Dispense del corso di Teoria della Rappresentazione

Fabio Zoratti

25 novembre 2016

1 Teoria dei gruppi

Definizione 1.1 (Gruppo)**.** Un gruppo è un insieme con associata un operazione binaria $\cdot : G \times G \to G$ che gode di alcune proprietà

1. Associatività $\quad (ab)c = a(bc)$
2. Esistenza unità $\quad ea = ae = a$
3. Esistenza inverso a' per ogni elemento $a \quad a'a = aa' = e$

Esempi

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con l'operazione di somma.
2. $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ con l'operazione di moltiplicazione. (Senza lo 0)
3. $GL_n(\mathbb{R})$ oppure $GL(V)$
4. $f : I \to I$ biunivoca, con I insieme e con l'operazione di composizione. Nel caso in cui I sia un insieme finito, tanto vale scegliere $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. In tal caso questo gruppo si chiama S_n

Alcuni teoremi elementari

1. L'unità e è unica

   Dimostrazione: supponiamo per assurdo che siano due distinte, e, e'. Allora vale

   $$e = ee' = e' \quad \square$$

2. L'inverso è unico.

   Dimostrazione:

   Supponiamo per assurdo che siano due, a', a''

   $$(a'a)a'' = a'(aa'') \Rightarrow ea'' = a'e \quad \square$$

3. Se ho $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il prodotto di questi termini è ben definito senza bisogno di parentesi
4. Esistono le potenze, ovvero $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall a \in G \exists b \in G | a^k = b$

   Vale sempre la regola

   $$a^{k+h} = a^k \cdot a^h$$

   Ricorda che

   $$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Definizione 1.2 (Sottogruppo)**.** Sia G un gruppo, $H \subseteq G$ si dice sottogruppo di G se:

- $e \in H$
- $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

Definizione 1.3 (Sottogruppo normale)**.** Sia G un gruppo, $H \subseteq G$ si dice *normale* in G se

$$\forall h \in H, \forall g \in G \qquad ghg^{-1} \in H$$

Definizione 1.4 (Gruppo quoziente)**.**

Definizione 1.5 (Classi di coniugio)**.**

Esempio 1.1 (Le classi di coniugio di $GL_n(\mathbb{C})$)**.**

Definizione 1.6 (Prodotto di gruppi)**.**

Definizione 1.7 (Omomorfismo (isomorfismo) di gruppi)**.** Siano G ed H gruppi, un'applicazione $\varphi : G \to H$ si dice *omomorfismo di gruppi* se

$$\forall g_1, g_2 \in G \qquad \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

dove la prima moltiplicazione è fatta in G mentre la seconda in H. Se φ è bigettiva, allora si dice *isomorfismo.*

Definizione 1.8 (Azione di un gruppo su un insieme)**.** Sia G un gruppo e I un insieme. Definiamo un azione a di G su I una funzione $a : G \times I \to I$ che rispetti la regola di composizione, ovvero che se $h, h \in G$ e $i \in I$, valga

$$a(h, a(g, i)) = a(hg, i)$$

Normalmente si usa una notazione abbreviata in cui invece di scrivere $a(g, i)$ si scrive direttamente $g \cdot i$ o addirittura gi

Definizione 1.9 (Azione transitiva)**.**

Definizione 1.10 (Orbita di un elemento)**.**

Definizione 1.11 (Azione semplicemente transitiva)**.**

Definizione 1.12 (Funzione G equivariante)**.** Dato un gruppo G che agisce su due insiemi I e J, una funzione $\phi : I \to J$ si dice G equivariante se

$$\phi(s \cdot_I i) = s \cdot_J \phi(i) \qquad \forall s \in G, \quad \forall i \in I$$

1.1 Proprietà dei gruppi abeliani

Teorema 1.1. *Ogni gruppo abeliano finito è isomorfo al prodotto di gruppi ciclici.*

Osservazione. Sia G un gruppo abeliano. Allora

$$|G| = card(\{Hom(G \to \mathbb{C}^*)\})$$

Se invece G non è abeliano allora nella formula precedente all'uguale va sostituito un $>$

1.2 Proprietà del gruppi simmetrici

Teorema 1.2 (Ogni elemento $\sigma \in S_n$ si scrive in modo unico come prodotto di cicli disgiunti a meno dell'ordine dei fattori)**.**

Proposizione 1.3. *Il segno di un ciclo di lunghezza k è esattamente* $(-1)^{k-1}$

1.3 Proprietà dei gruppi ciclici

Osservazione. Due gruppi ciclici dello stesso ordine sono isomorfi

1.4 Proprietà dei gruppi diedrali

2 Algebra multilineare

2.1 Alcune generalizzazioni di algebra lineare

Definizione 2.1 (Base di uno spazio vettoriale).

Lemma 2.1. *Sia $e : I \to V$ una base di V e W uno spazio vettoriale. $f : I \to W$ una funzione. Allora $\exists! \phi : V \to W$ lineare tale che*

$$\phi(e_i) = f_i$$

Inoltre ϕ è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ f è una base.

2.2 Prodotto tensoriale

Definizione 2.2 (Prodotto tensoriale).

Proposizione 2.2. *Se ho due prodotti tensoriali $V \otimes W$ e $V \overline{\otimes} W$, allora esiste un unico isomorfismo $\phi : V \otimes W \to V \overline{\otimes} W$ tale che*

$$\phi(v \otimes w) = v \overline{\otimes} w$$

Nota. É importante notare che non tutti gli elementi $z \in V \otimes W$ si scrivono come $z = v \otimes w$. In particolare, per fare un esempio concreto che mostra che questa cosa non funziona, prendiamo $W = V^*$. Vedremo fra poco che $V \otimes V^*$ è canonicamente isomorfo allo spazio delle applicazioni bilineari da V in $\mathbb{C}$, che sappiamo scriverlo come matrici $n \times n$. Tuttavia se un elemento si scrive in termini di matrici come $z = v \otimes w$, allora la matrice associata a z in una base avrà rango al massimo 1, ben lontano da coprire tutto lo spazio.

Proposizione 2.3.

$$\langle \{ v \otimes w | v \in V, w \in W \} \rangle = V \otimes W$$

Definizione 2.3 (Prodotto tensoriale di mappe lineari).

Osservazione.

$$id_V \otimes id_W = id_{V \otimes W}$$

Proposizione 2.4. *Se e_i è una base di V e f_i è una base di W allora $e_i \otimes f_j$ è una base di $V \otimes W$*

Corollario.

$$dim(V \otimes W) = dimV \cdot dimW$$

Definizione 2.4. DEFINISCI TRACCIA DEL PRODOTTO TENSORE, OVVERO

$$tr(f \otimes g)$$

Teorema 2.5. *Se $f : V \to V$ e $g : W \to W$ sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora vale la formula*

$$tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$$

Dimostrazione:

2.3 Prodotto esterno e prodotto simmetrico

Definizione 2.5 (Prodotto esterno)**.**

Teorema 2.6 (Dimensione del prodotto esterno)**.**

Definizione 2.6 (Prodotto simmetrico)**.**

Teorema 2.7 (Dimensione del prodotto simmetrico)**.**

3 Prime proprietà delle rappresentazioni

Definizione 3.1 (Rappresentazione)**.** Sia G un gruppo. Una rappresentazione ρ di G è una coppia composta da uno spazio vettoriale di dimensione qualsiasi V_ρ e una funzione $\rho : G \to GL(V_\rho)$ che manda ciascun elemento del gruppo in un'applicazione lineare di V_ρ, ovvero un suo endomorfismo. Affinché ρ sia una rappresentazione deve essere un omomorfismo di gruppi, ovvero in parole semplici deve rispettare la regola di composizione. In formule, se $s, t \in G$ deve valere

$$\rho(st)v = \rho(s)\rho(t)v \qquad \forall v \in V_\rho, \quad \forall s, t \in G$$

La dimensione di V_ρ viene detta grado della rappresentazione.

Proposizione 3.1. *$\rho(G)$ è evidentemente un sottogruppo di $GL(V_\rho)$, quindi esistono sempre inversi, potenze e tutte le cose che valgono per i gruppi.*

Esempi.

1. La rappresentazione banale, di grado qualsiasi, indicata con ρ_1 che manda qualsiasi elemento di g nell'identità di V_ρ, ovvero

$$\rho(s) = id_{V_\rho} \qquad \forall s \in G$$

2. Dato S_n, il segno di un elemento $s \in S_n$ è una rappresentazione di grado 1. Infatti si ha $sgn(st) = sgn(s)sgn(t)$.

3. L'azione naturale di S_n sui vettori della base. Prendiamo quindi $G = S_n$ e uno spazio vettoriale di dimensione n, che sarà sicuramente isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Prendiamo la base canonica di $\mathbb{C}^n$ e la chiamiamo e_i. Descriviamo la rappresentazione $\rho : S_n \to GL(\mathbb{C}^n)$ dicendo cosa fa agli elementi della base. Per linearità si estenderà a tutto lo spazio.

$$\rho(s)e_i = e_{s(i)}$$

Notare che in questo caso $deg(\rho) = n$. Notiamo inoltre che se rappresentiamo nella base canonica le matrici associate a $\rho(s)$ queste matrici sono unitarie. Inoltre, ogni colonna (e anche ogni riga) contiene esattamente un 1 e tutti gli altri sono 0.

Prendiamo come esempio S_3 e vediamo cosa succede. Notiamo innanzitutto che $|S_3| = 3! = 6$ FINISCI DI SCRIVERE

Proposizione 3.2. *Sia G un gruppo finito e $\rho : G \to GL(V_\rho)$ una sua rappresentazione. Allora $\forall g \in G$ la matrice $\rho(g)$ ammette una base di autovettori in V_ρ, ovvero è diagonalizzabile. Inoltre, tutti gli autovalori di $\rho(g)$ sono radici $n-$esime dell'unità.*

NOTA BENE: *Per ogni matrice in generale la base è diversa, quindi le varie matrici in generale* ***non*** *sono simultaneamente diagonalizzabili. In particolare, tutte le matrici $\rho(s)$ sono simultaneamente diagonalizzabili $\Leftrightarrow$ G è abeliano.*

DIMOSTRAZIONE: Se G è un gruppo finito, allora $\exists k | g^k = e$[1]. Dato che $\rho : G \to GL(V_\rho)$ mantiene queste proprietà in quanto omomorfismo, dovrà essere

$$\rho(g)^k = id$$

[1] Dato che g è finito, se prendo l'insieme delle potenze $I = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$, proprio perchè G è finito si ha che I ha un numero finito di elementi, quindi ci saranno $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $g^m = g^n = h$. Dato che nei gruppi esiste l'inverso, sarà $g^{n-m} = e$

Con il polinomio minimo si mostra facilmente che $\rho(g)$ è diagonalizzabile. MATEMATICI SCRIVETE IL PERCHÉ. Inoltre da questa formula è anche evidente che tutti gli autovalori di $\rho(g)$ hanno modulo 1 e in particolare saranno radici $k-$esime dell'unità.

Ricordiamo un teorema di algebra lineare per finire l'ultima parte della dimostrazione: due endomorfismi di uno spazio vettoriale diagonalizzabili sono simultaneamente diagonalizzabili $\Leftrightarrow$ commutano. Da questo teorema segue facilmente la seconda parte dell'enunciato. $\square$

Definizione 3.2 (Omomorfismo di rappresentazioni)**.**

Definizione 3.3 (Rappresentazioni isomorfe)**.**

Rappresentazioni di grado 1

Teorema 3.3 (Le classi di isomorfismo delle rappresentazioni di grado 1 sono gli omomorfismi da G in $\mathbb{C}^*$)**.**

Esempio 3.1 (Rappresentazioni di grado 1 di C_n)**.**

Esempio 3.2 (Rappresentazioni di grado 1 di S_3)**.**

Esempio 3.3 (Rappresentazioni di grado 1 di $C_n \times C_n$)**.** (generalizzazione a prodotto di C_{n_i})

3.1 Operazioni con le rappresentazioni

Definizione 3.4 (Somma di rappresentazioni).

Osservazioni:

1. $\rho + \sigma \cong \sigma + \rho$
2. $\rho + (\sigma + \tau) \cong (\rho + \sigma) + \tau$
3. Esiste l'elemento neutro che è la rappresentazione di grado 0 ma non esiste l'inverso.

Definizione 3.5 (Prodotto di rappresentazioni).

Osservazioni:

1. $1 \otimes \rho \cong \rho$
2. $\rho \otimes \sigma \cong \sigma \otimes \rho$
3. $0 \otimes \rho \cong 0$
4. $\rho \otimes (\sigma \otimes \tau) \cong (\rho \otimes \sigma) \otimes \tau$
5. $\rho \otimes (\sigma_1 + \sigma_2) \cong \rho \otimes \sigma_1 + \rho \otimes \sigma_2$

Definizione 3.6 (Rappresentazione duale).

Osservazione: vale

$$(\rho + \sigma)^* \cong \rho^* + \sigma^*$$

E l'isomorfismo è canonico. SCRIVI DIMOSTRAZIONE.

Definizione 3.7 (Rappresentazione regolare).

Esempio 3.4 (La rappresentazione regolare di S_3).

Teorema 3.4.

$$\mathcal{R}_G \cong \sum_i deg(\rho_i)\rho_i$$

3.2 Sottospazi invarianti e scomposizione delle rappresentazioni

Definizione 3.8 (Sottospazio invariante).

Definizione 3.9 (Sottorappresentazione).

Definizione 3.10 (Rappresentazione irriducibile).

Osservazione. Normalmente la cosa che si fa più spesso in teoria della rappresentazione è cercare di scomporre la rappresentazione di un gruppo come somma di rappresentazioni irriducibili. Vedremo quindi adesso diversi teoremi che ci aiuteranno in questi problemi.

Esempio 3.5 (Rappresentazione regolare di S_3).

Teorema 3.5 (Le rappresentazioni di un gruppo finito sono completamente riducibili).

Proposizione 3.6 (Prodotto hermitiano invariante).

Lemma 3.7. *Sia $h : V_\rho \times V_\rho \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana definita positiva e invariante per $\rho : G \to GL(V_\rho)$ e sia $\rho|_W : G \to GL(W)$ una sottorappresentazione di ρ. Allora se $W^\perp$ è l'ortogonale di W, $\rho|_{W^\perp} : G \to GL(W^\perp)$ è una sottorappresentazione.*

Lemma 3.8. *Sia $\rho : G \to GL(V_\rho)$ una rappresentazione di un gruppo finito G. Sia $\rho|_W : G \to GL(W)$ una sottorappresentazione di ρ. Allora esiste una sottorappresentazione $\sigma : G \to GL(W')$ tale che*

$$\rho = \rho|_W + \sigma$$

Osservazione. Notare che il teorema precedente è falso per gruppi finiti. (Esempio con $\mathbb{Z}^+$ che Salvatore non ha scritto con cura. Porco salvatore)

Teorema 3.9. *Siano $\rho : G \to GL(V_\rho)$ e $\sigma : G \to GL(V_\sigma)$ sono rappresentazioni di G e $f : V_\rho \to V_\sigma$ è un omomorfismo di rappresentazioni, allora $Im(f)$ è una sottorappresentazione di σ e $Ker(f)$ è una sottorappresentazione di V_ρ*

Teorema 3.10. *Sia G un gruppo abeliano finito. Allora ogni rappresentazione di G è isomorfa alla somma di rappresentazioni di grado 1.*

Proposizione 3.11. *La rappresentazione regolare $\mathcal{R}$ di C_n è isomorfa alla somma delle n rappresentazioni irriducibili di grado 1 di C_n.*

Lemma 3.12. *Date ρ_1, ρ_2, σ rappresentazioni di G, allora*

$$Hom(\rho_1 + \rho_2, \sigma) \cong Hom(\rho_1, \sigma) \oplus Hom(\rho_2, \sigma)$$

Teorema 3.13 (Lemma di Schur).

Teorema 3.14. *Sia $\rho : G \to GL(V_\rho)$ una rappresentazione e*

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} n_i \rho_i$$

una sua scomposizione come somma di rappresentazioni irriducibili a due a due non isomorfe. Allora la scomposizione è unica.

Lemma 3.15. *Sia ρ una rappresentazione di G e $\mathcal{R}$ la sua rappresentazione regolare. Allora*

$$deg(\rho) = dim(Hom(\mathcal{R}, \rho))$$

Teorema 3.16. *Sia $\mathcal{R}$ la rappresentazione regolare di G, un gruppo finito, e sia*

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{N} n_i \rho_i$$

Con ρ_i irriducibili e a due a due non isomorfe. Allora ogni rappresentazione irriducibile di G è isomorfa ad una ρ_i. Inoltre $n_i = deg(\rho_i)$

Corollario. *Se G è abeliano allora ha $|G|$ rappresentazioni irriducibili di grado 1 e $\mathcal{R}$ è la somma di queste.*

Corollario. *Sia G un gruppo finito. G ha un numero finito di rappresentazioni irriducibili, a meno di isomorfismi. Inoltre*

$$|G| = \sum n_i^2$$

4 Teoria dei caratteri

Definizione 4.1. Sia $\rho : G \to GL(V_\rho)$ una rappresentazione di un gruppo G. Definiamo carattere di ρ la funzione che associa ad ogni elemento del gruppo G la traccia della matrice associata all'elemento, ovvero

$$\chi_\rho(s) := tr(\rho(s)) \qquad \forall s \in G$$

Notare che χ è una funzione che va dal gruppo in $\mathbb{C}^*$, ovvero $\chi : G \to \mathbb{C}^*$

Vediamo delle proprietà elementari del carattere
Osservazioni:

1. Se $dim(\rho) = 1$ allora il carattere di s è uguale a $\rho(s)$
2. $\chi_{\rho_1} = dim(\rho_1)$ [2]
3. $\chi_{\rho+\sigma}(s) = \chi_\rho(s) + \chi_\sigma(s)$.
   Questo è dovuto al fatto che la somma di rappresentazioni si può scrivere come matrice a blocchi. Una volta scritto così è evidente il risultato.
4. $\chi_{\rho\sigma}(s) = \chi_\rho(s)\chi_\sigma(s)$.
   Questo deriva dal fatto che in generale se $f : V \to V$ e $g : W \to W$ sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora vale $tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$
5. $\chi_{\rho^*}(s) = \overline{\chi_\rho(s)}$.
   Se abbiamo un gruppo finito [3], allora $\exists n | (\rho(s))^n = id$, per cui tutti gli autovalori di $\rho(s)$ sono radici ennesime dell'unità e $\rho(s)$ è diagonalizzabile[4]. Dato che possiamo scrivere $\rho(s)$ in una base in modo che sia diagonale per ogni s, è evidente che gli autovalori dell'inversa saranno l'inverso degli autovalori, ma dato che hanno modulo 1, l'inverso è uguale al coniugio.
6. Notiamo inoltre che χ_ρ è costante sulle classi di coniugio di G, ovvero: dati $s, t \in G$, se esiste un elemento $r \in G | rsr^{-1} = t$, allora si ha

   $$\chi_\rho(s) = \chi_\rho(t)$$

   La motivazione è semplice: sappiamo che $tr(MAM^{-1}) = tr(A)$ in quanto la traccia è la somma degli autovalori ed è quindi un invariante di similitudine.

   Di conseguenza, non sarà necessario calcolare il carattere per ogni elemento del gruppo ma basterà farlo per le classi di coniugio di G.

Definizione 4.2 (Prodotto hermitiano dei caratteri)**.**

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{f(s)} g(s)$$

Teorema 4.1 (Relazioni di ortogonalità)**.** *Se ρ e σ sono rappresentazioni irriducibili di G, allora vale*

$$\langle \rho|\sigma \rangle = \begin{cases} 1 & se\ \rho \cong \sigma \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

[2]Al solito ρ_1 è la rappresentazione che manda ogni elemento nell'identità di V_ρ
[3]Ricordiamo che $\rho^*(s) = (\rho(s)^{-1})^*$
[4]Si veda la proposizione 3.2

Osservazioni:

- Ricordiamo che se ρ è una rappresentazione di G, allora ρ si può scrivere in modo unico come

$$\rho = \sum_i n_i \rho_i$$

  Dove le ρ_i sono le rappresentazioni irriducibili di G e gli n_i sono numeri naturali ≥ 0. Dall'equazione scritta sopra segue subito che

$$\chi_\rho = \sum_i n_i \chi_{\rho_i}$$

  E possiamo ottenere un'informazione utile prendendo il prodotto scalare dell'equazione precedente con il carattere di una delle rappresentazioni ρ_i

$$\langle \chi_\rho | \chi_{\rho_j} \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_{\rho_i} | \chi_{\rho_j} \rangle \Rightarrow n_i \delta_{ij} = \langle \chi_\rho | \chi_{\rho_j} \rangle \Rightarrow n_i = \langle \chi_\rho | \chi_{\rho_i} \rangle$$

- Una rappresentazione di un gruppo ρ è irriducibile $\Leftrightarrow \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = |\chi_\rho|^2 = 1$

4.1 Esempi di rappresentazioni di gruppi finiti