $TX$ , il fibrato tangente, e si ha che non dipende dall'orientazione di  $X$  fissata, infatti passando da un'orientazione all'altra si ha che cambia anche quella delle fibre, perciò in  $TX$  quando si cambia base si ha che nel Jacobiano cambia di segno un blocco di dimensione pari, e perciò il determinante rimane 1;
- Lo stesso ragionamento vale anche se  $X$  non è orientabile, ma solo a livello locale, questo però è sufficiente per far sì che  $\chi(X)$  è ben definita anche in questo caso;
- Sia  $f : X \rightarrow Y$  con entrambe le varietà compatte e connesse,  $f$  diffeomorfismo locale, e sia  $p = \# f^{-1}(y)$ . Si ha che  $p$  è costante come funzione di  $y$ .

*Esercizio 11.* allora  $\chi(X) = p \chi(Y)$ .

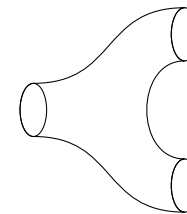
*Esempio 18.* L'ultima osservazione ci permette ad esempio di calcolare la caratteristica di Eulero,

$$\chi(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$$

*Esercizio 12.* La caratteristica di Eulero è "moltiplicativa"  $\chi(X_1 \times X_2) = \chi(X_1)\chi(X_2)$

## 2.29 Funzioni di Morse

Si consideri la triade  $(W, V_0, V_1)$



**Definizione 122** (Funzioni di Morse). Una funzione sulla triade,  $f : W \rightarrow [0, 1]$  con  $f^{-1}(0) = V_0$  e  $f^{-1}(1) = V_1$ , è detta di Morse se:

- non ci sono punti critici di  $f$  in un intorno di  $\partial W = V_0 \sqcup V_1$
- tutti i punti critici sono non degeneri

Perciò per una funzione di Morse si ha che  $\forall x$  critico per  $f \exists$  una carta locale, in cui (ponendo **WLOG**  $x = 0$ ) la funzione coincide con il modello locale di Morse  $f(x) = -(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + (x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2)$ , dove  $n$  è la dimensione di  $W$  e  $\lambda$  l'indice del punto critico.

**Caratterizzazione dei punti critici tramite una metrica Riemanniana** Si ha che l'applicazione tangente di una funzione  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  è un campo di funzionali su  $TW$ , cioè un elemento di  $T^*W$ , il fibrato cotangente. Fissiamo su  $W$  una metrica Riemanniana  $g$ , cosicché  $\nabla_g f$  è il campo di vettori che rappresenta  $Df$  tramite  $g$ .

Si applica ora quest'ultimo risultato alle funzioni di Morse. Fissiamo dunque una metrica che nelle carte di Morse della funzione in oggetto appaia come la metrica standard di  $\mathbb{R}^n$ .

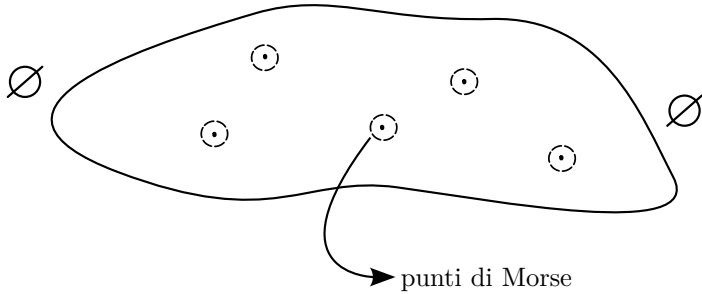


Figura 29: Transizione da vuoto a vuoto

Sia ora  $W$  chiusa, quindi una transizione dal vuoto al vuoto.  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ , e sia  $g$  la metrica scelta. Allora si ha che:

$$\{\text{gli zeri di } \nabla_g f\} = \{\text{punti critici di } f\}$$

In quanto punto critico  $x$  ha associato un indice di Morse  $\lambda$ , mentre come campo di vettori ha associato il segno del Jacobiano, che si legge esplicitamente dal gradiente (che costituisce la sezione in esame).

**Teorema 102.**  $W$  compatta chiusa,  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  di Morse allora  $\chi(W) = \sum_{x \text{ p.to critico}} (-1)^\lambda$  con  $\lambda$  indice di Morse del punto.

**Teorema 103** (Altro teorema di trasversalità).  $\mathcal{M}(W) = \{f : W \rightarrow \mathbb{R} \text{ di Morse}\}$  è un aperto denso in  $\mathcal{E}(W, \mathbb{R})$ .

*Osservazione 75.* Se  $f : W^n \rightarrow \mathbb{R}$  è di Morse anche  $-f$  lo è, e calcolando la caratteristica di Eulero mediante queste due funzioni dobbiamo perciò ottenere lo stesso risultato. Da cui si ottiene che:

$$\chi(W) = \sum_{x_j \text{ p.to critico}} (-1)^{\lambda_j} = \sum_{x_j \text{ p.to critico}} (-1)^{n-\lambda_j}$$

con  $\lambda_j$  indice di Morse di  $x_j$ .

Dall'ultima osservazione si ottiene:

**Proposizione 104.** Se  $\dim W$  è dispari  $\implies \chi(W) = 0$

**Corollario 105.** Ogni varietà di dimensione dispari ammette un campo di vettori mai nullo.

Nella lezione precedente si era visto come il doppio modo di calcolare la caratteristica di Eulero (per mezzo delle funzioni di Morse e per mezzo dei zeri di gradienti) ci fornisse dei bei risultati come il fatto che  $\chi(X) = 0$  se  $\dim(X)$  è dispari.

**Definizione 123** (Campo di vettori sulla triade). Un campo di vettori sulla triade  $(W, V_0, V_1)$  è una sezione di  $T(W)$  tale che sia entrante in  $V_0$  e uscente in  $V_1$ .

**Teorema 106.** Sia  $s$  un campo di vettori su  $(W, V_0, V_1)$ . La funzione  $\chi(s) := \sum_x \text{zeri di } s \cdot i_s(x)$  è indipendente da  $s$ .

**Definizione 124** (Caratteristica di Eulero di una triade). Si definisce  $\chi(W, V_0) := \sum_x \text{zeri di } s \cdot i_s(x)$  per qualsiasi  $s$  campo di vettori su  $(W, V_0, V_1)$ . Inoltre per ogni  $f$  funzione di Morse sulla triade si ha  $\chi(W, V_0) = \sum_x \text{punti critici di } f \cdot (-1)^{\lambda(x)}$  dove  $\lambda(x)$  è l'indice di Morse del punto critico  $x$ .

*Osservazione 76.* Questo ci fornisce un modo agevole per calcolare la caratteristica della triade "opposta". Infatti presa  $f$  una qualsiasi funzione di Morse sulla triade  $(W, V_0, V_1)$   $-f$  è una funzione di Morse su  $(W, V_1, V_0)$ . Dato che la matrice hessiana cambia segno  $\chi(W, V_1) = \sum_x \text{p.c. di } -f \cdot (-1)^{n-\lambda(x)} = (-1)^n \sum_x \text{punti critici di } f \cdot (-1)^{\lambda(x)} = (-1)^n \chi(W, V_0)$ .

**Definizione 125.** Si può definire la caratteristica di Eulero per varietà anche non chiuse come  $\chi(W) = \chi(W, \emptyset)$ <sup>21</sup>

Dimostriamo ora un po' di caratteristiche simpatiche di  $\chi$  sotto le usuali nozioni di cobordismo.

**Definizione 126** (incollamento di triadi). Se si ha la triade  $(W, V_0, V_1)$  e  $(W', V'_0, V'_1)$  e  $V_1$  è diffeomorfa a  $V'_0$  allora è ben definito l'incollamento  $(W, V_0, V_1)^\circ (W', V'_0, V'_1) = (W'', V_0, V'_1)$ .

**Teorema 107.**  $\chi((W, V_0, V_1)^\circ (W', V'_0, V'_1)) = \chi(W, V_0, V_1) + \chi(W', V'_0, V'_1)$

*Dimostrazione.* È facile se si calcola il cobordismo se, avendo le sezioni  $a$  e  $b$ , rispettivamente di  $(W, V_0, V_1)$  e  $(W', V'_0, V'_1)$  si crea la sezione di  $(W, V_0, V_1)^\circ (W', V'_0, V'_1)$ .  $\square$

**Teorema 108.** Sia  $X$  una varietà chiusa. Sia  $W = X \times [-1, 1]$ .  $\chi(X) = \chi(W, \emptyset)$ .

*Dimostrazione.* Detta  $z$  la coordinata verticale, si considera il campo vettoriale  $s$  su  $W$  che ha come componente verticale  $z^2$ . Chiaramente gli unici zeri di  $s$  sono nella copia di  $X \times 0$ . Tutti le matrici hessiane aumentano di una dimensione rispetto a quelle del solo  $X$ , ma essendo già quadratico il campo nella dimensione superiore esse compaiono con un 1 in più, che non modifica il loro indice di Morse.  $\square$

Questo risultato ci permette subito di vedere che esistono varietà chiuse che non sono bordo di una qualche altra varietà.

<sup>21</sup>Si intende dunque  $W$  pensato come  $(W, \emptyset, \partial W)$



**Teorema 109.** *Esistono varietà compatte chiuse non bordo di qualche altra varietà.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $D(X)$  il doppio di  $X$ . Chiaramente  $D(X)$  è una varietà compatta chiusa ed è diffeomorfa a due copie di  $W$  incollate per mezzo di un cilindro  $X \times [-1, 1]$ . Inoltre, grazie ai teoremi precedenti <sup>22</sup>  $\chi(D(X)) = \chi(X) + 2\chi(W, \partial W)$ . Supponiamo ora che la dimensione di  $X$  sia pari, dunque che la dimensione di  $W$  sia dispari. Si ottiene allora che  $\chi(D) = 0$ , dunque  $\chi(X) = -2\chi(W, \partial W)$ . Dunque  $\chi(X)$  è pari. Ma  $\chi(S^{2n}) = 2\chi(P^{2n}) = 2$  dunque  $P^{2n}$  non è il bordo di alcuna varietà  $2n + 1$  dimensionale.  $\square$

**TQFT in soldoni** In questa sezione diamo un'idea di che cosa sia una TQFT, pensata come "rappresentazione del cobordismo nell'algebra lineare".

Vediamo di capire che cosa stiamo facendo nel linguaggio delle categorie. Da un lato gli oggetti in esame sono le  $n$  varietà, i morfismi sono i possibili cobordismi fra esse. Dall'altro gli oggetti sono gli spazi vettoriali su campo complesso, i morfismi sono le applicazioni lineari.

Supponiamo che io abbia da un lato delle varietà connesse  $X_i$ , dall'altro uno spazio vettoriale  $Z$ . Quello che devo avere è una mappa <sup>23</sup> che mandi una  $X_i \rightarrow Z$ ,  $X_1 \cup \dots \cup X_k = Z^{n \otimes}$  e mandi  $(W, X_1 \cup \dots \cup X_k, X'_1 \cup \dots \cup X'_{k'})$  in un  $Hom(Z^{k \otimes}, Z^{k' \otimes})$ . Chiediamo che tutte queste richieste siano functoriali, che  $F(\emptyset) = \mathbb{C}$ , e che  $F((V \times [0, 1], V, V)) = id_{F(V)}$ .

Bisogna a questo punto chiedersi se non abbiamo chiesto troppo. Purtroppo sembra di no poiché la caratteristica di Eulero ci fornisce un esempio.

### Esempio stupido di TQFT

- Mandiamo tutte le varietà connesse in  $\mathbb{C}$
- Preso il cobordismo  $(W, X_1, X_2)$  lo mandiamo in  $F((W, X_1, X_2)) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  che manda  $v \in \mathbb{C} \rightarrow e^{\chi(W, X_1)} v$ .

Questa è un onestissima TQFT.

**Classificazione delle varietà bidimensionali a meno di cobordismo** Ricordate che cosa è  $\eta_1(X)$ ? Bene, questo è uno spazio finito-dimensionale (forse lo dimostreremo).

Usando la definizione di numero di intersezione lo muniremo di un prodotto scalare. Problema: siamo in caratteristica 2! Dunque molti dei teoremi di algebra lineare visti a geometria 1 vanno rivisti.

## 2.30 Superfici

In questa sezione  $S$  sarà una superficie, cioè una 2-varietà compatta, chiusa, connessa. L'obiettivo sarà studiare le superfici a meno di diffeomorfismi, come al solito andremo a caccia di invarianti.

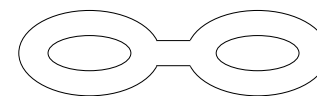
*Attenzione:*  $S_1, S_2, \dots$  saranno qui superfici, mentre  $S^1, S^2, \dots$  saranno circonferenza, sfera,  $\dots$

*Esempio 19.* Seguono alcuni esempi di superfici

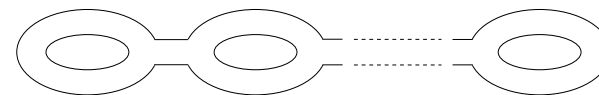
**Sfera**  $S^2$

**Toro**  $T := T_1 := S^1 \times S^1$

**Tori siamesi**  $T_2 := 2$  tori incollati con un tubicino

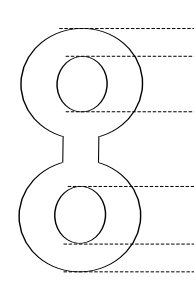


**Toro-catena**  $T_k := k$  tori incollati con  $k - 1$  tubicini



*Osservazione 77.* Gli esempi precedenti non sono tra loro diffeomorfi, infatti sono distinti dalla  $\chi$  di Eulero.

$\chi(S^2) = 2$ . Per calcolare la  $\chi(T_k)$  usiamo la funzione di Morse "altezza" definita come in figura.



Notiamo che ci sono  $2k + 2$  punti critici di cui

- 1 massimo:  $\lambda = 1$
- $2k$  punti di sella (2 per ogni buco):  $\lambda = -1$

<sup>22</sup>additività della caratteristica sotto incollamento e invarianza per omologia

<sup>23</sup>non bisognerebbe vedere questa mappa come una funzione ma come un funtore

- 1 minimo:  $\lambda = 1$

Pertanto  $\chi(T_k) = 2 - 2k$ . Un modo alternativo per calcolarla è mostrare solamente che  $\chi(T) = 0$  (notiamo in particolare che è facile trovare per  $T$  un campo di vettori mai nullo, ad esempio il campo di vettori tangenti al toro che “girano” in senso antiorario) e poi usare la proprietà di additività della  $\chi$ .

**Esercizio 13.** Sia  $\mathbb{P}_2^2$  la varietà ottenuta incollando due  $\mathbb{P}^2$  analogamente a quanto fatto per i tori siamesi. Dimostrare che  $\chi(\mathbb{P}_2^2) = 0$ . *Hint:* usare l’additività di  $\chi$ .

**Osservazione 78.** Notiamo, grazie all’esercizio, che la  $\chi$  non distingue tra il toro  $T$  e  $\mathbb{P}_2^2$ , tuttavia osserviamo che queste non sono diffeomorfe perché  $\mathbb{P}_2^2$  non è orientabile. Urge un invariante più fine: la forma di intersezione.

## 2.31 La forma di intersezione su $\eta_1(S)$

Ricordiamo che  $\eta_1(S) = \{f : M \rightarrow S\} / \sim_{\text{cob}}$  dove  $M = S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$  è una 1-varietà compatta, chiusa, che  $\eta_1(S)$  è uno  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -spazio vettoriale e che dato un diffeomorfismo  $f : S_1 \rightarrow S_2$  questo induce un isomorfismo  $f_* : \eta_1(S_1) \rightarrow \eta_1(S_2)$  (vedi lezione dell’11 aprile).

**Teorema 110.**  $\dim \eta_1(S)$  è finita (per dimostrarlo si userebbe la compattezza di  $S$ ).

**Corollario 111.**  $\dim \eta_1(S)$  è un invariante per diffeomorfismi.

**Dimostrazione.** Infatti i diffeomorfismi fra varietà obiettivo inducono degli isomorfismi tra gli spazi, questi ultimi conservano la dimensione.  $\square$

**Definizione 127** (forma di intersezione  $\beta$ ).  $\beta$  sarà una funzione:

$$\beta : \eta_1(S) \times \eta_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Cerchiamo un modo di definire  $\beta([M_1, f_1], [M_2, f_2])$ .

$$f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow S \times S \hookrightarrow \Delta \text{ diagonale}$$

Dai teoremi di trasversalità sappiamo trovare una  $\tilde{f}_1$  e una  $\tilde{f}_2$  omotope rispettivamente a  $f_1$  e  $f_2$  e tali che  $\tilde{f}_1 \pitchfork \tilde{f}_2$  e, sempre per i teoremi di trasversalità, abbiamo che  $(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2)^{-1}(\Delta)$  è una sottovarietà di  $M_1 \times M_2$ , che ha codimensione 2, pertanto  $(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2)^{-1}(\Delta)$  ha dimensione 0, ovvero è un insieme finito di  $k$  punti  $\{x_1, \dots, x_k\}$ .

Ha dunque senso definire

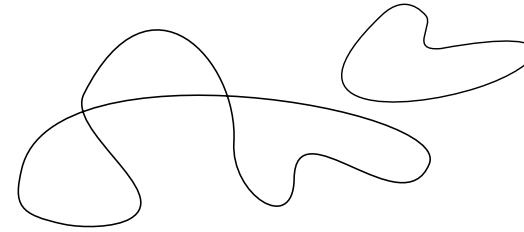
$$\beta([M_1, f_1], [M_2, f_2]) := k \pmod{2}$$

**Esercizio 14.**  $\beta$  è ben definita, bilineare e simmetrica.

La forma d’intersezione  $\beta$  misura la parità del numero di intersezioni tra le immagini di due curve su una superficie. Grazie ai teoremi di trasversalità (grazie anche alla dimensione finita e al teorema di immersione di Whitney) possiamo supporre che le  $f_1$  e  $f_2$  siano fin da subito immersioni e che i punti in comune alle due immagini su  $S$  non siano dei punti di tangenza, ma siano degli incroci “normali”, infatti se le  $f_1$  e  $f_2$  non avessero tali requisiti basterebbe perturbarle un poco per trovare delle  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$ , omotope alle precedenti, che abbiano i suddetti requisiti.

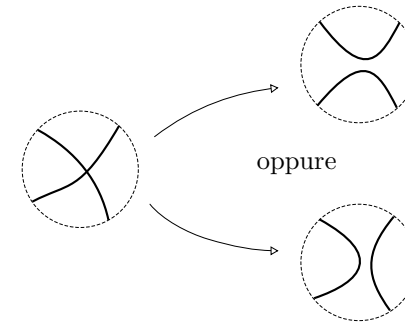
**Caratterizzazione di  $\eta_1(S)$**  Cercheremo ora di capire come sono fatte le classi di equivalenza  $[M, f]$ . Con lo stesso spirito di quando caliamo i cannoni per “perturbare un poco” le funzioni e ricondurci a studiare casi semplici, il nostro intento sarà introdurre alcune “mosse” che pur perturbando una curva non ne cambiano la classe. In questo modo potremo scegliere, senza perdita di generalità, un rappresentante particolarmente semplice: scopriremo che possiamo prendere un rappresentante connesso.

Per quanto già discusso prendiamo una  $f : M \rightarrow S$  che sia fin da subito un’immersione



faremo ora due semplificazioni:

1. Eliminare i punti doppi

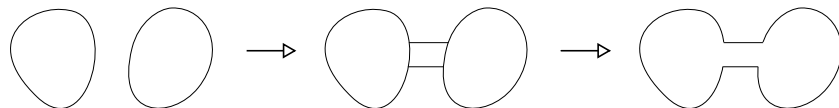


Notiamo che, non avendo orientazione, la scelta è indifferente.

Quindi da una  $f : M \rightarrow S$  abbiamo ottenuto un embedding  $i : M' \rightarrow S$  senza punti doppi.

Esercizio: mostrare che  $[M, f] = [M', i]$  in  $\eta_1(S)$ .

## 2. Connettere l'immagine



Dove il cobordismo è “esplicitato” dalla figura seguente: i cerchi interni vanno immaginati come sollevati di qualche centimetro rispetto al piano del foglio e la parte colorata vista come una bolla di sapone.



Pertanto, grazie alla semplificazione (1), ogni classe di equivalenza  $\alpha \in \eta_1(S)$  può essere rappresentata per mezzo di una 1-sottovarietà di  $S$  e, grazie alla (2),  $\alpha$  può essere rappresentata da una curva connessa. D'ora in poi le curve che considereremo saranno belle lisce, iniettive e connesse.

**Proposizione 112** (Fantasma). *La forma di intersezione è bilineare.*

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda la moltiplicazione per scalari essi sono soltanto 0 e 1. Per cui se lo scalare in questione fosse 1 è banalmente verificata, se fosse 0 si ha che la classe 0 è la classe del vuoto e quindi la sua forma di intersezione con qualunque curva è nulla.

Per l'additività è sufficiente notare che l'unione disgiunta crea due curve sconnesse, e limitandosi a considerarle tali i punti di intersezione si sommano, per cui è additiva.  $\square$

**Teorema 113.** *La forma di intersezione è non degenera.*

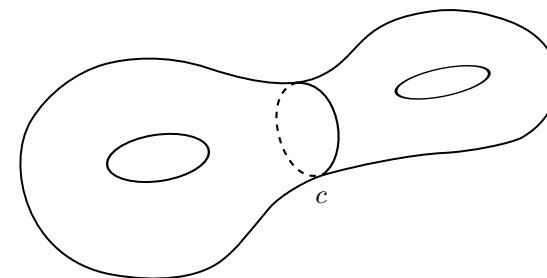
*Dimostrazione.* Utilizzeremo la notazione  $\alpha \cdot \gamma := \beta(\alpha, \gamma)$ .

Sia  $\alpha \in \eta_1(S)$  tale che  $\alpha \cdot \gamma = 0 \forall \gamma$ , vogliamo mostrare che  $\alpha = 0$ .<sup>24</sup>

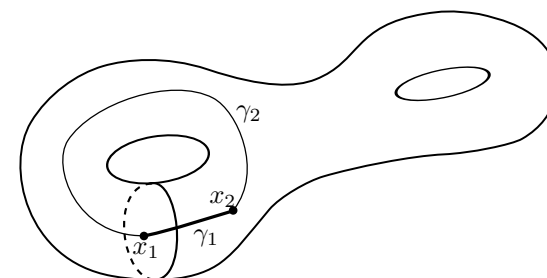
Supponiamo per assurdo che  $\alpha \neq 0$ , sia dunque  $\alpha = [c]$  con  $c$  connessa su  $S$ .

Mostriamo che  $c$  non sconnette  $S$ . Infatti se  $S \setminus c$  fosse sconnesso allora  $c$  sarebbe cobordante al vuoto, come si vede dalla figura, e sarebbe dunque  $\alpha = 0$ .

<sup>24</sup>Si ricorda che in  $\eta_1$  lo 0 è rappresentato dalla classe dei bordi



Dunque  $c$  non sconnette  $S$ , prendiamo quindi un piccolo arco  $\gamma_1$  trasverso a  $c$  di estremi  $x_1$  e  $x_2$ . Poiché  $c$  non sconnette  $S$  allora esiste un arco  $\gamma_2$  che collega  $x_1$  e  $x_2$ . Sia  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ , abbiamo dunque costruito un  $\gamma$  tale che  $\alpha \cdot \gamma = 1 \neq 0$ .  $\square$



*Osservazione 79.* Abbiamo visto che  $\beta$  è bilineare, simmetrica e non degenera, dunque  $\beta$  è un *prodotto scalare*.

Inoltre  $\dim \eta_1(S)$  è finita, allora dato un diffeomorfismo  $f : S_1 \rightarrow S_2$  questo induce un isomorfismo  $f_* : \eta_1(S_1) \rightarrow \eta_1(S_2)$  tale che  $\beta_1(\alpha, \gamma) = \beta_2(f_*(\alpha), f_*(\gamma))$  dunque  $f_*$  è un'isometria tra  $(\eta_1(S_1), \beta_1)$  e  $(\eta_1(S_2), \beta_2)$ .

Abbiamo costruito un nuovo invariante per diffeomorfismi: la classe di isometria di  $(\eta_1(S), \beta)$ .

## 2.32 Forme d'intersezione

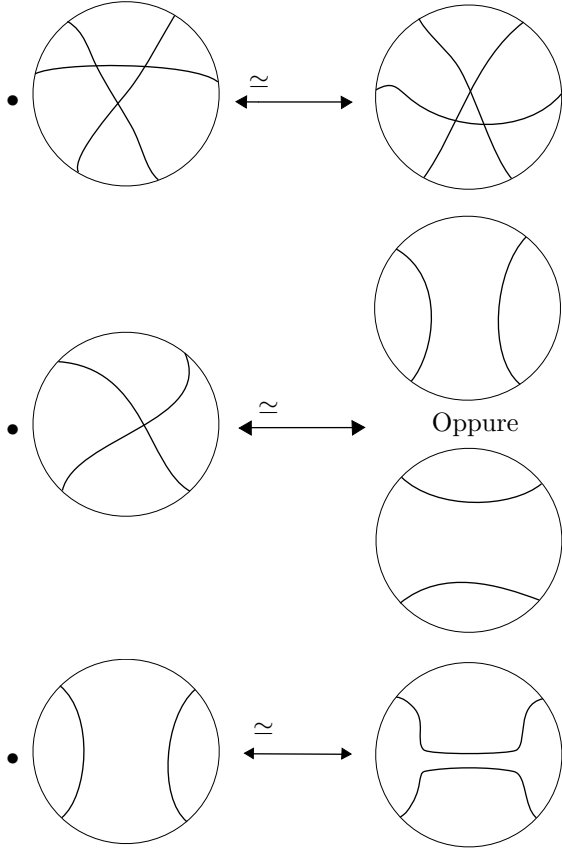
### 2.32.1 Una costruzione alternativa

Sia  $X$  superficie, su  $\eta_1(X)$  abbiamo la forma d'intersezione  $\beta : \eta_1(X) \times \eta_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Consideriamo le curve su  $X$  lisce a meno di un numero finito di incroci normali; ogni tale curva  $\gamma$  può essere decomposta in circuiti (ovvero immersioni di  $S^1$ ):  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \dots$ . Siano  $f : S^1 \sqcup S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow X$  immersioni, allora queste curve sono date da  $\{\gamma\} = \{\text{Im } f\}$ .

Su queste curve posso definire una relazione di equivalenza specificando operazioni rispetto a cui le classi di equivalenza siano chiuse (ovvero, specificando come

posso modificare una di queste curve in modo da ottenere una curva equivalente); sia la relazione  $\simeq$  generata dalle operazioni seguenti:

- Isotopia ambiente (ovvero,  $\gamma \simeq H(1, \gamma)$  con  $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$  isotopia e  $H|_{\{0\} \times X} = \text{id}_X$ )



Posso allora pensare  $\eta_1(X)$  come  $\{\gamma\}/\simeq$ , e la somma  $[\gamma_1] + [\gamma_2]$  è data da  $[\gamma_1 \cup \gamma_2]$ , con  $\gamma_1, \gamma_2$  rappresentanti trasversi tra loro (dunque che s'incrociano solo normalmente e in un numero finito di punti), che certamente esistono (ad esempio per isotopia).

Definisco allora  $\beta([\gamma_1], [\gamma_2]) = [\gamma_1] \cdot [\gamma_2]$  come la parità del numero di intersezioni di  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  (avendo sempre cura di scegliere rappresentanti trasversi tra loro), ovvero come  $\#(\gamma_1 \cap \gamma_2) \pmod{2}$ .

Per mostrare che  $\beta$  è non degenere, notiamo che con la nostra relazione  $\simeq$  possiamo supporre che per  $[\gamma] \neq 0$ ,  $\gamma$  sia liscia e connessa e non può sconnettere  $X$ , dunque ripetendo la costruzione della lezione precedente posso trovare una curva che intersechi trasversalmente  $\gamma$  esattamente una volta.

### 2.32.2 Caratterizzazione delle classi d'isometria

Ricordiamo che la classe d'isometria di  $(\eta_1(X), \beta)$  è invariante per diffeomorfismi.

Sia in generale  $V$  vettoriale su  $\mathbb{Z}_2$  e  $\beta$  prodotto scalare non degenere su  $V$ . Il lettore ricorderà che per spazi vettoriali su  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  un prodotto scalare non degenere ammette almeno un vettore non isotropo, poiché se ogni vettore è isotropo si ottiene  $0 = \langle v + w, v + w \rangle = 2\langle v, w \rangle \forall v, w$ . È chiaro però che su  $\mathbb{Z}_2$  (e in generale per campi con caratteristica 2) quest'identità risulta banale e non implica che  $\beta$  sia degenere; poiché la non totale isotropia era necessaria con gli spazi su  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  per dimostrare (induttivamente) l'esistenza di una base ortonormale, segue che non potremo concludere altrettanto per  $V$ .

**Lemma 114** (Lemma 1).  $V = A \oplus B$ , con  $(A, \beta)$  avente una base ortonormale e  $(B, \beta)$  totalmente isotropo.

*Dimostrazione.* Vi sono dunque due possibilità: o  $V$  è totalmente isotropo, oppure  $\exists v \in V$  non isotropo. Nel primo caso il lemma è banalmente vero, nel secondo ho  $V = \text{span}(v) \oplus \{v\}^\perp$  e ripetendo induttivamente il ragionamento su  $\{v\}^\perp$  ottengo  $V = U \oplus U \oplus \dots \oplus U \oplus B$ , con  $B$  totalmente isotropo e  $U$  sottospazio di dimensione 1 tale che  $\beta = (1)$  in  $U$  (ovvero,  $U$  generati da vettori ortonormali).  $\square$

Consideriamo ora un sottospazio  $H \subseteq V$  totalmente isotropo (con  $\beta|_H$  non degenere). Prendiamo una base di  $H$   $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  e consideriamo la base duale  $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*, \dots, v_n^*\}$ . Allora dal teorema di rappresentazione sappiamo che  $v \mapsto (\phi_v : w \mapsto \beta(v, w))$  è isomorfismo, siano dunque  $\{w_1, \dots, w_n\}$  i vettori che rappresentano i covettori di  $\mathcal{B}^*$  (ovvero la controimmagine di  $\mathcal{B}^*$  per l'isomorfismo indicato). Abbiamo quindi  $\beta(w_i, v_j) = \delta_{ij}$ , e in particolare  $\beta(v_1, w_1) = 1$ . Pertanto in  $\text{span}(v_1, w_1)$  si ha  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e dunque  $H$  si decompone come  $\text{span}(v_1, w_1) \oplus \{v_1, w_1\}^\perp$ , e continuando per induzione ottengo una base di  $H$  rispetto a cui

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

**Definizione 128** (Piano iperbolico). Chiameremo uno spazio vettoriale di dimensione 2 con prodotto scalare  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  un *piano iperbolico*.

Notiamo che su  $\mathbb{Z}_2$  un tale prodotto scalare è totalmente isotropo e non degenere.

Da quanto abbiamo appena visto segue il seguente lemma:

<sup>25</sup>Il procedimento di ortogonalizzazione è indipendente dalla caratteristica del campo(spero, toglierò queste parentesi non appena avrò controllato, Ale)

**Lemma 115** (Lemma 2). *Se  $\beta$  su  $V$  (vettoriale su  $\mathbb{Z}_2$ ) è non degenere e totalmente isotropo,  $\dim V$  è pari e  $V$  è somma diretta ortogonale di piani iperbolici.*

Dunque in generale  $V$  vettoriale su  $\mathbb{Z}_2$  con  $\beta$  non degenere si decompone come  $V = \bigoplus U_i \oplus \bigoplus H_i$ , con  $\beta|_{U_i} = (1)$  e  $\beta|_{H_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Lemma 116** (Lemma 3).  *$U \oplus H = U \oplus U \oplus U$  (con  $H$  piano iperbolico e  $U$  generato da un vettore non isotropo).*

La dimostrazione segue nella lezione successiva; i tre lemmi visti ci permettono di dimostrare quanto segue:

**Teorema 117** (Teorema di classificazione). *Dato un prodotto scalare  $\beta$  non degenere su  $V$  di dimensione  $n$ , si ha a meno di isometrie:*

$$V = \bigoplus_{i=1}^n U_i \quad \text{oppure} \quad V = \bigoplus_{i=1}^{n/2} H_i$$

## 2.33 Classificazione spazi vettoriali su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Daremo una classificazione completa a meno di isometrie degli spazi vettoriali  $V$  su campo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  di dimensione  $\dim(V) = n$ . Lo spazio vettoriale è dotato di un prodotto scalare non degenere. Decomporremo lo spazio vettoriale in somme ortogonali (rispetto al prodotto scalare dato) di spazi vettoriali isometrici a  $U$ ,  $H$  di dimensioni rispettivamente 1 e 2. Questi spazi si scrivono in qualche base rispettivamente come:  $[1]$  e  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .  $H$  è totalmente isotropo ma non è identicamente nullo (ricorda che sono in caratteristica 2!).

Reminder: Un prodotto scalare totalmente isotropo è uno per cui  $(v, v) = 0$ ,  $\forall v \in V$ .

**Teorema 118.** *Posso scrivere  $V$  in due e due sole forme:*

- $V = U \perp U \perp \cdots \perp U$ .  $V$  è somma di  $n$  copie di  $U$  e in questo caso  $V$  ha una base ortogonale e  $\dim(V) = n$ .
- $V = H \perp H \perp \cdots \perp H$ .  $V$  è somma di  $n$  copie di  $H$ , il prodotto scalare è totalmente isotropo ma non è nullo.  $\dim(V) = 2n$ .

Il caso intermedio in cui:  $V = (H \perp H \perp \cdots \perp H) \perp (U \perp U \perp \cdots \perp U)$  si può eliminare grazie al lemma seguente:

**Lemma 119.**  $U \perp H \simeq 3U$ , cioè  $U \perp H$  è isometrico a tre copie di  $U$ .

*Dimostrazione.*  $U \perp H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Trovo  $W$  di dimensione 2 tale che in una certa base la sua matrice sia:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Chiamati  $u, v, z$  rispettivamente i tre vettori della

base in cui ho scritto  $U \perp H$  considero  $W = \text{span}(u + v, u + z)$ . Si verifica che si può scrivere  $W$  come somma di due sottospazi vettoriali di dimensione 1 generati da  $u + v$  e  $u + z$  rispettivamente. Di conseguenza  $V = W \perp U$  dove  $U$  è uno spazio di dimensione 1 (non degenere per dimensione!)  $\square$

Dunque  $V$  è caratterizzato totalmente dall'avere una base ortogonale o dall'essere totalmente isotropo rispetto al prodotto scalare associato.

Sia  $X$  una superficie compatta, chiusa, connessa.  $V = \eta_1(X)$ , il prodotto scalare non degenere è la forma di intersezione precedentemente definita. Dato un diffeomorfismo tra due varietà:  $f : S_1 \rightarrow S_2$  questo induce un isomorfismo tra gli spazi vettoriali. Questo isomorfismo è in realtà un'isometria poiché conserva la forma di intersezione definita come sopra. Dunque se due varietà sono diffeomorfe allora gli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare  $(\eta_1(S_1), \beta_1)$  e  $(\eta_1(S_2), \beta_2)$  sono isometrici. In particolare se gli spazi non sono isometrici le varietà non possono essere diffeomorfe.

Per ogni classe di isometria degli spazi vettoriali in caratteristica due esiste una varietà  $X$  che rappresenta la classe di isometria data tramite lo spazio  $(\eta(S), \beta)$ .

### 2.33.1 $\eta(S^2)$

Studio  $\eta(S^2)$ , dimostro che esso ha  $\dim \eta(S^2) = 0$ , in particolare contiene una sola classe di equivalenza. Sia  $f : S^1 \rightarrow S^2$  per quanto detto in precedenza per caratterizzare gli elementi di  $\eta(S^2)$  è sufficiente considerare le funzioni da una 1-varietà connessa a  $S^2$ .  $f$  è liscia,  $S^2/f(S^1)$  è aperto denso, dunque  $f$  non è surgettiva. Considero  $S^1 \xrightarrow{f} S^2$  e  $S^1 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n$ , dove  $p$  è la proiezione stereografica dunque ho una proiezione  $S^1 \xrightarrow{p \circ f} \mathbb{R}^n$ . La proiezione stereografica deve essere presa rispetto ad un certo punto  $P \in f(S^1)$ . Considero la retrazione su  $\mathbb{R}^2$  del laccio proiettato:  $r_t : x \rightarrow tx$  che manda il laccio nell'origine, questo corrisponde a retractione il laccio nel punto  $P$ . Dunque tutti i lacci sono equivalenti tra di loro.

### 2.33.2 $\eta(T_2) = H$

Studio  $\eta(S^1 \times S^1 = T_2)$ , sappiamo che  $\eta(T_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Voglio mostrare che questo spazio è un modello per  $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Considero due lacci sul toro che si intersecano in un punto ma non si autointersecano, questi generano un sottospazio di  $\eta$  in cui la restrizione di  $\beta$  è chiamante  $H$ . Voglio dimostrare che questo sottospazio genera tutto  $\eta(S^1)$ . Apro il toro lungo i due lacci e ottengo un quadrato.

Metto sul piano reale la relazione di equivalenza:  $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exists (n, m) \in \mathbb{Z}^2$  tale che  $(x', y') - (x, y) = (n, m)$ .

Dunque divido il piano in celle (dominio fondamentale del toro) attraverso il reticolo  $\mathbb{Z}^2$ . ottengo le identificazioni  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \leftarrow S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \leftarrow (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ . Dunque posso srotolare un laccio sul toro come in figura e si vede che ogni laccio

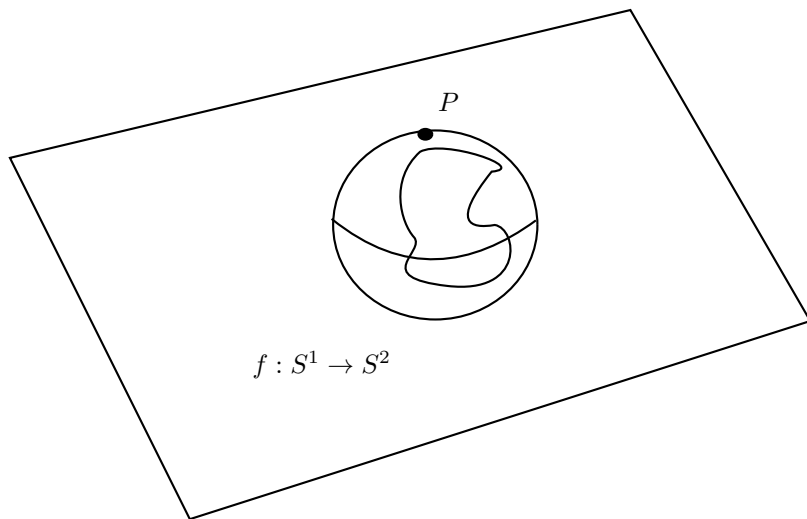


Figura 30: Proiezione Stereografica

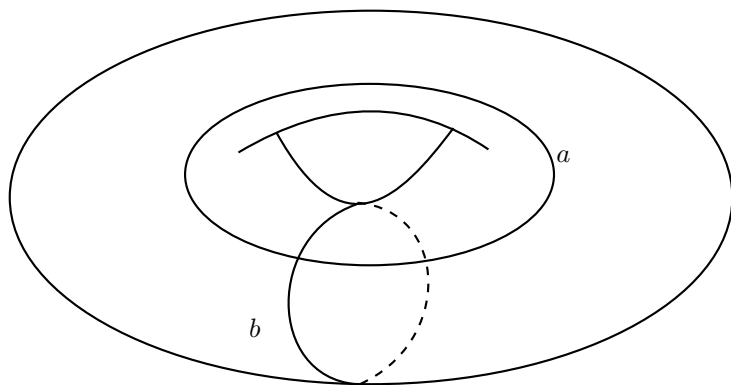


Figura 31: Due lacci su un toro

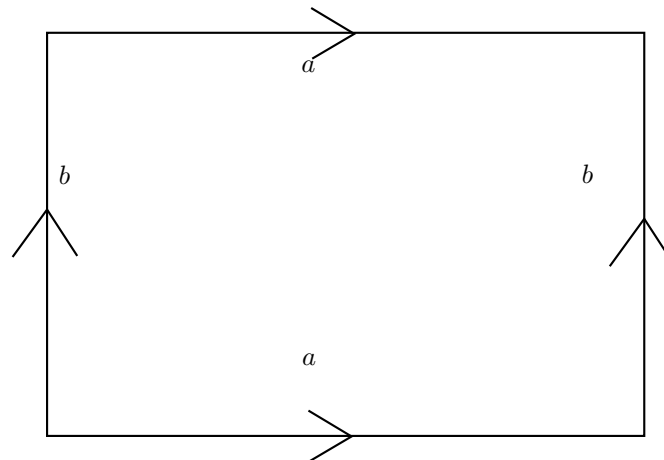


Figura 32: Toro tagliato lungo due lacci

è omotopo al segmento tra l'origine e il punto  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , dove  $p$  e  $q$  indicano il numero di volte in cui il laccio si avvolge orizzontalmente e verticalmente sul toro.

**Teorema 120.**  $(p, q) = 1 \iff$  il laccio non ha autointersezioni

Se tolgo un punto al toro posso retrainere tutto il laccio nel punto (come si vede nel disegno).

Si può rappresentare un laccio sul toro come un “bucket a due petali” cioè due circonferenze  $S^1$  attaccate per un punto che vengono percorse tante volte quanti sono i giri orizzontali e verticali che il laccio compie.

Quello di cui dovrei convincermi è che non è assolutamente chiaro e che due lacci disgiunti che compiono un giro verticale e uno orizzontale generano tutto. Se questo è vero allora  $\eta(T_2)$  è una realizzazione di  $H$ .

### 2.33.3 $\eta(\mathbb{P}^2) = U$

Studio  $\eta(\mathbb{P}^2)$ , cioè  $\eta$  del piano proiettivo. Considero la calotta sferica di  $S^2$ . I punti non del bordo della calotta rappresentano un solo punto del piano proiettivo mentre identifico i punti del bordo. La calotta sferica  $S^2/\sim$  mi dà un dominio fondamentale del proiettivo.

Come si vede nella figura costruisco un  $S^1$  identificando i punti antipodali ( $S^1/\sim$ ), si vede che il bordo della calotta ricopre due volte  $S^1/\sim$ . Il collare che ha per bordo questi due anelli è chiamato nastro di Möbius e si indica con  $\mathcal{M}$ . L'anima del nostro di Möbius è il proiettivo  $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$ , si vede inoltre che il bordo  $\partial\mathcal{M}$  ha una sola componente connessa. Sempre dalle figure è chiaro che  $\mathbb{P}^2 = \mathcal{M} \cup D^2$  incollati lungo il bordo.

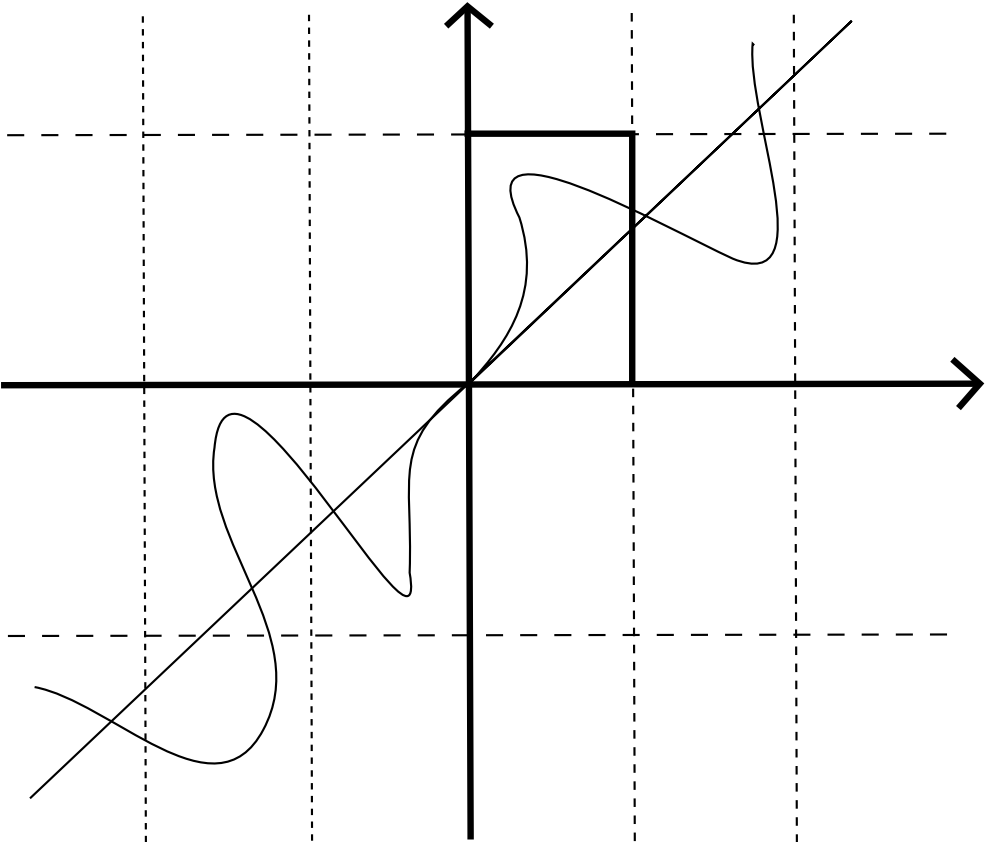


Figura 33: Sviluppo del dominio fondamentale del toro nel piano xy

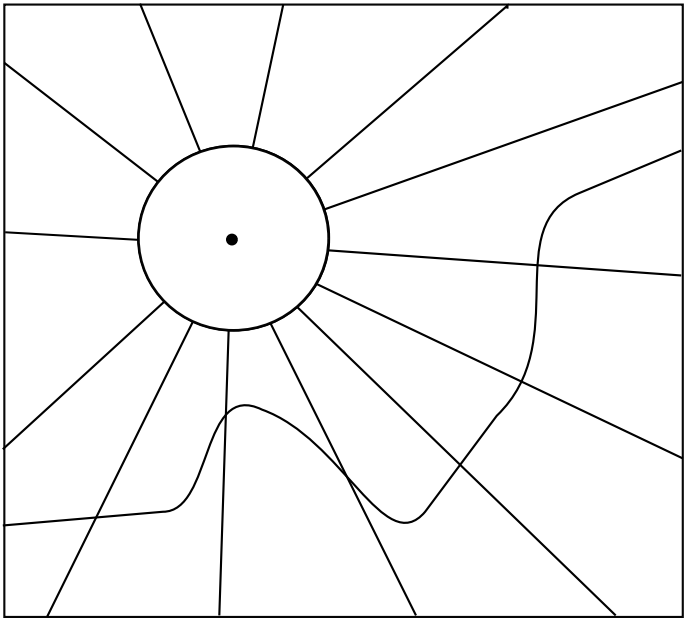


Figura 34: Retrazione dei lacci dopo aver tolto un punto al toro

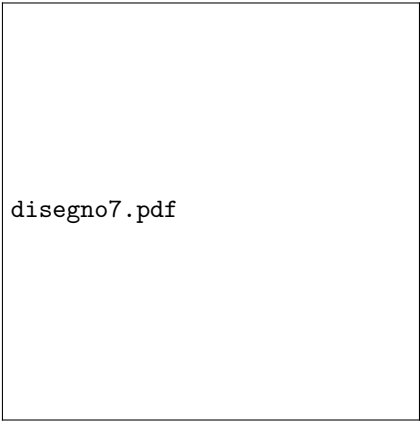


Figura 35: Bucket a due petali

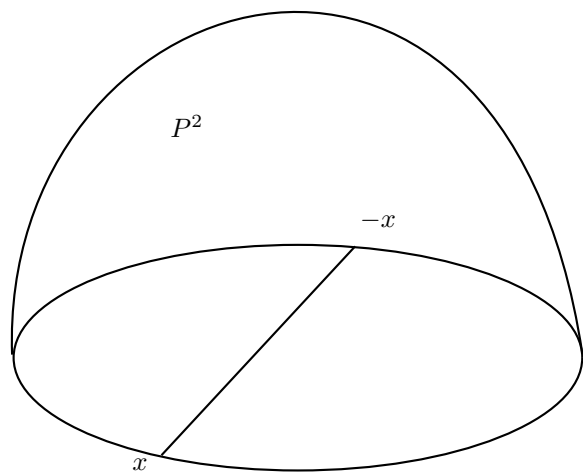


Figura 36: Identificazione dei punti antipodali

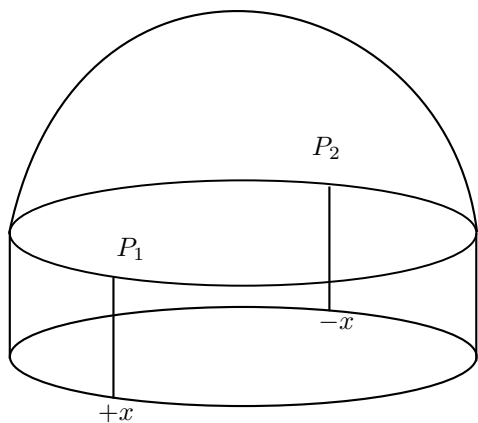


Figura 37: Proiettivo ottenuto come somma di un disco più un nastro di Moebius

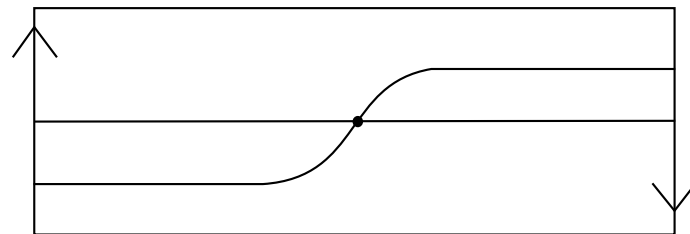


Figura 38: Autointersezione necessaria per un nastro di Möbius

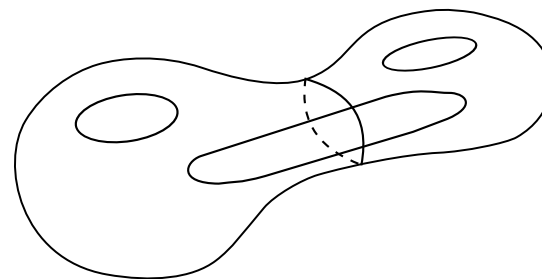


Figura 39: Intersezione di due lacci su somma connessa di due tori

Se tolgo un punto al disco e prendo  $\mathbb{P}^2/P$  ottengo una varietà completamente retraibile nell'anima del nastro di Möbius cioè in  $\mathbb{P}^1$ .

Un laccio sul nastro di Möbius è costretto all'autointersezione, dunque  $\mathcal{M}$  è un modello per  $U$ . A questo punto non si capisce perchè lo è anche  $\mathbb{P}^2$ ?

Ricordiamo che  $\eta_1(T_2) \sim H$  e  $\eta_1(P^2) \sim U$

#### 2.33.4 Modelli per spazi di dimensione maggiore

Un modello per  $H \perp H \perp H \dots H$  (somma ortogonale di  $g$  spazi vettoriali isomorfi a  $H$ ) si può ottenere considerando  $g$  tori separati. Essi infatti sono  $g$  componenti connesse e i lacci su tori diversi non si intersecano. Quindi la matrice associata è diagonale e ogni blocco corrisponde a  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Per quanto detto vale dunque  $\text{eta}_2(T_2 \sqcup T_2 \sqcup \dots \sqcup T_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \dots \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Voglio dimostrare che la relazione sopra scritta vale anche nel caso in cui sostituisca l'unione disgiunta di  $g$  tori con la somma connessa, cioè:  $\text{eta}_2(T_2 \sharp T_2 \sharp T_2 \sharp \dots \sharp T_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \dots \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Due lacci diversi sulla somma connessa di più tori si intersecano sempre in un due punti quindi li posso accoppiare a due a due e la relazione rimane vera poichè lo spazio vettoriale è proprio in caratteristica 2.

Si può dimostrare che prendere la somma connessa rispetto alla somma disgiunta non cambia la classe di cobordismo.



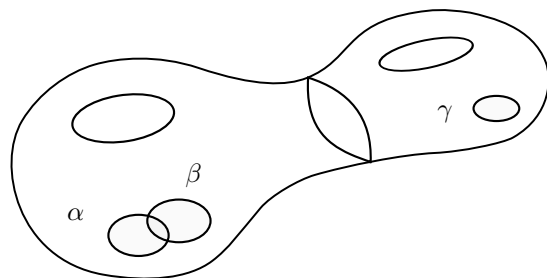


Figura 40: \_

**Teorema 121.** *Le classi di equivalenza di lacci su tori diversi non si intersecano*

*Dimostrazione.*

□

*Osservazione 80.* Posso realizzare  $H \perp H \dots H$  tramite la varietà  $T_2 \# T_2 \# T_2 \# \dots \# T_2$  e realizzo  $U \perp U \perp U \dots bot U$  tramite la varietà  $(P)^2 \# (P)^2 \# \dots (P)^2$ . Tutti gli spazi vettoriali in caratteristica due sono realizzabili attraverso una varietà che è una superficie.

E' vero che la classe di isometria è un invariante completo? Cioè è vero che a meno di isomorfismi le superfici (compatte e chiuse) sono solamente somme connesse di  $\mathbb{P}^2$  e di tori  $T_2$ .

Operazione di somma connessa tra due superfici: è ben definita a meno di diffeomorfismi.

Studio delle superfici per mezzo della teoria di Morse. Studio come si modifica la varietà nel passaggio tra prima e dopo il punto critico (teoria di Morse).

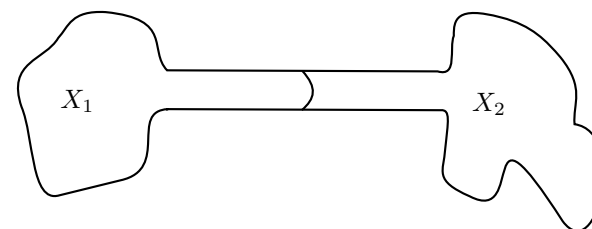


Figura 41: \_

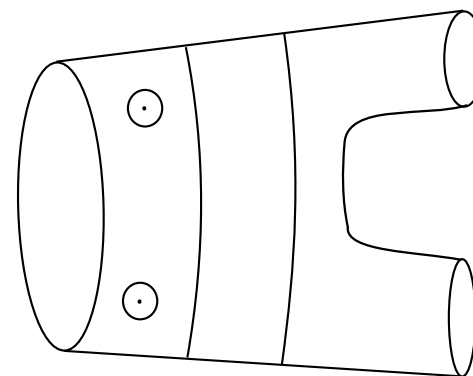


Figura 42: \_

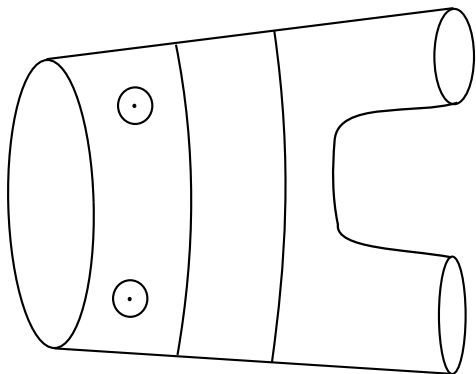


Figura 43: \_

## 2.34 Somma connessa

In questo paragrafo preciseremo la nozione di somma connessa che precedentemente abbiamo usato in maniera intuitiva.

Siano  $X_1$  e  $X_2$  due  $n$ -varietà compatte, chiuse e connesse. Si delineano due diversi procedimenti per la definizione di somma connessa, andiamo ad analizzarli e confrontarli.

### Procedimento 1

Considero per ciascuna varietà un embedding da un disco  $D^n$  nella varietà:  $j_1 : D^n \rightarrow X_1$ ;  $j_2 : D^n \rightarrow X_2$ . Considero quindi gli insiemi così definiti:  $W_1 := X_1 \setminus \mathring{D}_1$ ;  $W_2 := X_2 \setminus \mathring{D}_2$  (ovvero le varietà a cui ho tolto la parte interna del disco).

In questa maniera ho ottenuto  $\partial W_1 = \partial D_1 \approx S^{n-1}$ . In pratica i bordi coincidono e sono diffeomorfi ad una sfera di dimensione  $n-1$ .

Fissiamo un diffeomorfismo  $\phi : D_1 \rightarrow D_2$ . Chiamo  $\psi := \phi|_{\partial D_1}$ , la restrizione al bordo di  $\psi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ .

Considero adesso  $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$ .

**Teorema 122.** *Se almeno una tra  $X_1$  e  $X_2$  è non orientabile, allora  $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$  è univocamente definito a meno di diffeomorfismi.*

*Se entrambe sono orientate e si inverte l'orientazione dei bordi, allora  $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$  è orientato e univocamente determinato a meno di diffeomorfismi che preservano l'orientazione.*

**Definizione 129.** Dal teorema precedente segue che  $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$  è ben definito, lo chiameremo somma connessa di  $W_1$  e  $W_2$  e scriveremo:  $W_1 \# W_2 := (W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$

*Dimostrazione.* Diamo qualche idea sulla dimostrazione.

Il punto chiave è mostrare che  $W_1 \# W_2$  non dipenda dalla scelta del disco.

### Procedimento 2

Prendiamo  $X_1, X_2, D_1 \subseteq X_1, D_2 \subseteq X_2, W_1, W_2$  con le stesse definizioni date nel Procedimento 1.

Sia data  $\psi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Considero  $(W_1 \sqcup W_2)_{/\psi}$ .

In cosa differiscono le due procedure?

Nella prima prendo un diffeomorfismo  $\phi$  su tutto il disco e lo restringo al bordo. Nella seconda procedura prendo direttamente un diffeomorfismo  $\psi$  sul bordo.

Le due procedure coincidono se  $\forall \psi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  posso estendere a  $\phi : D^n \rightarrow D^n$ , ma quando questa assunzione è vera? Dipende dalla dimensione  $n$  delle varietà  $X$  di partenza.

*Osservazione 81.* Immaginiamo di fare lo stesso discorso con gli omomorfismi al posto che con i diffeomorfismi: estendere un omeomorfismo dal bordo a tutta la varietà è banale, basta estendere lungo i raggi. In regime topologico è quindi semplice, non lo è altrettanto in regime differenziale.

Quando si passa ai diffeomorfismi l'estensione è possibile in dimensione 2,3,4,5,6. Oltre la dimensione 7 è in generale falso: è possibile ad esempio trovare una  $\psi : S^6 \rightarrow S^6$  che non si estende alla varietà  $X^7$  di cui è bordo. Esistono quindi 7-varietà che sono omomorfe alla sfera ma non diffeomorfe. Tali sfere sono dette sfere esotiche.

Da questa osservazione segue che per le superfici le due procedure sono equivalenti. (Per  $n = 2$  la dimostrazione dell'estensibilità può essere affrontata per esercizio). Quindi  $X_1 \# X_2$  è sempre ben definito per le superfici.

*Possiamo dimenticare la storia delle orientazioni, credeteci...*

*R. Benedetti*

## 2.35 Relazione tra somma connessa e caratteristica di Eulero

In questa sezione ci restringeremo al caso delle superfici ( $n=2$ ). Vogliamo capire qual è l'andamento della caratteristica di Eulero rispetto alla somma connessa.  $\chi(X_1 \# X_2) = ?$ .

## 2.36 Teoria di Morse

**Lemma 123** (del cilindro). *Siano  $(W, V_0, V_1)$  una triade,  $W$  compatta,  $f : W \rightarrow [0, 1]$  di Morse senza punti critici; allora  $\exists h : V_0 \times [0, 1] \rightarrow W$  diffeomorfismo*

tale che questo diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} V_0 \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & W \\ & \searrow \pi & \downarrow f \\ & & [0, 1] \end{array}$$

*Dimostrazione.* Fissiamo una metrica Riemanniana  $g$  su  $W$ . Consideriamo  $\nabla f$  rispetto a  $g$ .  $\nabla f > 0$  ovunque perché  $f$  non ha punti critici. Allora lo posso normalizzare:

$$\nu(f) := \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \rightarrow \|\nu(f)\| = 1$$

Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria associata al campo:

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\rightarrow W \\ \frac{d}{dt}(f \circ \varphi) &= \|\nu(f)\| \rightarrow f(\varphi(t)) = t + \text{costante} \end{aligned}$$

A meno di riparametrizzazione,  $f(\varphi(s)) = s$ . Poiché  $W$  è compatta,  $\varphi$  è definita su tutto  $[0, 1]$ . Allora  $\forall y \in W \exists!$  curva integrale  $\psi_y : [0, 1] \rightarrow W$  passante per  $y$  tale che  $f(\psi_y(s)) = s$ . Infine  $h(y, s) := \psi_y(s)$ .  $\square$

**Definizione 130** (Manico). Fissiamo  $n$  dimensione e  $0 \leq \lambda \leq n$ . Il *manico standard di indice  $\lambda$  (e dimensione  $n$ )* ovvero  $\lambda$ -manico è  $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ .

*Osservazione 82.* Topologicamente  $D^\lambda \times D^{n-\lambda} \simeq D^n$ .

**Definizione 131** (Cuore). Il *cuore* del  $\lambda$ -manico è  $D^\lambda \times \{0\}$ .

**Definizione 132** (A-sfera). L'*a-sfera* è il bordo del cuore.

**Definizione 133** (A-tubo). L'*a-tubo* del  $\lambda$ -manico è  $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ .

**Definizione 134** (Cocuore). Il *cocuore* del  $\lambda$ -manico è  $\{0\} \times D^{n-\lambda}$ .

**Definizione 135** (B-sfera). La *b-sfera* è il bordo del cocuore.

**Definizione 136** (B-tubo). Il *b-tubo* del  $\lambda$ -manico è  $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ .

*Osservazione 83.* Il cuore e il cocuore sono duali: sono codimensionali, trasversi e si intersecano in un punto.

**Definizione 137** (Attaccamento). Sia  $W$   $n$ -varietà. Fissato un embedding  $\varphi : (\text{a-tubo}) \hookrightarrow \partial W$  detto *funzione di attaccamento del manico*, considerando la relazione di equivalenza indotta da  $\varphi$ , l'insieme:

$$\tilde{W} = (W \sqcup (D^\lambda \times D^{n-\lambda})) / \varphi$$

è l'*attaccamento del  $\lambda$ -manico a  $W$* .

*Osservazione 84.* Vale sempre  $\dim(\text{a-tubo}) = \dim \partial W$ .

**Teorema 124.** A meno di allisciamento sistematico degli angoli,  $\tilde{W}$  è una  $n$ -varietà differenziabile univocamente definita a meno di diffeomorfismi.

*Osservazione 85.*  $\partial \tilde{W} = \overline{\partial W \setminus \varphi(\text{a-tubo})} \cup (\text{b-tubo})$

*Osservazione 86.* L'attaccamento di un manico in generale cambia la topologia.

**Teorema 125** (della teoria di Morse). Siano  $(W, V_0, V_1)$  triade,  $f : W \rightarrow [0, 1]$  di Morse,  $x$  punto critico di  $f$  di indice  $\lambda$ ; poniamo  $c := f(x)$ ,  $W_t := f^{-1}([0, t])$ ,  $V_t := f^{-1}(\{t\})$ ; sia  $\varepsilon$  abbastanza piccolo tale che  $V_{c-\varepsilon}$  e  $V_{c+\varepsilon}$  intersecano una carta di Morse centrata in  $x$ . Allora  $W_{c+\varepsilon}$  è l'attaccamento di un  $\lambda$ -manico a  $W_{c-\varepsilon}$  lungo la componente del bordo  $V_{c-\varepsilon}$ .

*Dimostrazione.* Mettiamoci nella carta di Morse. Allora  $f = -\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$  e i livelli  $V_{-\varepsilon}$ ,  $V_{+\varepsilon}$  sono iperboloidi definiti dalle equazioni  $f = -\varepsilon$ ,  $f = \varepsilon$ . Scegliamo una metrica riemanniana su  $W$  tale che nella carta di Morse sia standard, in particolare  $\nabla f = 2(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ .

Consideriamo l'unione delle linee integrali di  $\nabla f$  passanti per l'origine che provengono da  $V_{-\varepsilon}$ . Ha la dimensione giusta per essere il cuore di un  $\lambda$ -manico. La ingrassiamo a un manico tra le due componenti di  $V_{-\varepsilon}$ . Per completare la dimostrazione, basta integrare lungo  $\nabla f$  per ottenere un diffeomorfismo tra questo attaccamento e  $V_{+\varepsilon}$ .  $\square$

Fissata una triade  $(W, V_0, V_1)$  e una funzione di Morse  $f : W \rightarrow [0, 1]$ , posso ottenere una decomposizione in manici della suddetta triade.

*Esempio 20.* Sia  $W$  una superficie compatta, chiusa, connessa.  $\chi(W) = \# 0\text{-manici} - \# 1\text{-manici} + \# 2\text{-manici}$ .

Per contarli, vorrei potermi dimenticare dei massimi e minimi e selle. Pertanto, vogliamo trovare una serie di mosse che semplifichino la superficie lasciandone invariate le proprietà cercate.

1. Cancellazione di una coppia (0-manico, 1-manico) in posizione complementare. Infatti nel conteggio di  $\chi(W)$ , conteggiando con il segno giusto i manici da semplificare, si ottiene  $1 - 1 = 0$

**Teorema 126.** Posso cancellare 0-manici e 1-manici fino a restare con un solo 0-manico

*Dimostrazione.* Siccome la superficie è connessa, posso cancellare a coppie per induzione i manici. Se parto infatti con una collezione di 0-manici, questi possono essere connessi solo tramite rete di 1-manici. Li retraggo a 2 a 2 e resto con un solo 0-manico.  $\square$

**Corollario 127.** Esiste una funzione di Morse con un solo punto di minimo.

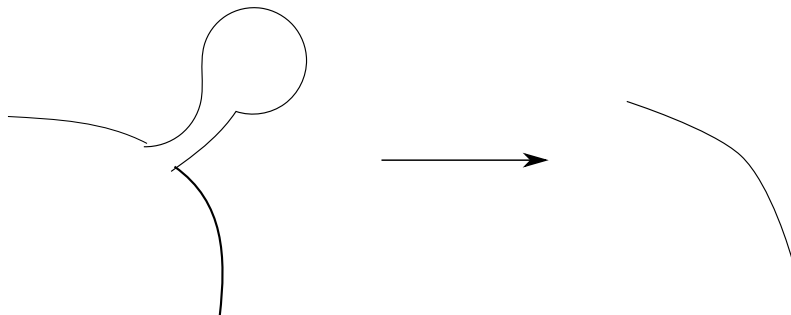


Figura 44: retrazione 1-manico

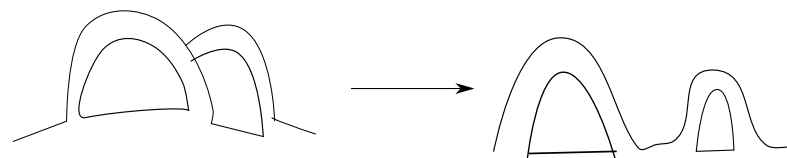


Figura 45: procedura di scivolamento

*Osservazione 87.* Per un ragionamento duale ( $f \rightarrow -f$ ) ho anche un solo 2-manico (e dunque esiste una funzione di Morse con un solo massimo).

2. Scivolamento. Posso assumere che tutti gli 1-manici si attachino solamente lungo il bordo dello 0-manico, che deve essere uno solo perchè lo devo poterappare con un solo 2-manico.

Segue che ogni superficie compatta connessa ammette una decomposizione in manici del seguente tipo

1. Un solo 0-manico  $D^2$ .
2. Si attaccano solamente  $k$  1-manici lungo  $\partial D^2$ . Da questo punto e dal precedente risulta una  $S$  connessa con  $\partial S \sim S^1$
3. Si tappa  $\partial S$  con un unico 2-manico.

*Osservazione 88.*  $\chi(W) = 2 - k$ , ossia, più volgarmente, ci dice che la  $\chi$  conta i buchi.

*Esempio 21.* Per  $k = 0$  si ha  $S^2$ . Per  $k = 1$  si ha il  $\mathbb{P}^2$  (che è un nastro di Moebius); un toro non può essere tappato con un 2-manico. Per  $k = 2$  vanno bene solo la superficie disegnata, che tappata con un 2-manico diviene un toro  $T_2$ , e  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .

Siccome la  $\chi$  è troppo difficile da calcolare, usiamo la forma di intersezione. Supponiamo di avere una superficie  $W$  e una forma di intersezione  $\beta$  totalmente isotropa.

*Osservazione 89.* esiste una curva semplice  $[c] \neq 0$ ,  $c \cdot c = 0$ . Dato che  $c$  non sconnette  $W$ ,  $c$  ha un intorno a nastro diffeomorfo a  $c \times [0]$

Segue che esiste  $c'$  tale che  $c' \cdot c = 1$  e  $[c'] \neq 0$ . Ma dato che  $\beta$  è completamente isotropo,  $c' \cdot c' = 0$ . Allora abbiamo ottenuto un toro:  $W = T_2 \# Z$ , dove  $Z$  non la conosco, ma so che ha un numero di manici inferiore (scatta l'induzione!).

*Osservazione 90.*  $\beta$  è totalmente isotropo anche ristretta a  $Z$

*Osservazione 91.*  $Z$  ha una decomposizione in manici con 2 manici in meno rispetto a  $W$ .

**Teorema 128.** Se  $W$  ha una  $\beta$  totalmente isotropa, allora  $W \simeq \underbrace{T_2 \# \dots \# T_2}_{g \text{ addendi}}$  e

$$\chi(W) = 2 - 2g.$$

Supponiamo ora che  $W \neq S^2$  e  $\beta$  non totalmente isotropa, ossia esiste  $c$  semplice su  $W$  tale che  $c \cdot c = 1$ .

*Osservazione 92.* Allora  $c$  ha un intorno che è diffeomorfo ad un nastro di Moebius, ossia  $W = \mathbb{P}^2 \# Z$

Anche qui adesso vogliamo far scattare l'induzione come sopra! Abbiamo due casi:

1.  $W \simeq \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2}_{k \text{ addendi}}$  e  $\chi(W) = 2 - k$
2.  $W \simeq \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2}_{r \text{ volte}} \# Z$  con  $Z$  totalmente isotropo. Tuttavia se  $Z$  è totalmente isotropo, possiamo applicare i ragionamenti fatti in precedenza. Così otteniamo la scomposizione  $W \simeq \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2}_{r \text{ volte}} \# \underbrace{T_2 \# \dots \# T_2}_{g \text{ volte}}$ . Segue che  $\chi(W) = 2 - r - 2g$ .

**Lemma 129.** da farselo spiegare.