COMPITO PER IL CORSO
INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI

6 APRILE 2016

G finito **Esercizio 1.** Sia χ il carattere di una rappresentazione complessa V di un gruppo G e sia $g \in G$. Mostrate le seguenti:

i) Se g ha ordine 2, allora $\chi(g)$ è un intero, e $\chi(g) \equiv \chi(1) \bmod 2$. Se in aggiunta G è semplice (ossia privo di sottogruppi normali non banali), e non abeliano, allora $\chi(g) \equiv \chi(1) \bmod 4$. *Cenno di soluzione:* Per la seconda parte, considerate il determinante dell'endomorfismo corrispondente a g. ?

ii) Se g ha ordine 3 ed è coniugato a g^{-1}, allora $\chi(g)$ è ancora un intero, e $\chi(g) \equiv \chi(1) \bmod 3$.

Esercizio 2.

i) Fate vedere che $\mathrm{U}(2)$ è un quoziente di $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{SU}(2)$ per un gruppo ciclico di ordine 2.

ii) Considerate la rappresentazione $\rho_m : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(V_m)$, dove V_m è lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado m in due variabili. Determinare tutte le rappresentazioni irriducibili $\widetilde{\rho}_m : \mathrm{U}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(V_m)$ che estendono ρ_m.

Esercizio 3. Sia G il sottogruppo di $\mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3$ che consiste delle coppie di permutazioni (σ, τ) dello stesso segno. Fate vedere che G ha 6 classi di coniugio, e trovatene la tavola dei caratteri.