UNIVERSITÁ DI PISA – FACOLTÁ DI MATEMATICA

APPUNTI DI

Geometria Analitica e Algebra Lineare

Giacomo Mezzedimi

frutto della rielaborazione delle lezioni tenute dai professori
E. Fortuna
R. Frigerio

a.a. 2013-2014

29/11/2015

INTRODUZIONE

Questi appunti nascono dall'esigenza mia (ma credo anche di altri) di un supporto per lo studio del corso "Geometria Analitica e Algebra Lineare" al primo anno; a differenza infatti di molti altri corsi, non è facile trovare del materiale adatto da affiancare durante lo studio.
Sostanzialmente queste pagine contengono gli argomenti svolti dalla professoressa E. Fortuna e dal professore R. Frigerio durante l'anno accademico 2013-2014, anno in cui io ho seguito il corso; molte parti sono prese dai lucidi della professoressa Fortuna, ma alcune sono state riadattate/modificate/completate per dare una continuità al testo.
I paragrafi 3.6 (Basi cicliche per endomorfismi) e 5.3 (Geometria affine euclidea) sono stati aggiunti nel giugno del 2015, in quanto svolti nell'a.a. 2014-2015; voglio ringraziare a tal proposito Dario Balboni, che ha realizzato questi due paragrafi, oltre ad avermi aiutato nell'opera di correzione del testo.
Voglio infine ringraziare tutti quelli che hanno contribuito o contribuiranno a migliorare questi appunti: è impossibile rendere un testo completamente privo di errori, ma l'obiettivo è quello di ripulirlo più possibile; invito dunque tutti a segnalarmi qualunque tipo di errore/imprecisione presente in queste pagine (la mia e-mail è *mezzedimi@mail.dm.unipi.it*).
Nella speranza che questi appunti vi siano utili, vi auguro un buono studio.

Giacomo Mezzedimi (con l'accento sulla seconda e)

SOMMARIO

1 PRIME DEFINIZIONI E PROPRIETÁ

1.1 PRIME DEFINIZIONI

DEFINIZIONE 1.1.1: Siano A, B insiemi. Diciamo che:
- A è **sottoinsieme** di B ($A \subset B$ oppure $A \subseteq B$) se $\forall a \in A$, $a \in B$;
- A è **uguale** a B ($A = B$) se $A \subset B \wedge B \subset A$.

Se un insieme è finito, si può definire elencando tutti i suoi elementi:
$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$
Se un insieme è infinito, si definisce enunciando la proprietà che caratterizza tutti i suoi elementi:
$$A = \{x | P(x)\}$$
Esempio: $P = \{a \in \mathbb{N} | a \equiv 0\ (2)\}$ è l'insieme dei numeri pari.

DEFINIZIONE 1.1.2: Dati A, B insiemi, definiamo:
- **unione** di due insiemi $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$;
- **intersezione** di due insiemi $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$;
- **differenza** di due insiemi $A - B = A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$;
- **prodotto cartesiano** di due insiemi $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

DEFINIZIONE 1.1.3: Una applicazione è una terna $f: A \to B$, dove A e B sono insiemi, chiamati rispettivamente **dominio** e **codominio**, e f è una legge che associa ad ogni elemento $x \in A$ **uno e un solo elemento** $f(x)$ di B.
$id_A: A \to A$ è l'applicazione identica, tale che $\forall x \in A$, $id_A(x) = x$.

DEFINIZIONE 1.1.4: Data un'applicazione $f: A \to B$, si definisce **immagine** di f l'insieme $Im(f) = \{y \in B | \exists x \in A\ tale\ che\ f(x) = y\}$.
Vale sempre $Im(f) \subset B$.

Esempio: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} |\ f(x) = 2x$; $Im(f) = \{pari\}$.

In generale, se $W \subset A$, allora $f(W) = \{y \in B | \exists x \in W\ tale\ che\ f(x) = y\}$ perciò $f(W) \subset B$.

DEFINIZIONE 1.1.5: Si definisce **restrizione** di f a W, dove $f: A \to B$ e $W \subset A$, come la funzione $f|_W: W \to B$ tale che $\forall x \in W\ \ (f|_W)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$.
In parole povere, $f|_W$ agisce come f ma in un dominio ristretto; si parla infatti di una **restrizione del dominio**.
Perciò: $Im(f|_W) = f(W)$.

DEFINIZIONE 1.1.6: Sia $f: A \to B$ e $Z \subset B$. Si indica con $f^{-1}(Z)$ il sottoinsieme del dominio che contiene tutti gli elementi che hanno immagine in Z, cioè:
$$f^{-1}(Z) = \{x \in A | f(x) \in Z\}$$

$f^{-1}(Z)$ viene chiamata **controimmagine** di Z.
DEFINIZIONE 1.1.7: Una applicazione $f: A \to B$ si dice:

- **surgettiva** se $Im(f) = B$ oppure equivalentemente se $\forall y \in B,\ \exists x \in A|\ f(x) = y$;
- **iniettiva** se $\forall x, y \in A, x \neq y\ \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ oppure equivalentemente se $f(x) = f(y)\ \Rightarrow x = y$;
- **bigettiva** (o biunivoca) se è sia iniettiva che surgettiva.

DEFINIZIONE 1.1.8: Data un'applicazione $f: A \to B$ bigettiva, si definisce **funzione inversa** $f^{-1}: B \to A$ tale che $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x$, dove $x|\ f(x) = y$.
L'unicità della x viene garantita dalla bigettività di f.

DEFINIZIONE 1.1.9: Date $f: A \to B$ e $g: B \to C$, si definisce **composizione di funzioni** la funzione $g \circ f: A \to C$ tale che $\forall x \in A\ (g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g\big(f(x)\big)$.

PROPOSIZIONE 1.1.1: $Im(g \circ f) = Im\big(g|_{Im(f)}\big)$
Dimostrazione:
Entrambi i contenimenti derivano direttamente dalla definizione di composizione.

DEFINIZIONE 1.1.10: Dato un insieme $E \neq \emptyset$, si definisce **relazione** $\mathcal{R}$ su E come un sottoinsieme di $E \times E$ tale che $(x, y) \in \mathcal{R}$ per alcuni $x, y \in E$.
$(x, y) \in \mathcal{R}$ viene comunemente scritto $x\mathcal{R}y$ (x è in relazione con y).

DEFINIZIONE 1.1.11: Una relazione $\mathcal{R}$ si dice **di equivalenza** se:

- è riflessiva, cioè $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$;
- è simmetrica, cioè $x\mathcal{R}y\ \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- è transitiva, cioè $x\mathcal{R}y\ \land y\mathcal{R}z\ \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

DEFINIZIONE 1.1.12: Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza. $\forall x \in E$, si definisce **classe di equivalenza** di x l'insieme $[x] = \{y \in E | x\mathcal{R}y\}$, cioè l'insieme degli elementi di E in relazione con x.
Evidentemente $\forall x \in E, [x] \neq \emptyset$, poiché $x \in [x]$.

LEMMA 1.1.2: Siano $x, y \in E$ e sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su E. Allora $[x] = [y]\ \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) $x \in [x]\ \Rightarrow x \in [y]\ \Rightarrow x\mathcal{R}y$.
$\Leftarrow$) Sia $z \in [x]$; allora $z\mathcal{R}x$.
Ma $x\mathcal{R}y$ per ipotesi, quindi per transitività $z\mathcal{R}y \Rightarrow z \in [y]$.
Perciò $[x] \subset [y]$.
Analogamente si prova che $[y] \subset [x]$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 1.1.3: Le classi di equivalenza formano una **partizione**, cioè:

1) ogni classe è non vuota;
2) $\bigcup_{x \in E}[x] = E$;

3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.
Dimostrazione:
1) già fatta.
2) $\forall x \in E,\ [x] \subset E \Rightarrow \bigcup_{x\in E}[x] \subset E$;
   $\forall x \in E,\ x \in [x] \Rightarrow E \subset \bigcup_{x\in E}[x]$, da cui segue la tesi.
3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in [x] \cap [y] \Rightarrow z\mathcal{R}x \wedge z\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}y$ e per il lemma precedente ho che $[x] = [y]$, cioè la tesi.

Esempio: $E = \mathbb{R}, (x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
Questa relazione è di equivalenza, in quanto:
1) è riflessiva, poiché $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$;
2) è simmetrica, poiché se $x - y = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x = -k \in \mathbb{Z}$;
3) è transitiva, poiché se $x - y = k_1 \in \mathbb{Z}$ e $y - z = k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - z = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$.

DEFINIZIONE 1.1.13: Si definiscono **rappresentanti di una classe di equivalenza** tutti gli elementi di una certa classe.

DEFINIZIONE 1.1.14: Sia $E \neq \emptyset$ e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su E. Si definisce **insieme quoziente** $E/_{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \{[x] |\ x \in E\}$ (si legge E modulo $\mathcal{R}$).

DEFINIZIONE 1.1.15: Si definisce **proiezione naturale al quoziente** l'applicazione:

$$\pi_{\mathcal{R}}: E \to E/_{\mathcal{R}} \mid \pi_{\mathcal{R}}(x) = [x]$$

$\pi_{\mathcal{R}}$ è surgettiva poiché ogni classe di $E/_{\mathcal{R}}$ è immagine di tutti i suoi rappresentanti. Per lo stesso motivo non è iniettiva.

PROPOSIZIONE 1.1.4 (Leggi di De Morgan): Sia X un insieme e $A, B \subset X$. Allora, se $\overline{A} = X \setminus A$:
1) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Dimostrazione:
1) $x \in \overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
2) Analoga.

PROPOSIZIONE 1.1.5: Sia $f: X \to Y$. Allora:
1) $\exists g: Y \to X |\ f \circ g = id_Y$ (**inversa destra**) $\Leftrightarrow f$ è surgettiva;
2) $\exists g: Y \to X |\ g \circ f = id_X$ (**inversa sinistra**) $\Leftrightarrow f$ è iniettiva;
3) g è unica sia in 1) che in 2).
Dimostrazione:
1) $\Rightarrow$) $\forall y \in Y, y = f\big(g(y)\big) \Rightarrow$ ogni $y \in Y$ appartiene a $Im(f) \Rightarrow f$ è surgettiva
   $\Leftarrow$) f surgettiva $\Rightarrow \forall y_0 \in Y\ \exists x_0 \in X |\ f(x_0) = y_0$.
      Scelgo $g |\ g(y_0) = x_0\ \ \forall y_0 \in Y$.
      Allora $f\big(g(y_0)\big) = y_0\ \ \forall y_0 \in Y \Rightarrow f \circ g = id_Y$.
2) Analoga.
3) g è fissata $\forall y_0 \in Y$, dunque è sicuramente unica.

1.2 STRUTTURE ALGEBRICHE

DEFINIZIONE 1.2.1: Dato un insieme A, si definisce **operazione** su A un'applicazione:
$$*: A \times A \to A$$

Esempio: la somma su $\mathbb{Z}$ è definita come $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} | +(x, y) = x + y$.

DEFINIZIONE 1.2.2: La coppia $(A,*)$, con A insieme e $*$ operazione su A, si chiama **gruppo** se valgono le seguenti proprietà:
1) **associativa**: $\forall a, b, c \in A, (a * b) * c = a * (b * c)$;
2) **dell'elemento neutro**: $\forall a \in A \; \exists e \in A | \; a * e = e * a = a$;
3) **dell'inverso**: $\forall a \in A \; \exists b \in A | \; a * b = b * a = e$.

Se vale anche la proprietà commutativa (cioè $\forall a, b \in A, \; a * b = b * a$), allora $(A,*)$ si dice **gruppo abeliano**.

Esempi: $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo (non vale la proprietà dell'inverso).
$(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano.
$(\mathbb{R},\cdot)$ non è un gruppo perché non esiste l'inverso di 0.
$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ è un gruppo abeliano.

TEOREMA 1.2.1: Dato un gruppo $(A,*)$:
1) l'elemento neutro è unico
2) l'inverso di un elemento è unico
3) se $a, b, c \in A$ e $a * b = a * c$, allora $b = c$ (legge di cancellazione).

Dimostrazione:
1) Siano e_1, e_2 elementi neutri. Allora: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$, da cui $e_1 = e_2$.
2) Sia $a \in A$. Se a_1 e a_2 sono inversi di a allora:
$$a_1 = e * a_1 = (a_2 * a) * a_1 = a_2 * (a * a_1) = a_2 * e = a_2$$
da cui $a_1 = a_2$.
3) Se a^{-1} è l'inverso di a, allora $a * b = a * c \; \Rightarrow a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c \; \Rightarrow e * b = e * c \; \Rightarrow$ $b = c$.

DEFINIZIONE 1.2.3: Siano $f, g: A \to B$. Si dice che $f = g \Leftrightarrow \forall x \in A, \; f(x) = g(x)$.

DEFINIZIONE 1.2.4: Siano $+, \; \cdot$ operazioni in A, con A insieme. La terna $(A, +,\cdot)$ si dice **anello** se:
1) $(A, +)$ è un gruppo abeliano;
2) (associativa di $\cdot$) $\forall a, b, c \in A, (ab)c = a(bc)$;
3) (elemento neutro per $\cdot$) $\exists 1 | \; \forall a \in A, \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
4) (distributiva) $\forall a, b, c \in A, \; (a + b) \cdot c = ac + bc; \; a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Se inoltre l'operazione $\cdot$ è commutativa, cioè $\forall a, b \in A, \; a \cdot b = b \cdot a$, l'anello si dice **commutativo**.

Esempio: $(\mathbb{Z}, +,\cdot)$ è un anello commutativo.

DEFINIZIONE 1.2.5: $(A,+,\cdot)$ è un **campo** se:
1) $(A,+,\cdot)$ è un anello commutativo;
2) $\forall a \in A, a \neq 0$ (dove lo 0 rappresenta l'elemento neutro per la somma) $\exists b \in A|\ ab = ba = 1$.

Notazione: l'inverso rispetto alla somma a^{-1} si denota con $-a$.

Esempi: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ è un campo.
$(\mathbb{R},+,\cdot)$ è un campo.
$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ non è un campo perché $\forall a \neq 1\ \nexists b \in \mathbb{Z}|\ ab = 1$.

PROPOSIZIONE 1.2.2: Sia $(A,+,\cdot)$ un anello. Allora:
1) $\forall a \in A,\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
2) $\forall a \in A,\ (-1) \cdot a = -a$ (-1 rappresenta l'inverso rispetto alla somma dell'elemento neutro per il prodotto).

Dimostrazione:
1) $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$.
   Sommando da entrambe le parti l'inverso dell'elemento $a \cdot 0$:
   $a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$.
2) Dobbiamo verificare che $(-1) \cdot a + a = 0$.
   $(-1) \cdot a + a = (-1) \cdot a + 1 \cdot a = \big((-1) + 1\big) \cdot a = 0 \cdot a = 0$.

PROPOSIZIONE 1.2.3: Sia $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un campo. Allora $ab = 0\ \wedge a \neq 0\ \Rightarrow b = 0$.
Dimostrazione:
$\exists a^{-1}$, dunque: $ab = 0\ \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 = 0\ \Rightarrow 1 \cdot b = 0\ \Rightarrow b = 0$.

Questo significa che in un campo non esistono **divisori di 0**, cioè, dato un $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}, \nexists b \in \mathbb{K}\backslash\{0\}|\ ab = 0$.

DEFINIZIONE 1.2.6: Definiamo l'insieme dei **numeri complessi** $\mathbb{C} = \{a + ib|\ a, b \in \mathbb{R}\}$, dove i è l'unità immaginaria tale che $i^2 = -1$.

DEFINIZIONE 1.2.7: Definiamo su $\mathbb{C}$ una somma e un prodotto:
$+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}|\ (a + ib, c + id) \to (a + ib) + (c + id) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c) + i(b + d)$;
$\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}|\ (a + ib, c + id) \to (a + ib) \cdot (c + id) \stackrel{\text{def}}{=} (ac - bd) + i(ad + bc)$.

DEFINIZIONE 1.2.8: $a + ib, c + id \in \mathbb{C},\ a + ib = c + id\ \Leftrightarrow a = c\ \wedge b = d$.

PROPOSIZIONE 1.2.4: $(\mathbb{C},+,\cdot)$ è un campo.
Dimostrazione:
- $(\mathbb{C},+)$ è evidentemente un gruppo abeliano;
- $\cdot$ è associativa;
- $\cdot$ ha un elemento neutro, il numero $1 = 1 + 0i$;
- gode della proprietà distributiva:

$\big((a+bi)+(c+di)\big)\cdot(e+if)=\big((a+c)+i(b+d)\big)\cdot(e+if)=(ae+ce-bf-df)+i(af+cf+be+de)$,
$(a+bi)\cdot(e+if)+(c+di)\cdot(e+if)=(ae-bf)+i(af+be)+(ce-df)+i(cf+de)=(ae-bf+ce-df)+i(af+be+cf+de)$;

- $(a+bi)\cdot(c+di)=(c+di)\cdot(a+bi)=(ac-bd)+i(ad+bc)$, dunque $\cdot$ gode della proprietà commutativa;
- $\forall z=a+bi\in\mathbb{C},\ \exists w\in\mathbb{C}|\ wz=zw=1$.
  Infatti poniamo $w=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$. Allora:
$$zw=(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+i\left(\frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}\right)=1$$

DEFINIZIONE 1.2.9: Sia $\mathbb{K}$ un campo. Si definisce **polinomio nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{K}$** $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, con $a_i\in\mathbb{K}\ \forall 0\le i\le n$.

DEFINIZIONE 1.2.10: Sia $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{K}$.
$$\mathbb{K}[x]=\left\{p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mid a_i\in\mathbb{K}\ \ \forall i\right\}$$

DEFINIZIONE 1.2.11: Due polinomi $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\,,q(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in\mathbb{K}[x]$ si dicono uguali si $a_i=b_i\ \forall 0\le i\le n$.
Notiamo che se gli esponenti massimi di $p(x)$ e $q(x)$ sono diversi, è sufficiente aggiungere termini del tipo $0\cdot x^k$ per renderli uguali.

Notazione: Si denota con $0\in\mathbb{K}[x]$ il polinomio con tutti i coefficienti nulli.

DEFINIZIONE 1.2.12: Dato $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\}$, si definisce **grado** del polinomio $\deg\big(p(x)\big)=\max\{i\in\mathbb{N}|\ a_i\neq 0\}$.

DEFINIZIONE 1.2.13: Dati $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ e $q(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in\mathbb{K}[x]$, definiamo:
- $(p+q)(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$;
- $(pq)(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=0}^{2n}c_ix^i$, dove $c_i=\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}$.

PROPOSIZIONE 1.2.5: $(\mathbb{K}[x],+,\cdot)$ è un anello commutativo ma non un campo.
Dimostrazione:
$(\mathbb{K}[x],+)$ è evidentemente un gruppo abeliano; inoltre valgono le proprietà associativa, distributiva e commutativa di $\cdot$ perché valgono in $\mathbb{K}$; $\cdot$ ha l'elemento neutro $p(x)\equiv 1$.
Dunque è un anello commutativo.
Poiché $\deg\big(pq(x)\big)=\deg\big(p(x)\big)+\deg\big(q(x)\big)$ (basta vedere che il coefficiente di grado massimo è il prodotto di due termini $\neq 0$), allora se esistesse $p^{-1}(x)$, $0=\deg 1=\deg\big(p(x)\big)+\deg\big(p^{-1}(x)\big)\Rightarrow\forall p(x)|\deg p>0\ \ \nexists p^{-1}(x)\Rightarrow(\mathbb{K}[x],+,\cdot)$ non è un campo.

TEOREMA 1.2.6 (di divisione in $\mathbb{Z}$): $\forall a,b\in\mathbb{Z}\wedge b\neq 0\ \ \exists unici\ q,r\in\mathbb{Z}$:
- $a=bq+r$;
- $0\le r<|b|$.

TEOREMA 1.2.7 (di divisione in $\mathbb{K}[x]$): $\forall a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]\backslash\{0\}\ \ \exists unici\ q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$:

- $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$;
- $\deg\big(r(x)\big) < \deg\big(b(x)\big)$.

Notiamo una similitudine fra la divisione in $\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{K}[x]$, poiché c'è una similitudine stretta fra la funzione valore assoluto e la funzione deg.

Osservazione: se $r(x) = 0 \Rightarrow b(x)|a(x)$.

DEFINIZIONE 1.2.14: $a \in \mathbb{K}$ si dice **radice** di $p(x)$ se $p(a) = 0$.

TEOREMA 1.2.8 (di Ruffini): se a è radice di $p(x)$, allora $(x-a)|p(x)$.
Dimostrazione:
Applico il teorema di divisione; $\exists q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tali che:
$\begin{cases} p(x) = (x-a)q(x) + r(x) \\ \deg\big(r(x)\big) < \deg(x-a) = 1 \end{cases}$, dunque $r(x) = costante$.
Valuto in a:
$0 = p(a) = (a-a)q(a) + r(a) = r(a)$, da cui segue la tesi.

DEFINIZIONE 1.2.15: Sia a una radice di $p(x)$. Si definisce **molteplicità algebrica** della radice a il massimo numero naturale m tale che $(x-a)^m|p(x)$.

TEOREMA 1.2.9 (fondamentale dell'algebra): Ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n \geq 1$ ha almeno una radice.

COROLLARIO 1.2.10: Ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n \geq 1$ ha esattamente n radici (contate con molteplicità).
Dimostrazione:
Per induzione su n:
Passo base): $n = 1$, ovvio.
Passo induttivo): Per il teorema, so che $\exists a$ radice di $p(x)$, quindi per Ruffini $p(x) = (x-a)\,p_1(x)$, con $\deg\big(p_1(x)\big) = n-1$, dunque per ipotesi induttiva $p_1(x)$ ha esattamente $n-1$ radici contate con molteplicità. Dunque $p(x)$ ne ha n, da cui la tesi.

DEFINIZIONE 1.2.16: Un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ si dice **irriducibile** su $\mathbb{K}[x]$ se non può essere scritto come $p(x) = a(x)b(x)$, con $a(x), b(x) \in\ \mathbb{K}[x]$ non costanti.

Esempi: I polinomi di grado 1 sono sempre irriducibili.
$ax^2 + bx + c$ è riducibile su $\mathbb{R}[x]$ se ha radici (poiché la fattorizzazione di un polinomio di secondo grado può avvenire solo per mezzo di due polinomi di grado 1), quindi è riducibile $\Leftrightarrow$ $\Delta \geq 0\ \Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq 0$.
$x^2 - 2$ è riducibile su $\mathbb{R}[x]$, ma non è riducibile su $\mathbb{Q}[x]$.

DEFINIZIONE 1.2.17: Si definisce l'operazione **prodotto per scalari** in $\mathbb{K}[x]$:
$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x] | \big(\alpha, p(x)\big) \to \alpha p(x)$, con $\alpha \in \mathbb{K}$ e $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.
Se $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, x^i$, allora $\alpha p(x) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) x^i$.

PROPOSIZIONE 1.2.11: $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$, dove $\cdot$ è il prodotto per scalari, è un anello (nel senso che $+$ e $\cdot |_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}[x]}$ soddisfano le proprietà di anello)
Dimostrazione:
Poiché $(\mathbb{K}[x], +)$ è un gruppo abeliano, le restanti verifiche sono immediate.

Riprendiamo la notazione $S(X) = \{f: X \to X | f \; bigettiva\}$, dove $X \neq \emptyset$ è un insieme.

PROPOSIZIONE 1.2.12: La funzione inversa f^{-1} di una funzione $f: X \to Y$ bigettiva è bigettiva.
Dimostrazione:
f^{-1} è iniettiva, poiché se non lo fosse due elementi del dominio sarebbero immagine di un solo elementi del codominio, quindi $f^{-1} \circ f \neq id_X$.
Poiché $f \circ f^{-1} = id$, allora $\forall x \in X, (f \circ f^{-1})\big(f(x)\big) = f(x)$, ma f è bigettiva, dunque $(f^{-1} \circ f)(x) = x \Rightarrow f$ è un'inversa destra, quindi f^{-1} è surgettiva.

PROPOSIZIONE 1.2.13: $(S(X), \circ)$ è un gruppo (in generale non abeliano).
Dimostrazione:
L'elemento neutro è evidentemente id_X, e poiché abbiamo visto che l'inversa di una funzione bigettiva è bigettiva, resta la banale verifica dell'associatività.
Abbiamo inoltre visto che in generale le funzioni non commutano, dunque ho la tesi.

PROPOSIZIONE 1.2.14: $(S(X), \circ)$ è un gruppo abeliano $\Leftrightarrow |X| \leq 2$.
Dimostrazione:
Sicuramente se $|X| = 1 \Rightarrow S(X) = \{id\} \Rightarrow (S(X), \circ)$ è gruppo abeliano.
Se $|X| = 2 \Rightarrow S(X) = \{id, f\}$, dove $f \circ f = id$, dunque $(S(X), \circ)$ è gruppo abeliano.
Se $|X| = 3$, supponiamo $X = \{a, b, c\}$. Sia $f: X \to X | f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c$ e sia $g: X \to X | g(a) = b, g(b) = c, g(c) = a$.
Allora $(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big) = f(b) = a$; $(g \circ f)(a) = g(b) = c$, quindi per $|X| = 3$, $(S(X), \circ)$ non è un gruppo abeliano.
Per $|X| > 3$ il ragionamento è analogo, basta scegliere come controesempio il precedente esteso con l'identità agli altri elementi di X.

Osservazione: Ogni gruppo G di due elementi è abeliano. La dimostrazione è analoga alla precedente.

Osservazione: Esistono campi con un numero finito di elementi.
Prendiamo $\mathbb{F} = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$, dove $[a]_3$ è la classe di resto a nella divisione per 3.
Definendo $[a]_3 \cdot [b]_3 = [ab]_3$ e $[a]_3 + [b]_3 = [a + b]_3$, non è difficile mostrare che $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ è un campo.

Notazione: Sia $\mathbb{K}$ un campo e $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Si denota con:

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{n\ volte}$$

il prodotto cartesiano di $\mathbb{K}$ per se stesso n volte.
Perciò $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\ \forall i\}$.

DEFINIZIONE 1.2.18: Definiamo una somma e un prodotto per scalari su $\mathbb{K}^n$:
$+: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n |\ (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$;
$\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n |\ \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

PROPOSIZIONE 1.2.15: $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ è un anello (nello stesso senso della PROPOSIZIONE 1.2.11).
Dimostrazione:
Le semplici verifiche sono lasciate al lettore.

PROPOSIZIONE 1.2.16: Siano $f(t), g(t)$ polinomi in $\mathbb{R}[t]$, con $f(t) \neq 0$. Sia $h(t)$ un polinomio in $\mathbb{C}[t] |\ f(t) = g(t) \cdot h(t)$ in $\mathbb{C}[t]$, allora $h(t) \in \mathbb{R}[t]$.
Dimostrazione 1:
Siano $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$, $g(t) = b_m t^m + \ldots + b_0$, $h(t) = c_l t^l + \ldots + c$, $a_n \neq 0, b_m \neq 0, c_l \neq 0$.
La nostra ipotesi è che $a_i, b_j \in \mathbb{R}\ \forall i, j$.
Mostriamo con l'induzione II su i che $c_{l-i} \in \mathbb{R}$.
Passo base): Poiché $f(t) = g(t) \cdot h(t)$ e $b_m \neq 0 \Rightarrow c_l = \frac{a_n}{b_m} \in \mathbb{R}$.
Passo induttivo): Mostriamo che se $c_{l-i} \in \mathbb{R}\ \forall 0 \leq i \leq k \Rightarrow c_{l-k-1} \in \mathbb{R}$.
$a_{n-k-1} = b_m c_{l-k-1} + b_{m-1} c_{l-k} + \ldots + b_{m-k-1} c_l$, perciò $c_{l-k-1} = \frac{a_{n-k-1} - b_{m-1} c_{l-k} - \ldots - b_{m-k-1} c_l}{b_m}$.
Ma tutti i termini della frazione $\in \mathbb{R}$, dunque ho la tesi.

Dimostrazione 2: Poiché in $\mathbb{C}[t]$ ho che $f(t) = g(t) \cdot h(t)$ e $f(t) \neq 0$, allora $g(t) \neq 0$.
Dunque divido $f(t)$ per $g(t)$ in $\mathbb{R}[t]$:

$\begin{matrix} f(t) = g(t) \cdot q(t) + r(t) \\ \deg r(t) < \deg g(t) \end{matrix}$ in $\mathbb{R}[t]$ e dunque in $\mathbb{C}[t]$.

Allora $g(t)h(t) = g(t)q(t) + r(t)$ in $\mathbb{C}[t] \Rightarrow g(t)\big(h(t) - q(t)\big) = r(t)$ in $\mathbb{C}[t]$, ma $\deg r(t) < \deg g(t)$ e poiché il grado è additivo, allora $h(t) - q(t) = 0 \Rightarrow h(t) = g(t) \in \mathbb{R}[t]$.

DEFINIZIONE 1.2.18: Sia $c: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione definita in modo tale che associ ad ogni numero complesso $z = a + bi$ il suo coniugato $\overline{z} = a - bi$. c prende il nome di **coniugio** ed è evidentemente biunivoca.

PROPOSIZIONE 1.2.17: 1) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4) $\overline{\overline{z}} = z$
5) $z + \overline{z} \in \mathbb{R},\ z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$.
Dimostrazione:
Queste semplici verifiche sono lasciate al lettore per esercizio.

COROLLARIO 1.2.18: 1) $\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}$
2) $\overline{\prod_{i=1}^{n} z_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{z_i}$
3) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
Dimostrazione:
1) Per induzione su $n \geq 2$:
   Passo base): $n = 2$, già visto;
   Passo induttivo): $\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n-1} z_i} + \overline{z_n} = (ip.\,ind.) = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{z_i} + \overline{z_n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}$.
2) Analoga.
3) È un caso particolare del 2) con $z_1 = \ldots = z_n = z$.

PROPOSIZIONE 1.2.18: Sia $f(t) \in \mathbb{R}[t]\backslash\{0\}$ e sia α un numero complesso non reale. Allora, se α è radice di $f(t)$:
1) anche $\overline{\alpha}$ è radice di $f(t)$;
2) la molteplicità algebrica di α è uguale a quella di $\overline{\alpha}$.
Dimostrazione:
1) Poiché α è radice di $f(t)$, allora $f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = 0$. Allora:
   $0 = a_n\alpha^n + \ldots + a_0 = \overline{a_n\alpha^n + \ldots + a_0} = \overline{a_n\alpha^n} + \ldots + \overline{a_0} = (poich\grave{e}\ a_i \in \mathbb{R}) = a_n\overline{\alpha^n} + \ldots + a_0 = a_n\overline{\alpha}^n + \ldots + a_0 = f(\overline{\alpha})$.
2) Dimostriamolo per induzione II su $n = \deg f(t)$:
   Passo base): $n = 0 \Rightarrow f(t) = \beta \Rightarrow f(t)$ non ha radici, quindi molteplicità algebrica di $\alpha =$ molteplicità algebrica di $\overline{\alpha} = 0$.
   Passo induttivo): Supponiamo che l'enunciato sia vero $\forall k \leq n$ e dimostriamo che è vero per $n + 1$.
   Se né α né $\overline{\alpha}$ sono radice, ho la tesi.
   Altrimenti $f(\alpha) = 0$ e $f(\overline{\alpha}) = 0$.
   Dunque $f(t) = (t - \alpha)g(t)$ per Ruffini in $\mathbb{C}[t]$.
   Valutando in $\overline{\alpha}$:
   $0 = f(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha} - \alpha)g(\overline{\alpha})$, ma $\alpha \neq \overline{\alpha}$, dunque $g(\overline{\alpha}) = 0$ e quindi $(t - \overline{\alpha})|g(t)|f(t)$.
   Per cui $f(t) = (t - \alpha)(t - \overline{\alpha})h(t) = (t^2 - (\alpha + \overline{\alpha})t + \alpha\overline{\alpha})h(t)$.
   Sappiamo che $\alpha + \overline{\alpha}, \alpha\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$, dunque per la proposizione 1.2.16 so che $h(t) \in \mathbb{R}[t]$.
   Applicando l'ipotesi induttiva a $h(t)$, vediamo che la molteplicità algebrica μ di α e $\overline{\mu}$ di $\overline{\alpha}$ in $h(t)$ coincidono, ma le loro molteplicità in $f(t)$ sono semplicemente $\mu + 1$ e $\overline{\mu} + 1$, che quindi coincidono.

2 SPAZI VETTORIALI E APPLICAZIONI LINEARI

2.1 SPAZI VETTORIALI

DEFINIZIONE 2.1.1: Un $\mathbb{K}$-**spazio vettoriale** è una quaterna $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$, dove $\mathbb{K}$ è un campo e V insieme $\neq \emptyset$.
$+: V \times V \to V$ $\quad\quad$ $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ tali che:
1) $(V,+)$ è un gruppo abeliano;
2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V,\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V,\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
4) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V,\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
5) $\forall x \in V,\ 1 \cdot x = x$.

PROPOSIZIONE 2.1.1: Sia $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Allora:
1) 0 è unico;
2) $\forall x \in V, -x$ è unico;
3) $\forall x \in V,\ 0 \cdot x = 0$;
4) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \cdot 0 = 0$
5) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in V,\ \alpha x = 0 \ \Rightarrow \alpha = 0 \ \vee x = 0$;
6) $\forall x \in V,\ (-1) \cdot x = -x$.

Dimostrazione:
1), 2) derivano dal fatto che $(V,+)$ è un gruppo abeliano.
3) $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \ \Rightarrow 0 \cdot x = 0$
4) analoga alla 3)
5) Se $\alpha = 0$, abbiamo subito la tesi.
   Se $\alpha \neq 0 \ \Rightarrow 0 = \alpha^{-1} \cdot 0 = \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot x = 1 \cdot x = x$
6) $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = \big(1 + (-1)\big) \cdot x = 0 \cdot x = 0$

DEFINIZIONE 2.1.2: Ogni elemento di uno spazio vettoriale si definisce **vettore**.

Notazione: Al posto di $x + (-y)$ scriveremo $x - y$.

PROPOSIZIONE 2.1.2: $\mathbb{K}^n$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale $\forall n \geq 1$.
Dimostrazione:
La verifica è lasciata al lettore.

Osservazioni: • Se $V = \mathbb{K}$, il prodotto per scalari è definito $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, dove il primo $\mathbb{K}$ rappresenta il campo degli scalari, mentre il secondo lo spazio vettoriale.

- Per l'osservazione precedente $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Consideriamo ora una restrizione dell'operazione prodotto per scalari su $\mathbb{R}$, cioè $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Poiché $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le definizioni che valgono su $\mathbb{C}$ valgono anche su $\mathbb{R}$; perciò $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.
In generale possiamo effettuare una restrizione del campo degli scalari, cioè se $\mathbb{K}'$ è sottocampo di $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ è chiuso rispetto a $+$ e $\cdot$), ogni $\mathbb{K}$-spazio vettoriale è anche un $\mathbb{K}'$-spazio vettoriale.

- Fissiamo nel piano due assi cartesiani. Allora la funzione:
  $\begin{matrix} Piano \to \mathbb{R}^2 \\ P \to (x_P, y_P) \end{matrix}$ è biunivoca.
  Inoltre la funzione:
  $\begin{matrix} Piano \to vettori\ uscenti\ da\ O \\ P \quad \to \quad \overrightarrow{OP} \end{matrix}$ è biunivoca, dunque possiamo identificare P con (x_P, y_P) e con $\overrightarrow{OP}$. Quindi la somma in $\mathbb{R}^2$ corrisponde alla regola del parallelogramma.

2.2 SPAZI DI MATRICI

DEFINIZIONE 2.2.1: Definiamo l'insieme $\mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ come l'insieme delle **matrici** $p \times n$, cioè con p righe e n colonne, a coefficienti in $\mathbb{K}$.

DEFINIZIONE 2.2.2: Una matrice di dice **quadrata** se $p = n$ e l'insieme delle matrici $n \times n$ si indica con $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ (o più semplicemente con $\mathcal{M}(n)$).

Notazioni: • Per indicare l'elemento di posto i, j della matrice A si usa il simbolo $[A]_{ij}$;
- A_i indica l'i-esima riga di A;
- A^j indica la j-esima colonna di A;
- 0 rappresenta la matrice nulla, cioè $[0]_{ij} = 0 \ \ \forall i, j$.

DEFINIZIONE 2.2.3: Siano $A, B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ matrici. Allora si dice che A e B sono uguali se $[A]_{ij} = [B]_{ij} \ \ \forall i, j$.

DEFINIZIONE 2.2.4: $\forall A, B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$, poniamo:
$[A + B]_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} [A]_{ij} + [B]_{ij} \ \ \forall i, j$;
$[\alpha A]_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha [A]_{ij} \ \forall i, j$.

PROPOSIZIONE 2.2.1: $\mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Dimostrazione:
Le verifiche sono immediate.

Osservazione: L'applicazione:

$$\begin{gathered} \mathbb{K}^n \to \mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_n) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{gathered}$$

è bigettiva, quindi scriveremo indifferentemente un vettore di $\mathbb{K}^n$ come n-upla o come colonna.

DEFINIZIONE 2.2.5: $A \in \mathcal{M}(n)$ si dice:
- **diagonale** se $[A]_{ij} = 0 \ \ \forall i \neq j$;
- **simmetrica** se $[A]_{ij} = [A]_{ji} \ \ \forall i, j$;
- **antisimmetrica** se $[A]_{ij} = -[A]_{ji} \ \ \forall i, j$ (dunque $[A]_{ii} = 0 \ \ \forall i$);
- **triangolare superiore** se $[A]_{ij} = 0 \ \ \forall i > j$.

Notazione: Denoteremo:
- $\mathcal{D}(n) = \{A \in \mathcal{M}(n) | A \text{ è } diagonale\}$;
- $\mathcal{S}(n) = \{A \in \mathcal{M}(n) | A \text{ è } simmetrica\}$;
- $\mathcal{A}(n) = \{A \in \mathcal{M}(n) | A \text{ è } antisimmetrica\}$;
- $\mathcal{T}(n) = \{A \in \mathcal{M}(n) | A \text{ è } triangolare\ superiore\}$.

PROPOSIZIONE 2.2.2: Ogni spazio di polinomi $\mathbb{K}[x]$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

DEFINIZIONE 2.2.6: Sia A un insieme e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Definiamo
$\mathcal{F}(A, V) = \{f : A \to V\}$ tale che $\forall f, g \in \mathcal{F}(A, V), \forall \alpha \in \mathbb{K}$:
$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \ \ \forall x \in A$;
$(\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x) \ \ \forall x \in A$.

PROPOSIZIONE 2.2.3: $\mathcal{F}(A, V)$ è uno spazio vettoriale di funzioni.

Osservazioni: • $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{successioni\ a\ valori\ in\ \mathbb{K}\}$
- $\mathcal{F}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$
- $\mathcal{F}(\{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}, \mathbb{K}) = \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$.

2.3 SOTTOSPAZI E COMBINAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE 2.3.1: Dato V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $W \subset V$ si dice **sottospazio vettoriale** di V se:
1) $0_V \in W$;
2) $\forall x, y \in W, \ \ x + y \in W$ (cioè W è chiuso rispetto alla somma);
3) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in W, \ \ \alpha x \in W$ (cioè W è chiuso rispetto al prodotto per scalari).

Quindi, poiché se le 8 proprietà di spazio vettoriale valgono per V, allora valgono anche per W e poiché $+$ e $\cdot$ sono chiusi rispetto a W, allora W è uno spazio vettoriale.

PROPOSIZIONE 2.3.1: $\mathcal{D}(n), \mathcal{S}(n), \mathcal{A}(n), \mathcal{T}(n)$ sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}(n)$.
Dimostrazione:
Dimostriamolo per $\mathcal{D}(n)$, per gli altri il procedimento è analogo.
1) $0 \in \mathcal{D}(n)$, poiché $[0]_{ij} = 0 \ \ \forall i \neq j$;
2), 3) Evidentemente, se $A, B \in \mathcal{D}(n)$, allora $A + B \in \mathcal{D}(n)$ e $\alpha A \in \mathcal{D}(n)$.

Notazione: Fissato $m \in \mathbb{N}$, si denoti con $\mathbb{K}_m[x] = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] | \deg p(x) \leq m\}$ l'insieme dei polinomi di $\mathbb{K}[x]$ di grado $\leq m$.

PROPOSIZIONE 2.3.2: $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_m[x]$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$.
Dimostrazione:
La verifica è lasciata al lettore.

PROPOSIZIONE 2.3.3: Le rette in $\mathbb{R}^2$ per l'origine sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$.
Le rette e i piani per l'origine in $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$.
Dimostrazione:
Semplice verifica.

PROPOSIZIONE 2.3.4: Se $\{W_i\}_{i\in I}$ è una famiglia arbitraria di sottospazi vettoriali di V, allora $\bigcap_{i\in I} W_i$ è sottospazio vettoriale di V.
Dimostrazione:
1) $0_V \in W_i \;\; \forall i \in I$, perciò $0_V \in \bigcap_{i\in I} W_i$.
2), 3) Se $+$ e $\cdot$ sono chiusi in $W_i \;\; \forall i \in I$, a maggior ragione saranno chiusi in $\bigcap_{i\in I} W_i$.

DEFINIZIONE 2.3.2: Dati $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, si definisce **combinazione lineare** dei $v_1, \dots, v_n$ il vettore $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$.

DEFINIZIONE 2.3.3: Dato $S \subset V$, denotiamo con:
$Span(S) \overset{\text{def}}{=} \{v \in V | \exists v_1, \dots, v_n \in S, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \;\; per\ cui \;\; v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\}$.

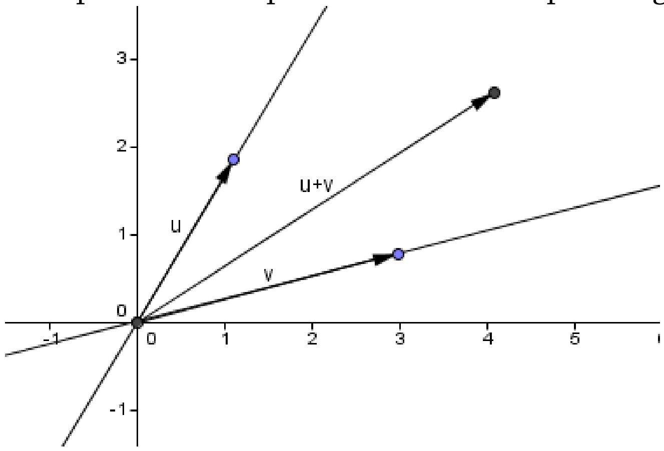
Esempio: $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,1)\}$.
$Span(S) = \{a(1,1) | a \in \mathbb{R}\}$, cioè $Span(S)$ è semplicemente la retta passante per l'origine e per $(1,1)$ (che è quindi uno spazio vettoriale).

PROPOSIZIONE 2.3.5: 1) $Span(S)$ è sottospazio vettoriale di $V \;\; \forall S \subset V$.
2) $S \subset Span(S)$
3) Se W è sottospazio vettoriale di $V |\; S \subset W \subset Span(S) \Rightarrow W = Span(S)$.
Dimostrazione:
1) Semplice verifica.
2) Ovvia.
3) Sappiamo che $W \subset Span(S)$ per ipotesi, dunque basta dimostrare che $Span(S) \subset W$.
   Se $v \in Span(S) \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ per certi $v_1, \dots, v_n \in S, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.
   Ma $v_1, \dots, v_n \in S \subset W$, dunque, poiché W è sottospazio vettoriale,
   $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in W$, da cui segue immediatamente la tesi.

PROPOSIZIONE 2.3.6: $Span(S) = \bigcap_{\substack{W\ ssv\ di\ V \\ W \supseteq S}} W$.
Dimostrazione:
Evidentemente $S \subset \bigcap_{\substack{W\ ssv\ di\ V \\ W \supseteq S}} W$, poiché interseco insiemi che contengono S.
Inoltre $\bigcap_{\substack{W\ ssv\ di\ V \\ W \supseteq S}} W \subset Span(S)$, poiché fra i W che interseco c'è anche $Span(S)$, dunque l'intersezione sarà sicuramente "più piccola" di $Span(S)$.

Grazie alla proposizione precedente, ho la tesi.

Osservazione: In generale l'unione di sottospazi vettoriali non è un sottospazio vettoriale.
Esempio: $V = \mathbb{R}^2$ e prendiamo due rette per l'origine distinte come sottospazi.



Vediamo che evidentemente la somma non è chiusa, dunque $u \cup v$ non è sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

DEFINIZIONE 2.3.4: Siano U, W sottospazi vettoriali di V. Definiamo l'**insieme somma**:
$U + W \overset{\text{def}}{=} \{x \in V | \exists u \in U, \exists w \in W\ t.c.\ \ x = u + w\}$.

Osservazione: Se ad esempio U e W sono due rette per l'origine distinte, con combinazioni lineari di vettori su di esse posso individuare qualsiasi altro vettore di $\mathbb{R}^2$, semplicemente scomponendolo nelle due componenti. Dunque $U + W = \mathbb{R}^2$.

PROPOSIZIONE 2.3.7: $U + W$ è sottospazio vettoriale di V ed è il più piccolo sottospazio contenente U e W.
Dimostrazione:
Evidentemente $U + W$ è sottospazio vettoriale.
Ovviamente $U \subset U + W$, poiché $\forall u \in U,\ u = u + 0 \in U + W$; analogamente $W \subset U + W$.
Prendiamo Z sottospazio di V tale che $U \subset Z$ e $W \subset Z$ e mostriamo che $U + W \subset Z$.
Infatti $\forall u \in U, \forall w \in W$, $u, w \in Z$, ma Z è sottospazio vettoriale $\Rightarrow u + w \in Z \Rightarrow$ tesi.

Osservazioni:
- In $\mathbb{R}^2$, $retta + retta = < \begin{matrix} se\ stessa\ se\ collineari \\ \mathbb{R}^2\ altrimenti \end{matrix}$;
- In $\mathbb{R}^3$, $retta + retta = piano\ che\ le\ contiene$;
- In $\mathbb{R}^3$, $piano + retta = \mathbb{R}^3$.

DEFINIZIONE 2.3.5: Se $U \cap W = \{0\}$, la somma $U + W$ si denota con $U \oplus W$ e prende il nome di **somma diretta**.

PROPOSIZIONE 2.3.8: Ogni vettore in $U \oplus W$ si scrive in modo unico come $u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$.
Dimostrazione:
Supponiamo che il vettore v si scriva $v = u_1 + w_1$ e $v = u_2 + w_2$. Allora:

$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \ \Rightarrow\ u_1 - u_2 = w_2 - w_1$, ma $u_1 - u_2 \in U$ e $w_2 - w_1 \in W$, perciò $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\} \Rightarrow\ u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

DEFINIZIONE 2.3.6: Se $V = U \oplus W$, con U e W sottospazi vettoriali di V, sono ben definite le applicazioni:
$\pi_U\colon \begin{array}{ccc} V & \to & U \\ v = u + w & \to & u \end{array}$; $\qquad \pi_W\colon \begin{array}{ccc} V & \to & W \\ v = u + w & \to & w \end{array}$,
dette **proiezioni** di V su U e su W.

Esempio: In $\mathbb{R}^2$ siano U, W gli assi cartesiani. Allora se $v = (x, y)$, semplicemente $\pi_U(v) = x$ e $\pi_W(v) = y$.

DEFINIZIONE 2.3.7: Sia U un sottospazio vettoriale di V. Si definisce **supplementare** di U ogni sottospazio W di V tale che $V = U \oplus W$.

Osservazione: Il supplementare non è unico, ad esempio in $\mathbb{R}^2$ il supplementare di una retta per l'origine è una qualsiasi altra retta per l'origine di $\mathbb{R}^2$.

2.4 APPLICAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE 2.4.1: Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. $f\colon V \to W$ si dice **$\mathbb{K}$-lineare** (o semplicemente **lineare**) se:
1) $\forall x, y \in V,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in V,\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Osservazione: Se f è lineare $\Rightarrow f(0) = 0$.
Infatti $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)\ \Rightarrow\ f(0) = 0$.

DEFINIZIONE 2.4.2: Definiamo l'applicazione **trasposta**:
$$^t\colon \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}) \to \mathcal{M}(q, p, \mathbb{K}) |\ [{}^tA]_{ij} = [A]_{ji}\ \ \forall i, j$$

DEFINIZIONE 2.4.3: Definiamo l'applicazione **traccia**:
$$tr\colon \mathcal{M}(n) \to \mathbb{K} |\ tr(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$$

DEFINIZIONE 2.4.4: Definiamo l'applicazione **valutazione** in $a \in \mathbb{K}$:
$$v_a\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K} |\ v_a\big(p(x)\big) = p(a)$$

PROPOSIZIONE 2.4.1: Le seguenti applicazioni sono lineari:
1) l'applicazione nulla $0\colon V \to W |\ f(v) = 0\ \ \forall v \in V$;
2) l'applicazione identica;
3) l'applicazione trasposta;

4) l'applicazione traccia;
5) la valutazione;
6) le proiezioni indotte dalla scomposizione $V = U \oplus W$.

Dimostrazione:
Mostriamo che la 3) è lineare, per le altre il ragionamento è analogo.
$\forall A, B \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$, $[{}^t(A+B)]_{ij} = [A+B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [{}^tA]_{ij} + [{}^tB]_{ij}$;
$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$, $[{}^t(\alpha A)]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha[A]_{ji} = \alpha[{}^tA]_{ij}$.

PROPOSIZIONE 2.4.2: $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{S}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}(n, \mathbb{R})$.
Dimostrazione:
Sia $C \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Poniamo $S = \frac{C + {}^tC}{2}$ e $A = \frac{C - {}^tC}{2}$.
Vediamo che:

$${}^tS = {}^t\left(\frac{C + {}^tC}{2}\right) = \frac{1}{2}\left({}^tC + {}^t{}^tC\right) = \frac{1}{2}({}^tC + C) = S \;\Rightarrow\; S \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$$

$${}^tA = {}^t\left(\frac{C - {}^tC}{2}\right) = \frac{1}{2}\left({}^tC - {}^t{}^tC\right) = \frac{1}{2}({}^tC - C) = -A \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{A}(n, \mathbb{R})$$

$$S + A = \frac{C + {}^tC}{2} + \frac{C - {}^tC}{2} = C$$

Poiché evidentemente $\mathcal{S}(n, \mathbb{R}) \cap \mathcal{A}(n, \mathbb{R}) = \{0\}$, ho la tesi.

PROPOSIZIONE 2.4.3: L'applicazione coniugio è $\mathbb{R}$-lineare (ma non $\mathbb{C}$-lineare).
Dimostrazione:
Sicuramente $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; inoltre $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$, poiché $\alpha = \overline{\alpha}$.
Se invece prendiamo $\mathbb{C}$ come campo di scalari, in generale $\overline{\alpha z} \neq \alpha \overline{z}$.

DEFINIZIONE 2.4.5: Sia $\mathbb{K}$ un campo. Definiamo la **caratteristica** $char(\mathbb{K})$ del campo:
- se $\forall n \in \mathbb{N},\ n \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow char(\mathbb{K}) = 0$;
- se $\exists n \in \mathbb{N} |\ n \cdot 1 = 0 \Rightarrow char(\mathbb{K}) = \min\{p \in \mathbb{N} | p \cdot 1 = 0\}$.

Osservazione: È vero che $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathcal{S}(n, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}(n, \mathbb{K})$ per qualsiasi campo $\mathbb{K}$?
Vediamo che $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R}) \cap \mathcal{A}(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow [A]_{ij} = -[A]_{ij}\ \ \forall i, j \Leftrightarrow 2[A]_{ij} = 0\ \ \forall i, j$.
Questo implica $A = 0$ solamente se $char(\mathbb{K}) \neq 2$.
In questo caso vediamo anche che ha senso dividere per 2 nella prima parte della dimostrazione, dunque possiamo affermare che $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathcal{S}(n, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}(n, \mathbb{K}) \Leftrightarrow char(\mathbb{K}) \neq 2$.
Infatti prendiamo un campo $\mathbb{F}_2 |\ char(\mathbb{F}_2) = 2$, ad esempio $\mathbb{F}_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$, dove $[a]_2$ è la classe di resto a modulo 2:
$\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}$,
e $M = \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(2, \mathbb{F}_2) \cap \mathcal{A}(2, \mathbb{F}_2)$ (poiché $[1]_2 = -[1]_2$) e $M \neq 0$.

DEFINIZIONE 2.4.6: Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Allora definiamo l'**insieme degli omomorfismi**:

$$Hom(V,W) \overset{\text{def}}{=} \{f: V \to W \mid f \text{ è } lineare\} \subset \mathcal{F}(V,W)$$

PROPOSIZIONE 2.4.4: $Hom(V,W)$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(V,W)$.

DEFINIZIONE 2.4.7: Sia $f \in Hom(V,W)$. Si definisce **kernel** (o **nucleo**) di f:

$$Ker(f) \overset{\text{def}}{=} \{x \in V \mid f(x) = 0\}$$

PROPOSIZIONE 2.4.5: Sia $f \in Hom(V,W)$. Allora:
1) $Ker(f)$ è sottospazio vettoriale di V;
2) $Im(f)$ è sottospazio vettoriale di W;
3) f è iniettiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$.

Dimostrazione:

1), 2) ovvie.

3) $\Rightarrow$) Sia $x \in Ker(f)$. Allora $f(x) = 0 = f(0)$, in quanto f è lineare. Ma f è iniettiva $\Rightarrow x = 0$.
   $\Leftarrow$) Per dimostrare che f è iniettiva, dobbiamo mostrare che se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Prendiamo $f(x) = f(y)$. Allora per linearità $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$, quindi $x - y \in Ker(f) = \{0\}$. Dunque $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

DEFINIZIONE 2.4.8: Siano $(a_1 \dots a_n) \in \mathcal{M}(1,n,\mathbb{K})$ e $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n,1,\mathbb{K})$. Si definisce **prodotto fra la riga e la colonna**:

$$(a_1 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

DEFINIZIONE 2.4.9: Sia $A \in \mathcal{M}(p,n)$, $x \in \mathcal{M}(n,1)$. Si definisce **prodotto fra la matrice e la colonna**:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} \cdot (X) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_1 \cdot X \\ \vdots \\ A_p \cdot X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(p,1)$$

Osservazione: Possiamo notare che fare il prodotto fra la matrice e la colonna nel modo illustrato sopra è equivalente a eseguire il prodotto:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (A^1 \quad \dots \quad A^n) \overset{\text{def}}{=} x_1A^1 + \dots + x_nA^n$$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Perciò $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1A^1 + \dots + x_nA^n \in Span(A^1, \dots, A^n)$.

DEFINIZIONE 2.4.10: Definiamo **spazio delle colonne** di una matrice A
$\mathcal{C}(A) = Span(A^1, \dots, A^n)$.

PROPOSIZIONE 2.4.6: Sia $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$. Allora l'applicazione:
$L_A: \begin{matrix} \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p \\ X \to A \cdot X \end{matrix}$ è lineare.
Dimostrazione:
Sfruttando la definizione $A \cdot X = x_1 A^1 + \dots + x_q A^q$, la dimostrazione è immediata.

Notazione: Fissiamo il campo $\mathbb{K}^q$. Denotiamo:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^q, \dots, e_q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^q$$

Osservazione: $L_A(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^1, \dots, L_A(e_q) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^q$, quindi:

$$A = (Ae_1 \quad \dots \quad Ae_q)$$

Esempio: Prendiamo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 |\ L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.
Dunque A rappresenta la riflessione nel piano rispetto alla bisettrice del $1^o/3^o$ quadrante.

TEOREMA 2.4.7: Ogni applicazione lineare $\mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$ è indotta da una matrice, ossia
$\forall g: \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p$ lineare $\exists!\, A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ tale che $g(X) = A \cdot X \ \ \forall X \in \mathbb{K}^q$.
Dimostrazione:
Grazie all'osservazione precedente è chiaro che l'unica matrice di questo tipo può essere solo:

$$A = \big(g(e_1) \quad \dots \quad g(e_q)\big)$$

poiché per imposizione nel teorema $g(e_1) = A \cdot e_1 = A^1 \dots$
Verifichiamo che con una tale scelta $g(X) = A \cdot X \ \ \forall X \in \mathbb{K}^q$:

$$A \cdot X = x_1 g(e_1) + \dots + x_q g(e_q) = (per\ linearità) = g(x_1 e_1 + \dots + x_q e_q) = g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = g(X)$$

Esempio: L'applicazione $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 |\ g(x, y) = (y, 2x - y, 5x)$ è indotta dalla matrice:

$$A = (g(e_1) \quad g(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE 2.4.11: $f: V \to W$ lineare si dice **isomorfismo** se è bigettiva.

PROPOSIZIONE 2.4.8: L'applicazione:
$f: \begin{matrix} \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}) & \to & Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p) \\ A & \to & L_A \end{matrix}$ è un isomorfismo.
Dimostrazione:
a. f è lineare:

$$\forall X \in \mathbb{K}^n \quad L_{A+B} = (A+B) \cdot X = x_1(A+B)^1 + \ldots + x_n(A+B)^n =$$
$$= x_1(A^1 + B^1) + \ldots + x_n(A^n + B^n) = A \cdot X + B \cdot X = L_A(X) + L_B(X)$$

Analogamente per il prodotto per scalari.

b. f è surgettiva per il teorema precedente
c. f è iniettiva:
Sia $A \in Ker(f) \Rightarrow L_A(X) = 0 \ \forall X \Rightarrow L_A(e_i) = A \cdot e_i = A^i = 0 \ \forall i \Rightarrow A = 0 \Rightarrow Ker(f) = \{0\}$.

PROPOSIZIONE 2.4.9: Se $f: V \to W$ è un isomorfismo, allora $f^{-1}: W \to V$ è un isomorfismo.
Dimostrazione:
Sappiamo già che l'inversa di una funzione bigettiva è bigettiva, dunque dobbiamo mostrare che f^{-1} è lineare.
Siano $w_1, w_2 \in W$ e sia $v_1 = f^{-1}(w_1)$, $v_2 = f^{-1}(w_2)$. Allora:
$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}\big(f(v_1) + f(v_2)\big) = f^{-1}\big(f(v_1 + v_2)\big) = v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$$
Per il prodotto per scalari il ragionamento è analogo.

PROPOSIZIONE 2.4.10: Dati V, W, Z $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Siano $f: V \to W$ e $g: W \to Z$ lineari. Allora $g \circ f: V \to Z$ è lineare.
Dimostrazione:
La verifica è immediata.

COROLLARIO 2.4.11: La composizione di isomorfismi è un isomorfismo.

DEFINIZIONE 2.4.12: Definiamo $GL(V) = \{f: V \to V | f \text{ è } isomorfismo\}$.

COROLLARIO 2.4.12: $(GL(V), \circ)$ è un gruppo, detto **gruppo lineare generale**.

DEFINIZIONE 2.4.13: Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. V e W si dicono **isomorfi** (si scrive $V \cong W$) se $\exists f: V \to W$ isomorfismo.

Osservazione: $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}) \cong Hom(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$

Osservazione: L'"essere isomorfi" è una relazione di equivalenza:
1) è riflessiva, poiché sicuramente $V \cong V$ tramite $f = id_V$;
2) è simmetrica, poiché se $V \cong W$ tramite f, allora $W \cong V$ tramite f^{-1}, che sappiamo essere un isomorfismo;
3) è transitiva, poiché se $V \cong W$ tramite f e $W \cong Z$ tramite g, $V \cong Z$ tramite $g \circ f$, che sappiamo essere un isomorfismo.

DEFINIZIONE 2.4.14: Si definisce **endomorfismo** ogni applicazione $f: V \to V$ lineare.

DEFINIZIONE 2.4.15: Si definisce spazio degli endomorfismi $End(V) = \{f: V \to V | f \text{ è } lineare\}$.

Osservazione: $End(V) = Hom(V, V)$, dunque $End(V)$ è sottospazio di $\mathcal{F}(V, V)$.

PROPOSIZIONE 2.4.13: $(End(V), +, \circ)$ è un anello.

Dimostrazione:
Lasciata al lettore.

DEFINIZIONE 2.4.16: Una quaterna $(S,+,\cdot,\circ)$ si dice **algebra** se $(S,+,\cdot)$ è uno spazio vettoriale, $(S,+,\circ)$ è un anello e $(S,\cdot,\circ)$ ha la seguente proprietà:
$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f,g \in S \quad \alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$$

PROPOSIZIONE 2.4.14: $(End(V),+,\cdot,\circ)$ è un'algebra.
Dimostrazione:
L'ultima verifica è lasciata al lettore.

Osservazione: Date $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, $g: \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$ lineari, sappiamo che:
$\exists A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K}) |\, f(X) = A \cdot X \ \ \forall x \in \mathbb{K}^n$;
$\exists B \in \mathcal{M}(q,p,\mathbb{K}) |\, g(X) = B \cdot X \ \ \forall x \in \mathbb{K}^p$;
$g \circ f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^q$ è lineare.
Quindi $\exists C \in \mathcal{M}(q,n,\mathbb{K}) |\, (g \circ f)(X) = C \cdot X \ \ \forall X \in \mathbb{K}^n$.
Vediamo che $C^i = (g \circ f)(e_i) = g\big(f(e_i)\big) = g\big(A^i\big) = B \cdot A^i \ \ \forall i$, perciò:
$$C = (BA^1 \quad \dots \quad BA^n)$$

DEFINIZIONE 2.4.17: Si definisce prodotto fra due matrici $B \in \mathcal{M}(q,p)$ e $A \in \mathcal{M}(p,n)$ la matrice $C \in \mathcal{M}(q,n)$ tale che:
$$C = B \cdot A = (BA^1 \quad \dots \quad BA^n)$$
ossia $[C]_{ji} = B_j \cdot A^i$.
Questo prodotto viene chiamato **prodotto righe per colonne**.

PROPOSIZIONE 2.4.15: Valgono le seguenti proprietà $\forall A,B,C$ di formato opportuno:
1) $(AB)C = A(BC)$;
2) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$;
3) $(A+B)C = AC + BC$;
4) $A(B+C) = AB + AC$;
5) $IA = AI = A$, dove $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ è la **matrice identica**.

Osservazioni: 1) Non ha senso parlare in generale di commutatività del prodotto fra matrici, poiché se A,B non sono quadrate, se posso eseguire $A \cdot B$ non posso eseguire $B \cdot A$ e viceversa.
2) Anche se in $\mathcal{M}(n)$ ha senso parlare di commutatività del prodotto, in generale $AB \neq BA$:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3) $AB = 0 \ \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Questo significa che $\mathcal{M}(n)$ non è un campo, quindi vuol dire che esistono matrici che non hanno un'inversa:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
4) $A^n = 0 \ \not\Rightarrow A = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE 2.4.18: $A \in \mathcal{M}(n)$ si dice **nilpotente** se $\exists s \in \mathbb{N} |\ A^s = 0$.

PROPOSIZIONE 2.4.16: 1) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \ \ \forall A, B \in \mathcal{M}(n)$
2) $\forall A \in \mathcal{M}(n), \forall S \in \mathcal{S}(n),\ {}^tASA \in \mathcal{S}(n)$
3) $tr(AB) = tr(BA) \ \ \forall A, B \in \mathcal{M}(n)$.
Dimostrazione:
1) $[{}^t(AB)]_{ij} = [AB]_{ji} = A_jB^i = \sum_{k=1}^{n} [A]_{jk}[B]_{ki}$;
   $[{}^tB\,{}^tA]_{ij} = ({}^tB)_i({}^tA)^j = B^iA_j = \sum_{k=1}^{n} [B]_{ki}[A]_{jk}$.
   Dunque $[{}^t(AB)]_{ij} = [{}^tB\,{}^tA]_{ij} \ \ \forall i, j \Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
2) Dimostriamo che ${}^t({}^tASA) = {}^tASA$:
   ${}^t({}^tASA) = {}^t(SA) \cdot {}^{tt}A = {}^tA\,{}^tSA = {}^tASA$.
3) $tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} A_kB^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} [A]_{ks}[B]_{sk}$
   $tr(BA) = \sum_{k=1}^{n} B_kA^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} [B]_{ks}[A]_{sk}$,
   che sono uguali perché ogni elemento della prima sta nella seconda con s, k scambiati.

DEFINIZIONE 2.4.19: Definiamo $GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) | A$ è $un\ isomorfismo\ di\ \mathbb{K}^n\}$.

Osservazione: So che $\forall A, B \in GL(n, \mathbb{K}),\ A \cdot B \in GL(n, \mathbb{K})$, poiché ho definito il prodotto fra matrici come composizione di A e B.
So anche che la composizione di isomorfismi è un isomorfismo, perciò $\cdot$ è un'operazione in $GL(n, \mathbb{K})$.

PROPOSIZIONE 2.4.17: $(GL(n, \mathbb{K}), \cdot)$ è un gruppo, detto **gruppo lineare generale in** $\mathbb{K}$.
Dimostrazione:
- Il prodotto fra matrici è associativo in $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \supset GL(n, \mathbb{K})$, dunque lo è anche in $GL(n, \mathbb{K})$;
- $I_n \in GL(n, \mathbb{K})$;
- $\forall A \in GL(n, \mathbb{K}), \exists A^{-1} |\ A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$, poiché ho già dimostrato che l'inversa di un isomorfismo esiste ed è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 2.4.18: 1) $\forall A \in GL(n, \mathbb{K})$, allora ${}^tA \in GL(n, \mathbb{K})$ e $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$;
2) Se $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) Se $A \in GL(n, \mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ e $AB = I \ \Rightarrow BA = I$.
Dimostrazione:
1) ${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI = I$;
   ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI = I$,
   dunque ${}^tA$ ha un'inversa destra che è anche un'inversa sinistra, dunque ${}^tA \in GL(n, \mathbb{K})$.
2) $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$;
   $AB(B^{-1}A^{-1}) = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$.
   Perciò $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3) A è bigettiva e B inversa sinistra di A, quindi B è anche inversa destra, cioè $BA = I$.

Osservazione: Siano $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}(n,q,\mathbb{K})$, e siano $p_1 p_2, n_1, n_2, q_1, q_2$ tali che $p = p_1 + p_2, n = n_1 + n_2, q = q_1 + q_2$.

Allora osserviamo che il prodotto fra matrici può essere fatto **a blocchi**:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \underbrace{A_3}_{n_1} & \underbrace{A_4}_{n_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p_1 \\ \}p_2 \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \underbrace{B_3}_{q_1} & \underbrace{B_4}_{q_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n_1 \\ \}n_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \underbrace{A_3B_1 + A_4B_3}_{q_1\, colonne} & \underbrace{A_3B_2 + A_4B_4}_{q_2\, colonne} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p_1\, righe \\ \}p_2\, righe \end{matrix}.$$

Il lettore può verificare per esercizio che il prodotto così definito coincide con il prodotto definito precedentemente.

2.5 SISTEMI LINEARI

DEFINIZIONE 2.5.1: Definiamo **sistema lineare** di p equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}.$$

Osservazione: Un sistema lineare si può scrivere nella forma $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K}),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p.$$

Quindi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $\Leftrightarrow AY = B$.

DEFINIZIONE 2.5.2: Se $B = 0$, il sistema si dice **omogeneo**.

Osservazione: I sistemi omogenei ammettono sempre $0 \in \mathbb{K}^n$ come soluzione.

DEFINIZIONE 2.5.3: Risolvere il sistema $AX = B$ significa trovare tutte le soluzioni del sistema.

Osservazione: $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow B \in Im(A)$.

Notazione: Denotiamo l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$ con:
$Sol_B = \{X \in \mathbb{K}^n | AX = B\}$.

Osservazione: $Sol_0 = \{X \in \mathbb{K}^n | AX = 0\} = Ker(A)$, dunque Sol_0 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ (mentre Sol_B non lo è perché non contiene 0).

DEFINIZIONE 2.5.4: Definiamo **sistema omogeneo associato** al sistema $AX = B$ il sistema $AX = 0$.

PROPOSIZIONE 2.5.1: Sia y_B una qualsiasi soluzione di $AX = B$. Allora:

$Sol_B = y_B + Sol_0 \overset{\text{def}}{=} \{y_B + X | X \in Sol_0\}$.
Dimostrazione:
$\supseteq$) Sia $X \in Sol_0$. Devo verificare che $y_B + X \in Sol_B$:
$y_B + X \in Sol_B \Leftrightarrow A(y_B + X) = B$ e $A(y_B + X) = Ay_B + AX = B + 0 = B$
$\subseteq$) Sia $X \in Sol_B$. Poiché $X = y_B + (X - y_B)$, verifico che $X - y_B \in Sol_0$.
Infatti $A(X - y_B) = AX - Ay_B = B - B = 0$.

DEFINIZIONE 2.5.5: Due sistemi lineari si dicono **equivalenti** se hanno esattamente le stesse soluzioni.

DEFINIZIONE 2.5.6: Definiamo **operazioni elementari sul sistema** le seguenti operazioni:
1^o tipo: Scambiare due equazioni;
2^o tipo: Moltiplicare un'equazione per uno scalare $\neq 0$;
3^o tipo: Sostituire un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione.

Osservazione: In notazione matriciale, ciò corrisponde ad eseguire sulla matrice $A' = (A \vdots B)$, detta **matrice completa del sistema**, una delle seguenti **operazioni elementari per riga**:
1^o tipo: Scambiare due righe;
2^o tipo: Moltiplicare una riga per uno scalare $\neq 0$;
3^o tipo: Aggiungere ad una riga un multiplo di un'altra riga.
Tutte queste operazioni non modificano l'insieme delle soluzioni del sistema.

Esempio: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_2 \to A_2 - 2A_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Perciò $x_3 = -3x_4 + 1$.
Sostituendo nell'altra equazione:
$x_1 - x_2 + 2(-3x_4 + 1) - x_4 = 1 \Rightarrow x_1 - x_2 - 7x_4 = -1 \Rightarrow x_1 = x_2 + 7x_4 - 1$.
Quindi:

$$Sol_B = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 + 7x_4 - 1 \\ x_2 \\ -3x_4 + 1 \\ x_4 \end{pmatrix} | \; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} | \; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Osservazione: Il termine $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è altro che una soluzione y_B del sistema (nel caso $x_2 = x_4 = 0$), mentre il termine $x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato, perciò:

$$Sol_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{=Sol_0}$$

Osservazione: Un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2(j_2+1)}x_{(j_2+1)} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{pj_p}x_{j_p} + \ldots + a_{pn}x_{pn} = b_p \end{cases}$$

con $a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \ldots, a_{pj_p} \neq 0$, cioè se in una riga sono nulli i coefficienti di $x_1, \ldots, x_k$, nella successiva sono nulli almeno quelli di $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$, è facilmente risolubile.
Infatti ricavo x_{j_p} nell'ultima equazione (poiché $a_{pk} \neq 0$), poi $x_{j_{p-1}}$ dalla penultima e così via fino a x_1 dalla prima equazione, tutti in funzione dei x_i con $i \neq 1, j_1, \ldots, j_p$.

DEFINIZIONE 2.5.7: Una matrice A del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 \mid \underline{p_1} \ldots \ldots & & & \\ 0 \ldots 0 & \overline{0 \ldots 0} \mid \underline{p_2} \ldots & & \\ & & \mid \underline{\ddots} & \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \mid \underline{p_r \ldots} \\ 0 \ldots & & & \ldots 0 \end{pmatrix}$$

cioè in cui se nella n-esima riga ci sono k zeri iniziali, nella $(n+1)$-esima ce ne sono almeno $k+1$, viene detta **a scalini**.
Il primo termine $\neq 0$ di ogni riga viene detto **pivot**.

Osservazione: Se $A' = (A \vdots B)$ è a scalini, il sistema $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow$ la colonna B non contiene nessun pivot.
In tal caso, se i pivots sono contenuti nelle colonne $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$, ricavo le incognite $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ in funzione delle altre.

ALGORITMO DI GAUSS:
Data una $M \in \mathcal{M}(p,q)$, l'algoritmo trasforma M in una matrice a scalini attraverso un numero finito di operazioni elementari per riga.

- Sia M^{j_1} la prima colonna da sinistra non nulla.
- A meno di scambi di riga, posso supporre $[M]_{1,j_1} \neq 0$.
- Per $i = 2, \ldots, p$ sostituisco la riga M_i con la riga $M_i - [M]_{i,j_1} \cdot \left([M]_{1,j_1}\right)^{-1} \cdot M_1$ (cioè rendo $[M]_{i,j_1} = 0$).
- Ottengo:

$$\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} [M]_{1,j_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & * \end{array}\right)$$

- Considero in $\widetilde{M}$ la sottomatrice ottenuta eliminando la prima riga e le prime j_1 colonne. Itero il procedimento.

- Termino quando ho trattato tutte le righe o quando restano solo righe nulle.

TEOREMA DI GAUSS: Ogni sistema lineare $AX = B$ è equivalente ad un altro sistema lineare $SX = T$, dove $S' = (S \vdots T)$ è a scalini.
Il sistema $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow$ le matrici S e S' hanno lo stesso numero di pivots (cioè se T non contiene pivots).

Osservazione: La riduzione a scalini di una matrice non è unica.

DEFINIZIONE 2.5.8: Definiamo **forma parametrica** di un sottospazio di $\mathbb{K}^n$
$W = Span(w_1, \dots, w_p) = \{X \in \mathbb{K}^n | \exists t_1, .., t_p \in \mathbb{K}\ t.c.\ x = t_1 w_1 + \dots + t_p w_p\}$ la scrittura:

$$W = Im(A)$$

dove $A: \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ è la matrice:

$$A = (w_1 | \dots | w_p)$$

con i vettori $w_1, \dots, w_p$ per colonne.

DEFINIZIONE 2.5.9: Definiamo **forma cartesiana** di un sottospazio W di $\mathbb{K}^n$ la scrittura:

$$W = \{X | BX = 0\} = Ker(B)$$

con $\mathcal{M}(q, n) \ni B: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^q$.
Le equazioni del sistema $BX = 0$ si dicono **equazioni cartesiane** di W.

Osservazione: • Si passa dalle equazioni cartesiane $BX = 0$ alla forma parametrica risolvendo il sistema $BX = 0$.

- Per passare dalla forma parametrica alla forma cartesiana, si costruisce il sistema $(A \vdots X)$, dove A è tale che $W = Im(A)$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

  Si porta il sistema $(A \vdots X)$ nella forma a scalini $(S \vdots X')$, dove $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, e, dette $S_{k_1}, \dots, S_{k_r}$ le righe con pivot di S, poniamo $x_i' = 0\ \forall i \neq k_1, \dots, k_r$ (ottenendo quindi un sistema con $n - r$ equazioni).

Esempio: Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale $\begin{cases} x = t \\ y = t + s \\ z = 3t + 2s \end{cases}$, ossia $W = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.
Perciò $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R} | \begin{cases} t = x \\ t + s = y \\ 3t + 2s = z \end{cases} \Leftrightarrow$ il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 1 & 1 & \vdots & y \\ 3 & 2 & \vdots & z \end{pmatrix}$ ha soluzione $\Leftrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y - x \\ 0 & 2 & \vdots & z - 3x \end{pmatrix}$ ha soluzione $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y - x \\ 0 & 0 & \vdots & z - x - 2y \end{pmatrix}$ ha soluzione $\Leftrightarrow z - x - 2y = 0$.
Quindi la forma cartesiana per W è:

$$W = \{x + 2y - z = 0\} = Ker(B)$$

dove $B = (1 \quad 2 \quad -1)$.

DEFINIZIONE 2.5.10: Sia V uno spazio vettoriale e $v \in V$. Si definisce **traslazione** di v l'applicazione:

$\tau_v: V \to V| \, \tau_v(x) = x + v$.

PROPOSIZIONE 2.5.2: 1) $\forall v \in V, \; \tau_v$ è bigettiva;

2) $\forall v, w \in V, \; \tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w = \tau_w \circ \tau_v$;

3) $\forall v \in V, \; (\tau_v)^{-1} = \tau_{-v}$.

Dimostrazione:

1) τ_v è iniettiva, poiché se $x \neq y \in V, \; \tau_v(x) = x + v \neq y + v = \tau_v(y)$;
   τ_v è surgettiva, poiché $\forall x \in V, \exists f^{-1}(x) \in V| \, f^{-1}(x) + v = x$.
2) $\forall x \in V$:
   $\tau_{v+w}(x) = x + v + w$;
   $(\tau_v \circ \tau_w)(x) = \tau_v(\tau_w(x)) = \tau_v(x + w) = x + v + w$;
   $(\tau_w \circ \tau_v)(x) = \tau_w(\tau_v(x)) = \tau_w(x + v) = x + v + w$.
3) $(\tau_v \circ \tau_{-v})(x) = \tau_v(\tau_{-v}(x)) = \tau_v(x - v) = x \quad \forall x \in V$.

Quindi le traslazioni di V formano un gruppo abeliano.

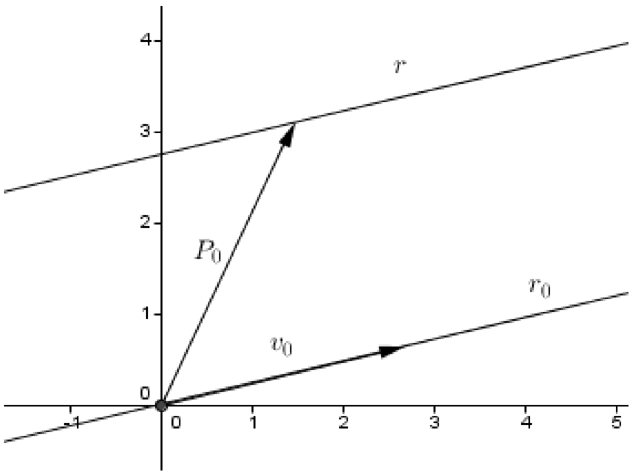
DEFINIZIONE 2.5.11: Sia W un sottospazio vettoriale di V e $v \in V$. Si definisce **sottospazio affine** di V con **giacitura** W l'immagine di τ_v, cioè:

$$H = \tau_v(W) = \{v + w | w \in W\}$$

Esempi: 1) Sia dato il sistema $AX = B$, con $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$.

$Sol_B = y_0 + Sol_0$, quindi Sol_B è sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$;

2) Ogni retta r di $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio affine con giacitura la retta $r_0 // r$ e passante per l'origine.
   Se $P_0 \in r, \; r = \tau_{P_0}(r_0)$;
   se $r_0 = Span(v_0), \;\; r = \{X \in \mathbb{R}^3 | X = P_0 + tv_0, t \in \mathbb{R}\}$.
   Graficamente:



Possiamo rappresentare un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ in forma parametrica e cartesiana:

Sia W sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ e sia $H = P_0 + W$.

Per la forma parametrica, scrivo $W = Im(A) = \{AY | Y \in \mathbb{K}^p\}$.

Allora $H = \{AY + P_0 | Y \in \mathbb{K}^p\}$.

Per la forma cartesiana, scrivo $W = Ker(B) = \{X \in \mathbb{K}^n | BX = 0\}$.

Allora:

$$H = \{X \in \mathbb{K}^n | X = Y + P_0, Y \in W\} = \{X \in \mathbb{K}^n | X - P_0 \in W\} = \{X \in \mathbb{K}^n | B(X - P_0) = 0\} = \\ = \{X \in \mathbb{K}^n | BX = BP_0\}$$

Si passa da una rappresentazione all'altra in modo analogo al caso vettoriale.

2.6 BASI E DIMENSIONE

DEFINIZIONE 2.6.1: Uno spazio vettoriale V si dice **finitamente generato** se $\exists v_1, \dots, v_n \in V|$ $\forall v \in V \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}| \ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, ossia $V = Span(v_1, \dots, v_n)$.
In tal caso, $v_1, \dots, v_n$ sono detti **generatori** di V.

Esempio: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{K}^n$.

Osservazione: $\mathbb{K}[x]$ non è finitamente generato, poiché se per assurdo $\mathbb{K}[x] = Span(1, x, \dots, x^a)$, con $a \in \mathbb{N}$, non si potrebbero rappresentare i polinomi di grado $> a$.

DEFINIZIONE 2.6.2: $v_1, \dots, v_n \in V$ sono detti **linearmente indipendenti** se $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \ \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$.
Altrimenti sono detti **linearmente dipendenti**.

Esempio: $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ sono linearmente indipendenti, infatti:

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = 0 \ \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Osservazione: $v \in V$ è linearmente indipendente $\Leftrightarrow v \neq 0$.

Osservazione: Se uno fra i vettori $v_1, \dots, v_n$ è nullo, allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.
Infatti, se ad esempio $v_1 = 0$:
$a v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n = 0 \ \not\Rightarrow a = 0$.

PROPOSIZIONE 2.6.1: Sia $n \geq 2$. I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ almeno uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$): Per ipotesi $\exists a_1, \dots, a_n$ non tutti nulli | $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$.
Se $a_1 \neq 0$, allora $v_1 = -a_1^{-1}(a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)$, tesi.
$\Leftarrow$): Se $v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, allora $v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_n v_n = 0$, da cui la tesi.

Osservazione: Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti e $k \leq n$, allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

PROPOSIZIONE 2.6.2: Se $v_m \in Span(v_1, \dots, v_{m-1})$, allora
$Span(v_1, \dots, v_m) = Span(v_1, \dots, v_{m-1})$.
Dimostrazione:
$\subseteq$) Se $v \in Span(v_1, \dots, v_m) \Rightarrow v = a_1v_1 + \dots + a_mv_m = a_1v_1 + \dots + a_{m-1}v_{m-1} + a_m(b_1v_1 + \cdots + b_{m-1}v_{m-1}) = (a_1 + a_mb_1)v_1 + \dots + (a_{m-1} + a_mb_{m-1})v_{m-1} \Rightarrow v \in Span(v_1, \dots, v_{m-1})$.
$\supseteq$) Se $v \in Span(v_1, \dots, v_{m-1}) \Rightarrow v = a_1v_1 + \dots + a_{m-1}v_{m-1} = a_1v_1 + \dots + a_{m-1}v_{m-1} + 0v_m$, quindi $v \in Span(v_1, \dots, v_m)$.

DEFINIZIONE 2.6.3: Un insieme ordinato $\{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di V è detto **base** di V se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti e generano V.

Esempio: $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di $\mathbb{K}^n$, detta **base canonica**.

PROPOSIZIONE 2.6.3: Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora ogni $v \in V$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare dei $v_1, \dots, v_n$.
Dimostrazione:
Poiché i $v_1, \dots, v_n$ sono generatori, allora $v \in V = Span(v_1, \dots, v_n)$, dunque supponiamo:
$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$;
$v = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$.
Allora $(a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0$, ma i v_i sono linearmente indipendenti, dunque $a_i = b_i \ \forall i$, da cui segue la tesi.

DEFINIZIONE 2.6.4: I coefficienti dell'unica combinazione lineare dei $v_1, \dots, v_n$ che dà v si chiamano **coordinate** di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ e denotati con $[v]_{\mathcal{B}}$.

DEFINIZIONE 2.6.5: Fissando una base $\mathcal{B}$ si determina quindi una corrispondenza biunivoca:

$$[\,]_{\mathcal{B}}: V \to \mathbb{K}^n |\ v \to [v]_{\mathcal{B}}$$

chiamata "**coordinate rispetto a $\mathcal{B}$**".

PROPOSIZIONE 2.6.4: $\forall \mathcal{B}$ base, $[\,]_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo.
Dimostrazione:
$[\,]_{\mathcal{B}}$ è evidentemente lineare; inoltre è iniettiva, poiché
$Ker([\,]_{\mathcal{B}}) = \{v \in V | [v]_{\mathcal{B}} = 0\} = \{v \in V | v = 0v_1 + \dots + 0v_n\} = \{0\}$, mentre è surgettiva in quanto ogni $(a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$ è immagine di $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in V$.

COROLLARIO 2.6.5: Se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale che ammette una base formata da n vettori, allora $V \cong \mathbb{K}^n$.

PROPOSIZIONE 2.6.6: Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $w_1, \dots, w_k$ dei vettori di V.
Se $k > n$, allora $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti.
Dimostrazione:
Si ha: $w_1 = a_{11}v_1 + \dots a_{1n}v_n$
$w_2 = a_{21}v_1 + \dots a_{2n}v_n$
$\vdots$
$w_k = a_{k1}v_1 + \dots a_{kn}v_n$.

Devo trovare degli α_i non tutti nulli tali che:
$\alpha_1(a_{11}v_1 + \dots a_{1n}v_n) + \dots + \alpha_k(a_{k1}v_1 + \dots a_{kn}v_n) = 0$, ossia:
$(a_{11}\alpha_1 + \dots a_{k1}\alpha_k)v_1 + \dots + (a_{1n}\alpha_1 + \dots a_{kn}\alpha_k)v_n = 0$.
Ma $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, perciò:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \dots a_{k1}\alpha_k = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}\alpha_1 + \dots a_{kn}\alpha_k = 0 \end{cases}.$$

Poiché è un sistema omogeneo di n equazioni in $k > n$ incognite, ha infinite soluzioni, dunque in particolare ne ha una non nulla, per cui i w_i sono linearmente dipendenti.

COROLLARIO 2.6.7: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_k\}$ sono basi di V, allora $n = k$.
Dimostrazione:
Se $k > n$, i w_i sono linearmente dipendenti per la proposizione precedente;
se $n < k$, i v_i sono linearmente dipendenti,
perciò $k = n$.

DEFINIZIONE 2.6.6: Se V possiede una base finita $\{v_1, \dots, v_n\}$, diciamo che V ha **dimensione** n $(\dim V = n)$.
Se $V = \{0\}$, poniamo $\dim V = 0$.

Esempi: 1) $\dim \mathbb{K}^n = n$;
2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, in quanto $\{1\}$ è una base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale;
3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, in quanto $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale;
4) $\dim \mathcal{M}(p, n) = p \cdot n$, in quanto $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}}$ è una base, dove:

$$[E_{ij}]_{hk} = \delta_{ih} \cdot \delta_{jk} = < \begin{matrix} 1 & se\ (i,j) = (h,k) \\ 0 & se\ (i,j) \neq (h,k) \end{matrix} \quad (\delta_{ij} \overset{\text{def}}{=} < \begin{matrix} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{matrix}$$ è detto **delta di Kronecker**).

5) $\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1$, in quanto $\{1, x, \dots, x^n\}$ è una base.

DEFINIZIONE 2.6.7: Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Definiamo una somma e un prodotto per scalari in $V \times W$:
$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) \overset{\text{def}}{=} (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$;
$\alpha(v, w) \overset{\text{def}}{=} (\alpha v, \alpha w)$.

PROPOSIZIONE 2.6.8: $V \times W$ è spazio vettoriale e $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.
Dimostrazione:
Lasciamo la verifica che $V \times W$ è spazio vettoriale.
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $\{w_1, \dots, w_k\}$ base di W.
È immediato mostrare che $\{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_k)\}$ è base di $V \times W$, dunque segue la tesi.

ALGORITMO PER L'ESTRAZIONE DI UNA BASE: Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale.
Da ogni insieme finito di generatori di V si può estrarre una base.
Dimostrazione:

Siano $v_1, \dots, v_k$ generatori di V. Posso supporre $v_i \neq 0 \ \ \forall i$, poiché, se ce ne fossero, li potrei togliere e non altererei lo spazio generato.
Allora v_1 è linearmente indipendente.
Guardo $\{v_1, v_2\}$:

- se v_1, v_2 sono linearmente indipendenti, li tengo;
- altrimenti $v_2 \in Span(v_1)$ e quindi $Span(v_1, \dots, v_k) = Span(v_1, v_3, \dots, v_k)$.
  Allora elimino v_2.

Continuo così fino a quando ho considerato tutti i vettori.

COROLLARIO 2.6.9: Sia $\dim V = n$. Se $v_1, \dots, v_k$ sono generatori di V, allora $k \geq n$.

PROPOSIZIONE 2.6.10: Se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti e $v \notin Span(v_1, \dots, v_k)$, allora $v, v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.
Dimostrazione:
Sia $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + av = 0$.
Deve essere $a = 0$, poiché altrimenti $v = -a^{-1}(a_1v_1 + \ldots + a_kv_k) \ \Rightarrow v \in Span(v_1, \dots, v_k)$.
Allora $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = 0$. Poiché i $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti, segue $a_1 = \ldots = a_k = 0$ e quindi la tesi.

TEOREMA DI COMPLETAMENTO A BASE: Sia V uno spazio finitamente generato.
Se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti, esistono $v_{k+1}, \dots, v_n \in V|$
$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è una base di V.
Dimostrazione:
Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ generano V, allora $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di V.
Se non lo generano, allora $\exists v_{k+1} \notin Span(v_1, \dots, v_k)$.
Per la proposizione precedente, i $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ sono linearmente indipendenti.
Se generano V, ho trovato una base.
Altrimenti itero il procedimento.
V è finitamente generato, perciò dopo un numero finito di passi il procedimento deve finire.

Osservazione: È un procedimento non algoritmico, poiché non c'è un metodo semplice e diretto per trovare i v_{k+h}, con $h > 0$.

ALGORITMO DI COMPLETAMENTO A BASE: Se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti e se conosco una base $\{z_1, \dots, z_n\}$ di V, posso completare $\{v_1, \dots, v_k\}$ a base applicando l'algoritmo di estrazione di una base all'insieme di generatori $\{v_1, \dots, v_k, z_1, \dots, z_n\}$.

PROPOSIZIONE 2.6.11: Ogni sottospazio vettoriale W di uno spazio vettoriale V finitamente generato ha un supplementare.
Dimostrazione:
Sia $\dim V = n$. Allora $\dim W = k \leq n$.
Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base di W.
Posso completarla a una base $\{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di V.
Perciò $V = W \oplus Span(v_{k+1}, \dots, v_n)$ e dunque $Span(v_{k+1}, \dots, v_n)$ è un supplementare.

PROPOSIZIONE 2.6.12: Sia $V = U \oplus W$, $\{u_1, \dots, u_k\}$ base di U, $\{w_1, \dots, w_m\}$ base di W. Allora $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$ è base di V.
Dimostrazione:
Ogni $v \in V$ si può scrivere come $v = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$, ma $u = a_1u_1 + \dots + a_ku_k$ e $w = b_1w_1 + \dots + b_mw_m$, dunque i $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m$ generano V.
Inoltre sono linearmente indipendenti, poiché:
$\underbrace{a_1u_1 + \dots + a_ku_k}_{=u \in U} + \underbrace{b_1w_1 + \dots + b_mw_m}_{=w \in W} = 0 \ \Rightarrow u + w = 0 \ \Rightarrow u = -w$, dunque $W \ni w = -u \in U$, perciò $u, w \in U \cap W = \{0\}$, cioè $u = 0$ e $w = 0$.
Poiché $\{u_1, \dots, u_k\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ sono linearmente indipendenti, allora $a_1 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_m = 0$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 2.6.13: Se $V \neq \{0\}$ non è finitamente generato, allora $\forall n \geq 1$ esistono $v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti.
Dimostrazione:
Per induzione su n:
Passo base): $n = 1$, basta scegliere $v_1 \neq 0$;
Passo induttivo): Per ipotesi induttiva $\exists v_1, \dots, v_{n-1}$ linearmente indipendenti.
Osservo che $Span(v_1, \dots, v_{n-1}) \neq V$, poiché V non è finitamente generato.
Dunque $\exists v_n \notin Span(v_1, \dots, v_{n-1}) | \ v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

PROPOSIZIONE 2.6.14: Se V è finitamente generato e W è un sottospazio vettoriale di V, allora:
1) W è finitamente generato;
2) $\dim W \leq \dim V$;
3) se $\dim W = \dim V \ \Rightarrow W = V$.

Dimostrazione:
1) Sia $n = \dim V$. Se W non fosse finitamente generato, per la proposizione precedente esisterebbero $w_1, \dots, w_{n+1} \in W \subset V$ linearmente indipendenti, assurdo.
2) Sia $n = \dim V$. Se $\dim W > n$, allora esisterebbero $w_1, \dots, w_{n+1} \in W \subset V$ linearmente indipendenti, assurdo.
3) Se $\dim W = n$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ è base di W, allora $w_1, \dots, w_n$ sono linearmente indipendenti anche in V e, poiché $\dim V = n$, devono essere una base di V. Dunque $W = V$.

FORMULA DI GRASSMANN: Siano U, W sottospazi vettoriali di dimensione finita di V. Allora: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.
Dimostrazione:
Sia $\dim U = h$, $\dim W = k$, $\dim(U \cap W) = s$.
Sia $\{z_1, \dots, z_s\}$ una base di $U \cap W$. Allora $z_1, \dots, z_s$ sono linearmente indipendenti in U e W.
Per il teorema di completamento a base $\exists u_1, \dots, u_{h-s} \in U$, $\exists w_1, \dots, w_{k-s} \in W$ tali che:
$\{z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_{h-s}\}$ è base di U;
$\{z_1, \dots, z_s, w_1, \dots, w_{k-s}\}$ è base di W.
Se mostro che $\{z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_{h-s}, w_1, \dots, w_{k-s}\}$ è base di $U + W$ ho la tesi, poiché dimostro che $\dim(U + W) = h + k - s$.
Quei vettori generano, in quanto, preso $v \in U + W$, $\exists u \in U, w \in W | \ v = u + w$.

Inoltre $u = a_1z_1 + \ldots + a_sz_s + b_1u_1 + \ldots + b_{h-s}u_{h-s}$ e $w = \alpha_1z_1 + \ldots + \alpha_sz_s + \beta_1w_1 \ldots + \beta_{k-s}w_{k-s}$, dunque $v = (a_1 + \alpha_1)z_1 + \ldots + (a_s + \alpha_s)z_s + b_1u_1 + \ldots + b_{h-s}u_{h-s} + \beta_1w_1 + \ldots + \beta_{k-s}w_{k-s}$.
Mostriamo quindi che sono linearmente indipendenti: sia

$$\underbrace{a_1z_1 + \ldots + a_sz_s}_{=z} + \underbrace{b_1u_1 + \ldots + b_{h-s}u_{h-s}}_{=u} + \underbrace{c_1w_1 + \ldots + c_{k-s}w_{k-s}}_{=w} = 0.$$

Allora $z + u = -w$. Ma $z + u \in U, w \in W$, quindi $z + u = -w \in U \cap W$.
Posso dunque scrivere $w = \alpha_1z_1 + \ldots + \alpha_sz_s$, per cui ho:
$a_1z_1 + \ldots + a_sz_s + b_1u_1 + \ldots + b_{h-s}u_{h-s} + \alpha_1z_1 + \ldots + \alpha_sz_s = 0 \Rightarrow$
$(a_1 + \alpha_1)z_1 + \ldots + (a_s + \alpha_s)z_s + b_1u_1 + \ldots + b_{h-s}u_{h-s} = 0$.
Questi vettori sono una base di U, quindi $b_1 = \ldots = b_{h-s} = 0$.
Allora:
$a_1z_1 + \ldots + a_sz_s + c_1w_1 + \ldots + c_{k-s}w_{k-s} = 0$, ma questi vettori sono una base di W, quindi sono linearmente indipendenti, per cui $a_1 = \ldots = a_s = c_1 = \ldots = c_{k-s} = 0$, da cui segue la tesi.

Osservazione: $\dim \mathcal{S}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim \mathcal{A}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Infatti, detta $\{E_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$ la base canonica di $\mathcal{M}(n)$, $\{E_{ij} + E_{ji}\}_{1\le i<j\le n} \cup \{E_{ii}\}_{1\le i\le n}$ è una base di $\mathcal{S}(n)$. Lasciamo questa verifica per esercizio. Il numero dei vettori di base è $\frac{n(n-1)}{2} + n$.
Inoltre per Grassmann, $\dim \mathcal{A}(n) = \dim \mathcal{M}(n) - \dim \mathcal{S}(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

TEOREMA 2.6.15: Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, con V finitamente generato.
Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V; siano $w_1, \ldots, w_n$ vettori di W.
Allora $\exists! f: V \to W$ lineare tale che $f(v_i) = w_i \ \forall i$.
Dimostrazione:
<u>Esistenza</u>: Sia $v \in V \ \Rightarrow \exists unici\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} |\ v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$.
Poniamo $f(v) = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n$.
Si ha evidentemente che $f(v_i) = w_i \ \forall i$.
Inoltre f è lineare, infatti, se $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ e $z = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n$, allora
$v + z = (a_1 + b_1)v_1 + \ldots + (a_n + b_n)v_n$;
quindi $f(v + z) = (a_1 + b_1)w_1 + \ldots + (a_n + b_n)w_n = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n + b_1w_1 + \ldots + b_nw_n = f(v) + f(z)$.
Analogamente per il multiplo.
<u>Unicità</u>: Prendiamo una qualsiasi g lineare tale che $g(v_i) = w_i \ \forall i$.
Per linearità:

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_iv_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_ig(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_iw_i = f(v)$$

dunque f è unica.

PROPOSIZIONE 2.6.16: Sia $f: V \to W$ lineare. Allora:
1) Se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti e f è iniettiva, allora $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti;
2) Se $v_1, \ldots, v_n$ generano V, allora $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ generano $Im(f)$.

Dimostrazione:

1) Sia $a_1 f(v_1)+\ldots+a_n f(v_n) = 0$. Allora per linearità $f(a_1 v_1+\ldots+a_n v_n) = 0$, dunque $a_1 v_1+\ldots+a_n v_n \in Ker(f) = \{0\}$, ma $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, per cui $a_1 =\ldots= a_n = 0$, tesi.
2) Sia $y = f(x) \in Im(f)$. Mostriamo che può essere scritto come combinazione lineare dei $f(v_i)$.
   So che $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} |\ x = a_1 v_1+\ldots a_n v_n$. Allora:
   $$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)$$
   da cui la tesi.

Osservazione: Se $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$, allora sappiamo che A è una applicazione lineare e la sua immagine è lo spazio generato dalle colonne.
Quindi $Im(A) = Span(A^1, \ldots, A^n) = \mathcal{C}(A)$.

COROLLARIO 2.6.17: $f: V \to W$ è un isomorfismo $\Rightarrow f$ trasforma ogni base di V in una base di W.
Dimostrazione:
Prendo una base di V. Poiché f è iniettiva, allora le immagini dei vettori della base sono linearmente indipendenti. Inoltre quegli stessi vettori generano V, quindi le loro immagini generano $Im(f)$, ma f è surgettiva, quindi $Im(f) = W$.

FORMULA DELLE DIMENSIONI: Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, e sia $f: V \to W$ lineare. Allora:
$$\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$$
Dimostrazione:
Sia $n = \dim V$ e $k = \dim Ker(f)$.
Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $Ker(f)$; la completo a $\{v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n\}$ base di V.
Allora $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ generano $Im(f)$, ma $f(v_1) =\ldots= f(v_k) = 0$, poiché appartengono a $Ker(f)$.
Perciò posso toglierli e i rimanenti $f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$ generano comunque $Im(f)$.
Dimostriamo che $f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti:
$$a_{k+1} f(v_{k+1})+\ldots+a_n f(v_n) = 0 \Rightarrow f(a_{k+1} v_{k+1}+\ldots+a_n v_n) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i \in Ker(f)$$
$$\Rightarrow \exists a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K} |\ \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1+\ldots+a_k v_k$$
$$\Rightarrow a_1 v_1+\ldots+a_k v_k - a_{k+1} v_{k+1} -\ldots- a_n v_n = 0$$
Ma $v_1, .., v_n$ sono linearmente indipendenti, quindi $a_i = 0\ \forall i$.
Per cui $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ è una base di $Im(f)$, cioè $\dim Im(f) = n - k$, tesi.

COROLLARIO 2.6.18: Sia $f: V \to W$ lineare.
Se $\dim V = \dim W$, allora f è iniettiva $\Leftrightarrow f$ è surgettiva.
Dimostrazione:

f è iniettiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim V = \dim Im(f) \Leftrightarrow \dim W = \dim Im(f) \Leftrightarrow Im(f) = W$ (poiché $Im(f) \subseteq W$) $\Leftrightarrow f$ è surgettiva.

COROLLARIO 2.6.18: $V \cong W \iff \dim V = \dim W$.
Dimostrazione:
$\Leftarrow$) Se $\dim V = \dim W$, allora $V \cong \mathbb{K}^n \cong W$.
$\Rightarrow$) Se $\exists f: V \to W$ isomorfismo, per la formula delle dimensioni $\dim V = 0 + \dim W$.

Osservazione: Siano V_1, V_2 sottospazi vettoriali di V e sia $f: V_1 \times V_2 \to V$ data da $f(v_1, v_2) = v_1 + v_2$. f è evidentemente lineare e $Im(f) = V_1 + V_2$.
Inoltre $Ker(f)$ è canonicamente isomorfo a $V_1 \cap V_2$, infatti:
$Ker(f) = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 | \; v_1 + v_2 = 0\} = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 | \; v_1 = -v_2\} =$
$= \{(v, -v) | \; v \in V_1 \cap V_2\}$, poiché $V_1 \ni v_1 = -v_2 \in V_2$, dunque:
$L: V_1 \cap V_2 \to V_1 \times V_2 | \; L(v) = (v, -v)$ induce l'isomorfismo cercato (le proprietà sono immediatamente verificabili).
Per cui, per la formula delle dimensioni, $\dim(V_1 + V_2) = \dim Im(f) = \dim(V_1 \times V_2) - \dim Ker(f) = dim\, V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$,
che conclude quindi la dimostrazione alternativa della formula di Grassmann.

Osservazione: Nell'insieme quoziente $\{\mathbb{K} - spazi\ vettoriali\ finitamente\ generati\}/_{\cong}$ esistono tante classi di equivalenza quante $\mathbb{N}$ e in ognuna un rappresentante è $\mathbb{K}^n$.
La dimensione è un sistema completo di invarianza per la relazione di equivalenza $\cong$, perciò se $\dim V \neq \dim W$, allora sicuramente V e W non sono isomorfi.

DEFINIZIONE 2.6.8: Due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V, W si dicono **canonicamente isomorfi** se $\exists f: V \to W$ isomorfismo che non dipende dalla scelta di una base.

PROPOSIZIONE 2.6.19: Sia $V = U \oplus W$ e $V = U \oplus W'$. $\forall w \in W, \exists!\, u \in U, w' \in W' |$ $w = u + w'$. Allora è ben definita l'applicazione $\varphi: W \to W' | \; \varphi(w) = w'$.
φ è un isomorfismo canonico.
Dimostrazione:

- φ è lineare, poiché dati $w_1 = u_1 + w_1{}'$ e $w_2 = u_2 + w_2{}'$, allora:
  $\varphi(w_1 + w_2) = \varphi\big((u_1 + u_2) + (w_1' + w_2')\big) = w_1' + w_2' = \varphi(w_1) + \varphi(w_2)$;
  $\varphi(\lambda w) = \varphi(\lambda u + \lambda w') = \lambda w' = \lambda \varphi(w)$.
- φ è iniettiva, poiché se $w \in Ker(\varphi)$, $\varphi(w) = 0 \Rightarrow w = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{0}_{=\varphi(w)} \Rightarrow w \in U \cap W = \{0\}$.
- Poiché $\dim W' = \dim V - \dim U = \dim W$ e φ è iniettiva, allora φ è surgettiva.

Infine evidentemente φ non dipende dalla scelta di una base, dunque ho la tesi.

Osservazione: Se $\pi_{W'}$ è la proiezione indotta da $V = U \oplus W'$ e $i_W: W \to V$ è l'inclusione (cioè $i_W(w) = w \;\; \forall w \in W$), allora $\varphi = \pi_{W'} \circ i_W$.

2.7 RANGO

PROPOSIZIONE 2.7.1: Siano $f: V \to W$, $g: W \to Z$ lineari. Allora:
1) $\dim Im(g \circ f) \leq \min(\dim Im(f), \dim Im(g))$;
2) Se f è un isomorfismo, $\dim Im(g \circ f) = \dim Im(g)$;
3) Se g è un isomorfismo, $\dim Im(g \circ f) = \dim Im(f)$.

Dimostrazione:
1) $Im(g \circ f) = Im\left(g|_{Im(f)}\right)$ e $g|_{Im(f)}$ è lineare, poiché restrizione di g lineare.
   Quindi $\dim Im(g \circ f) = \dim Im(f) - \dim Ker\left(g|_{Im(f)}\right) \leq \dim Im(f)$.
   Inoltre $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$, quindi $\dim Im(g \circ f) \leq \dim Im(g)$, tesi.
2) Se f è un isomorfismo, allora $f(V) = W$, perciò $Im(g \circ f) = Im\left(g|_{Im(f)}\right) = Im(g)$, tesi.
3) Se g è un isomorfismo, allora $Ker(g) = \{0\}$, dunque $\dim Im(g \circ f) = \dim Im(f) - 0$, tesi.

DEFINIZIONE 2.7.1: Sia $f: V \to W$ lineare. Definiamo **rango** di f $rk(f) = \dim Im(f)$.
In particolare, se $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ e dunque $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p | X \to AX$, allora $rk(A) = \dim Im(A) = \dim \mathcal{C}(A)$.

DEFINIZIONE 2.7.2: Sia $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. Definiamo **spazio delle righe** $\mathcal{R}(A) = Span(A_1, \dots, A_p)$
Definiamo inoltre **rango per righe** il numero $\dim \mathcal{R}(A)$.

PROPOSIZIONE 2.7.2: Sia S una ridotta a scalini di A. Allora:
1) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(S)$;
2) $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(S)$, cioè $rk(A) = rk(S)$.

Dimostrazione:
1) Facendo operazioni elementari di riga, non altero lo spazio delle righe, dunque $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(S)$.
2) I sistemi $AX = 0$ e $SX = 0$ sono equivalenti, perciò $Ker(A) = Ker(S)$.
   Per la formula delle dimensioni:
   $n = \dim Ker(A) + rk(A)$ e $n = \dim Ker(S) + rk(S)$,
   dunque $rk(A) = rk(S)$.

PROPOSIZIONE 2.7.3: Sia S una matrice a scalini con r pivots nelle colonne $S^{j_1}, \dots, S^{j_r}$. Allora:
1) $\{S_1, \dots, S_r\}$ è una base di $\mathcal{R}(S)$, dunque $\dim \mathcal{R}(S) = r$;
2) $\left\{S^{j_1}, \dots, S^{j_r}\right\}$ è una base di $\mathcal{C}(S)$, dunque $rk(S) = r$.

Dimostrazione:
1)
   - Poiché le altre righe sono nulle, sicuramente $S_1, \dots, S_r$ generano $\mathcal{R}(S)$.
   - $S_1, \dots, S_r$ sono linearmente indipendenti, poiché se:
   $$a_1 S_1 + \dots + a_r S_r = 0$$
   allora $a_1 = 0$ in quanto S_1 è l'unica riga ad avere un elemento $\neq 0$ nella colonna S^{j_1}, $a_2 = 0$, in quanto $a_1 = 0$ e quindi S_2 è l'unica riga ad avere un elemento $\neq 0$ nella colonna S^{j_2}, e così via.
2) $S^{j_1}, \dots, S^{j_r}$ sono linearmente indipendenti, la dimostrazione è analoga alla precedente nel caso delle righe.

Mostriamo che $S^{j_1}, \dots, S^{j_r}$ generano $\mathcal{C}(S)$, cioè che $S^i \in Span(S^{j_1}, \dots, S^{j_r})\ \ \forall i \neq j_1, \dots, j_r$, cioè che $\exists a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K} |\ S^i = a_1 S^{j_1} + \dots a_r S^{j_r}$, cioè che il sistema

$$\left(S^{j_1} \mid \dots \mid S^{j_r}\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \left(S^i\right)$$

ha soluzione.

Ma la matrice è a scalini, perciò ha r pivots.

Se aggiungo la colonna dei termini noti non posso dunque aggiungere pivots.

Dunque $\#pivots(S) = \#pivots(S')$, quindi il sistema è risolubile, tesi.

Osservazione: Se in qualche modo riesco a calcolare $rk(A)$, allora:

- so calcolare $\dim Sol(AX = 0) = \dim Sol_0$, poiché $\dim Sol_0 = \dim Ker(A) = n - rk(A)$;
- se voglio calcolare $\dim Span(v_1, \dots, v_k)$, pongo $A = (v_1 \mid \dots \mid v_k)$ e dunque $\dim Span(v_1, \dots, v_k) = \dim \mathcal{C}(A) = \dim Im(A) = rk(A)$.

Osservazione: Un modo per calcolare $rk(A)$ è via l'algoritmo di Gauss; infatti abbiamo visto che $rk(A) = \#pivots(S)$, dove S è una ridotta a scalini di A. Per formalizzare meglio questo procedimento, ci serviremo del seguente risultato:

PROPOSIZIONE 2.7.4: Sia $A \in \mathcal{M}(p, q)$. Allora:

1) il numero di pivots di una sua ridotta a scalini non dipende dalla riduzione a scalini;
2) $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$;

Dimostrazione:

1) Se S è una ridotta a scalini di A, con r pivots, allora $r = \dim \mathcal{R}(S) = \dim \mathcal{R}(A)$. Quindi r dipende solamente da A.
2) $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(S) = r = \dim \mathcal{C}(S) = \dim \mathcal{C}(A) = rk(A)$.

COROLLARIO 2.7.5: $\forall A \in \mathcal{M}(p, q)$, $rk({}^tA) = rk(A)$.

Dimostrazione:

$rk({}^tA) = \dim \mathcal{C}({}^tA) = \dim \mathcal{R}(A) = rk(A)$.

TEOREMA DI ROUCHÉ – CAPELLI: $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow rk(A) = rk(A')$, dove $A' = (A \vdots B)$.

Dimostrazione:

Se S è una ridotta a scalini di A, sapevamo che $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow rk(S) = rk(S')$, ma $rk(S) = rk(A)$, dunque segue la tesi.

DEFINIZIONE 2.7.3: Una matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ si dice **invertibile** se $\exists B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) |\ A \cdot B = B \cdot A = I$.

DEFINIZIONE 2.7.4: Una matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ si dice **singolare** se $rk(A) < n$.

PROPOSIZIONE 2.7.6: Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Allora sono fatti equivalenti:

1) A è invertibile;
2) $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo;

3) $rk(A) = n$.
Dimostrazione:
1) $\Leftrightarrow$ 2): ovvia.
2) $\Rightarrow$ 3): ovvia.
3) $\Rightarrow$ 2): So che A è lineare e che A è surgettiva, in quanto $rk(A) = \dim Im(A) = n$, perciò A è iniettiva, dunque ho la tesi.

Osservazione: $A \in \mathcal{M}(n)$ è singolare $\Leftrightarrow$ non è invertibile.

DEFINIZIONE 2.7.5: Definiamo **matrice elementare** di $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ ogni matrice ottenuta da I_n eseguendo una sola operazione elementare per riga:
1^o tipo: Denotiamo con E_{ij} la matrice ottenuta da I_n scambiando l'i-esima riga con la j-esima riga;
2^o tipo: Denotiamo con $E_i(\lambda)$ la matrice ottenuta da I_n moltiplicando l'i-esima riga per la costante $\lambda \neq 0$;
3^o tipo: $E_{ij}(\lambda)$ è la matrice ottenuta da I_n sommando alla riga i-esima λ volte la riga j-esima.

Osservazione: Se B è ottenuta da A con un'operazione elementare per riga, allora $B = EA$, dove E è la matrice elementare corrispondente all'operazione effettuata.
Esempio: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[A_2+3A_1]{} B = \begin{pmatrix} a & b \\ c+3a & d+3b \end{pmatrix}$;
$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c+3a & d+3b \end{pmatrix}$.

Osservazione: Le matrici elementari sono tutte invertibili:
1) $E_{ij} \cdot E_{ij} = I$, poiché scambio le righe i e j e poi le riscambio; perciò $\left(E_{ij}\right)^{-1} = E_{ij}$.
2) $E_i(\lambda^{-1}) \cdot E_i(\lambda) = I$, poiché moltiplico la riga i-esima prima per λ^{-1} e poi per λ; perciò $\left(E_i(\lambda)\right)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$.
3) $E_{ij}(\lambda) \cdot E_{ij}(-\lambda) = I$, dunque $\left(E_{ij}(\lambda)\right)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$.

Quindi se prendo una matrice $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ e gli applico n operazioni di riga, ottengo la ridotta a scalini S:
$$A \to M_1 A \to M_2 M_1 A \to \ldots \to M_n \ldots M_1 A = S$$
Se A è invertibile, allora è un isomorfismo; gli M_i sono tutti isomorfismi, e la composizione di isomorfismi è un isomorfismo, perciò S è invertibile.
Dunque, detta $M = M_n \ldots M_1 \in GL(p)$:
$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^p \xrightarrow{M} \mathbb{K}^p$$
$$\mathbb{K}^n \xrightarrow[S=M\cdot A]{} \mathbb{K}^p$$
Sappiamo che $S^j = M \cdot A^j$, ma M è un isomorfismo, quindi trasforma basi in basi.
Inoltre $\{S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}\}$ è una base di $Im(S)$, dunque $\{A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}\}$ è una base di $Im(A)$.

ALGORITMO PER L'ESTRAZIONE DI UNA BASE DA UN GRUPPO DI GENERATORI: Dati $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$, sia $A = (v_1 \mid \ldots \mid v_k)$. Detta S una ridotta a scalini di A, se $S^{j_1}, \ldots, S^{j_r}$ sono le colonne contenenti i pivots di S, allora $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}\}$ è una base $Span(v_1, \ldots, v_k)$.

Osservazione: Per estendere $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$ linearmente indipendenti a base di $\mathbb{K}^n$ costruiamo $A = (v_1 \mid \dots \mid v_m \mid e_1 \mid \dots \mid e_n)$. Poiché i vettori in colonna generano $\mathbb{K}^n$, applicando l'algoritmo precedente estendo $v_1, \dots, v_m$ a base di $\mathbb{K}^n$.

Osservazione: Sia $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. So che $\exists M \in GL(p) \mid MA = S$ a scalini.
Per trovare una tale M riduco $(A \mid I_p)$ a scalini fino a ottenere $(S \mid B)$.
Sicuramente $\exists M \in GL(p) \mid M(A \mid I_p) = (S \mid B)$; allora:
$\begin{cases} MA = S \\ MI = B \end{cases} \begin{cases} M = B \\ BA = S \end{cases}$
dunque la matrice cercata è B.

CALCOLO DELL'INVERSA: Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Riduco per righe $(A \mid I_n)$ fino a $(S \mid *)$, con S a scalini. Poiché $rk(A) = rk(S)$, A è invertibile $\Leftrightarrow rk(S) = n$.
Se $rk(S) < n$, l'algoritmo si ferma, poiché A non è invertibile.
Se $rk(S) = n$, proseguo con la riduzione fino a ottenere $(I \mid B)$.
Per l'osservazione precedente, $BA = I$, cioè B è un'inversa sinistra di A. Ma essendo A invertibile, allora B è anche inversa destra: $B = A^{-1}$.

Notazione: Sia $A \in \mathcal{M}(p, n)$. Denotiamo con $\left(A_{i_1}, \dots, A_{i_m} \mid A^{j_1}, \dots, A^{j_q}\right)$ la sottomatrice di A ottenuta in modo che contenga gli elementi nelle intersezioni fra le righe e le colonne considerate.

DEFINZIONE 2.7.6: Una sottomatrice quadrata si dice **minore**.

PROPOSIZIONE 2.7.7: Sia $A \in \mathcal{M}(p, n)$. Sia B un minore invertibile di A.
Allora le righe (o le colonne) che concorrono a formare B sono linearmente indipendenti.
Dimostrazione:
Sia $B = \left(A_{i_1}, \dots, A_{i_q} \mid A^{j_1}, \dots, A^{j_q}\right)$.
Se $\alpha_1 A_{i_1} + \dots + \alpha_q A_{i_q} = 0$, a maggior ragione $\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_q B_q = 0$.
Ma $B_1, \dots, B_q$ sono linearmente indipendenti perché $rk(B) = q$, quindi $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$.

TEOREMA 2.7.8: Il rango di una matrice coincide con il massimo degli ordini dei suoi minori invertibili.
Dimostrazione:
Sia $A \in \mathcal{M}(p, n)$; sia $r = rk(A)$; sia ρ il massimo degli ordini dei minori di A invertibili.

- $\rho \leq r$: Sia B un minore $\rho \times \rho$ di A invertibile. Allora, per la proposizione precedente, esistono in A ρ righe indipendenti, quindi $r \geq \rho$.
- $\rho \geq r$: Siano $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ r righe indipendenti in A. Allora ho la sottomatrice $B = \left(A_{i_1}, \dots, A_{i_r} \mid A^1, \dots, A^n\right)$ di rango r.
  Allora il rango per colonne è r, dunque esistono in B r colonne indipendenti $B^{j_1}, \dots, B^{j_r}$.
  Allora la sottomatrice M di B, $M = \left(B_1, \dots, B_r \mid B^{j_1}, \dots, B^{j_r}\right)$ ha rango r, cioè è un minore $r \times r$ invertibile di A.
  Dunque $\rho \geq r$, da cui la tesi.

DEFINIZIONE 2.7.7: Sia $B = \left(A_{i_1}, \dots, A_{i_q} \mid A^{j_1}, \dots, A^{j_q}\right)$ un minore di A. Definiamo minore orlato di B un qualunque minore $B' = \left(A_{i_1}, \dots, A_{i_q}, A_h \mid A^{j_1}, \dots, A^{j_q}, A^k\right)$, con $h \neq i_1, \dots, i_q$ e $k \neq j_1, \dots, j_q$.

TEOREMA DEGLI ORLATI: Sia $A \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$. Allora $rk(A) = k \iff \exists$ un minore $k \times k$ invertibile i cui orlati sono tutti non invertibili.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Sappiamo che se $rk(A) = k$ allora esiste un minore $k \times k$ invertibile e tutti i minori $h \times h$, con $h > k$, sono non invertibili. Gli orlati appartengono a questo tipo di minori, dunque segue la tesi.
$\Leftarrow$) Se esiste un minore Q $k \times k$ invertibile, so che $rk(A) \geq k$.
Dunque devo mostrare che se tutti gli orlati di Q sono non invertibili, effettivamente non può essere $rk(A) > k$.
Ovvero se $rk(A) > k$, trovo un orlato di Q invertibile.
Sia Q dato dalle righe $R_{i_1}, \dots, R_{i_k}$ e dalle colonne $C_{j_1}, \dots, C_{j_k}$.
L'invertibilità di Q implica che la matrice $\left(C_{j_1} \mid \dots \mid C_{j_k}\right)$ ha rango k.
Dunque $C_{j_1}, \dots, C_{j_k}$ sono elementi di $\mathbb{K}^n$ linearmente indipendenti.
Se $rk(A) > k$, allora $\dim Span(C_1, \dots, C_m) > k$, per cui $\exists C_{j_{k+1}} \mid C_{j_1}, \dots, C_{j_k}, C_{j_{k+1}}$ sono linearmente indipendenti.
Quindi $rk\left(C_{j_1} \mid \dots \mid C_{j_k} \mid C_{j_{k+1}}\right) = k + 1$.
Inoltre le righe $i_1, \dots, i_k$ di questa matrice sono linearmente indipendenti, perché identificano una sottomatrice che contiene Q.
Dunque $\exists$ riga $R_{i_{k+1}} \mid$ le righe $R_{i_1}, \dots, R_{i_k}, R_{i_{k+1}}$ di questa matrice $(k + 1) \times (k + 1)$ sono linearmente indipendenti.
Questo è un orlato invertibile di Q, dunque ho la tesi.

2.8 SD-EQUIVALENZA

DEFINIZIONE 2.8.1: Sia $f: V \to W$ lineare e siano $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{T} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Definiamo **matrice associata a f rispetto a $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$**:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f) = \left([f(v_1)]_{\mathcal{T}} \mid \dots \mid [f(v_n)]_{\mathcal{T}}\right)$$

dove $[f(v_i)]_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,m} \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $f(v_i)$ rispetto a $\mathcal{T}$, cioè tali che $f(v_i) = \alpha_{i,1} w_1 + \dots + \alpha_{i,m} w_m$.

Osservazione: Sia $v \in V$; allora $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.
$f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) = x_1\left(\alpha_{1,1} w_1 + \dots + \alpha_{1,m} w_m\right) + \dots + x_n\left(\alpha_{n,1} w_1 + \dots + \alpha_{n,m} w_m\right) =$
$= \left(\alpha_{1,1} x_1 + \dots + \alpha_{n,1} x_n\right) w_1 + \dots + \left(\alpha_{1,m} x_1 + \dots + \alpha_{n,m} x_n\right) w_m$, cioè:

$$[f(v)]_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} x_1 + \dots + \alpha_{n,1} x_n \\ \vdots \\ \alpha_{1,m} x_1 + \dots + \alpha_{n,m} x_n \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f) \cdot [v]_{\mathcal{S}}$$

TEOREMA 2.8.1: Siano V, W spazi vettoriali tali che $\dim V = n$, $\dim W = m$.
Sia $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{T} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W.
Allora l'applicazione:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}: Hom(V, W) \to \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}) |\, f \to \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f)$$

è un isomorfismo.
Dimostrazione:

- $\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ è evidentemente lineare;
- È iniettiva, poiché se $f \in Ker(\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}})$, $[\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f)]^1 = \dots = [\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f)]^n = 0$, cioè $f(v_1) = \dots = f(v_n) = 0$, e per il teorema che dice che $\exists!$ applicazione lineare che manda una base in vettori preassegnati, allora f è l'applicazione nulla.
- $\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ è surgettiva, poiché $\forall A \in \mathcal{M}(m, n)\ \ \exists! f: V \to W$ lineare tale che $[f(v_1)]_{\mathcal{T}} = A^1, \dots, [f(v_n)]_{\mathcal{T}} = A^n$, dunque $\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f) = A$.

COROLLARIO 2.8.2: Siano V, W spazi vettoriali tali che $\dim V = n$, $\dim W = m$. Allora $\dim Hom(V, W) = m \cdot n$.
Dimostrazione:
Segue dal fatto che $\forall$basi di V e W, l'applicazione $\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}: Hom(V, W) \to \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ è un isomorfismo e $\dim \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}) = m \cdot n$.

Notazione: Se V è uno spazio vettoriale e $\mathcal{B}$ è base di V, denotiamo con $V_{\mathcal{B}}$ lo spazio V rispetto alla base $\mathcal{B}$.

PROPOSIZIONE 2.8.3: Siano $f: U_{\mathcal{S}} \to V_{\mathcal{T}}$ e $g: V_{\mathcal{T}} \to W_{\mathcal{R}}$ lineari e siano $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f)$ e $B = \mathfrak{M}_{\mathcal{T},\mathcal{R}}(g)$. Allora $\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{R}}(g \circ f) = B \cdot A$.
Dimostrazione:
$\forall u \in U$, $[(g \circ f)(u)]_{\mathcal{R}} = [g(f(u))]_{\mathcal{R}} = B \cdot [f(u)]_{\mathcal{T}} = B \cdot A \cdot [u]_{\mathcal{S}}$, da cui la tesi.

Osservazione: Se $\mathcal{S}$ è base di V, $\mathcal{T}$ è base di W e $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f)$, allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{S}}}"'] & W \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{T}}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

è commutativo, cioè per "andare" da uno spazio all'altro si può seguire un qualsiasi percorso (dunque ad esempio $A \circ [\,]_{\mathcal{S}} = [\,]_{\mathcal{T}} \circ f$).
Inoltre il diagramma:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{S}}}"'] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{T}}}"] & Z \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{R}}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"'] \arrow[rr, bend right, "B \cdot A"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^p \end{tikzcd}$$

è commutativo.

PROPOSIZIONE 2.8.4: Sia $f: V \to W$ lineare, $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f)$. Allora $rk(f) = rk(A)$.
Dimostrazione:
Sia $S = \{v_1, \dots, v_n\}$; allora $Im(f) = Span(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

Inoltre $[f(v_i)]_\mathcal{T} = A^i \ \forall i$.
Se $\varphi = [\ ]_\mathcal{T}: W \to \mathbb{K}^m$ è l'isomorfismo indotto dalla base $\mathcal{T}$, allora $\varphi\big(Im(f)\big) = \mathcal{C}(A) = Im(A)$.
Per cui $rk(f) = \dim Im(f) = \dim Im(A) = rk(A)$.

Osservazione: Per la proposizione precedente, se $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ è una base di $Im(A)$, allora $\{f(v_{j_1}), \dots, f(v_{j_r})\}$ è una base di $Im(f)$.

COROLLARIO 2.8.5: Sia $f: V \to W$ lineare, $\dim V = \dim W = n$.
Allora f è invertibile $\Leftrightarrow A = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f)$ è invertibile.
Dimostrazione:
f è invertibile $\Leftrightarrow rk(f) = n \Leftrightarrow rk(A) = n \Leftrightarrow A$ è invertibile.

DEFINIZIONE 2.8.2: Siano $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ basi di V. Definiamo **matrice del cambiamento di base** da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ la matrice $\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(id)$.

Osservazioni: 1) Se $N = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(id)$ e $v \in V$, allora $[v]_\mathcal{T} = N \cdot [v]_\mathcal{S}$. Dunque N trasforma le coordinate di v rispetto a $\mathcal{S}$ nelle coordinate di v rispetto a $\mathcal{T}$.
2) Evidentemente $\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(id) \cdot \mathfrak{M}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}(id) = I$, dunque $\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(id)$ è invertibile e $\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(id)\big)^{-1} = \mathfrak{M}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}(id)$.
3) Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V, allora $[\ ]_\mathcal{B}(v_i) = e_i$, cioè $[\ ]_\mathcal{B}$ trasforma $\mathcal{B}$ nella base canonica di $\mathbb{K}^n$.
4) Se $g: V \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo, allora $\exists!$ base $\mathcal{B}$ di V tale che $g = [\ ]_\mathcal{B}$.
Infatti, per l'osservazione precedente, $\mathcal{B} = \{g^{-1}(e_1), \dots, g^{-1}(e_n)\}$, dunque è unica.

PROPOSIZIONE 2.8.6: Sia V uno spazio vettoriale, $\dim V = n$, $\mathcal{B}$ base di V, $A \in GL(n)$. Allora:
1) $\exists!$ base $\mathcal{S}$ di $V \mid A = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{B}}(id)$;
2) $\exists!$ base $\mathcal{T}$ di $V \mid A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{T}}(id)$.
Dimostrazione:
1) Le ipotesi creano una situazione del genere:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{id} & V \\ & & \downarrow [\ ]_\mathcal{B} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow[A]{} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

A è un isomorfismo, dunque anche A^{-1} è un isomorfismo.
Allora $\exists!$ isomorfismo $g: V \to \mathbb{K}^n |$ il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{id} & V \\ g\downarrow & & \downarrow [\ ]_\mathcal{B} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow[A]{} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

commuti. In particolare $g = A^{-1} \circ [\ ]_\mathcal{B}$.
Per l'osservazione 4) $\exists!$ base $\mathcal{S}$ di V tale che $g = [\ ]_\mathcal{S}$ (che dunque sarà $\mathcal{S} = \{g^{-1}(e_1), \dots, g^{-1}(e_n)\} = \big\{[\ ]_\mathcal{B}^{-1}\big(A(e_1)\big), \dots, [\ ]_\mathcal{B}^{-1}\big(A(e_n)\big)\big\} = \{[A^1]_\mathcal{B}^{-1}, \dots, [A^n]_\mathcal{B}^{-1}\}$).
2) $\exists!\, g = A \circ [\ ]_\mathcal{B}$ isomorfismo che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{id}{\to} & \\ V & & V \\ [\,]_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{K}^n & \underset{A}{\to} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Per l'osservazione 4) $\exists!$ base $\mathcal{T}$ di V tale che $g = [\,]_{\mathcal{T}}$.

Osservazione: Sia $f: V \to W$ lineare, $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ basi di V, $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ basi di W. Siano $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f)$ e $A' = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}',\mathcal{T}'}(f)$. Siano inoltre $N = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(id)$ e $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{T},\mathcal{T}'}(id)$.
La situazione dei dati è dunque:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{S}} & \overset{A}{\to} & W_{\mathcal{T}} \\ N \uparrow & & \downarrow M \\ V_{\mathcal{S}'} & \underset{A'}{\to} & W_{\mathcal{T}'} \end{array}$$

Il diagramma è commutativo e dunque $A' = MAN$, ossia:
$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}',\mathcal{T}'}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{T},\mathcal{T}'}(id) \cdot \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(f) \cdot \mathfrak{M}_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}(id)$.

DEFINIZIONE 2.8.3: $f, g \in Hom(V, W)$. f e g si dicono **SD-equivalenti** ($f \equiv_{SD} g$) $\Leftrightarrow$ $\exists h \in GL(W),\ \exists k \in GL(V) |\ g = h \circ f \circ k$.

Osservazioni: 1) $\equiv_{SD}$ è una relazione di equivalenza (la verifica è lasciata al lettore);
2) Se $f \equiv_{SD} g$, allora $rk(f) = rk(g)$, poiché componendo isomorfismi il rango non cambia (il rango è dunque un invariante per $\equiv_{SD}$);

DEFINIZIONE 2.8.4: $A, B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. $A \equiv_{SD} B \ \Leftrightarrow \exists M \in GL(p),\ \exists N \in GL(n) |\ B = MAN$.

Osservazione: Dalle definizioni segue immediatamente che, se $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(f)$, $B = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(g)$, allora $f \equiv_{SD} g \ \Leftrightarrow A \equiv_{SD} B$.

Osservazione: Se $B = MAN$, con M, N invertibili, posso vedere A come un'applicazione lineare: $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(A)$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica.
Inoltre, se interpreto $N = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{C}}(id_{\mathbb{K}^n})$, $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{C},\mathcal{T}}(id_{\mathbb{K}^p})$:

$$\mathbb{K}^n_{\mathcal{S}} \underset{N}{\to} \mathbb{K}^n_{\mathcal{C}} \underset{A}{\to} \mathbb{K}^p_{\mathcal{C}} \underset{M}{\to} \mathbb{K}^p_{\mathcal{T}}$$

Allora $B = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}(A)$.
Per cui $A \equiv_{SD} B \ \Leftrightarrow$ rappresentano la stessa applicazione lineare in basi diverse.
Estendiamo questa osservazione al caso delle applicazioni lineari con la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2.8.7: $f, g \in Hom(V, W)$. Allora:
$f \equiv_{SD} g \ \Leftrightarrow \exists \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V, $\exists \mathcal{S}, \mathcal{S}'$ base di W tali che $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{S}'}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(g)$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Fisso $\mathcal{B}$ base di V e $\mathcal{S}$ base di W.
Per ipotesi $\exists h \in GL(W), \exists k \in GL(V) |\ g = h \circ f \circ k$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hspace{10em}}^{g=h\circ f\circ k}} & \\ V & \xrightarrow{k} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{h} & W \\ [\,]_{\mathcal{B}} \downarrow & & [\,]_{\mathcal{B}} \downarrow & & [\,]_{\mathcal{S}} \downarrow & & \downarrow [\,]_{\mathcal{S}} \\ \mathbb{K}^n & \underset{N}{\to} & \mathbb{K}^n & \underset{A}{\to} & \mathbb{K}^p & \underset{M}{\to} & \mathbb{K}^p \end{array}$$

Allora $\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(g) = MAN$, con $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(f)$.
Interpreto N e M come matrici del cambiamento di base:
$\exists!\ \mathcal{B}'$ base di $V |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_V) = N$,
$\exists!\ \mathcal{S}'$ base di $W |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(id_W) = M$.
Allora $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{S}'}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(id_W) \cdot \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(f) \cdot \mathfrak{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_V) = MAN = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(g)$.
$\Leftarrow$) Analogo.

PROPOSIZIONE 2.8.8: $f: V \to W$ lineare, $\dim V = n$, $\dim W = p$, $rk(f) = r$.
Allora $\exists \mathcal{B}$ base di V, $\exists \mathcal{S}$ base di W:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(f) = \left(\frac{I_r \mid 0}{0 \mid 0}\right) \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$$

Dimostrazione:
$\dim Ker(f) = n - r$.
Sia $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di $Ker(f)$.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ base di V.
Allora $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ è una base di $Im(f)$ (in quanto $f(v_i) = 0\ \ \forall r+1 \leq i \leq n$).
La completo a $\mathcal{S} = \{f(v_1), \dots, f(v_r), w_{r+1}, \dots, w_p\}$ base di W.
Allora $\mathcal{B}$ e $\mathcal{S}$ verificano la tesi.

TEOREMA 2.8.9: $f \equiv_{SD} g \ \Leftrightarrow rk(f) = rk(g)$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Già vista.
$\Leftarrow$) Se $rk(f) = rk(g) = r$, allora per la proposizione precedente $\exists \mathcal{B}, \mathcal{S}$ basi$|\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(g) = \left(\frac{I_r \mid 0}{0 \mid 0}\right)$,
$\exists \mathcal{B}', \mathcal{S}'$ basi$|\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{S}'}(f) = \left(\frac{I_r \mid 0}{0 \mid 0}\right)$.
Poiché $\equiv_{SD}$ è una relazione di equivalenza, ho la tesi.

Osservazione: Il rango è dunque un invariante completo per $\equiv_{SD}$, in altre parole l'insieme quoziente $Hom(V,W)/_{\equiv_{SD}}$ ha $r = \min(\dim V, \dim W) + 1$ classi di equivalenza, in quanto il rango di una matrice $m \cdot n$ può oscillare fra 0 e $\min(\dim V, \dim W)$.

Esprimiamo le due precedenti proposizioni anche a livello matriciale:

PROPOSIZIONE 2.8.10: $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. Se $rk(A) = r \ \Rightarrow A \equiv_{SD} \left(\frac{I_r \mid 0}{0 \mid 0}\right)$.

TEOREMA 2.8.11: $A, B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. Allora $A \equiv_{SD} B \ \Leftrightarrow rk(A) = rk(B)$.

Si ritrova dunque il seguente risultato:

COROLLARIO 2.8.12: $rk(A) = rk({}^tA)$.
Dimostrazione:
Denotiamo $J_r(p,n) = \left(\frac{I_r \mid 0}{0 \mid 0}\right) \in \mathcal{M}(p,n)$.
Se $rk(A) = r$, $\exists M, N$ invertibili$\mid A = M \cdot J_r(p,n) \cdot N$.
Dunque ${}^tA = {}^tN \cdot {}^tJ_r(p,n) \cdot {}^tM = {}^tN \cdot J_r(n,p) \cdot {}^tM$.
Ma ${}^tM$ e ${}^tN$ sono invertibili, dunque ${}^tA \equiv_{SD} J_r(n,p)$.
Poiché $rk\big(J_r(n,p)\big) = r$, segue che $rk({}^tA) = r$.

2.9 SPAZIO DUALE

DEFINIZIONE 2.9.1: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si definisce **spazio duale** $V^* = Hom(V, \mathbb{K})$.
Gli elementi v_i^* di V^* sono detti **funzionali lineari**.

PROPOSIZIONE 2.9.1: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. $\forall i$, sia $v_i^*: V \to \mathbb{K}$ il funzionale definito da $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è il delta di Kronecker.
Allora $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ è base di V^*, detta **base duale** di $\mathcal{B}$.
Dimostrazione:

- I v_i^* sono linearmente indipendenti, infatti se $a_1v_1^* + \ldots + a_nv_n^* = 0$, allora $(a_1v_1^* + \ldots + a_nv_n^*)(v_j) = 0 \;\; \forall j$. Poiché $0 = (a_1v_1^* + \ldots + a_nv_n^*)(v_j) = \big(a_jv_j^*\big)(v_j) = a_j \;\; \forall j$, concludiamo che $a_1 = \ldots = a_n = 0$.
- Dimostriamo che generano:
  sia $f \in V^*$; cerco $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid f = a_1v_1^* + \ldots + a_nv_n^*$.
  Poiché $\forall j, f\big(v_j\big) = (a_1v_1^* + \ldots + a_nv_n^*)\big(v_j\big) = a_j$, basta scegliere $a_i = f(v_i)$ e ottengo la tesi.

Osservazione: Per la dimostrazione precedente, $[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix}$.

DEFINIZIONE 2.9.2: Si definisce spazio **biduale** $V^{**} = (V^*)^* = Hom(V^*, \mathbb{K})$.

Osservazione: $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$.

Notazione: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Poniamo $\varphi_{\mathcal{B}}: V \to V^* \mid v_i \to \varphi_{\mathcal{B}}(v_i) = v_i^* \; \forall i$.
Quindi:

$$V \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}}} V^* \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}^*}} V^{**}$$

TEOREMA 2.9.2: L'applicazione $\psi_V: V \to V^{**} \mid v \to \psi_V(v)$, dove $\psi_V(v): V^* \to \mathbb{K} \mid g \to \psi_V(v)(g) = g(v)$:

1) è un isomorfismo canonico;
2) $\forall$ base $\mathcal{B}$ di V, $\varphi_{\mathcal{B}^*} \circ \varphi_{\mathcal{B}} = \psi_V$.

Dimostrazione:

1) Dimostriamo innanzitutto che effettivamente $\psi_V(v) \in V^{**}$, cioè che $\psi_V(v)$ è lineare $\forall v$:
$\forall v \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall f, g \in V^*,\ \psi_V(v)(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(v) = \lambda f(v) + \mu g(v) = \lambda\psi_V(v)(f) + \mu\psi_V(v)(g)$, che implica che $\psi_V(v)$ è lineare perché conserva le combinazioni lineari; dunque $\psi_V: V \to V^{**}$ è ben definita.
Lasciamo la verifica che ψ_V è lineare, cioè che $\forall v_1, v_2 \in V, \psi_V(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\psi_V(v_1) + a_2\psi_V(v_2)$, cioè che $\psi_V(a_1v_1 + a_2v_2)(g) = \big(a_1\psi_V(v_1) + a_2\psi_V(v_2)\big)(g)\ \ \forall g \in V^*$.
Poiché $\dim V^{**} = \dim V$, dimostriamo solo l'iniettività di ψ_V:
sia $v \in Ker(\psi_V)\ \Rightarrow\ \psi_V(v) = 0\ \Rightarrow\ \psi_V(v)(g) = g(v) = 0\ \ \forall g \in V^*\ \Rightarrow v = 0$, poiché se $v \neq 0, \exists g: V \to \mathbb{K}$ lineare$|\ g(v) \neq 0$, assurdo.
Dunque ψ_V è un isomorfismo ed evidentemente non dipende da nessuna base.
2) Devo mostrare che, fissata $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $(\varphi_{\mathcal{B}^*} \circ \varphi_{\mathcal{B}})(v_i) = \psi_V(v_i)\ \ \forall i$, poiché se due applicazioni lineari coincidono su una base, evidentemente coincidono su qualunque elemento dello spazio e dunque sono uguali.
Ma poiché $(\varphi_{\mathcal{B}^*} \circ \varphi_{\mathcal{B}})(v_i)$ e $\psi_V(v_i)$ sono due funzionali di V^{**}, per mostrare che sono uguali bisogna far vedere che coincidono su una base di V^*, cioè che
$(\varphi_{\mathcal{B}^*} \circ \varphi_{\mathcal{B}})(v_i)\big(v_j^*\big) = \psi_V(v_i)\big(v_j^*\big)\ \ \forall j$.
Ora:
$(\varphi_{\mathcal{B}^*} \circ \varphi_{\mathcal{B}})(v_i)\big(v_j^*\big) = \Big(\varphi_{\mathcal{B}^*}\big(\varphi_{\mathcal{B}}(v_i)\big)\Big)\big(v_j^*\big) = \big(\varphi_{\mathcal{B}^*}(v_i^*)\big)\big(v_j^*\big) = (v_i^{**})\big(v_j^*\big) = \delta_{ij}$;
$\psi_V(v_i)\big(v_j^*\big) = \big(v_j^*\big)(v_i) = \delta_{ij}$, dunque ho la tesi.

DEFINIZIONE 2.9.3: Sia $S \subset V$. Si definisce **annullatore** di S $\ Ann(S) = \{f \in V^* | f|_S \equiv 0\}$.

PROPOSIZIONE 2.9.3: 1) $\forall S \subset V$, $Ann(S)$ è sottospazio vettoriale di V^*

2) $S \subseteq T\ \Rightarrow Ann(T) \subseteq Ann(S)$
3) Se U è sottospazio vettoriale di V e $\dim U = k\ \Rightarrow \dim Ann(U) = n - k$
4) $\forall f \in V^*, Ann(f) = \psi_V\big(Ker(f)\big)$
5) $\forall U$ sottospazio vettoriale di V, $Ann\big(Ann(U)\big) = \psi_V(U)$.

Dimostrazione:

1) È una semplice verifica.
2) Se $f \in Ann(T) \Rightarrow f(v) = 0\ \ \forall v \in T \supseteq S\ \Rightarrow f \in Ann(S)$.
3) Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ base di U. La completo a $\{u_1, \dots u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ base di V. Provo che $\{v_{k+1}^*, \dots, v_n^*\}$ è base di $Ann(U)$:
   - Sicuramente $v_i^* \in Ann(U)\ \forall i \geq k+1$, poiché $v_i^*\big(u_j\big) = 0\ \ \forall j \leq k$;
   - $v_{k+1}^*, \dots, v_n^*$ sono linearmente indipendenti perché elementi della base duale;
   - Mostriamo ora che $v_{k+1}^*, \dots, v_n^*$ generano:
     Sia $f \in Ann(U) \subset V^*\ \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}|\ f = a_1u_1^* + \ldots + a_ku_k^* + a_{k+1}v_{k+1}^* + \ldots + a_nv_n^*$.
     Poiché $f \in Ann(U)$, allora $f(u_i) = 0\ \ \forall i \leq k$, quindi $a_1 = \ldots = a_k = 0$.
     Dunque $f = a_{k+1}v_{k+1}^* + \ldots + a_nv_n^*$, da cui la tesi.
4) $Ann(f) = \{h \in V^{**} | h(f) = 0\} = \{\psi_V(x) \in V^{**} | \psi_V(x)(f) = f(x) = 0\} = \psi_V(\{x \in V | f(x) = 0\} = \psi_V\big(Ker(f)\big)$.
5) Poiché $\dim \psi_V(U) = \dim U = n - \dim Ann(U) = n - n + \dim Ann\big(Ann(U)\big) = \dim Ann\big(Ann(U)\big)$, dimostro solo che $\psi_V(U) \subseteq Ann(Ann(U)$:
$\forall x \in U, \psi_V(x)|_{Ann(U)} = 0$, perché $\forall f \in Ann(U),\ \psi_V(x)(f) = f(x) = 0$.

Notazione: Al posto di $\psi_V(U)$ scriveremo semplicemente U.

DEFINZIONE 2.9.4: Sia $f: V \to W$ lineare. Definiamo **trasposta** di f:
${}^t f: W^* \to V^* | \, {}^t f(g) = g \circ f$.

Osservazione: È una buona definizione, poiché se $g: W \to \mathbb{K}$, allora $g \circ f: V \to W \to \mathbb{K}$, cioè $g \circ f \in V^*$.

PROPOSIZIONE 2.9.4: 1) ${}^t f: W^* \to V^*$ è lineare

2) ${}^t({}^t f) = f$ (grazie all'identificazione degli isomorfismi canonici ψ_V e ψ_W), cioè è commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \psi_V \downarrow & & \downarrow \psi_W \\ V^{**} & \xrightarrow[{}^t({}^t f)]{} & W^{**} \end{array}$$

3) Se $h: W \to Z$ è lineare, allora ${}^t(h \circ f) = {}^t f \circ {}^t h$
4) $Ker({}^t f) = Ann(Im(f))$
5) $Im({}^t f) = Ann(Ker(f))$
6) Se $\mathcal{B}$ è base di V e $\mathcal{S}$ è base di W, $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}^*,\mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(f)\big)$.

Dimostrazione:

1) $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}, \forall g_1, g_2 \in W^*$:
${}^t f(a_1 g_1 + a_2 g_2) = (a_1 g_1 + a_2 g_2) \circ f = a_1(g_1 \circ f) + a_2(g_2 \circ f) = a_1 {}^t f(g_1) + a_2 {}^t f(g_2)$.
2) Devo mostrare che $\psi_W \circ f = {}^t({}^t f) \circ \psi_V$, ossia che
$\forall v \in V, (\psi_W \circ f)(v) = ({}^t({}^t f) \circ \psi_V)(v)$, ossia che
$\forall g \in W^*, (\psi_W \circ f)(v)(g) = ({}^t({}^t f) \circ \psi_V)(v)(g)$.
$(\psi_W \circ f)(v)(g) = \psi_W\big(f(v)\big)(g) = g\big(f(v)\big) = (g \circ f)(v)$;
$({}^t({}^t f) \circ \psi_V)(v)(g) = {}^t({}^t f)\big(\psi_V(v)\big)(g) = (\psi_V(v) \circ {}^t f)(g) = \psi_V(v)\big({}^t f(g)\big) =$
$= \psi_V(v)(g \circ f) = (g \circ f)(v)$.
3) $\forall g \in Z^*, {}^t(h \circ f)(g) = g \circ h \circ f = {}^t h(g) \circ f = {}^t f\big({}^t h(g)\big) = ({}^t f \circ {}^t h)(g)$.
4) $\subseteq$) Sia $g \in Ker({}^t f)$, cioè ${}^t f(g) = g \circ f = 0 \Rightarrow \forall f(x) \in Im(f),\ g\big(f(x)\big) = 0$, quindi $g \in Ann\big(Im(f)\big)$;
$\supseteq$) Sia $g \in Ann\big(Im(f)\big) \Rightarrow \forall x \in V,\ g\big(f(x)\big) = 0$, cioè $\big({}^t f(g)\big)(x) = 0\ \ \forall x \in V$, quindi ${}^t f(g) = 0$, cioè $g \in Ker({}^t f)$.
5) Per la 4) so che $Ker({}^t({}^t f)) = Ann\big(Im({}^t f)\big)$, cioè $Ker(f) = Ann\big(Im({}^t f)\big)$, quindi, applicando l'annullatore, $Ann\big(Ker(f)\big) = Ann\Big(Ann\big(Im({}^t f)\big)\Big) = Im({}^t f)$.
6) $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{S} = \{w_1, \dots, w_p\}$. Sia $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(f),\ N = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}^*,\mathcal{B}^*}({}^t f)$.
Allora $N^j = \big[{}^t f\big(w_j^*\big)\big]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \big(w_j^* \circ f\big)(v_1) \\ \vdots \\ \big(w_j^* \circ f\big)(v_n) \end{pmatrix}$, dunque $[N]_{ij} = \big(w_j^* \circ f\big)(v_i) = w_j^*\big(f(v_i)\big)$.
Ora $[f(v_i)]_{\mathcal{S}} = A^i$, cioè $f(v_i) = [A]_{1i} w_1 + \dots + [A]_{pi} w_p$, da cui:
$w_j^*\big(f(v_i)\big) = [A]_{ji}$, ossia $[N]_{ij} = [A]_{ji}$, da cui $N = {}^t A$.

Osservazione: Ancora: $rk({}^t A) = \dim Im({}^t A) = \dim Ann\big(Ker(f)\big) = n - \dim Ker(f) = rk(A)$

3 ENDOMORFISMI

3.0 ALCUNE NOZIONI SULLE PERMUTAZIONI

Notazione: Denoteremo $J_n = \{1, \dots, n\}$ e $S_n = S(J_n)$ le permutazioni di J_n.

Notazione: Denoteremo con $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ la permutazione σ tale che $i \to \sigma(i)\ \forall i$.

DEFINIZIONE 3.0.1: Definiamo **orbita** di i secondo σ la successione:
$i \to \sigma(i) \to \dots \to \sigma^k(i) = i$.
L'orbita si dice **banale** quando consiste di un solo elemento, cioè $\sigma(i) = i$.

DEFINIZIONE 3.0.2: $c \in S_n$ si dice **ciclo** se contiene una sola orbita non banale.
Due cicli si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune.

Notazione: Denoteremo con $(n_1 \quad \cdots \quad n_k)$ il ciclo tale che $n_i \to n_{i+1}\ \ \forall 1 \leq i < k$ e $n_k \to n_1$.

PROPOSIZIONE 3.0.1: Cicli disgiunti commutano.

Esempio: Se $\sigma = (1 \quad 2 \quad 4) \circ (3 \quad 5)$ e $\tau = (3 \quad 5) \circ (1 \quad 2 \quad 4)$, $\sigma, \tau \in S_5$:
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

PROPOSIZIONE 3.0.2: Ogni $\sigma \in S_n$ si scrive come composizione di cicli disgiunti, in modo unico a meno dell'ordine.

Esempio: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. La decompongo in cicli:
$1 \to 4 \to 1$, cioè ho il ciclo $(1 \quad 4)$,
$2 \to 3 \to 5 \to 2$, cioè ho il ciclo $(2 \quad 3 \quad 5)$,
$6 \to 6$, cioè ho il ciclo banale.
Quindi $\sigma = (1 \quad 4) \circ (2 \quad 3 \quad 5)$.

DEFINIZIONE 3.0.3: Se $c = (n_1 \quad \cdots \quad n_k)$ è un ciclo, definiamo **lunghezza** di c $\ l(c) = k$.
Per convenzione $l(id) = 1$.

DEFINIZIONE 3.0.4: Definiamo **trasposizione** un ciclo di lunghezza 2: $\tau = (n_1 \quad n_2)$.

DEFINIZIONE 3.0.5: Se $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_p$, con $c_1, \dots, c_p$ cicli disgiunti:
1) poniamo $N(\sigma) = (l(c_1) - 1) + \dots + \left(l(c_p) - 1\right)$
2) diciamo che σ è **pari** (**dispari**) se $N(\sigma)$ è pari (dispari)
3) definiamo **segno** di σ $\ sgn(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$.

Osservazioni: Tutte le trasposizioni sono permutazioni dispari.

PROPOSIZIONE 3.0.3: Ogni ciclo c di lunghezza k si può scrivere come composizione di $N(c) = k - 1$ trasposizioni (non disgiunte).
Dimostrazione:
Se $c = (n_1 \quad \cdots \quad n_k)$, non è difficile verificare che $c = (n_1 \quad n_k) \circ \ldots \circ (n_1 \quad n_2)$.

Osservazione: La decomposizione di un ciclo nel prodotto di trasposizioni non è unica, ad esempio $(1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 3)(1 \quad 2) = (1 \quad 2)(1 \quad 3)(2 \quad 3)(1 \quad 2)$.
Si può però dimostrare il seguente fatto:

PROPOSIZIONE 3.0.4: La parità del numero di trasposizioni che compongono un ciclo è costante.

PROPOSIZIONE 3.0.5: Sia $\sigma \in S_n$. Allora $N(\sigma) = N(\sigma^{-1})$.
Dimostrazione:
Sia $\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_p$ la decomposizione di σ in cicli disgiunti.
Allora $\sigma^{-1} = c_p^{-1} \circ \ldots \circ c_1^{-1}$.
Inoltre $l(c_i) = l(c_i^{-1})$, poiché $(n_1 \quad \cdots \quad n_k)^{-1} = (n_k \quad \cdots \quad n_1)$.
Perciò $\forall i,\ N(c_i) = N(c_i^{-1}) \Rightarrow N(\sigma) = N(\sigma^{-1})$.

Osservazione: Poiché $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$, componendo σ con $N(\sigma)$ trasposizioni si ottiene l'identità.

3.1 DETERMINANTE

DEFINIZIONE 3.1.1: Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Definiamo **determinante** una funzione $D: \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che $D(A) = 0 \iff$ le righe di A sono linearmente dipendenti ($\iff rk(A) < n$).

Osservazione: Cerchiamo una tale D_2 nello spazio $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$.
Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- Se $a = 0 \ \wedge c = 0$ le righe sono dipendenti;
- Se $a = 0 \ \wedge c \neq 0$, allora le righe sono dipendenti $\iff b = 0$.
- Se $a \neq 0$, riduco a scalini:
  $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - bca^{-1} \end{pmatrix}$,
  dunque le righe di A sono dipendenti $\iff d - bca^{-1} = 0 \iff ad - bc = 0$.

Riassumendo, se pongo $D_2(A) = ad - bc$, ho l'applicazione voluta, tale che $D(A) = 0 \iff$ le righe di A sono linearmente dipendenti.

DEFINIZIONE 3.1.2: Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Sia $f: \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n\ volte} \to W$.
$\forall i = 1, \ldots, n$ fisso $w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n \in V$ e sia $f_i = f(w_1, \ldots, w_{i-1}, v, w_{i+1}, \ldots, w_n): V \to W$.
L'applicazione f si dice **multilineare** se f_i è lineare $\forall i$.

Osservazione: L'applicazione determinante che stiamo cercando deve essere multilineare, poiché deve essere lineare in ogni riga.

PROPOSIZIONE 3.1.1: La funzione $D_2: \mathcal{M}(2, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} | \ D_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ verifica le seguenti proprietà:
1) D_2 è lineare in ogni riga;
2) Se A ha due righe uguali, $D_2(A) = 0$;
3) $D_2(I) = 1$.

Dimostrazione:
1) Verifichiamolo solo per la prima riga; poniamo $B = (a_1 \quad b_1)$, $C = (a_2 \quad b_2)$. Allora:
$D_2 \begin{pmatrix} \lambda B + \mu C \\ A_2 \end{pmatrix} = D_2 \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ c & d \end{pmatrix} = (\lambda a_1 + \mu a_2)d - (\lambda b_1 + \mu b_2)c =$
$\lambda(a_1 d - b_1 c) + \mu(a_2 d - b_2 c) = \lambda D_2 \begin{pmatrix} B \\ A_2 \end{pmatrix} + \mu D_2 \begin{pmatrix} C \\ A_2 \end{pmatrix}$, da cui la tesi.
2) Ovvia.
3) $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

PROPOSIZIONE 3.1.2: Se D verifica le proprietà 1), 2), 3), allora verifica anche le seguenti:
a) Se A ha una riga nulla, $D(A) = 0$;
b) $D(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -D(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$;
c) Se B è ottenuta da A sommando ad una riga una combinazione lineare delle altre righe (operazione elementare di 3^o tipo), allora $D(B) = D(A)$;
d) Se le righe di A sono linearmente dipendenti, $D(A) = 0$;
e) Se $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, allora $D(A) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.

Dimostrazione:
a) Se $A_i = 0$, allora $A = (A_1 | \dots | 0 \cdot B | \dots | A_n)$.
Dunque $D(A) = 0 \cdot D(A_1 | \dots | B | \dots | A_n) = 0$.
b) Considero la matrice $(\dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots)$.
Per la proprietà 2), $D(\dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots) = 0$.
Per multilinearità:
$0 = D(\dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots) = D(\dots, A_i, \dots, A_i, \dots) + D(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) +$
$D(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) + D(\dots, A_j, \dots, A_j, \dots) = 0 + D(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) + D(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) + 0$,
da cui la tesi.
c) Supponiamo $B = A_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i$. Allora:
$D(B) = D(A_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i, A_2, \dots, A_n) = D(A) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i D(A_i, A_2, \dots, A_n)$.
Ma la sommatoria è nulla, in quanto per la proprietà 2) tutti i termini sono nulli, dunque $D(B) = D(A)$.
d) Supponiamo $A_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i$. Allora:
$D(A) = D(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i, A_2, \dots, A_n) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i D(A_i, A_2, \dots, A_n) = 0$.
e) Se A è diagonale, allora $A_i = a_i I_i \ \forall i$. Perciò:
$D(A) = a_1 D(I_1, a_2 I_2, \dots, a_n I_n) = \dots = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot D(I) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.

Nella seguente esposizione riguardo al determinante dimostreremo prima che, se la funzione determinante esiste, allora è unica, e solo dopo ne mostreremo l'esistenza.

PROPOSIZIONE 3.1.3: Se D verifica 1), 2) e 3), allora è unico.
Dimostrazione:
Sia S a scalini ottenuta da A con m operazioni di 1^o tipo e k di 3^o tipo.
Allora $D(A) = (-1)^m D(S)$.
Se S ha una riga nulla $\Rightarrow D(S) = 0 \ \Rightarrow D(A) = 0$.
Altrimenti con solo operazioni di 3^o tipo portiamo S nella forma $S' = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$.
Dunque $D(S) = D(S') = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \ \Rightarrow D(A) = (-1)^m a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, perciò in ogni caso è unico.

COROLLARIO 3.1.4: Se D è una funzione che verifica 1), 2) e 3), allora:
$D(A) = 0 \ \Leftrightarrow$ le righe di A sono linearmente dipendenti.
Dimostrazione:
$\Leftarrow$) Già fatta.
$\Rightarrow$) Se le righe di A fossero indipendenti, allora $D(A) = (-1)^m a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0$, assurdo.

PROPOSIZIONE 3.1.5: Se $D\colon \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ verifica 1), 2) e 3), allora:
$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$
dove $a_{i,j} = [A]_{ij}$.
Dimostrazione:
$$D(A) = D\begin{pmatrix} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} \cdot I_{i_1} \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} D\begin{pmatrix} I_{i_1} \\ \hline \sum_{i_2=1}^{n} a_{2,i_2} \cdot I_{i_2} \\ \hline A_3 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} = \ldots = \sum_{\substack{i_1 \in J_n \\ \vdots \\ i_n \in J_n}} a_{1,i_1} \cdot \ldots \cdot a_{n,i_n} D\begin{pmatrix} I_{i_1} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{i_n} \end{pmatrix}$$
Ma se fra gli i_j ce ne sono due uguali, allora $D\begin{pmatrix} I_{i_1} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{i_n} \end{pmatrix} = 0$, poiché ha due righe uguali.

Perciò:
$$D(A) = \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\} \in J_n^n} a_{1,i_1} \cdot \ldots \cdot a_{n,i_n} D\begin{pmatrix} I_{i_1} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{i_n} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} D\begin{pmatrix} I_{\sigma(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$
Si riporta la matrice $\begin{pmatrix} I_{\sigma(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ a I con $N(\sigma)$ scambi di righe, per cui:
$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{(-1)^{N(\sigma)}}_{sgn(\sigma)} \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \underbrace{D(I)}_{=1} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

Osservazione: La precedente proposizione è una dimostrazione alternativa dell'unicità di D.

Esempi: Applichiamo la formula trovata ai casi più semplici (è molto laborioso applicarla alle matrici di ordine > 3):

- $n = 2$: $S_2 = \left\{ id, \underbrace{(1 \quad 2)}_{\sigma} \right\}$ e $sgn(id) = 1,\ sgn(\sigma) = -1$.
  $D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1 \cdot a_{1,id(1)} \cdot a_{2,id(2)} + (-1) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, che coincide con la formula che già avevamo.
- $n = 3$: $S_3 = \left\{ \underbrace{id}_{sgn=1}, \underbrace{(1 \quad 2), (1 \quad 3), (2 \quad 3)}_{sgn=-1}, \underbrace{(1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)}_{sgn=1} \right\}$;
  $D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$
  $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Osservazione: La precedente espressione per il determinante nel caso $n = 3$ è detta **regola** (o **formula**) **di Sarrus**.

DEFINIZIONE 3.1.3: Definiamo $D_n: \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ la funzione definita da:
se $n = 1$, $D_1(a) = a$;
se $n = 2$, $D_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$;
se $n > 2$, $D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot [A]_{i1} \cdot D_{n-1}(A_{i1})$, dove A_{ij} è la sottomatrice di A di ordine $n - 1$ ottenuta da A cancellando la riga A_i e la colonna A^j.
Questa sottomatrice prende il nome di **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij}.
L'applicazione D_n appena definita si chiama **sviluppo di Laplace secondo la prima colonna**.

Osservazione: L'applicazione D_n è stata definita ricorsivamente.

PROPOSIZIONE 3.1.6: L'applicazione D_n verifica le proprietà 1), 2) e 3).
Dimostrazione:
Procediamo in ogni caso con l'induzione su n; in tutti e tre i casi abbiamo già provato il passo base, dunque qua mostriamo solo il passo induttivo.

1) Siano $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \lambda B + \mu C \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} \leftarrow A_j,\ A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline B \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} \leftarrow A'_j,\ A'' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline C \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} \leftarrow A''_j$.
   Dobbiamo dimostrare che $D_n(A) = \lambda D_n(A') + \mu D_n(A'')$.
   Osserviamo che:
   $\begin{cases} [A]_{i1} = [A']_{i1} = [A'']_{i1} \ \forall i \neq j \\ [A]_{j1} = \lambda[A']_{j1} + \mu[A'']_{j1} \end{cases}$, inoltre $A_{j1} = A'_{j1} = A''_{j1}$,
   mentre se $i \neq j$ il minore A_{i1} ha una riga che è combinazione lineare di due righe dei minori A'_{i1} e A''_{i1}.

Dunque per ipotesi induttiva:
$\forall i \neq j,\ D_{n-1}(A_{i1}) = \lambda D_{n-1}(A'_{i1}) + \mu D_{n-1}(A''_{i1})$.
Allora:

$$
\begin{aligned}
D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot [A]_{i1} \cdot D_{n-1}(A_{i1}) = \\
&= \sum_{i \neq j} \left((-1)^{i+1} \cdot [A]_{i1} \cdot D_{n-1}(A_{i1}) \right) + (-1)^{j+1} \cdot [A]_{j1} \cdot D_{n-1}(A_{j1}) = \\
&= \sum_{i \neq j} \left((-1)^{i+1} \cdot [A]_{i1} \cdot \left(\lambda D_{n-1}(A'_{i1}) + \mu D_{n-1}(A''_{i1}) \right) \right) + (-1)^{j+1} \cdot \\
&\cdot \left(\lambda [A']_{j1} + \mu [A'']_{j1} \right) \cdot D_{n-1}(A_{j1}) = \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+1} \cdot [A']_{i1} \cdot D_{n-1}({A'}_{i1}) \right) + \mu \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+1} \cdot [A'']_{i1} \cdot D_{n-1}({A''}_{i1}) \right) \\
&= \lambda D_n(A') + \mu D_n(A'').
\end{aligned}
$$

2) Supponiamo che A abbia due righe uguali, ad esempio $A_j = A_h$, $j < h$.
Se $i \neq j$ e $i \neq h$, anche il minore A_{i1} ha due righe uguali e quindi, per ipotesi induttiva, $D_{n-1}(A_{i1}) = 0$. Dunque:

$$D_n(A) = (-1)^{j+1}[A]_{j1} D_{n-1}(A_{j1}) + (-1)^{h+1}[A]_{h1} D_{n-1}(A_{h1})$$

Poiché $A_j = A_h$, si ha che $[A]_{j1} = [A]_{h1}$.
Inoltre i minori A_{j1} e A_{h1} contengono le stesse righe ma in posizioni diverse.
Più precisamente, se A'_m denota la riga A_m privata del primo elemento, si ha:

$$
A_{j1} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline A'_{j-1} \\ \hline A'_{j+1} \\ \hline \vdots \\ \hline A'_h = A'_j \\ \hline A'_{h+1} \\ \hline \vdots \end{pmatrix}; \qquad
A_{h1} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline A'_{j-1} \\ \hline A'_j = A'_h \\ \hline \vdots \\ \hline A'_{h-1} \\ \hline A'_{h+1} \\ \hline \vdots \end{pmatrix}.
$$

Allora A_{j1} può essere trasformato in A_{h1} attraverso $h - 1 - j$ scambi di righe, per cui $D_{n-1}(A_{h1}) = (-1)^{h-1-j} D_{n-1}(A_{j1})$.
Dunque:

$$
\begin{aligned}
D_n(A) &= (-1)^{j+1}[A]_{j1} D_{n-1}(A_{j1}) + (-1)^{h+1}[A]_{h1}(-1)^{h-1-j} D_{n-1}(A_{j1}) = \\
&= [A]_{j1} D_{n-1}(A_{j1}) \cdot \left((-1)^{j+1} + (-1)^{2h-j} \right)
\end{aligned}
$$

Ma $j + 1 + 2h - j = 2h + 1$ dispari, allora $\left((-1)^{j+1} + (-1)^{2h-j} \right) = 0$, da cui la tesi.

3) L'unico contributo allo sviluppo di Laplace è dato da $[A]_{11} = 1$, il cui complemento algebrico è I_{n-1}.
Per ipotesi induttiva $D_{n-1}(I_{n-1}) = 1$ e dunque $D_n(I_n) = 1$.

Osservazione: Con la precedente dimostrazione abbiamo dimostrato l'effettiva esistenza della funzione determinante.

DEFINIZIONE 3.1.4: Chiamiamo determinante l'unica funzione $\det : \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che verifica 1), 2) e 3).

Osservazione: Abbiamo visto che $\det(A) = 0 \iff$ le righe di A sono dipendenti $\iff A$ è singolare. Inoltre A è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$.

Osservazione: Con la stessa dimostrazione si prova che lo sviluppo di Laplace secondo una colonna A^j:

$$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

verifica 1), 2) e 3) e dunque coincide con $\det(A)$ (per l'unicità).

Osservazione: Dalla definizione, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

TEOREMA DI BINET: $\forall A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
Dimostrazione:
Se $\det(B) = 0 \Rightarrow rk(B) < n$ e dunque $rk(AB) < n \Rightarrow \det(AB) = 0$.
Se $\det(B) \neq 0$, si consideri $f: \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definita da $f(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$;
f verifica le proprietà 1), 2) e 3), infatti:

1) Se una riga di A è combinazione lineare di due righe, allora lo stesso vale per AB. Ne segue che f è lineare nelle righe (poiché il denominatore $\det(B)$ è una costante).
2) Se A ha due righe uguali, allora ce le ha anche AB (poiché ancora B è isomorfismo); dunque $\det(AB) = 0 \Rightarrow f(A) = 0$.
3) $f(I) = \frac{\det(IB)}{\det(B)} = 1$.

Per l'unicità della funzione det, $f(A) = \det(A)$ e dunque $\det(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$, tesi.

COROLLARIO 3.1.7: Se A è invertibile, allora $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.
Dimostrazione:
$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

PROPOSIZIONE 3.1.8: $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det(A)$.
Dimostrazione:

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot [{}^tA]_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot [{}^tA]_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot [A]_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot [A]_{\sigma(n),n}$$

Sia $\tau = \sigma^{-1}$. Se $\sigma(i) = j \Rightarrow \tau(j) = i$, dunque $[A]_{\sigma(i),i} = [A]_{j,\tau(j)}$.
Riordinando il prodotto e poiché $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$:

$$\det({}^tA) = \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau) \cdot [A]_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot [A]_{n,\tau(n)} = \det(A)$$

COROLLARIO 3.1.9: $\det(A)$ può essere calcolato mediante sviluppo di Laplace secondo una qualsiasi riga.
Dimostrazione:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} \det(A_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [{}^tA]_{ij} \det({}^tA_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [{}^tA]_{ij} \det(({}^tA)_{ij})$$

$= \det({}^tA) = \det(A)$,

dove il passaggio $\boxed{=}$ deriva dal fatto che quella precedente è esattamente lo sviluppo di Laplace della j-esima colonna di ${}^tA$.

Osservazione: Poiché $\det({}^tA) = \det(A)$, la funzione determinante verifica le proprietà 1), 2) e 3) anche per le colonne.

REGOLA DI CRAMER: Sia $AX = B$ un sistema lineare quadrato con n equazioni e n incognite, $\det(A) \neq 0$. Allora la sua unica soluzione è $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, dove:

$y_i = \frac{\det(B(i))}{\det(A)}$, dove $B(i) = \left(A^1 \mid \dots \mid \underbrace{B}_{\substack{i-esima \\ colonna}} \mid \dots \mid A^n \right)$.

Dimostrazione:
Poiché Y è soluzione di $AX = B$, allora $AY = y_1A^1 + \dots + y_nA^n = B$. Allora:

$$\det(B(i)) = \det\left(A^1 \mid \dots \mid \sum_{j=1}^{n} y_jA^j \mid \dots \mid A^n \right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \det(A^1 \mid \dots \mid A^j \mid \dots \mid A^n) = y_i \det(A)$$

poiché se $j \neq i$, allora $(A^1 \mid \dots \mid A^j \mid \dots \mid A^n)$ ha due colonne uguali e dunque $\det(A^1 \mid \dots \mid A^j \mid \dots \mid A^n) = 0$.
Quindi, visto che $\det(A) \neq 0$, si ha la tesi.

CALCOLO DELL'INVERSA: Se A è invertibile, allora la matrice B definita da

$$[B]_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$$

è l'inversa di A.
Dimostrazione:
Poiché A è invertibile, mi basta mostrare che $AB = I$, poiché se B è inversa destra allora è anche inversa sinistra.

$$[AB]_{hk} = \sum_{i=1}^{n} [A]_{hi}[B]_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k}[A]_{hi} \frac{\det(A_{ki})}{\det(A)}$$

Se $h = k \ \Rightarrow [AB]_{hh} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h}[A]_{hi} \frac{\det(A_{hi})}{\det(A)} = \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1$;
se $h \neq k \ \Rightarrow [AB]_{hk} = 0$, poiché il numeratore è lo sviluppo secondo la riga k-esima di una matrice ottenuta da A sostituendo ad A_k la riga A_h e che quindi ha due righe uguali $\Rightarrow$ tesi.

Osservazione: La formula dell'inversa implica la regola di Cramer.
Infatti sia dato il sistema lineare $n \times n \ \ AX = B$.
L'unica soluzione è $Y = A^{-1}B$.
Se $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow y_i = [A^{-1}B]_{i1} = \sum_{j=1}^{n} [A^{-1}]_{ij}[B]_{j1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)} [B]_{j1} = \frac{\det(B(i))}{\det(A)}$
L'ultimo passaggio deriva dal fatto che quello sulla sinistra è lo sviluppo secondo la prima colonna di una matrice ottenuta da A sostituendo la colonna B alla colonna A^i.

Osservazione: Siano A, C matrici quadrate. Allora, sfruttando il prodotto a blocchi, possiamo vedere che:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

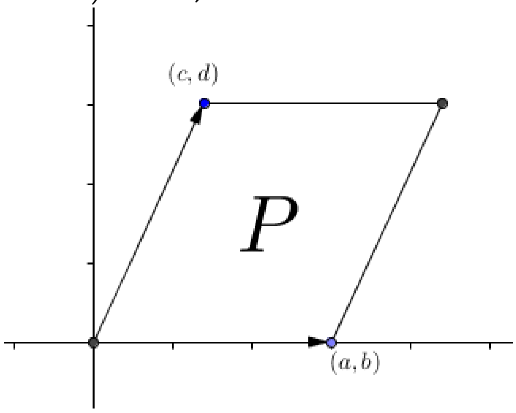
Dunque:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I \end{array}\right) = \det(C) \cdot \det(A)$$

poiché eseguendo lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga nella matrice $\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, si ottiene $1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \det(C) = \det(C)$. Analogamente per l'altra matrice.

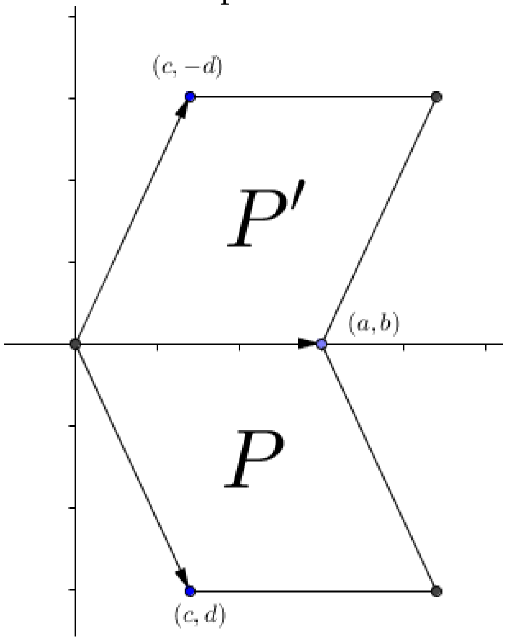
Osservazione: Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$. Sia P il parallelogramma con lati (a, b) e (c, d). Posso supporre $a > 0$.

- Caso 1): $b = 0, d > 0$.



$Area(P) = ad = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

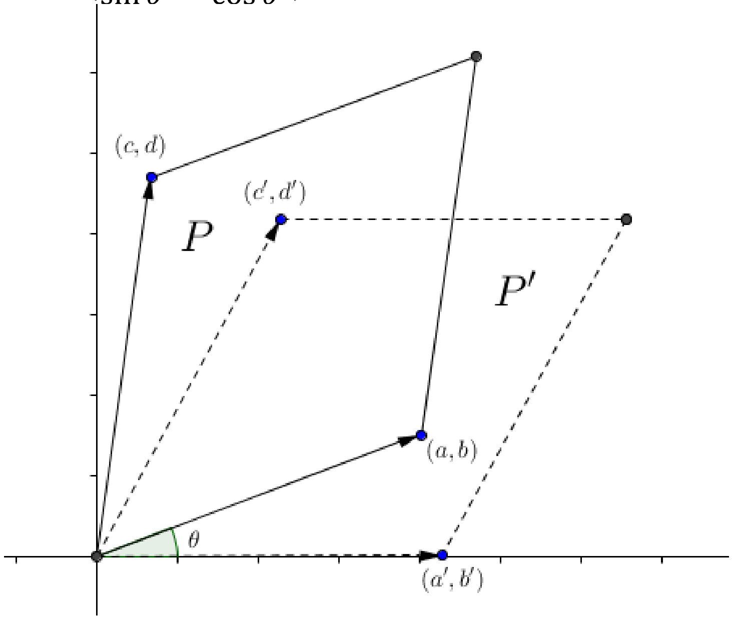
- Caso 2): $b = 0, d < 0$.
  Ribaltiamo P rispetto all'asse x ottenendo P':



$Area(P) = Area(P') = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -d \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Dunque se $b = 0 \Rightarrow Area(P) = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$.

- Caso generale): Sia R_θ la rotazione antioraria degli assi di angolo θ.
  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; sia P' il parallelogramma P nei nuovi assi.

  Sicuramente $Area(P) = Area(P')$.
  P' ha lati $(a', 0), (c', d')$, perciò:
  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = a'\cos\theta \\ b = a'\sin\theta \end{matrix};$
  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c = c'\cos\theta - d'\sin\theta \\ d = c'\sin\theta + d'\cos\theta \end{matrix}.$
  Vediamo che:
  $$\begin{aligned} \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| &= |ad - bc| = |a'\cos\theta\,(c'\sin\theta + d'\cos\theta) - a'\sin\theta\,(c'\cos\theta - d'\sin\theta)| \\ &= |a'c'\cos\theta\sin\theta + a'd'(\cos\theta)^2 - a'c'\sin\theta\cos\theta + a'd'(\sin\theta)^2| = |a'd'| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} a' & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix}\right| = Area(P') = Area(P) \end{aligned}$$
  Dunque in generale $|\det(A)| = Area(P)$, dove $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ e P è il parallelogramma con lati i vettori riga di A.

DETERMINANTE DI VANDERMONDE: Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e sia:
$$A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
Allora $\det\big(A(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big) = \prod_{i<j}\big(\lambda_j - \lambda_i\big)$ (in particolare è $\neq 0 \iff \lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$).
Dimostrazione 1:
Per induzione su n:
Passo base): $n = 2$: $\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$, verificato.
Passo induttivo): Consideriamo $A(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ e $\forall 2 \leq i \leq n+1$ tolgo $\lambda_1 \mathcal{C}_{i-1}$ a $\mathcal{C}_i$.
Ottengo:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
1 & 0 & 0 & & 0 \\
1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & & \lambda_2^n - \lambda_1\lambda_2^{n-1} \\
1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3 & \dots & \lambda_3^n - \lambda_1\lambda_3^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \lambda_{n+1} - \lambda_1 & \lambda_{n+1}^2 - \lambda_1\lambda_{n+1} & & \lambda_{n+1}^n - \lambda_1\lambda_{n+1}^{n-1}
\end{array}\right)$$

Dunque:

$$A(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \det\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & & \lambda_2^{n-1}(\lambda_2 - \lambda_1) \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\lambda_{n+1} - \lambda_1 & \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) & & \lambda_{n+1}^{n-1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)
\end{array}\right)$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \det A(\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Dimostrazione 2:

Sia $p(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & & x^n \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_{n+1} & \lambda_{n+1}^2 & & \lambda_{n+1}^n \end{pmatrix}$.

$p(x)$ è un polinomio in x di grado al più n (per sviluppo lungo la prima riga);
$\forall 2 \leq i \leq n,\ p(\lambda_i) = 0$ (poiché la matrice avrebbe due righe uguali).
Per Ruffini $(\lambda_i - x) | p(x)\ \ \forall i \geq 2$.
Supponiamo i λ_i tutti diversi (altrimenti la tesi è banale); allora:
$(\lambda_2 - x) \cdot \dots \cdot (\lambda_{n+1} - x) | p(x)$.
Confrontando i due gradi, deduco che $p(x) = k \cdot (\lambda_2 - x) \cdot \dots \cdot (\lambda_{n+1} - x),\ k \in \mathbb{K}$.
Ma:

$$p(0) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_{n+1} & \lambda_{n+1}^2 & & \lambda_{n+1}^n \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_{n+1} \cdot \prod_{\substack{i<j \\ i \geq 2}} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Perciò $k = \prod_{\substack{i<j \\ i \geq 2}} (\lambda_j - \lambda_i) \ \Rightarrow p(\lambda_1) = k \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \ \Rightarrow$ tesi.

3.2 ENDOMORFISMI SIMILI

Notazione: Indicheremo $\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ come $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Riprendiamo per un attimo il concetto di SD-equivalenza. Sappiamo che, dato $f \in End(V)$, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \equiv_{SD} \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(f)$.
Supponiamo che $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$; allora:
$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \equiv_{SD} \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(f) \ \Leftrightarrow \exists M, N \in GL(V) | \ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(f) = N \cdot \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M$.
In particolare, $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{S},\mathcal{B}}(id)$ e $N = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(id)$.
Dunque $N = M^{-1}$. Questo può essere riassunto nel seguente schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
V_{\mathcal{S}} & \overset{id}{\rightarrow} & V_{\mathcal{B}} & \overset{f}{\rightarrow} & V_{\mathcal{B}} & \overset{id}{\rightarrow} & V_{\mathcal{S}} \\
[\,]_{\mathcal{S}} \downarrow & & [\,]_{\mathcal{B}} \downarrow & & [\,]_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow [\,]_{\mathcal{S}} \\
\mathbb{K}^n & \underset{M}{\rightarrow} & \mathbb{K}^n & \underset{A}{\rightarrow} & \mathbb{K}^n & \underset{M^{-1}}{\longrightarrow} & \mathbb{K}^n
\end{array}$$

dove $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
Dunque $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(f) = M^{-1} \cdot A \cdot M$.

DEFINIZIONE 3.2.1: $f, g \in End(V)$ di dicono **coniugati** ($f \sim g$) se $\exists h \in GL(V) |\ g = h^{-1} \circ f \circ h$

DEFINIZIONE 3.2.2: $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ si dicono **simili** ($A \sim B$) se $\exists M \in GL(n, \mathbb{K}) |\ B = M^{-1}AM$.

Osservazioni: 1) Coniugio e similitudine sono relazioni di equivalenza (le verifiche sono lasciate al lettore);

2) $f, g \in End(V)$. Sono fatti equivalenti:
   a) $f \sim g$;
   b) $\forall \mathcal{B}$ base di V, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \sim \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)$;
   c) $\exists \mathcal{B}, \mathcal{S}$ basi di V, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(g)$.
   Questo fatto può essere dimostrato ricalcando l'analoga dimostrazione per endomorfismi SD-equivalenti.
3) $f \sim g \ \Rightarrow f \equiv_{SD} g$.
   Dunque il rango è un invariante di coniugio, ma non è un sistema completo di invarianti.
   Infatti $rk(I) = rk\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, ma $\nexists M \in GL(2) |\ M^{-1}IM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, poiché $\forall M \in GL(2),\ M^{-1}IM = I$.

PROPOSIZIONE 3.2.1: $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. $A \sim B \ \Rightarrow \det(A) = \det(B)$.
Dimostrazione:
$B = M^{-1}AM \ \Rightarrow \det(B) = \det(M^{-1}AM) = \det(M^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(M) = \det(A)$, poiché per Binet $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$.

Osservazione: Dunque il determinante è un invariante di similitudine. Per la proposizione precedente sicuramente $\#(\mathcal{M}(n, \mathbb{K})/_{\sim}) \ \geq \#(\mathbb{K})$, dunque se $\mathbb{K}$ è infinito anche $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})/_{\sim}$ ha infinite classi di similitudine.

DEFINIZIONE 3.2.3: $f \in End(V)$. Definiamo $\det(f) = \det\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\big)$, dove $\mathcal{B}$ è una base di V.

Osservazione: È una buona definizione, cioè non dipende dalla scelta della base. Infatti, se $\mathcal{S}$ è un'altra base di V, allora le matrici $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ e $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(f)$ sono simili e dunque hanno lo stesso determinante.

PROPOSIZIONE 3.2.2: $f \sim g \ \Rightarrow \det(f) = \det(g)$.
Dimostrazione:
Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Allora:
$f \sim g \ \Rightarrow \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \sim \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) \ \Rightarrow \det\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\big) = \det\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)\big) \ \Rightarrow \det(f) = \det(g)$.

Osservazione: Quindi il determinante è un invariante di coniugio; con lo stesso controesempio di prima vediamo che $\{rango, determinante\}$ non è un sistema completo di invarianti per coniugio.
DEFINIZIONE 3.2.4: $f \in End(V)$. $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice **autovalore** per f se $\exists v \in V, v \neq 0 |\ f(v) = \lambda v$.

In tal caso v è detto **autovettore** relativo a λ.

DEFINIZIONE 3.2.5: Definiamo **spettro** di f $Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} | \; \lambda \text{ è } autovalore\ per\ f\}$.

DEFINIZIONE 3.2.6: Diciamo che W sottospazio di V è un **sottospazio f-invariante** se $f(W) \subseteq W$.

Osservazioni: 1) Se v è autovettore $\Rightarrow f\big(Span(v)\big) \subseteq Span(v)$, quindi $Span(v)$ è f-invariante.
In particolare, se $\lambda \neq 0 \Rightarrow f\big(Span(v)\big) = Span(v)$, se $\lambda = 0 \Rightarrow f\big(Span(v)\big) = \{0\}$.
2) L'autovalore relativo ad un autovettore è univocamente determinato; infatti:
$f(v) = \lambda v = \mu v \Rightarrow (\lambda - \mu)v = 0 \Rightarrow$ (poiché $v \neq 0$) $\Rightarrow \lambda = \mu$.
3) v è autovettore relativo a $0 \Leftrightarrow v \in Ker(f) \Leftrightarrow f$ non è iniettiva.

DEFINIZIONE 3.2.7: Definiamo **autospazio** relativo all'autovalore λ
$V_\lambda(f) = \{v \in V | \; f(v) = \lambda v\}$ (potremo scrivere V_λ al posto di $V_\lambda(f)$).

Osservazioni: 1) V_λ è un sottospazio vettoriale di V, poiché $V_\lambda = Ker(f - \lambda id)$.
2) λ è autovalore per $f \Leftrightarrow \dim(V_\lambda) \geq 1$. In tal caso $V_\lambda = \{0\} \cup \{autovettori\ relativi\ a\ \lambda\}$.
3) $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$, cioè V_λ è f-invariante.
4) $f|_{V_\lambda} = \lambda id|_{V_\lambda}$.

DEFINIZIONE 3.2.8: Se λ è autovalore per $f \in End(V)$, poniamo $\mu_g(\lambda) = \dim(V_\lambda)$, dove $\mu_g(\lambda)$ è detta **molteplicità geometrica** di λ.

Osservazione: $\forall$autovalore λ, $1 \leq \mu_g(\lambda) \leq \dim(V)$.

PROPOSIZIONE 3.2.3: Sia $f \sim g$. Allora:
1) $Sp(f) = Sp(g)$;
2) $\forall \lambda \in Sp(f)$, $\dim\big(V_\lambda(f)\big) = \dim\big(V_\lambda(g)\big)$;
(ossia lo spettro e la molteplicità geometrica degli autovalori sono invarianti di coniugio).
Dimostrazione:
1) Per ipotesi $\exists h \in GL(V) | \; g = h^{-1} \circ f \circ h$.
$\subseteq$) Sia $\lambda \in Sp(f)$. Allora $\exists v \neq 0 | \; f(v) = \lambda v$.
Sia $w = h^{-1}(v)$. Allora $w \neq 0$.
$g(w) = (h^{-1} \circ f \circ h)\big(h^{-1}(v)\big) = h^{-1}\big(f(v)\big) = \lambda h^{-1}(v) = \lambda w$.
Dunque $\lambda \in Sp(g)$.
$\supseteq$) Analogo.
2) Abbiamo appena provato che $h^{-1}\big(V_\lambda(f)\big) \subseteq V_\lambda(g)$ e dunque $V_\lambda(f) \subseteq h\big(V_\lambda(g)\big)$.
Allo stesso modo si prova che $V_\lambda(f) \supseteq h\big(V_\lambda(g)\big)$, allora $V_\lambda(f) = h\big(V_\lambda(g)\big)$.
Essendo h un isomorfismo, $\dim\big(V_\lambda(f)\big) = \dim\big(V_\lambda(g)\big)$, tesi.

PROPOSIZIONE 3.2.4: $f \in End(V)$, $\mathcal{B}$ base di V, $A = \mathfrak{M}_\mathcal{B}(f)$.

Sia $[\,]_{\mathcal{B}}$ l'isomorfismo indotto da $\mathcal{B}$ ($[\,]_{\mathcal{B}}: V \to \mathbb{K}^n$). Allora:
1) λ è autovalore per $f \iff \lambda$ è autovalore per A;
2) $V_\lambda(A) = [V_\lambda(f)]_{\mathcal{B}}$.

Dimostrazione:
1) λ è autovalore per $f \iff \exists v \neq 0 |\ f(v) = \lambda v \iff \exists v \neq 0 |\ \underbrace{[f(v)]_{\mathcal{B}}}_{AX} = \lambda \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{X} \iff$

$\iff \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} |\ AX = \lambda X \iff \lambda$ è autovalore per A.

2) $\subseteq$) Sia $X \in V_\lambda(A)$ e sia $v \in V |\ [v]_{\mathcal{B}} = X$.
$AX = \lambda X \Rightarrow [f(v)]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}} \Rightarrow f(v) = \lambda v \Rightarrow v \in V_\lambda(f)$.
$\supseteq$) Sia $v \in V_\lambda(f) \Rightarrow f(v) = \lambda v$ e sia $X = [v]_{\mathcal{B}}$.
Allora $[f(v)]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}} \Rightarrow AX = \lambda X \Rightarrow X = [v]_{\mathcal{B}} \in V_\lambda(A)$.

Osservazione: Dunque possiamo calcolare gli autovalori e gli autospazi di f usando una qualsiasi matrice associata.

CALCOLO DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI PER $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$:
λ è autovalore per $A \iff \exists X \neq 0 |\ AX = \lambda X \iff \exists X \neq 0 |\ X \in Ker(A - \lambda I) \iff \det(A - \lambda I) = 0$ (poiché se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, allora il sistema $(A - \lambda I)X = 0$ avrebbe una soluzione, $X = 0$, assurdo).

DEFINIZIONE 3.2.9: Il polinomio $p_A(t) = \det(A - tI)$ è detto **polinomio caratteristico** di A.

Osservazione: Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico p_A.

Osservazioni: 1) Se $T \in \mathcal{T}(n, \mathbb{K})$ è triangolare superiore, cioè è del tipo:

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

allora:

$$T - tI = \begin{pmatrix} a_1 - t & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n - t \end{pmatrix}$$

Perciò $p_T(t) = (a_1 - t) \cdot \ldots \cdot (a_n - t)$, dunque gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale.

2) Se $A = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$, con $M, P \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $\det(A) = \det(M) \cdot \det(P)$.

$$A - tI = \left(\begin{array}{c|c} M - tI & N \\ \hline 0 & P - tI \end{array}\right)$$

Quindi $p_A(t) = \det(A - tI) = \det(M - tI) \cdot \det(P - tI) = p_M(t) \cdot p_P(t)$.

PROPOSIZIONE 3.2.5: $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} tr(A) t^{n-1} + \ldots + \det(A)$.

Dimostrazione:
Sicuramente il coefficiente di t^n è $(-1)^n$; inoltre $p_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$.
Mostriamo per induzione su n che il coefficiente di t^{n-1} è $(-1)^{n-1} tr(A)$.

Passo base): $n = 2$, $A - tI = \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - tI) = t^2 - (a+d)t + ad - bc$, verificato.
Passo induttivo): Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ e siano $a_{ij} = [A]_{ij}$.

$$\det(A - tI) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[A - tI]_{1i} \det((A - tI)_{1i})$$
$$= (a_{11} - t)\det((A - tI)_{11}) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det((A - tI)_{1i})$$

Notiamo che l'addendo $\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}\det((A - tI)_{1i})$ contiene al massimo termini di grado $n-2$, poiché "cancellando" la prima riga e l'i-esima colonna, con $i \neq 1$, vengono "cancellati" due elementi sulla diagonale che contengono la variabile t, dunque con il prodotto degli altri $n-2$ termini sulla diagonale si raggiunge al massimo l'esponente $n-2$.
Per ipotesi induttiva $\det((A - tI)_{11}) = (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^{n-2}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{jj}\right)t^{n-2} + r(t)$, con $\deg\big(r(t)\big) \leq n-2$. Dunque:

$$(a_{11} - t)\det((A - tI)_{11}) = (a_{11} - t)\left((-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^{n-2}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{jj}\right)t^{n-2} + r(t)\right)$$
$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}a_{11}t^{n-1} + (-1)^{n-1}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{jj}\right)t^{n-1} + r'(t)$$

con $\deg\big(r'(t)\big) \leq n-2$.
Quindi il coefficiente del termine di grado $n-1$ di $\det(A - tI)$ è:

$$(-1)^{n-1}a_{11} + (-1)^{n-1}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{jj}\right) = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n} a_{jj} = (-1)^{n-1}tr(A),$$

tesi.

Osservazione: Si può dimostrare in generale che il coefficiente del termine di grado $n-i$ di $p_A(t)$ è:

$$(-1)^{n-i}\sum_{j=1}^{n-i+1} \det\big(M_A(j,i)\big)$$

dove $M_A(j,i)$ è la sottomatrice quadrata di A che ha come diagonale gli elementi dal j-esimo al $(i+j-1)$-esimo della diagonale di A.

Osservazioni: 1) Abbiamo dimostrato che $tr(A)$ è la somma degli autovalori di A (contati con molteplicità), poiché se $a_1, \dots, a_n$ sono gli autovalori di A (eventualmente $\notin \mathbb{K}$), $p_A(t) = (a_1 - t) \dots \cdot (a_n - t)$, quindi il coefficiente del termine di grado $n-1$ di $p_A(t)$ è la somma degli autovalori.
2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, cioè A è una rotazione di 90°, $p_A(t) = t^2 + 1$, che è irriducibile su $\mathbb{R}$, dunque A non ha autovalori reali.
3) In ogni caso $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ ha al massimo n autovalori distinti.

PROPOSIZIONE 3.2.6: Se $A \sim B$, allora $p_A(t) = p_B(t)$.
Dimostrazione:
$B = M^{-1}AM$, dunque:
$p_B(t) = \det(B - tI) = \det(M^{-1}AM - tI) = \det(M^{-1}(A - tI)M) \boxed{\equiv} \det(A - tI) = p_A(t)$,
dove il passaggio contrassegnato con $\boxed{\equiv}$ deriva dalla formula di Binet.

Osservazione: Dunque il polinomio caratteristico è un invariante di similitudine; con esso lo sono anche tutti i suoi coefficienti, in particolare $\det(A)$ e $tr(A)$.

DEFINIZIONE 3.2.10: $f \in End(V)$. Poniamo $p_f(t) = p_A(t)$, dove A è la matrice associata a f in una qualsiasi base di V.

Osservazione: È una buona definizione, poiché se A' è la matrice associata ad f in un'altra base di V, $A \sim A'$ ed abbiamo dimostrato che se $A \sim A' \Rightarrow p_A(t) = p_{A'}(t)$.

COROLLARIO 3.2.7: Se $f \sim g$, allora $p_f(t) = p_g(t)$.
Dimostrazione:
Sia $\mathcal{B}$ base di V.
$f \sim g \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \sim \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) \Rightarrow p_f(t) = p_g(t)$.

DEFINIZIONE 3.2.11: $\forall \lambda \in Sp(f)$ denotiamo con $\mu_a(\lambda)$ la molteplicità algebrica di λ come radice di $p_f(t)$.

PROPOSIZIONE 3.2.8: $\forall n \in \mathbb{N}, A \sim B \Rightarrow A^n \sim B^n$.
Dimostrazione:
$A \sim B \Rightarrow \exists M \in GL(n) \mid B = M^{-1}AM$, dunque $B^n = \underbrace{M^{-1}AM \cdot \ldots \cdot M^{-1}AM}_{n\ volte} = M^{-1}A^nM \Rightarrow$
$\Rightarrow B^n \sim A^n$.

Osservazione: La lista di invarianti per coniugio/similitudine trovati fin qui è:
- $rk(f)$;
- $\det(f)$;
- $Sp(f)$;
- p_f;
- $\forall \lambda \in Sp(f),\ \mu_g(\lambda)$ e $\mu_a(\lambda)$.

Questa lista è ridondante, infatti:
- Se $p_f = p_g \Rightarrow \begin{cases} \det(f) = \det(g) \\ Sp(f) = Sp(g) \\ \forall \lambda \in Sp(f),\ \mu_a(\lambda, f) = \mu_a(\lambda, g) \end{cases}$, infatti il determinante è il termine noto del polinomio caratteristico e gli autovalori sono le radici.
- Se $\forall \lambda \in Sp(f) = Sp(g),\ \mu_g(\lambda, f) = \mu_g(\lambda, g) \Rightarrow rk(f) = rk(g)$.
  Infatti:
  $rk(f) = n - \dim\big(Ker(f)\big) = n - \dim\big(V_0(f)\big) = n - \mu_g(0, f)$;
  $rk(g) = n - \dim\big(Ker(g)\big) = n - \dim\big(V_0(g)\big) = n - \mu_g(0, g)$.

Dunque gli invarianti significativi trovati finora sono:
1) il polinomio caratteristico;
2) la dimensione degli autospazi.
Questo non è un sistema completo di invarianti, infatti:
sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$p_A(t) = p_B(t) = t^4$;
$\dim\big(V_0(A)\big) = \dim\big(Ker(A)\big) = 2$;
$\dim\big(V_0(B)\big) = \dim\big(Ker(B)\big) = 2$.
Ma poiché $A^2 \neq 0$ e $B^2 = 0$, allora sicuramente $A^2 \nsim B^2 \;\Rightarrow A \nsim B$.

PROPOSIZIONE 3.2.9: $f \in End(V),\ \lambda \in Sp(f)$. Allora $1 \leq \mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda) \leq \dim(V)$.
Dimostrazione:
Sia $d = \mu_g(\lambda) = \dim(V_\lambda)$.
Sia $\{v_1, \dots, v_d\}$ una base di V_λ.
La completo a una base $\mathcal{B}$ di V.
Allora $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & M \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$, da cui $p_f(t) = (\lambda - t)^d \cdot p_N(t)$ e quindi $\mu_a(\lambda) \geq d$.

PROPOSIZIONE 3.2.10: Sia V uno spazio vettoriale e siano $W_1, \dots, W_k$ sottospazi di V.
Sono fatti equivalenti:
1) $\dim(W_1 + \ldots + W_k) = \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k)$
2) Se $\mathcal{B}_i$ è base di W_i, allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ è base di $W_1 + \cdots + W_k$
3) Se $w_i \in W_i \;\; \forall i$ e $w_1 + \ldots + w_k = 0 \;\Rightarrow w_1 = \ldots = w_k = 0$
4) $\forall v \in W_1 + \ldots + W_k$, v si scrive in modo unico come $v = w_1 + \ldots + w_k$, con $w_i \in W_i \;\; \forall i$.
Dimostrazione:
2) ⇒ 1): Poiché B_i è base di $W_i \;\Rightarrow \#\mathcal{B} = \#\mathcal{B}_1 + \cdots + \#\mathcal{B}_k \;\Rightarrow$
$\Rightarrow \dim(W_1 + \ldots + W_k) = \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k)$.
1) ⇒ 2): $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ genera $W_1 + \ldots + W_k$ per 1). Inoltre $\#\mathcal{B} = \dim(W_1 + \ldots + W_k)$, quindi $\mathcal{B}$ è una base di $W_1 + \ldots + W_k$.
2) ⇒ 3): Scrivo ogni w_i come combinazione lineare di $\mathcal{B}_i$:
$w_1 + \ldots + w_k = cl(\mathcal{B}_1) + \ldots + cl(\mathcal{B}_k)$
Ma $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ fanno parte di $\mathcal{B}$ e dunque sono indipendenti, dunque tutti gli addendi sono nulli ⇒ $w_i = 0 \;\; \forall i$.
3) ⇒ 4): Sia $v = w_1 + \ldots + w_k = w_1' + \ldots + w_k'$. Allora:
$\underbrace{(w_1 - w_1')}_{\in W_1} + \ldots + \underbrace{(w_k - w_k')}_{\in W_k} = 0$.
Quindi per 3), $w_i - w_i' = 0 \;\; \forall i$, da cui la tesi.
4) ⇒ 2): $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ genera $W_1 + \ldots + W_k$.
Basta mostrare che $\mathcal{B}$ è un insieme indipendente.
$\underbrace{cl(\mathcal{B}_1)}_{=w_1} + \ldots + \underbrace{cl(\mathcal{B}_k)}_{=w_k} = 0$.
Allora $w_1 + \ldots + w_k = 0 + \ldots + 0 = 0$.
Ma poiché la scrittura è unica, $w_i = 0 \;\; \forall i$.

Poiché $\mathcal{B}_i$ è base di W_i, tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli $\Rightarrow$ tesi.
DEFINIZIONE 3.2.12: Se vale una qualsiasi delle precedenti condizioni equivalenti, diciamo che $W_1, \dots, W_k$ sono in **somma diretta** (**multipla**) e $W_1 \oplus \dots \oplus W_k = W_1 + \dots + W_k$.
Si ha che $\dim(W_1 \oplus \dots \oplus W_k) = \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i)$.

PROPOSIZIONE 3.2.11: Sia $f \in End(V)$, $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.
Allora gli autospazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta.
Dimostrazione:
Basta provare che se $v_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, v_k \in V_{\lambda_k}$ e $v_1 + \dots + v_k = 0$, allora $v_i = 0 \ \forall i$.
Per induzione su k:
Passo base): $k = 1$: $v_1 = 0$ implica ovviamente $v_1 = 0$.
Passo induttivo): Dall'ipotesi $v_1 + \dots + v_k = 0$ ottengo, applicando f:
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ e, moltiplicando invece per λ_k:
$\lambda_k v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$.
Sottraendo ottengo:
$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)v_1}_{\in V_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}}_{\in V_{\lambda_{k-1}}} = 0.$
Per ipotesi induttiva:
$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 = 0, \dots, (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$.
Ma $\lambda_i - \lambda_k \neq 0 \ \forall i$, poiché gli autovalori sono distinti. Dunque $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$ e quindi anche $v_k = 0$.

Osservazione: In generale $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subsetneq V$.

PROPOSIZIONE 3.2.12: Siano $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Allora A e B sono simili su $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ lo sono su $\mathbb{C}$.
Dimostrazione:
Precisiamo che:
$A \sim_{\mathbb{R}} B \ \Leftrightarrow \exists M \in GL(n, \mathbb{R}) |\ M^{-1}AM = B$;
$A \sim_{\mathbb{C}} B \ \Leftrightarrow \exists M \in GL(n, \mathbb{C}) |\ M^{-1}AM = B$.
$\Rightarrow$) ovvia.
$\Leftarrow$) Per ipotesi $\exists M \in GL(n, \mathbb{C}) |\ M^{-1}AM = B$, cioè $AM = MB$.
Sia $M = X + iY$, con $X, Y \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ (N.B.: non è detto che X e Y siano invertibili!).
$A(X + iY) = (X + iY)B \ \Rightarrow AX + iAY = XB + iYB \ \Rightarrow AX = XB,\ AY = YB$, separando parte reale e parte immaginaria.
Notiamo che:
$\forall t \in \mathbb{R}, A(X + tY) = AX + tAY = XB + tYB = (X + tY)B$,
dunque per arrivare alla tesi mi basta trovare $t \in \mathbb{R} |\ X + tY$ sia invertibile, poiché in quel caso A e B sarebbero simili grazie a $X + tY \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, cioè simili su $\mathbb{R}$.
$\det(X + tY)$ è un polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, ma $p(i) = \det(X + iY) = \det(M) \neq 0$, dunque $p(t)$ non è il polinomio nullo $\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R} |\ p(t_0) \neq 0$, cioè $X + t_0 Y \in GL(n, \mathbb{R})$, tesi.

3.3 DIAGONALIZZABILITÁ

DEFINIZIONE 3.3.1: $f \in End(V)$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una base $\mathcal{B} \mid \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale.

Osservazione: $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ è costituita da autovettori per f.

PROPOSIZIONE 3.3.1: $f \in End(V)$, $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.
Allora f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Per ipotesi $\exists \mathcal{B}$ base di autovettori.
La suddivido in $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$, con $\mathcal{B}_i \subset V_{\lambda_i}$.
$V = Span(\mathcal{B}_1) \oplus \dots \oplus Span(\mathcal{B}_k) \subseteq V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.
Ma $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V \;\Rightarrow$ tesi.
$\Leftarrow$) Se $\mathcal{B}_i$ è base di $V_{\lambda_i} \;\Rightarrow\; \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ è base di autovettori di V, dunque segue la tesi.

Osservazioni: 1) La proprietà di essere diagonalizzabile è un invariante di coniugio.
Dimostrazione:
$f \sim g \;\Rightarrow g = h^{-1} \circ f \circ h$.
Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di autovettori per f, $\{h^{-1}(v_1), \dots, h^{-1}(v_n)\}$ è base di autovettori per g.

2) $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow A \sim D$ diagonale (poiché D ha una base di autovettori quindi ce l'ha anche A).
3) Sia $\mathcal{S}$ base di V. f diagonalizzabile $\Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(f)$ è diagonalizzabile.
4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ non è diagonalizzabile (infatti se lo fosse sarebbe simile a una matrice diagonale, ma A ha come autovalore solo 1 $\Rightarrow$ la matrice simile sarebbe $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ma $A \nsim I$).
5) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ non è diagonalizzabile perché non ha autovalori reali.
6) $f \in End(V) \mid f^2 = f$ (si dice che f è un **proiettore**) $\Rightarrow f$ è diagonalizzabile.
Dimostrazione:
Sicuramente $\forall v \in V, v = \big(v - f(v)\big) + f(v)$. Notiamo che:
$f\big(v - f(v)\big) = f(v) - f\big(f(v)\big) = f(v) - f(v) = 0 \;\Rightarrow v - f(v) \in Ker(f) = V_0(f)$;
$f\big(f(v)\big) = f(v) \;\Rightarrow f(v) \in Im(f) = V_1(f)$.
Poiché sappiamo che $V = Ker(f) \oplus Im(f) \;\Rightarrow V = V_0(f) \oplus V_1(f)$, da cui la tesi.
7) $f \in End(V) \mid f^2 = id$ (si dice che f è un'**involuzione**) $\Rightarrow f$ è diagonalizzabile.
Dimostrazione:
Sicuramente $\forall v \in V, v = \frac{v+f(v)}{2} + \frac{v-f(v)}{2}$. Notiamo che:
$f\left(\frac{v+f(v)}{2}\right) = \frac{f(v)+v}{2} \;\Rightarrow\; \frac{v+f(v)}{2} \in V_1(f)$;
$f\left(\frac{v-f(v)}{2}\right) = \frac{f(v)-v}{2} \;\Rightarrow\; \frac{v-f(v)}{2} \in V_{-1}(f)$.
Abbiamo mostrato che $V_1(f)$ e $V_{-1}(f)$ generano V, dunque $V_1(f) + V_{-1}(f) \supseteq V$.
Poiché ovviamente $V_1(f) + V_{-1}(f) \subseteq V$, allora $V_1(f) + V_{-1}(f) = V$.

Inoltre $V_1(f) \cap V_{-1}(f) = \{0\}$, dunque $V_1(f) \oplus V_{-1}(f) = V$, tesi.
TEOREMA DI DIAGONALIZZABILITÁ: $f \in End(V)$, $\dim(V) = n$, $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.
Allora f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_a(\lambda_1)+\ldots+\mu_a(\lambda_k) = n \\ \mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i) \ \ \forall i \end{cases}$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) $\exists \mathcal{B}$ base di autovettori di f.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_k I_{d_k}} \end{pmatrix}$$

con $d_1+\ldots+d_k = n$.
Allora $p_f(t) = (\lambda_1 - t)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - t)^{d_k}$.
Da questo segue che $\mu_a(\lambda_i) = d_i$, quindi è provata la prima condizione.
Poiché $\mathcal{B}$ contiene d_i autovettori relativi a λ_i, si ha che $\dim(V_{\lambda_i}) \geq d_i = \mu_a(\lambda_i)$.
Ma $\mu_g(\lambda_i) \leq \mu_a(\lambda_i) \Rightarrow \mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i)$.
$\Leftarrow$) So che $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V$ e che f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ vale l'uguaglianza.
Ma $\dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(V_{\lambda_k}) = \sum_i \mu_g(\lambda_i) = \sum_i \mu_a(\lambda_i) = n \Rightarrow$ tesi.

Osservazione: La condizione $\mu_a(\lambda_1)+\ldots+\mu_a(\lambda_k) = n$ equivale a dire che $p_f(t) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda_i - t)^{m_i}$, cioè che $p_f(t)$ è completamente fattorizzabile.

COROLLARIO 3.3.2: Se $f \in End(V)$, con $\dim(V) = n$, ha n autovalori distinti, allora f è diagonalizzabile.
Dimostrazione:
Poiché $\mu_a(\lambda_i) > 0$, allora sicuramente $\mu_a(\lambda_i) = 1 \ \forall i$ e dunque $\sum_i \mu_a(\lambda_i) = n$.
Inoltre $1 \leq \mu_g(\lambda_i) \leq \mu_a(\lambda_i) = 1 \Rightarrow \mu_g(\lambda_i) = 1 = \mu_a(\lambda_i) \ \forall i \Rightarrow$ tesi grazie al teorema di diagonalizzabilità.

Osservazione: Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (o in generale se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso), la condizione $\sum_i \mu_a(\lambda_i) = n$ è sempre verificata.

Osservazioni: 1) Se A è diagonalizzabile, anche A^n lo è $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dimostrazione:
A diagonalizzabile $\Rightarrow A \sim D$ diagonale $\Rightarrow A^n \sim D^n$ e sicuramente D^n è diagonale $\forall n \in \mathbb{N}$
(la dimostrazione formale può essere fatta in questo modo:
a) dimostrare per induzione su m che, prese $B, C \in \mathcal{D}(m, \mathbb{K})$, $BC \in \mathcal{D}(m, \mathbb{K})$;
b) sfruttare il fatto a) per dimostrare per induzione che $D^{n-1} \in \mathcal{D}(m, \mathbb{K}) \Rightarrow D^n \in \mathcal{D}(m, \mathbb{K})$.)
2) Se λ è autovalore per A, allora λ^m è autovalore per $A^m \ \ \forall m \in \mathbb{N}$.
Dimostrazione:
Se $AX = \lambda X \Rightarrow A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X$.
In generale, se $A^{n-1}X = \lambda^{n-1}X$, procedendo come sopra si mostra che $A^nX = \lambda^nX$.

PROPOSIZIONE 3.3.3: Siano $f, g \in End(V) \mid f \circ g = g \circ f$ e sia V_λ l'autospazio relativo a λ per f. Allora $g(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.
Dimostrazione:

Sia $v \in V_\lambda$. Allora $f\big(g(v)\big) = g\big(f(v)\big) = g(\lambda v) = \lambda g(v) \Rightarrow g(v) \in V_\lambda \Rightarrow$ tesi.
Osservazione: Dunque se due endomorfismi commutano, gli autospazi dell'uno sono invarianti per l'altro.

PROPOSIZIONE 3.3.4: $f \in End(V),\ V = A \oplus B$, A, B sottospazi di V f-invarianti.
Allora f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow f|_A$ e $f|_B$ sono diagonalizzabili.
Dimostrazione:
$\Leftarrow$) $\exists \mathcal{B}_A$ base di A di autovettori per f;
$\exists \mathcal{B}_B$ base di B di autovettori per f;
Perciò $\mathcal{B} = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{B}_B$ è base di V di autovettori per f.
$\Rightarrow$) $\exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V di autovettori per f.
$f(v_i) = \lambda_i v_i \ \ \forall i$; inoltre $\forall i \ \ \exists!\, a_i \in A, b_i \in B |\ v_i = a_i + b_i$.
$f(v_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i(a_i + b_i) = \underbrace{\lambda_i a_i}_{\in A} + \underbrace{\lambda_i b_i}_{\in B}$.
Ma $f(v_i) = f(a_i + b_i) = \underbrace{f(a_i)}_{\in A} + \underbrace{f(b_i)}_{\in B}$, poiché A, B sono f-invarianti.
Ma lo spezzamento è unico, quindi $f(a_i) = \lambda_i a_i$; $f(b_i) = \lambda_i b_i \ \ \forall i$.
Dunque ho trovato $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in B |\ f(a_i) = \lambda_i a_i$ e $f(b_i) = \lambda_i b_i \ \ \forall i$.
Ma $a_1, \dots, a_n \in A$ provengono, tramite la proiezione $\pi_A : V \to A$, da una base di V, dunque gli a_i sono generatori di $Im(\pi_A)$. Ma π_A è surgettiva, dunque gli a_i generano A.
Dunque posso estrarre una base per A che è di autovettori perché sono $\neq 0$ (se ci fossero l'algoritmo di estrazione li eliminerebbe) e verificano $f(a_i) = \lambda_i a_i$.
Il discorso per B è analogo $\Rightarrow$ tesi.

PROPOSIZIONE 3.3.5: $f \in End(V)$ diagonalizzabile; W sottospazio di V f-invariante.
Allora $f|_W$ è diagonalizzabile.
Dimostrazione 1:
Per la proposizione precedente mi basta trovare U sottospazio di $V |\ f(U) \subseteq U$ e $V = W \oplus U$.
f è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists$base di autovettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V per f.
Se $\{w_1, \dots, w_p\}$ è una base di W, $\{w_1, \dots, w_p, v_1, \dots, v_n\}$ generano V e se applico l'algoritmo di estrazione a base ottengo una base $\left\{w_1, \dots, w_p, v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-p}}\right\}$ di V.
Sia $U = Span\left(v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-p}}\right)$. Per costruzione $V = U \oplus W$ e inoltre $f(U) \subseteq U$ poiché questi sono elementi di una base di autovettori.
Dimostrazione 2:
$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.
Proviamo che $W = \big(W \cap V_{\lambda_1}\big) \oplus \dots \oplus \big(W \cap V_{\lambda_k}\big)$.
$\forall w \in W, \exists v_1, \dots, v_k |\ w = v_1 + \dots + v_k$ e $v_i \in V_{\lambda_i}$.
Se provo che $v_i \in W \ \ \forall i$ ho la tesi, poiché avrei che W è composto solo da autovettori.
$w = v_1 + \dots + v_k$;
$f(w) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$;
$f^2(w) = \lambda_1^2 v_1 + \dots + \lambda_k^2 v_k$;
$\vdots$
$f^{k-1}(w) = \lambda_1^{k-1} v_1 + \dots + \lambda_k^{k-1} v_k$.
Dunque:

$$\begin{pmatrix} w \\ f(w) \\ \vdots \\ f^{k-1}(w) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}}_{=V} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

V è invertibile perché è una matrice di Vandermonde con $\lambda_i \neq \lambda_j \ \ \forall i, j$, poiché i corrispondenti autospazi sono in somma diretta, perciò:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} w \\ f(w) \\ \vdots \\ f^{k-1}(w) \end{pmatrix}$$

Quindi i v_i si ottengono come combinazione lineare degli $f^j(w) \ \Rightarrow$
$\Rightarrow v_i \in Span\left(w, f(w), \dots, f^{k-1}(w)\right) \ \forall i.$
Ma i $f^j(w)$ sono tutti contenuti in W, poiché W è un sottospazio f-invariante, dunque $v_i \in W \ \ \forall i$, da cui la tesi.

DEFINIZIONE 3.3.2: $f, g \in End(V)$ si dicono **simultaneamente diagonalizzabili** se ammettono una base comune di autovettori.

TEOREMA DI DIAGONALIZZAZIONE SIMULTANEA: Siano $f, g \in End(V) | \ f \circ g = g \circ f$.
Allora:
1) Se f è diagonalizzabile con $n = \dim(V)$ autovalori distinti, allora g è diagonalizzabile e f e g sono simultaneamente diagonalizzabili
2) Se f e g sono diagonalizzabili lo sono simultaneamente.

Dimostrazione:
1) $\exists \mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}|$ ciascun $Span(v_i)$ coincide con un autospazio (in quanto tutti gli autospazi di f hanno dimensione 1 per ipotesi).
   Dunque sappiamo che $g\left(Span(v_i)\right) \subseteq Span(v_i)$, cioè $g(v_i) = \lambda_i v_i$ per qualche $\lambda_i \in \mathbb{K} \ \forall i$ (infatti in generale so che $g\left(Span(v_i)\right) \subseteq V_{\lambda_i}$, ma $V_{\lambda_i} = Span(v_i)$)
   Dunque segue la tesi.
2) f diagonalizzabile $\Rightarrow V = V_{\lambda_i} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.
   $f \circ g = g \circ f \ \Rightarrow g\left(V_{\lambda_i}\right) \subseteq V_{\lambda_i} \ \forall i.$
   Sappiamo che g diagonalizzabile e $g\left(V_{\lambda_i}\right) \subseteq V_{\lambda_i}$ implica che $g|_{V_{\lambda_i}}$ è diagonalizzabile.
   Se $\mathcal{B}_{\lambda_i}$ è una base di autovettori per $g|_{V_{\lambda_i}}$, allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup B_{\lambda_k}$ è una base di V (poiché $V = V_{\lambda_i} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$) di autovettori (questo per costruzione, perché prendendo un $x \in V_{\lambda_i} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ ho sicuramente un autovettore per f, ma questi sono autovettori per i $g|_{V_{\lambda_i}}$, dunque sono autovettori anche per g).
   Dunque segue la tesi.

3.4 TRIANGOLABILITÁ

DEFINIZIONE 3.4.1: $f \in End(V)$ si dice triangolabile se $\exists B$ base di $V| \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare.

Osservazioni: 1) $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ è triangolabile $\Leftrightarrow A \sim T$ triangolare.

2) f diagonalizzabile $\Rightarrow f$ triangolabile.
   Il viceversa è falso, infatti:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è triangolabile ma non è diagonalizzabile.
3) $f \in End(V)$, $\mathcal{S}$ base qualsiasi di V.
   Allora f è triangolabile $\Leftrightarrow A = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(f)$ è triangolabile.

DEFINIZIONE 3.4.2: $\dim(V) = n$. Si chiama **bandiera** per V ogni famiglia $\{V_i\}_{i \in J_n}$ di sottospazi vettoriali di V tali che:
1) $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n$
2) $\forall i \ \dim(V_i) = i$.

Osservazioni: 1) Ogni base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V induce una bandiera per V: $V_i = Span(v_1, \dots, v_i)$.

2) $\forall$bandiera per V, $\exists \mathcal{B}$ base che la induce (basta scegliere come i-esimo vettore di base un vettore $\in V_i$ e $\notin V_{i-1}$).

DEFINIZIONE 3.4.3: $f \in End(V)$, $\mathcal{B}$ base di V. $\mathcal{B}$ si dice **base a bandiera** per f se i sottospazi della bandiera indotta da $\mathcal{B}$ sono f-invarianti, cioè $\forall i \ \ f\big(Span(v_1, \dots, v_i)\big) \subseteq Span(v_1, \dots, v_i)$.

PROPOSIZIONE 3.4.1: f triangolabile $\Leftrightarrow \exists$base a bandiera per f.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) f triangolabile $\Rightarrow A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ triangolabile $\Rightarrow A \sim T$ triangolare $\Rightarrow$ se $\mathcal{S}$ è la base tale che $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(f) = T$, allora $\mathcal{S}$ è evidentemente a bandiera.
$\Leftarrow$) Se $f(v_i) \in Span(v_1, \dots, v_i) \ \forall i$, allora $\forall i$ le coordinate di $f(v_i)$ dalla $(i+1)$-esima alla n-esima sono nulle, da cui la tesi.

Osservazione: Non tutti gli endomorfismi sono triangolabili (poiché il primo vettore di una base a bandiera deve essere autovettore per f). Ad esempio:
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, non avendo autovalori reali, non è triangolabile.

TEOREMA DI TRIANGOLABILITÁ: f è triangolabile $\Leftrightarrow p_f(t)$ è completamente fattorizzabile (cioè se $\sum_x \mu_a(x) = \dim(V)$).
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Per ipotesi $\exists \mathcal{B}$ base di V tale che:

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Allora $p_f(t) = p_A(t) = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{m_i}$, tesi.

$\Leftarrow$) Per induzione su $n = \dim(V)$:

Passo base): $n = 1$: ovvio, poiché ogni matrice 1×1 è triangolare.

Passo induttivo): Per ipotesi $\exists \lambda_1$ autovalore per f (poiché $p_f(t)$ è completamente fattorizzabile e dunque ha almeno una radice). Sia v_1 autovettore relativo a λ_1.

Completo v_1 a base $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V.

Sia $V_1 = Span(v_1)$ e $W = Span(v_2, \dots, v_n)$. Allora $V = V_1 \oplus W$.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right)$$

Siano $\pi_{V_1}: V \to V_1$, $\pi_W: V \to W$ le proiezioni indotte dalla somma diretta.

Osservo che $\mathcal{T} = \{v_2, \dots, v_n\}$ è base di W e $\mathfrak{M}_{\mathcal{T}}(\pi_W \circ f|_W) = C$.

Ora:

$p_f(t) = (\lambda_1 - t) \cdot p_C(t)$.

Ma $p_f(t)$ è completamente fattorizzabile, quindi anche $p_C(t)$ lo è. Inoltre $\pi_W \circ f|_W \in End(W)$, quindi per ipotesi induttiva $\exists \{w_2, \dots, w_n\}$ base di W a bandiera per $\pi_W \circ f|_W$.

È ovvio che $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ è base di V, ma è anche a bandiera, infatti:

$f(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$, poiché v_1 è autovettore;

$$f(w_i) = \left(\underbrace{(\pi_{V_1} + \pi_W)}_{=id} \circ f\right)(w_i) = \underbrace{(\pi_{V_1} \circ f)(w_i)}_{\in V_1} + \underbrace{(\pi_W \circ f)(w_i)}_{\in Span(w_2, \dots, w_i)},$$

e $(\pi_W \circ f)(w_i) \in Span(w_2, \dots, w_i)$ poiché per ipotesi induttiva $\{w_2, \dots, w_n\}$ è una base di W a bandiera per $\pi_W \circ f|_W$.

Dunque $f(w_i) \in Span(v_1, w_2, \dots, w_n)$, da cui la tesi.

COROLLARIO 3.4.2: Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso (cioè ogni polinomio in $\mathbb{K}$ è completamente fattorizzabile), allora tutti gli endomorfismi di V sono triangolabili.

COROLLARIO 3.4.3: La proprietà di essere triangolabile è una proprietà invariante per coniugio/similitudine (poiché dipende solo dal polinomio caratteristico).

Osservazione: Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili poiché entrambe rappresentano l'endomorfismo $f |\, f(e_1) = v_1$ e $f(e_2) = v_1 + v_2$, la prima nella base $\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, la seconda nella base $\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. D'altra parte, entrambe le matrici sono triangolabili (in quanto triangolari), ma la forma triangolabile è sostanzialmente diversa. Dunque, poiché nella stessa classe di similitudine possono coesistere elementi molto diversi, si dice che le matrici triangolari non sono "forme canoniche".

DEFINIZIONE 3.4.4: $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ si dice nilpotente se $\exists n \in \mathbb{N} |\, A^n = 0$.

PROPOSIZIONE 3.4.4: $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. A è nilpotente $\Leftrightarrow$ 0 è autovalore con molteplicità n ($\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $p_A(t) = t^n$).

Dimostrazione:

$\Rightarrow$) Per ipotesi $\exists p \in \mathbb{N} | \, A^p = 0$. Sia $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$ un autovalore per A ($\overline{\mathbb{K}}$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{K}$, cioè un campo dove tutti i polinomi di $\mathbb{K}[t]$ sono completamente fattorizzabili).
Allora λ^p è autovalore per $A^p = 0$, ma l'unico autovalore per 0 è 0 $\Rightarrow \lambda^p = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

$\Leftarrow$) Per ipotesi A è triangolabile, cioè $A \sim T$ triangolare strettamente (poiché matrici simili hanno gli stessi autovalori, quindi T ha solo 0 come autovalore e dunque ha la diagonale nulla).
Dimostriamo ora per induzione su n che se $T \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ triangolare strettamente $\Rightarrow T^n = 0$:
Passo base): $n = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Passo induttivo): Sia $T' \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ triangolare strettamente:

$$T' = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & T & & X \\ & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow T'^{n+1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & T^{n+1} & & T^n X \\ & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ma per ipotesi induttiva (poiché T è triangolare strettamente), $T^n = 0$, quindi $T'^{n+1} = 0$.
Quindi, poiché $A^n \sim T^n = 0 \Rightarrow A^n = 0$, tesi.

Osservazione: L'esempio già visto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prova che gli invarianti di similitudine trovati finora non sono un sistema completo di invarianti neppure nella classe degli endomorfismi triangolabili.

DEFINIZIONE 3.4.5: $f, g \in End(V)$ si dicono **simultaneamente triangolabili** se $\exists$base $\mathcal{B}$ di V a bandiera sia per f sia per g.

TEOREMA DI TRIANGOLAZIONE SIMULTANEA: Siano $f, g \in End(V)$ triangolabili tali che $f \circ g = g \circ f$. Allora:
1) Se $W \subseteq V$ è un sottospazio f-invariante, allora $f|_W$ è triangolabile;
2) f e g ammettono un autovettore comune;
3) f e g sono simultaneamente triangolabili.

Dimostrazione:
1) Sia $\mathcal{B}_W$ una base di W; estendiamola a base $\mathcal{B}$ di V. Sia inoltre $A_W = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_W}(f|_W)$.
Allora:
$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A_W & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$
Dunque $p_f(t) = p_A(t) = \det(A - tI) = \det(A_W - tI) \cdot \det(C - tI) = p_{A_W}(t) \cdot q(t) =$
$= p_{f|_W}(t) \cdot q(t)$.
Poiché $p_f(t)$ si fattorizza completamente, anche $p_{f|_W}(t)$ si fattorizza completamente $\Rightarrow f|_W$ è triangolabile.
2) f triangolabile $\Rightarrow \exists$autospazio V_λ per f di dimensione > 0.
$g(V_\lambda) \subseteq V_\lambda \Rightarrow$ per 1) $g|_{V_\lambda}$ è triangolabile $\Rightarrow \exists v \in V_\lambda$ autovettore per $g|_{V_\lambda}$, dunque per g.
v è l'autovettore sia di f che di g cercato.

3) Per induzione su $n = \dim(V)$:
Passo base): $n = 1$: ovvio.
Passo induttivo): Per 2) sappiamo che $\exists v$ autovettore sia per f che per g. Sia $V_1 = Span(v)$. Estendiamo v a base $\mathcal{B} = \{v, v_2, \dots, v_n\}$ di V. Sia $W = Span(v_2, \dots, v_n)$. Evidentemente $V = V_1 \oplus W$. Allora:

$$A_1 = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & C_1 \\ 0 & \end{array}\right); \quad A_2 = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \left(\begin{array}{c|c} \mu & \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & C_2 \\ 0 & \end{array}\right).$$

Siano $\pi_{V_1}: V \to V_1$ e $\pi_W: V \to W$ le proiezioni indotte dalla somma diretta $V = V_1 \oplus W$.
Allora $\pi_W \circ f,\ \pi_W \circ g \in End(W)$, inoltre:

$$(\pi_W \circ f) \circ (\pi_W \circ g) \boxed{=} \pi_W \circ f \circ g = \pi_W \circ g \circ f = (\pi_W \circ g) \circ (\pi_W \circ f)$$

dove il passaggio contrassegnato con $\boxed{=}$ segue dal fatto che $\pi_W \circ f \circ \pi_W = \pi_w \circ f$, infatti, se $v \in V \ \Rightarrow v = v_1 + w$, con $v_1 \in V_1$ e $w \in W$, dunque:
$(\pi_w \circ f \circ \pi_W)(v) = (\pi_w \circ f)(w) = \pi_W(f(w))$;
$(\pi_w \circ f)(v) = (\pi_w \circ f)(v_1 + w) = \pi_W(\lambda v_1 + f(w)) = \pi_W(f(w))$.
Quindi si può applicare l'ipotesi induttiva a $\pi_W \circ f$ e $\pi_W \circ g$, che dunque ammettono una base $\{w_2, \dots, w_n\}$ di W a bandiera sia per $\pi_W \circ f$ che per $\pi_W \circ g$.
Sicuramente $\{v, w_2, \dots, w_n\}$ è base di V e la verifica che è evidentemente a bandiera per f e per g è analoga a quella nel teorema di triangolabilità.

3.5 FORMA CANONICA DI JORDAN

DEFINIZIONE 3.5.1: $\forall f \in End(V), \forall p(t) = a_0 + \dots + a_s t^s \in \mathbb{K}[t]$, poniamo $p(f) = a_0 f^0 + \dots + a_s f^s \in End(V)$, dove $f^0 = id$ e $\forall j \in \mathbb{N},\ f^j = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{j\ volte}$.

DEFINIZIONE 3.5.2: $S \subseteq \mathbb{K}[t]$ si definisce **ideale di polinomi** in $\mathbb{K}[t]$ se:
- $\forall p(t), q(t) \in S,\ p + q \in S$;
- $\forall p(t) \in S,\ \forall q(t) \in \mathbb{K}[t],\ pq \in S$.

DEFINIZIONE 3.5.3: $\forall f \in End(V)$, definiamo **ideale** di f, $I(f) = \{p(t) \in \mathbb{K}[t] \mid p(f) = 0\}$.

Osservazioni: 1) Se $g = h^{-1} \circ f \circ h$, con $h \in GL(V)$, allora $\forall p(t) \in \mathbb{K}[t], p(g) = h^{-1} \circ p(f) \circ h$, poiché $p(g) = a_0(h^{-1} \circ id \circ h) + a_1(h^{-1} \circ f \circ h) + \dots + a_s \underbrace{(h^{-1} \circ f \circ h \circ \dots \circ h^{-1} \circ f \circ h)}_{s\ volte} =$
$= a_0 id + a_1(h^{-1} \circ f \circ h) + \dots + a_s(h^{-1} \circ f^s \circ h) = h^{-1} \circ p(f) \circ h$.
Dunque $f \sim g \Rightarrow p(f) \sim p(g)\ \forall p(t) \in \mathbb{K}[t]$.
2) $\forall p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ si ha che:
- $(p + q)(f) = p(f) + q(f)$;
- $(pq)(f) = p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$

(le semplici verifiche sono lasciate al lettore).

Dunque $\forall f \in End(V)$ l'applicazione:

$$F: \begin{matrix} (\mathbb{K}[t], +, \cdot) \to (End(V), +, \circ) \\ p(t) \quad \to \quad p(f) \end{matrix}$$

è un omomorfismo di anelli.

3) Se $\mathcal{B}$ è base di V e $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$, allora $p(A) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}\big(p(f)\big)$.

PROPOSIZIONE 3.5.1: $f, g \in End(V)$. Allora:

1) Se $f \sim g$ allora $I(f) = I(g)$;
2) $I(f)$ è un ideale di $\mathbb{K}[t]$;
3) Se $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$, allora $I(f) = I(A)$.

Dimostrazione:

1) Le due inclusioni sono ovvie grazie al fatto che $g = h^{-1} \circ f \circ h \Rightarrow p(g) = h^{-1} \circ p(f) \circ h$.
2) Le due verifiche sono immediate.
3) $p(t) \in I(f) \Leftrightarrow p(f) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}\big(p(f)\big) = 0 \Leftrightarrow p(A) = 0 \Leftrightarrow p(t) \in I(A)$.

Osservazione: Quindi $I(f)$ è un invariante di coniugio.

Osservazione: $I(f)$ contiene polinomi di grado ≥ 1. Infatti, se $f = 0$, $t^s \in I(f) \ \forall s \in \mathbb{N}$.
Se $f \neq 0$ e $\dim(V) = n$, allora $\{f^0, \dots, f^{n^2}\}$ sono linearmente dipendenti in $End(V)$, poiché sono $n^2 + 1$ elementi in uno spazio di dimensione n^2.
Dunque $\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che:

$$a_0 f^0 + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0.$$

Allora $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n^2} t^{n^2} \in \mathbb{K}[t]$ ha grado ≥ 1 e $p(t) \in I(f)$.

TEOREMA DI HAMILTON-CAYLEY: $\forall f \in End(V)$, $p_f \in I(f)$.

Dimostrazione:

Sia $\mathcal{B}$ una base di V e $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
$p_f = p_A \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}\left(p_f(f)\right) = p_f(A) = p_A(A)$, dunque per provare che $p_f(f) = 0$ mi basta provare che $p_A(A) = 0$.
Procediamo per induzione su $n = \dim(V)$:
Passo base): $n = 1$: ovvio, poiché se $A = (a)$, allora $p_A(t) = a - t$, quindi $p_A(A) = aI - A = 0$.
Passo induttivo): 1° CASO: A è triangolabile.
Allora $\exists v_1 \in \mathbb{K}^n$ autovettore per A.
Lo completo a base di $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_n\}$.
Allora:

$$\tilde{A} = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(A) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

Poiché $A \sim \tilde{A}$, allora $p_A(A) \sim p_A(\tilde{A})$, quindi la tesi è provare che $p_A(\tilde{A}) = 0$, cioè non è restrittivo supporre $A = \tilde{A}$.
Osserviamo che $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$A^m = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)^m = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^m & \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1^m \\ 0 & \end{array}\right)$$

quindi $\forall q(t)$ si ha che:

$$q(A) = \left(\begin{array}{c|c} q(\lambda) & \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & q(A_1) \\ 0 & \end{array}\right).$$

Ora, $p_A(t) = (\lambda - t)p_{A_1}(t)$.
Ma poiché $p_A(A)$ è completamente fattorizzabile, allora anche $p_{A_1}(t)$ è completamente fattorizzabile $\Rightarrow A_1$ è triangolabile.
Per ipotesi induttiva $p_{A_1}(A_1) = 0$, dunque:

$$p_{A_1}(A) = \left(\begin{array}{c|c} p_{A_1}(\lambda) & \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & p_{A_1}(A_1) \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} p_{A_1}(\lambda) & \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{array}\right)$$

Allora $\forall v \in \mathbb{K}^n$:
$p_A(A)(v) = (\lambda I - A)\underbrace{p_{A_1}(A)(v)}_{\in Span(v_1)} = 0$, poiché $v_1 \in Ker(\lambda I - A)$ in quanto v_1 è autovettore relativo all'autovalore λ.
CASO GENERALE: Utilizziamo il fatto che esiste un campo $\mathbb{F}$ estensione di $\mathbb{K} |\ p_A(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{F}[t]$ (ad esempio se $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{F} = \mathbb{C}$).
Si procede come nel caso precedente lavorando in $\mathbb{F}$ e si trova che $p_A(A) = 0$ in $\mathcal{M}(n, \mathbb{F})$, dunque tale relazione vale anche in $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 3.5.2: Sia I un ideale $\neq \{0\}$ di $\mathbb{K}[t]$. Allora esiste un unico polinomio monico $g(t) \in I$ che genera I, ossia $I = \{g(t)q(t) | q(t) \in \mathbb{K}[t]\}$ (se g genera I, scriviamo $I = (g)$).
Dimostrazione:
Esistenza): Sia $g(t) \in I$ monico, di grado ≥ 0 e minimo (cioè il polinomio con grado più basso in I).
Sia $a(t) \in I$. Per il teorema di divisone in $\mathbb{K}[t]$, $\exists!\, q(t), r(t) \in \mathbb{K}[t]$ tali che:
$\begin{cases} a(t) = g(t)q(t) + r(t) \\ \deg(r(t)) \leq \deg(g(t)) \end{cases}$
Allora $r(t) = a(t) - g(t)q(t)$.
Ma $a(t) \in I, g(t) \in I \Rightarrow g(t)q(t) \in I \Rightarrow r(t) \in I$.
Poiché $\deg(r(t)) \leq \deg(g(t))$, avrei trovato un polinomio di grado più piccolo di g in I, assurdo $\Rightarrow r(t) = 0$.
Unicità): Se $g_1, g_2 \in I$ sono due polinomi monici di grado minimo e ≥ 0, allora:
$I = (g_1) = (g_2)$, quindi $g_1 | g_2$ e $g_2 | g_1$, poiché sono entrambi generatori.
Allora $g_1 = k \cdot g_2$, quindi $g_1 = g_2$, in quanto sono monici.

PROPOSIZIONE 3.5.3: Siano $a(t), b(t) \in \mathbb{K}[t]$ non nulli.
Sia $I\big(a(t), b(t)\big) = \{\varphi(t)a(t) + \psi(t)b(t) |\ \varphi(t), \psi(t) \in \mathbb{K}[t]\}$. Allora:

1) $I\big(a(t), b(t)\big)$ è un ideale di $\mathbb{K}[t]$ che contiene polinomi non nulli;
2) Se $d(t)$ è il generatore monico di $I\big(a(t), b(t)\big)$, allora $d(t)$ è il M.C.D. di $a(t)$ e $b(t)$.

Dimostrazione:

1) Le semplici verifiche sono lasciate al lettore.
   Sicuramente $a(t), b(t) \in I\big(a(t), b(t)\big)$, dunque l'ideale contiene polinomi non nulli.
2) Sicuramente $d(t)$ divide $a(t)$ e $b(t)$, poiché questi ultimi appartengono all'ideale e $d(t)$ è il generatore dell'ideale.
   Sia $d_1(t)$ tale che divide sia $a(t)$ che $b(t)$. Allora qualsiasi $q(t) \in I\big(a(t), b(t)\big)$ è diviso da $d_1(t)$, in quanto $q(t) = \varphi_0(t)a(t) + \psi_0(t)b(t) = d(t)\big(\varphi_0(t)a'(t) + \psi_0(t)b'(t)\big)$.
   Ma $d(t) \in I\big(a(t), b(t)\big)$, dunque $d_1(t)|d(t)$, tesi.

IDENTITÁ DI BEZOUT: Se $d(t) = M.C.D.\big(a(t), b(t)\big)$, allora $\exists \varphi(t), \psi(t) \in \mathbb{K}[t]$ tali che $d(t) = \varphi(t)a(t) + \psi(t)b(t)$.
Dimostrazione:
È un corollario immediato della precedente proposizione.

DEFINIZIONE 3.5.4: Sia $f \in End(V)$. Si definisce **polinomio minimo** di f il generatore $m_f(t)$ monico dell'ideale $I(f)$.

Osservazione: dal teorema di Hamilton-Cayley segue che $m_f | p_f \ \ \forall f \in End(V)$.

Osservazione: Non conosciamo un metodo pratico e/o algoritmico per calcolare il polinomio minimo di un endomorfismo. Quindi è utile calcolare prima il polinomio caratteristico e poi risalire (a tentativi) al polinomio minimo.

Esempi:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $p_A(t) = t^3$, inoltre $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, dunque sicuramente $m_A(t) = t^3$
2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $p_A(t) = t^3$ e $B^2 = 0$, dunque $m_A(t) = t^2$.

Osservazione: Se W è sottospazio vettoriale di V e $f(W) \subseteq W$, allora $m_{f|_W} | m_f$. Infatti $f|_W$ è un endomorfismo e poiché m_f si annulla su V, a maggior ragione si annulla su W; inoltre evidentemente $m_{f|_W}$ è polinomio minimo di $f|_W$, dunque $m_{f|_W} | m_f$.

PROPOSIZIONE 3.5.4: Sia λ autovalore per f. Allora $\forall q(t) \in I(f),\ q(\lambda) = 0$.
Dimostrazione:
Sia $v \neq 0, v \in V |\ f(v) = \lambda v$. Per ipotesi $q(f) = 0$ e dunque $q(f)(v) = 0$.
Se $q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_s t^s$,
$0 = q(f)(v) = (a_0 id + \ldots + a_s f^s)(v) = a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_s \lambda^s v = q(\lambda) \cdot v$.
Ma poiché $v \neq 0 \ \Rightarrow q(\lambda) = 0$.

Osservazione: Abbiamo appena dimostrato che ogni polinomio dell'ideale di f (dunque in particolare il polinomio minimo) si annulla su ogni autovalore. Dunque segue:

COROLLARIO 3.5.5: Se f è triangolabile, allora, se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di f:

$$p_f(t) = \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{h_i}; \quad m_f(t) = \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{s_i}$$

con $1 \le s_i \le h_i \ \ \forall i$.

PROPOSIZIONE 3.5.6: Sia $N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, con $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Allora $m_N = m.c.m(m_A, m_B)$.

Dimostrazione:

Notiamo innanzitutto che $\forall q(t) \in \mathbb{K}[t],\ q(N) = \left(\begin{array}{c|c} q(A) & 0 \\ \hline 0 & q(B) \end{array}\right)$.

Dunque, poiché $m_N(N) = 0$, allora $\left(\begin{array}{c|c} m_N(A) & 0 \\ \hline 0 & m_N(B) \end{array}\right) = 0$, dunque $m_N(A) = m_N(B) = 0$, cioè $m_N \in I(A)$ e $m_N \in I(B)$, ossia $m_A | m_N$ e $m_B | m_N$.

Sia ora g tale che $m_A | g$ e $m_B | g$; allora sicuramente $g(A) = g(B) = 0$, quindi $g(N) = 0$, ossia $g \in I(N) \Rightarrow m_N | g$, tesi.

Osservazione: Il polinomio minimo, in quanto generatore di $I(f)$, è un invariante di coniugio/similitudine.

Inoltre m_f distingue le già studiate matrici non simili:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Infatti $m_A(t) = m.c.m(t^3, t) = t^3$ e $m_B(t) = m.c.m(t^2, t^2) = t^2$.

Nonostante questo, gli invarianti trovati finora:

- il polinomio caratteristico;
- la dimensione degli autospazi;
- il polinomio minimo;

non sono un sistema completo di invarianti per coniugio/similitudine, infatti:

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$p_C(t) = p_D(t) = t^7;\ m_C(t) = m.c.m(t^3, t^3, t) = t^3;\ m_D(t) = m.c.m(t^3, t^2, t^2) = t^3;$

Inoltre $V_0(C) = 7 - rk(C) = 3;\ V_0(D) = 7 - rk(D) = 3$, ma $C \nsim D$, in quanto $rk(C^2) = 2$ e $rk(D^2) = 1$.

LEMMA 3.5.7: $f \in End(V),\ g(t) \in \mathbb{K}[t]$, allora $W = Ker\big(g(f)\big)$ è f-inviariante.
Dimostrazione:
Dobbiamo provare che $f(W) \subseteq W$, ossia che $\forall x \in W,\ g(f)\big(f(x)\big) = 0$.
Poiché $g(t) \cdot t = t \cdot g(t)$, si ha che $g(f) \circ f = f \circ g(f)$ e dunque:
$g(f)\big(f(x)\big) = (g(f) \circ f)(x) = \big(f \circ g(f)\big)(x) = f\big(g(f)(x)\big) \boxed{=} f(0) = 0$,
dove il passaggio contrassegnato da $\boxed{=}$ segue dal fatto che $x \in Ker\big(g(f)\big)$.

TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE PRIMARIA: $f \in End(V),\ q(t) \in I(f)$.
Sia $q(t) = q_1(t)q_2(t)$, con $q_1(t), q_2(t) \in \mathbb{K}[t]$ e $M.C.D(q_1, q_2) = 1$. Allora:
1) $V = Ker\big(q_1(f)\big) \oplus Ker\big(q_2(f)\big)$;
2) Gli addendi $Ker\big(q_1(f)\big)$ e $Ker\big(q_2(f)\big)$ sono f-invarianti;
3) Se $f \sim g$, allora $\begin{cases} \dim\Big(Ker\big(q_1(f)\big)\Big) = \dim\Big(Ker\big(q_1(g)\big)\Big) \\ \dim\Big(Ker\big(q_2(f)\big)\Big) = \dim\Big(Ker\big(q_2(g)\big)\Big) \end{cases}$.

Dimostrazione:
1) Per Bezout $\exists a(t), b(t) \in \mathbb{K}[t]$ tali che $1 = a(t)q_1(t) + b(t)q_2(t)$.
   Valutando in f ho:
   $id = a(f) \circ q_1(f) + b(f) \circ q_2(f)\ \Rightarrow \forall v \in V,\ v = \big(a(f) \circ q_1(f)\big)(v) + \big(b(f) \circ q_2(f)\big)(v)$.
   Notiamo che $\big(a(f) \circ q_1(f)\big)(v) \in Ker\big(q_2(f)\big)$, infatti:
   $$q_2(f)\big(a(f) \circ q_1(f)\big)(v) = \big(a(f) \circ q_1(f) \circ q_2(f)\big)(v) = \big(a(f) \circ (q_1q_2)(f)\big)(v) = \\ = \big(a(f) \circ q(f)\big)(v) = 0,$$
   in quanto $q(f) = 0$.
   Analogamente si prova che $\big(a(f) \circ q_2(f)\big)(v) \in Ker\big(q_1(f)\big)$.
   Dunque abbiamo dimostrato che $V = Ker\big(q_1(f)\big) + Ker\big(q_2(f)\big)$.
   Sia ora $z \in Ker\big(q_1(f)\big) \cap Ker\big(q_2(f)\big)$; allora:
   $z = \underbrace{\big(a(f) \circ q_1(f)\big)(z)}_{=0\ poichè\ z \in Ker(q_1(f))} + \underbrace{\big(b(f) \circ q_2(f)\big)(z)}_{=0\ poichè\ z \in Ker(q_2(f))} = 0,$
   da cui la tesi.
2) Già provato.
3) Se $g = k^{-1} \circ f \circ k$, con $k \in GL(V)$, sappiamo che $q_1(g) = k^{-1} \circ q_1(f) \circ k$, cioè
   $q_1(g) \sim q_1(f)$, per cui $rk\big(q_1(g)\big) = rk\big(q_1(f)\big)$, da cui
   $\dim\Big(Ker\big(q_1(f)\big)\Big) = \dim\Big(Ker\big(q_1(g)\big)\Big)$.
   Analogamente per q_2.

COROLLARIO 3.5.8: $f \in End(V),\ q(t) \in I(f)$. Sia $q = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$, con $M.C.D\big(q_i, q_j\big) = 1$ $\forall i \neq j$.
Allora $V = Ker\big(q_1(f)\big) \oplus \ldots \oplus Ker\big(q_m(f)\big)$ e gli addendi sono f-invarianti.
Dimostrazione:
Per induzione su m:
Passo base): $m = 2$: già fatto.
Passo induttivo): Poiché $m > 2$, poniamo $\tilde{q} = q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$.
Allora $q = q_1\tilde{q}$ e $M.C.D(q_1, \tilde{q}) = 1$.
Per il teorema di decomposizione primaria abbiamo che:

$$V = Ker(q_1(f)) \oplus \underbrace{Ker(\tilde{q}(f))}_{=W}$$

W è f-invariante e $\tilde{q} \in I(f|_W)$. Per ipotesi induttiva:

$$W = Ker(q_2(f|_W)) \oplus \dots \oplus Ker(q_m(f|_W)).$$

Ora $\forall 2 \leq j \leq m$, $Ker\left(q_j(f|_W)\right) = Ker(q_j(f)|_W) = Ker\left(q_j(f)\right) \cap W$.

D'altra parte $Ker\left(q_j(f)\right) \subseteq W$, in quanto se $x \in Ker\left(q_j(f)\right)$:

$$\tilde{q}(f)(x) = (q_2 \cdot \dots \cdot q_m)(f)(x) = (\dots \cdot q_j)(f)(x) = 0.$$

Dunque $W = Ker(q_2(f)) \oplus \dots \oplus Ker(q_m(f))$, da cui la tesi.

COROLLARIO 3.5.9: $f \in End(V)$ triangolabile, $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.
$p_f = (-1)^n(t-\lambda_i)^{h_i} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_k)^{h_k}$;
$m_f = (t-\lambda_i)^{s_i} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_k)^{s_k}$, con $1 \leq s_i \leq h_i \;\; \forall i$.
Allora:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker(f-\lambda_j id)^{h_j}$$

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker(f-\lambda_j id)^{s_j}$$

e ogni addendo è f-invariante.

PROPOSIZIONE 3.5.10: f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_f = (t-\lambda_1) \cdot \dots \cdot (t-\lambda_k)$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) $\exists \mathcal{B}$ tale che:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_k I_{d_k}} \end{pmatrix}$$

$$m_f = m.c.m((t-\lambda_1), \dots, (t-\lambda_k)) = (t-\lambda_1) \cdot \dots \cdot (t-\lambda_k)$$

$\Leftarrow$) Per la proposizione precedente $V = \underbrace{Ker(f-\lambda_1 id)}_{=V_{\lambda_1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{Ker(f-\lambda_k id)}_{=V_{\lambda_k}}$, dunque segue la tesi.

LEMMA 3.5.11: Sia $\varphi \in End(V)$. Allora:
1) $Ker(\varphi^j) \subseteq Ker(\varphi^{j+1}) \;\; \forall j \in \mathbb{N}$;
2) Se $\exists m \in \mathbb{N} |\, Ker(\varphi^m) = Ker(\varphi^{m+1})$, allora $Ker(\varphi^m) = Ker(\varphi^{m+t}) \;\; \forall t \geq 1$;
3) La successione $\left\{\dim\left(Ker(\varphi^j)\right)\right\}_j$ è un invariante di coniugio.

Dimostrazione:
1) Se $\varphi^j(x) = 0$, allora $\varphi^{j+1}(x) = \varphi\left(\varphi^j(x)\right) = \varphi(0) = 0$.
2) Basta provare che $Ker(\varphi^{m+1}) = Ker(\varphi^{m+2})$ e poi iterare.
   Ovviamente per 1) $Ker(\varphi^{m+1}) \subseteq Ker(\varphi^{m+2})$, quindi resta da mostrare il contenimento opposto.
   Sia $x \in Ker(\varphi^{m+2})$. Allora $\varphi^{m+2}(x) = \varphi^{m+1}(\varphi(x)) = 0$, cioè $\varphi(x) \in Ker(\varphi^{m+1})$.
   Ma $Ker(\varphi^m) = Ker(\varphi^{m+1})$, dunque $\varphi(x) \in Ker(\varphi^m)$, cioè $x \in Ker(\varphi^{m+1})$, tesi.

3) Già provato.

Osservazione: Se applichiamo il lemma a $\varphi = f - \lambda_j id$:
$Ker(f - \lambda_j id) \subseteq \ldots \subseteq Ker(f - \lambda_j id)^{s_j} \subseteq \ldots \subseteq Ker(f - \lambda_j id)^{h_j}$.
Ma poiché:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker(f - \lambda_j id)^{h_j} = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker(f - \lambda_j id)^{s_j}$$

allora $Ker(f - \lambda_j id)^{s_j} = Ker(f - \lambda_j id)^{h_j}$ $\forall j$, quindi le due decomposizioni primarie coincidono.

DEFINIZIONE 3.5.5: $\forall$autovalore λ_j, il sottospazio f-invariante $V_j' = Ker(f - \lambda_j id)^{s_j}$ è detto **autospazio generalizzato** relativo a λ_j.

Osservazione: Se $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = A$, gli autospazi generalizzati si possono calcolare risolvendo i sistemi lineari $(A - \lambda_j I)^{h_j} X = 0$.
Si ha dunque $V = V'_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V'_{\lambda_k}$.

PROPOSIZIONE 3.5.12: Sia $f \in End(V)$ e $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Allora:
1) $\forall j$, $f|_{V'_{\lambda_j}}$ ha solo l'autovalore λ_j;
2) $f|_{V'_{\lambda_j}}$ ha polinomio caratteristico $= \pm(t - \lambda_j)^{h_j}$ e polinomio minimo $= (t - \lambda_j)^{s_j}$;
3) $\dim\left(V'_{\lambda_j}\right) = h_j = \mu_a(\lambda_j)$;
4) Se poniamo $d_i = \dim\left(Ker(f - \lambda_j id)^i\right)$ $\forall 1 \le i \le s_j$, i numeri $d_1 < \ldots < d_{s_j}$ sono invarianti di coniugio (Osservazione: $d_1 = \mu_g(\lambda_j)$, $d_{s_j} = \mu_a(\lambda_j)$).

Dimostrazione:
1) Sicuramente $V_{\lambda_j} \subseteq V'_{\lambda_j}$.
   Se $f|_{V'_{\lambda_j}}$ avesse un altro autovalore μ, allora $V_\mu \cap V'_{\lambda_j} \neq \{0\}$ e dunque $V'_\mu \cap V'_{\lambda_j} \neq \{0\}$, assurdo, poiché sono in somma diretta.

2,3)Sia $\mathcal{B}_j$ una base di V'_{λ_j}. Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ è una base di V.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{M_k} \end{pmatrix},$$

con M_j blocco quadrato di ordine $= \dim\left(V'_{\lambda_j}\right)$.
$p_f = p_{M_1} \cdot \ldots \cdot p_{M_k}$.
Poiché ogni blocco M_j ha solo l'autovalore λ_j, segue che $p_{M_j} = p_{f|_{V'_{\lambda_j}}} = \pm(t - \lambda_j)^{h_j}$ e
$h_j = $ ordine di $M_j = \dim\left(V'_{\lambda_j}\right)$.
Inoltre $m_f = m.c.m(m_{M_1}, \ldots, m_{M_k}) = m_{M_1} \cdot \ldots \cdot m_{M_k}$, da cui $m_{f|_{V'_{\lambda_j}}} = (t - \lambda_j)^{s_j}$.

4) Già provato.

Osservazione: Dunque possiamo ricondurci a studiare la restrizione di f a ciascun autospazio generalizzato; se λ è autovalore, $W = V'_\lambda$ e $\varphi = f|_W$, allora:

- $\dim(W) = \mu_a(\lambda) = h$
- $p_\varphi = \pm(t-\lambda)^h$
- $m_\varphi = (t-\lambda)^s$, con $1 \le s \le h$
- se $d_i = \dim\big(Ker(\varphi - \lambda id)^i\big)$, la stringa $\big[\lambda, s, [d_1 <\ldots< d_s = h]\big]$ è un invariante di coniugio.

Osservazione: Possiamo in ogni caso ridurci al caso nilpotente, poiché se $\psi = \varphi - \lambda id$, allora ψ ha solo l'autovalore 0 (cioè è nilpotente).
$p_\psi = \pm t^h;\;\; m_\psi = t^s$.
La stringa di invarianti di ψ è $\big[0, s, [d_1 <\ldots< d_s = h]\big]$.

PROPOSIZIONE 3.5.13: Sia $\psi \in End(V)$, $\dim(V) = h$, ψ nilpotente. Sono fatti equivalenti:

1) $m_\psi = t^h$ (ossia $m_\psi = \pm p_\psi$)
2) $\exists \mathcal{B}$ base di $V |\, \mathfrak{M}_\mathcal{B}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$.

Dimostrazione:

$\Leftarrow$) Ovvio, poiché $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}^h = 0$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}^{h-1} \neq 0$.

$\Rightarrow$) $Ker(\psi) \subseteq \ldots \subseteq Ker(\psi^h)$, con $\dim\Big(Ker(\psi^h)\Big) = h$.
$\psi^{h-1} \neq 0 \;\Rightarrow \exists v \notin Ker(\psi^{h-1}), v \neq 0$.
Mostriamo che $\mathcal{B} = \{\psi^{h-1}(v), \ldots, \psi(v), v\}$ è una base di V e in questo modo giungo alla tesi, poiché nella prima colonna di $\mathfrak{M}_\mathcal{B}(\psi)$ ci andrebbe $\psi\Big(\psi^{h-1}(v)\Big) = 0$, nella seconda $\psi\Big(\psi^{h-2}(v)\Big) = \psi^{h-1}(v)$ e così via.
Poiché i vettori sono in numero adeguato, basta che siano linearmente indipendenti.
Sia $a_0 v + a_1\psi(v) + \ldots + a_{h-1}\psi^{h-1}(v) = 0$.
Se applico ψ^{h-1}, ottengo $a_0\psi^{h-1}(v) = 0$, ma $\psi^{h-1}(v) \neq 0$, quindi $a_0 = 0$.
Allo stesso modo se applico ψ^{h-2} ottengo $a_1 = 0$; iterando il processo si ottiene $a_0 = \ldots = a_{h-1} = 0$, da cui la tesi.

DEFINIZIONE 3.5.6: La matrice $r \times r$:

$$J(\lambda, r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

è detta **blocco di Jordan** di ordine r relativo a λ.

DEFINIZIONE 3.5.7: Si chiama **matrice di Jordan** ogni matrice diagonale a blocchi:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_n} \end{pmatrix}$$

in cui ogni blocco J_i è un blocco di Jordan.

DEFINIZIONE 3.5.8: Se $f \in End(V)$, si chiama base di Jordan per f ogni base $\mathcal{B}$ tale che $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice di Jordan.

Osservazione: L'ultima proposizione afferma dunque che:
$m_\psi = \pm p_\psi = \pm t^h \;\Leftrightarrow \exists \mathcal{B} |\; \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi) = J(0, h)$.
In tal caso la stringa di invarianti è $\left[0, h, [1,2, \dots, h-1, h]\right]$.

LEMMA 3.5.14: Sia $\psi \in End(V)$ nilpotente con indice di nilpotenza s (cioè $\psi^s = 0$ e $\psi^{s-1} \neq 0$) $\dim(V) = h$.
$\forall j |\; 3 \leq j \leq s$ si consideri $Ker(\psi^{j-2}) \subseteq Ker(\psi^{j-1}) \subseteq Ker(\psi^j)$.
Sia W un sottospazio vettoriale di V tale che $Ker(\psi^j) = Ker(\psi^{j-1}) \oplus W$ e sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base di W. Allora:
1) $\psi(w_1), \dots, \psi(w_k) \in Ker(\psi^{j-1})$ e sono linearmente indipendenti;
2) $Span(\psi(w_1), \dots, \psi(w_k)) \cap Ker(\psi^{j-2}) = \{0\}$.

Dimostrazione:
1) Sicuramente $\psi(w_1), \dots, \psi(w_k) \in Ker(\psi^{j-1})$, poiché $\psi^{j-1}\left(\psi(w_j)\right) = \psi^j(w_j) = 0$.
Sia ora $a_1\psi(w_1) + \ldots + a_k\psi(w_k) = 0$. Per linearità
$\psi(a_1w_1 + \ldots + a_kw_k) = 0 \;\Rightarrow \underbrace{a_1w_1}_{\in W} + \ldots + \underbrace{a_kw_k}_{\in W} \in Ker(\psi) \cap W \subseteq Ker(\psi^{j-1}) \cap W = \{0\}$,
perciò $a_1w_1 + \ldots + a_kw_k = 0$, da cui $a_1 = \ldots = a_k = 0$ poiché $\{w_1, \dots, w_k\}$ è base di W.
2) Sia $z = a_1\psi(w_1) + \ldots + a_k\psi(w_k) \in Span(\psi(w_1), \dots, \psi(w_k)) \cap Ker(\psi^{j-2})$.
$z = \psi(a_1w_1 + \cdots + a_kw_k) \in Ker(\psi^{j-2}) \;\Rightarrow\; \psi^{j-1}(a_1w_1 + \cdots + a_kw_k) = 0 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; a_1w_1 + \ldots + a_kw_k \in Ker(\psi^{j-1}) \cap W = \{0\} \;\Rightarrow a_i = 0 \;\; \forall i \;\Rightarrow z = 0$.

TEOREMA 3.5.15 (forma canonica di Jordan per endomorfismi nilpotenti): $\psi \in End(V)$ nilpotente, $\dim(V) = h$, con stringa di invarianti $\left[0, s, [d_1 < d_2 < \ldots < d_s = h]\right]$. Allora:
1) $\exists \mathcal{B}$ base di V tale che:
$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} J(0, n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(0, n_t) \end{pmatrix},$$
dove $n_1 + \ldots + n_t = h$.
2) La matrice $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$, detta **forma di Jordan** di ψ, è unica a meno di permutazioni dei blocchi sulla diagonale ed è completamente determinata dalla stringa di invarianti $\left[0, s, [d_1 < d_2 < \ldots < d_s = h]\right]$.
3) La stringa di invarianti è un sistema completo di coniugio per endomorfismi nilpotenti. (Osservazione: Se conveniamo che i blocchi $J_1, \dots, J_m$ sulla diagonale siano in ordine decrescente, allora la forma di Jordan di ψ è unica e possiamo denotarla con $J(\psi)$).

Dimostrazione:
1) Per ipotesi $m_\psi(t) = t^s$.

$Ker(\psi) \subsetneq Ker(\psi^2) \subsetneq \ldots \subsetneq Ker(\psi^s) = V$.
Poniamo $d_i = \dim\left(Ker(\psi^i)\right)$.
Sia W_s un supplementare di $Ker(\psi^{s-1})$ in $Ker(\psi^s)$, ossia $Ker(\psi^s) = Ker(\psi^{s-1}) \oplus W_s$.
Poniamo $r_s = \dim(W_s)$. (Osservazione: $r_s = d_s - d_{s-1} = h - d_{s-1}$).
Sia $\{v_{1,s}, \ldots, v_{r_s,s}\}$ una base di W_s.
Poniamo $v_{j,s-1} = \psi(v_{j,s})\ \forall 1 \leq j \leq r_s$.
Per il lemma, $v_{1,s-1}, \ldots, v_{r_s,s-1}$ stanno in $Ker(\psi^{s-1})$ e sono linearmente indipendenti; dunque posso completarli a una base $\{v_{1,s-1}, \ldots, v_{r_s,s-1}, v_{r_s+1,s-1}, \ldots, v_{r_{s-1},s-1}\}$ di un supplementare W_{s-1} di $Ker(\psi^{s-2})$ in $Ker(\psi^{s-1})$, ossia $Ker(\psi^{s-1}) = Ker(\psi^{s-2}) \oplus W_{s-1}$.
Itero il procedimento scegliendo supplementari $W_j \mid Ker(\psi^j) = Ker(\psi^{j-1}) \oplus W_j$, $r_j = \dim(W_j)$.
I vettori così trovati possono essere organizzati in una tabella:

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
v_{1,s} & \cdots & v_{r_s,s} & & & & & & & & \textit{base di } W_s \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \\
v_{1,s-1} & \cdots & v_{r_s,s-1} & \cdots & v_{r_{s-1},s-1} & & & & & & \textit{base di } W_{s-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
v_{1,2} & \cdots & v_{r_s,2} & \cdots & v_{r_{s-1},2} & \cdots & v_{r_2,2} & & & & \textit{base di } W_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
v_{1,1} & \cdots & v_{r_s,1} & \cdots & v_{r_{s-1},1} & \cdots & v_{r_2,1} & \cdots & v_{r_1,1} & & \textit{base di } Ker(\psi)
\end{array}
$$

dove $r_1 = \dim\left(Ker(\psi)\right) = d_1$.
Si ha:
$V = Ker(\psi^s) = Ker(\psi^{s-1}) \oplus W_s = Ker(\psi^{s-2}) \oplus W_{s-1} \oplus W_s = \cdots$
$\ldots = Ker(\psi) \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s$,
dunque per costruzione i vettori presenti nella tabella formano una base di V (in quanto sono linearmente indipendenti e in numero adeguato).
Inoltre ad esempio:

$$v_{1,1} = \psi(v_{1,2}) = \psi^2(v_{1,3}) = \ldots = \psi^{s-1}(v_{1,s})$$

dunque:

$$\{v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,s}\} = \{\psi^{s-1}(v_{1,s}), \psi^{s-2}(v_{1,s}), \ldots, v_{1,s}\}$$

Pertanto la base $\mathcal{B}$ ottenuta riordinando i vettori della tabella procedendo da sinistra verso destra e risalendo le colonne è una base di Jordan.
Ogni colonna "alta" j produce in $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ un blocco di Jordan di ordine j.

2) Mostriamo che il tipo dei blocchi in $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ è completamente determinato dalla stringa di invarianti $[0, s, [d_1 < d_2 < \ldots < d_s = h]]$.
Notiamo innanzitutto che, per quanto visto nel punto 1):
   - s = indice di nilpotenza = massimo ordine dei blocchi in $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ (in quanto l'altezza di una colonna non può superare l'indice di nilpotenza);
   - $d_1 = \dim\left(Ker(\psi)\right)$ = numero totale dei blocchi (cioè il numero delle colonne).

   Più precisamente, poniamo b_j = numero dei blocchi $j \times j$ in $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$. Allora:
   $b_s = \dim(W_s) = r_s$;
   $b_j = \dim(W_j) - \dim(W_{j+1}) = r_j - r_{j+1}$.
   Se poniamo $r_{s+1} = 0$, allora $b_j = r_j - r_{j+1}\ \forall 1 \leq j \leq s$.

Esprimiamo i b_j in funzione dei d_j:
$r_j = \dim(W_j) = \dim\left(Ker(\psi^j)\right) - \dim\left(Ker(\psi^{j-1})\right) = d_j - d_{j-1}$;
$r_1 = \dim(Ker(\psi)) = d_1$.
Dunque poniamo $d_0 = 0$ e $d_{s+1} = d_s = h$, in modo da avere:
$b_j = r_j - r_{j+1} = d_j - d_{j-1} - (d_{j+1} - d_j) = 2d_j - d_{j-1} - d_{j+1}\ \ \forall j$.
Dunque $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ dipende, a meno di permutazioni dei blocchi sulla diagonale, solo dai d_i.

3) Se ψ_1, ψ_2 sono endomorfismi nilpotenti di V con stessa stringa di invarianti, allora, per quanto visto nei punti precedenti, $\exists \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi di V tale che $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}_1}(\psi_1) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_2}(\psi_2)$, quindi $\psi_1 \sim \psi_2$.

Osservazione: Dal lemma segue che $\dim(W_j) \leq \dim(W_{j-1})$, cioè $r_j \leq r_{j-1}$, ossia la successione $\{d_j - d_{j-1}\}_j$ è decrescente (in generale non strettamente).

Osservazione: Dato $f \in End(V)$, $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Allora ci restringiamo a lavorare in ogni autospazio generalizzato V'_{λ_j}; studiando l'endomorfismo di V'_{λ_j}, $f_j = f|_{V'_{\lambda_j}} - \lambda_j id$, troviamo la forma di Jordan $J(f_j)$ di f_j, da cui risaliamo facilmente a quella di $f|_{V'_{\lambda_j}}$, semplicemente aggiungendo a $\lambda_j I$ a $J(f_j)$. Dunque la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo f è:

$$J(f) = \begin{pmatrix} J(f_1) + \lambda_1 I & & \\ & \ddots & \\ & & J(f_k) + \lambda_k I \end{pmatrix}$$

Da questo segue:

COROLLARIO 3.5.16 (forma canonica di Jordan per endomorfismi triangolabili): Sia $f \in End(V)$ triangolabile. Allora:

1) $\exists \mathcal{B}$ base di $V |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice di Jordan ($\mathcal{B}$ è detta base di Jordan per f);
2) La matrice $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è unica a meno di permutazioni dei blocchi sulla diagonale ed è determinata dalla stringa di invarianti $s(\lambda_i) = \left[\lambda_i, s_i, \left[d_1(\lambda_1) < \ldots < d_{s_i}(\lambda_i)\right]\right]$ associati agli autovalori di f;
3) Due endomorfismi triangolabili di V sono coniugati $\Leftrightarrow$ hanno la stessa forma canonica di Jordan (che è quindi un invariante completo di coniugio).

COROLLARIO 3.5.17: Ogni matrice triangolabile A è simile alla sua trasposta.
Dimostrazione:
$J(A)$ dipende solo dalle dimensioni dei $Ker(A - \lambda I)^j$ e dunque dai $rk(A - \lambda I)^j$.
Poiché $\forall j,\ rk({}^tA - \lambda I)^j = rk(A - \lambda I)^j$, allora $J({}^tA) = J(A)$, da cui ${}^tA \sim A$.

Osservazione: Per quanto visto finora siamo in grado di stabilire se due endomorfismi triangolabili sono simili. Dunque la forma canonica di Jordan è un sistema completo di invarianti in $End(V)$, con V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso.
Però ad esempio in $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ abbiamo visto che esistono matrici non triangolabili; ovviamente la teoria della forma canonica di Jordan non può essere applicata a tali matrici. Riprendendo però il teorema che dice che $A \sim_{\mathbb{R}} B \iff A \sim_{\mathbb{C}} B$, possiamo lavorare in questo modo:

$$A \sim_{\mathbb{R}} B \iff A \sim_{\mathbb{C}} B \iff J_{\mathbb{C}}(A) = J_{\mathbb{C}}(B)$$

Dunque possiamo considerare $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$, cioè $A, B: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, trovare la loro forma di Jordan complessa (che di sicuro esiste) e stabilire se sono simili o meno a partire da questa. In quest'ultima parte del capitolo vogliamo arrivare alla stessa conclusione provando che nella classe di similitudine di A non triangolabile in $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})/_\sim$ esiste un rappresentante canonico, detto **forma di Jordan reale** di A, univocamente determinata da $J_{\mathbb{C}}(A)$ e quindi essenzialmente unica.

FORMA DI JORDAN REALE: $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ esiste un rappresentante canonico di similitudine, univocamente determinato dalla forma di Jordan complessa di A.
Dimostrazione:
Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Procediamo per passi dimostrando lemmi:

1) Poiché $p_A(t) \in \mathbb{R}[t]$, gli autovalori di A sono del tipo:
$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_k}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\mu_1, \dots, \mu_r, \overline{\mu_1}, \dots \overline{\mu_r}}_{\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$$
e $\mu_a(\mu_j) = \mu_a(\overline{\mu_j})\ \forall j$.
2) Pensiamo A come endomorfismo di $\mathbb{C}^n$. Allora per il teorema di Jordan:
$$\mathbb{C}^n = V'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V'_{\lambda_k} \oplus V'_{\mu_1} \oplus \dots \oplus V'_{\mu_r} \oplus V'_{\overline{\mu_1}} \oplus \dots \oplus V'_{\overline{\mu_r}}$$
3) Sia λ uno degli autovalori reali di A. Una base di Jordan di $V'_\lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ si trova prendendo basi opportune nella successione di sottospazi:
$$Ker(A - \lambda I) \subseteq Ker(A - \lambda I)^2 \subseteq \cdots$$
Poiché $\forall j$ il sottospazio $Ker(A - \lambda I)^j$ ha la stessa dimensione sia come sottospazio di $\mathbb{R}^n$ sia come sottospazio di $\mathbb{C}^n$ (in quanto è reale), allora possiamo scegliere una base di Jordan di V'_λ formata da vettori reali.
4) Sia $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ uno degli autovalori complessi non reali di A. Se $\{z_1, \dots, z_t\}$ è una base di Jordan di V'_μ, allora $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_t}\}$ è una base di Jordan di $V'_{\bar{\mu}}$.
Dimostrazione:
Poiché $\overline{Ker(A - \mu I)^j} = Ker(A - \bar{\mu} I)^j\ \ \forall j$, in quanto A è reale e quindi $A = \bar{A}$, allora i vettori $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_t} \in V'_{\bar{\mu}} = \bigcup_j Ker(A - \bar{\mu} I)^j$.
Dimostriamo che gli $\overline{z_\iota}$ sono linearmente indipendenti:
$a_1\overline{z_1} + \ldots + a_t\overline{z_t} = 0$, con $a_i \in \mathbb{C}\ \ \forall i$.
Coniugando:
$\overline{a_1}z_1 + \ldots \overline{a_t}z_t = 0 \ \Rightarrow \overline{a_\iota} = 0\ \ \forall i$, poiché gli z_i sono linearmente indipendenti $\Rightarrow a_i = 0\ \ \forall i$.
Inoltre $\dim(V'_\mu) = \mu_a(\mu) = \mu_a(\bar{\mu}) = \dim(V'_{\bar{\mu}}) = t$, quindi $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_t}\}$ è una base di $V'_{\bar{\mu}}$.
Ci resta da mostrare che è una base di Jordan di $V'_{\bar{\mu}}$.
Poiché $\{z_1, \dots, z_t\}$ è una base di Jordan di V'_μ, allora:
$$Az_j = \mu z_j \vee Az_j = \mu z_j + z_{j-1}\ \ \forall j$$
Se $Az_j = \mu z_j \ \Rightarrow A\overline{z_j} = \overline{Az_j} = \overline{\mu z_j} = \bar{\mu}\overline{z_j}$;
se $Az_j = \mu z_j + z_{j-1} \ \Rightarrow A\overline{z_j} = \bar{\mu}\overline{z_j} + \overline{z_{j-1}}$,
dunque $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_t}\}$ è effettivamente una base di Jordan di $V'_{\bar{\mu}}$.
(Osservazione: Abbiamo quindi mostrato che, se in $J_{\mathbb{C}}(A)$ ci sono b blocchi relativi all'autovalore μ di ordine m, allora in $J_{\mathbb{C}}(A)$ ci sono b blocchi di ordine m relativi a $\bar{\mu}$.)
5) Sia $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ uno degli autovalori complessi non reali di A. Allora esiste una base di $V'_\mu \oplus V'_{\bar{\mu}}$ formata da vettori reali.
Dimostrazione:

Sia $\{z_1, \dots, z_t\}$ una base di Jordan di V'_μ. Per 4) sappiamo che $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_t}\}$ è una base di Jordan di $V'_{\overline{\mu}}$. Quindi $\dim\left(V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}\right) = 2t$.
Poniamo $x_j = \Re\mathrm{e}(z_j)$ e $y_j = \Im\mathrm{m}(z_j)\ \ \forall j$.
Poiché $x_j = \frac{z_j+\overline{z_j}}{2}$ e $y_j = \frac{z_j-\overline{z_j}}{2i}$, i vettori $x_1, y_1, \dots, x_t, y_t \in V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}$, in quanto combinazioni lineari di z_j e $\overline{z_j}$. Inoltre, poiché gli z_j e $\overline{z_j}$ generano $V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}$, allora anche gli x_j, y_j generano, in quanto ciascuno è combinazione lineare di z_j e $\overline{z_j}$.
Infine, poiché $\dim\left(V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}\right) = 2t$, allora $\{x_1, y_1, \dots, x_t, y_t\}$ è una base di vettori reali di $V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}$.

6) Scriviamo la matrice associata a $A|_{V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}}$ rispetto alla base $\{x_1, y_1, \dots, x_t, y_t\}$.
   - Se $Az_j = \mu z_j$, allora:
$$Ax_j = A\frac{z_j + \overline{z_j}}{2} = \frac{\mu z_j + \overline{\mu z_j}}{2} = \Re\mathrm{e}(\mu z_j) \boxed{=} \Re\mathrm{e}(\mu)\Re\mathrm{e}(z_j) - \Im\mathrm{m}(\mu)\Im\mathrm{m}(z_j) = \\ = \Re\mathrm{e}(\mu)x_j - \Im\mathrm{m}(\mu)y_j$$
$$Ay_j = A\frac{z_j - \overline{z_j}}{2i} = \frac{\mu z_j - \overline{\mu z_j}}{2i} = \Im\mathrm{m}(\mu z_j) \boxed{=} \Im\mathrm{m}(\mu)\Re\mathrm{e}(z_j) + \Re\mathrm{e}(\mu)\Im\mathrm{m}(z_j) = \\ = \Im\mathrm{m}(\mu)x_j + \Re\mathrm{e}(\mu)y_j$$
     I passaggi contrassegnati con $\boxed{=}$ derivano dalle relazioni:
     $z, w \in \mathbb{C},\ \Re\mathrm{e}(zw) = \Re\mathrm{e}(z)\Re\mathrm{e}(w) - \Im\mathrm{m}(z)\Im\mathrm{m}(w)$;
     $\Im\mathrm{m}(zw) = \Im\mathrm{m}(z)\Re\mathrm{e}(w) + \Re\mathrm{e}(z)\Im\mathrm{m}(w)$.
   - Analogamente, se $Az_j = \mu z_j + z_{j-1}$:
$$Ax_j = A\frac{z_j + \overline{z_j}}{2} = \frac{\mu z_j + z_{j-1} + \overline{\mu}\overline{z_j} + \overline{z_{j-1}}}{2} = \Re\mathrm{e}(\mu z_j) + \Re\mathrm{e}(z_{j-1}) = \\ = \Re\mathrm{e}(\mu)x_j - \Im\mathrm{m}(\mu)y_j + x_{j-1}$$
$$Ay_j = \Im\mathrm{m}(\mu)x_j + \Re\mathrm{e}(\mu)y_j + y_{j-1}$$

   Pertanto, se la matrice associata ad $A|_{V'_\mu}$ rispetto alla base $\{z_1, \dots, z_t\}$ era:
$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$
   con J_i blocco di Jordan di ordine m_i relativo a μ, allora la matrice associata a $A|_{V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}}$ rispetto alla base $\{x_1, y_1, \dots, x_t, y_t\}$ è una matrice di ordine $2t$ e del tipo:
$$\begin{pmatrix} \boxed{\widetilde{J_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\widetilde{J_r}} \end{pmatrix}$$
   dove $\widetilde{J_i}$ è un blocco di ordine $2m_i$ della forma:
$$\begin{pmatrix} H_\mu & I & & & \\ & H_\mu & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & H_\mu & I \\ & & & & H_\mu \end{pmatrix}$$
   con $H_\mu = \begin{pmatrix} \Re\mathrm{e}(\mu) & \Im\mathrm{m}(\mu) \\ -\Im\mathrm{m}(\mu) & \Re\mathrm{e}(\mu) \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Osservazione: Se per la coppia di autovalori μ e $\bar{\mu}$ si fosse scelto di lavorare con $\bar{\mu}$, al posto del blocchetto $\begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(\mu) & \mathfrak{Im}(\mu) \\ -\mathfrak{Im}(\mu) & \mathfrak{Re}(\mu) \end{pmatrix}$ avremmo avuto il blocchetto $\begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(\mu) & -\mathfrak{Im}(\mu) \\ \mathfrak{Im}(\mu) & \mathfrak{Re}(\mu) \end{pmatrix}$, simile ma non uguale a quello associato a μ.
Per evitare ambiguità nella forma $J_{\mathbb{R}}(A)$ conveniamo di scegliere l'autovalore| $\mathfrak{Im}(\mu) > 0$.
A questo punto la forma di Jordan reale di A è unica a meno di permutazioni dei blocchetti.

Esempio: Trovare la forma di Jordan reale di $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} = -t(t^2) + 1(1) = -t^3 + 1 = (1-t)(t^2+t+1)$.

Poiché su $\mathbb{C}$ il polinomio caratteristico ha tre radici distinte, $1, \mu = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \bar{\mu} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, allora su $\mathbb{C}$ A è diagonalizzabile:

$$J_{\mathbb{C}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

Per quanto visto prima, sostituiamo i due blocchetti (μ) e $(\bar{\mu})$ con il blocchetto $\begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(\mu) & \mathfrak{Im}(\mu) \\ -\mathfrak{Im}(\mu) & \mathfrak{Re}(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dunque:

$$J_{\mathbb{R}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

PROPOSIZIONE 3.5.18: Siano $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$ campi. $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Allora $m_{\mathbb{K}}(A) = m_{\mathbb{K}'}(A)$ (dove $m_{\mathbb{F}}(A)$ è il polinomio minimo di A su $\mathbb{F}$).
Dimostrazione:
Lavoriamo in $\mathbb{K}'[t]$. In questo anello, poiché $m_{\mathbb{K}'}(A)$ genera l'ideale dei polinomi che si annullano in A, e $m_{\mathbb{K}}(A)$ appartiene a questo ideale, ho che $m_{\mathbb{K}'}(A) | m_{\mathbb{K}}(A)$.
Per concludere mi basta mostrare che $\deg(m_{\mathbb{K}}(A)) \leq \deg(m_{\mathbb{K}'}(A))$, poiché, essendo sicuramente $\deg(m_{\mathbb{K}}(A)) \geq \deg(m_{\mathbb{K}'}(A))$, avrei che $\deg(m_{\mathbb{K}}(A)) = \deg(m_{\mathbb{K}'}(A))$, ma essendo i due polinomi monici, avrei la tesi.
Notiamo innanzitutto che, dati $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n \subseteq (\mathbb{K}')^n$, sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ lo sono su $(\mathbb{K}')^n$, infatti entrambe le condizioni sono equivalenti alla condizione:
"Se M è la matrice $n \times k$ avente i v_i come colonne, $\exists$minore $k \times k$ di M con determinante $\neq 0$".
Mostriamo ora che, date $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, con $k \leq n^2$, sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ lo sono su $\mathbb{K}'$.
Infatti, considerando che $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}') \cong (\mathbb{K}')^{n^2}$, per la precedente osservazione se esiste una combinazione lineare non nulla su $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}')$ delle A_i che dà 0, allora esiste anche su $(\mathbb{K}')^{n^2}$, quindi anche su $\mathbb{K}^{n^2}$, quindi su $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.
Inoltre il viceversa è ovvio, in quanto se le A_i sono indipendenti su $\mathbb{K}'$ lo sono anche su $\mathbb{K}$.

A questo punto sia $d = \deg\big(m_{\mathbb{K}'}(A)\big)$. Allora $I, A, \dots, A^d$ sono linearmente dipendenti su $\mathbb{K}'$ per definizione di polinomio minimo, ma per quanto visto $I, A, \dots, A^d$ sono linearmente dipendenti anche su $\mathbb{K}$, quindi $\exists$polinomio $q(t) \in \mathbb{K}[t], q \neq 0, \deg(q) \leq d$ tale che $q(A) = 0$.
Per cui $\deg\big(m_{\mathbb{K}}(A)\big) \leq d$, da cui la tesi.

Osservazione: Quindi $m_{\mathbb{R}}(A) = m_{\mathbb{C}}(A)\ \ \forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Inoltre è evidente che $p_{\mathbb{R}}(A) = p_{\mathbb{C}}(A)$, poiché il polinomio caratteristico, essendo un determinante, dipende solo da A.

3.6 BASI CICLICHE PER ENDOMORFISMI

Nel seguito sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $char(\mathbb{K}) = 0$.

DEFINIZIONE 3.6.1: $\dim(V) = n$, $f \in End(V)$. Una base $\mathcal{B}$ di V si dice **ciclica** per f se $\exists v \in V$ tale che $\mathcal{B} = \{v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$.

DEFINIZIONE 3.6.2: $v \in V$. $I(f, v) = \{q \in \mathbb{K}[t] | q(f)(v) = 0\}$ è un ideale di $\mathbb{K}[t]$, dunque esiste un generatore $m_{f,v}$ di $I(f, v)$, detto **polinomio minimo di v rispetto a f**.

Osservazione: Visto che $I_f \subseteq I(f, v)$, si ha che $m_{f,v} | m_f$.

LEMMA 3.6.1: $\mathbb{K}$ campo con $char(\mathbb{K}) = 0$. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $W_1, \dots, W_n$ sottospazi di V tali che $V = W_1 \cup \dots \cup W_n$. Allora $\exists i$ tale che $V = W_i$.
Dimostrazione:
Supponiamo che l'unione $V = W_1 \cup \dots \cup W_n$ sia minimale, cioè $W_j \nsubseteq W_1 \cup \dots W_{j-1} \cup W_{j+1} \cup \dots \cup W_n\ \forall j$. Supponiamo per assurdo che $n \geq 2$; allora per minimalità $W_n \nsubseteq W_1 \cup \dots \cup W_{n-1}$.
Sia $u \notin W_n$ e $v \in W_n \backslash (W_1 \cup \dots \cup W_{n-1})$ e denotiamo $S = \{v + tu | t \in \mathbb{K}\}$.
$u \neq 0$ e $\#\mathbb{K} = +\infty$, dunque $\#S = +\infty$; visto che $S \subseteq V = W_1 \cup \dots \cup W_n$, dovrà esistere un W_i tale che $\#(S \cap W_i) = +\infty$. Vediamo che ciò è assurdo.
Se $v + tu \in W_n$ per $t \neq 0$, si avrebbe $W_n \ni (v + tu) - v = tu$, cioè $u \in W_n$, assurdo.
Se invece $v + t_1 u, v + t_2 u \in W_i$ con $t_1 \neq t_2$ e $i < n$, si avrebbe $(t_2 - t_1)v = t_2(v + t_1 u) - t_1(v + t_2 u) \in W_i$, cioè $v \in W_i$, assurdo.
Dunque $\#(S \cap W_i) \leq 1\ \forall i$, da cui l'assurdo e la tesi.

Osservazione: La precedente proposizione è falsa se $char(\mathbb{K}) > 0$; non è infatti difficile trovare un controesempio con $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$.

LEMMA 3.6.2: $f \in End(V)$. Allora $\exists v \in V$ tale che $m_{f,v} = m_f$.
Dimostrazione:
Visto che $\forall v \in V\ m_{f,v} | m_f$, l'insieme $\{m_{f,v} | v \in V\}$ è finito, pertanto coincide con $\{m_{f,v_1}, \dots, m_{f,v_p}\}$ per alcuni $v_i \in V$.
$\forall j = 1, \dots p$ considero i sottospazi $W_j = Ker\left(m_{f,v_j}(f)\right) = \left\{z \in V \middle| m_{f,v_j}(f)(z) = 0\right\}$.

$\forall z \in V$, $\exists j$ tale che $m_z = m_{v_j}$ e quindi $m_{v_j}(f)(z) = m_z(f)(z) = 0$, cioè $z \in W_j$.
Allora $V = W_1 \cup \dots \cup W_p$ e dunque $\exists i_0$ tale che $W_{i_0} = V$, ossia $Ker\left(m_{v_{i_0}}(f)\right) = V$, cioè $m_{v_{i_0}} \in I_f$ quindi $m_f | m_{v_{i_0}}$.

TEOREMA 3.6.3: f ammette una base ciclica $\Leftrightarrow m_f = \pm p_f$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Ovvia, in quanto se $\{v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ sono linearmente indipendenti, $\deg(m_f) \geq n$ e dunque $m_f = \pm p_f$.
$\Leftarrow$) Per il lemma $\exists v \in V$ tale che $m_{f,v} = m_f$. Per ipotesi $\deg(m_{f,v}) = \deg(m_f) = n$.
Ma allora $\{v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ sono linearmente indipendenti; infatti se $b_0 v + b_1 f(v) + \dots + b_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$, il polinomio $g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{n-1} t^{n-1}$ deve soddisfare $g(t) \in I(f, v)$, ma $m_{f,v} = m_f$, dunque tutti i polinomi in $I(f, v)$ hanno grado $\geq n$, quindi $g(t) \equiv 0$ e $b_i = 0 \ \forall i$.

4 FORME BILINEARI

4.1 FORME BILINEARI E FORME QUADRATICHE

DEFINIZIONE 4.1.1: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. $\phi: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta **applicazione** (o **forma**) **bilineare** se:
1) $\forall x, y, z \in V$, $\phi(x+y,z) = \phi(x,z) + \phi(y,z)$
2) $\forall x, y, z \in V$, $\phi(x,y+z) = \phi(x,y) + \phi(x,z)$
3) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x,y) = \phi(x, \alpha y)$.

PROPOSIZIONE 4.1.1: Le seguenti applicazioni sono bilineari:
1) $\phi \equiv 0$;
2) $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} |\ \phi(X,Y) = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, detto **prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$**;
3) $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$, $\phi: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} |\ \phi(X,Y) = {}^tXAY$;
4) $\phi: \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \times \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \to \mathbb{K} |\ \phi(A,B) = tr({}^tAB)$;
5) $\phi: \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \times \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \to \mathbb{K} |\ \phi(A,B) = tr(AB)$;
6) $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$, $\phi: \mathbb{K}_n[x] \times \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K} |\ \phi\big(p(x), q(x)\big) = \sum_{i=1}^r p(a_i)q(a_i)$, cioè la valutazione ($\mathbb{K}_n[x]$ è l'insieme dei polinomi di grado $\leq n$);
7) $\phi: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} |\ \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$, detto **prodotto scalare di Minkowski**.

Dimostrazione:
1) Ovvia.
2) Segue immediatamente dal fatto che la trasposizione e il prodotto fra matrici sono lineari.
3) Analoga alla 2).
4) La traccia, così come la trasposizione e il prodotto fra matrici, è lineare.
5) Analoga alla 4).
6) Segue dal fatto che la valutazione è lineare.
7) Lasciata al lettore.

DEFINIZIONE 4.1.2: Una forma bilineare $\phi: V \times V \to \mathbb{K}$ si dice **prodotto scalare** se è **simmetrica**, cioè $\phi(v,w) = \phi(w,v)\ \ \forall v, w \in V$.

PROPOSIZIONE 4.1.2: Delle precedenti forme bilineari, 1), 2), 4), 5), 6), 7) sono prodotti scalari, mentre la 3) è un prodotto scalare $\Leftrightarrow A$ è simmetrica.
Dimostrazione:
La 3) è un prodotto scalare $\Leftrightarrow {}^tXAY = {}^tYAX = {}^t({}^tX{}^tAY)\ \ \forall X, Y \in \mathbb{K}^n$, ma essendo numeri, ${}^tXAY = {}^t({}^tX{}^tAY)\ \forall X, Y \in \mathbb{K}^n \ \Leftrightarrow\ {}^tXAY = {}^tX{}^tAY\ \ \forall X, Y \in \mathbb{K}^n$. Poiché l'uguaglianza deve valere $\forall X, Y \in \mathbb{K}^n$, in particolare varrà per $X = e_i, Y = e_j$, con $1 \leq i, j \leq n$.
Quindi ${}^te_iAe_j = {}^te_i{}^tAe_j\ \forall i, j\ \Leftrightarrow [A]_{ij} = [{}^tA]_{ij}\ \ \forall ij\ \Leftrightarrow A = {}^tA$.

La 4) è un prodotto scalare perché $tr({}^tAB) = tr({}^t({}^tAB)) = tr({}^tBA)$, mentre la 5) è un prodotto scalare perché abbiamo dimostrato che $tr(AB) = tr(BA)$. Le altre sono verifiche immediate.

Osservazione: Durante tutta la trattazione delle forme bilineari lavoreremo solo in campi $\mathbb{K}$ con $char(\mathbb{K}) \neq 2$, per poter dividere per 2.

DEFINIZIONE 4.1.3: Sia $\phi: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare. Si definisce **forma quadratica indotta da ϕ** l'applicazione $q_\phi: V \to \mathbb{K}$ definita da $q_\phi(v) = \phi(v, v) \;\; \forall v \in V$.

Esempio: $\phi(X, Y) = {}^tXY$ su $\mathbb{K}^n$ induce $q_\phi(x) = {}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (detta **forma quadratica standard**).

DEFINIZIONE 4.1.4: Una applicazione $q: V \to \mathbb{K}$ si dice **forma quadratica** se $\exists \phi$ forma bilineare su $V |\; q = q_\phi$.

Osservazione: Più forme bilineari possono definire la stessa forma quadratica, ad esempio $\phi_1 \equiv 0$ e $\phi_2(X, Y) = {}^tXAY$, con A antisimmetrica, inducono la stessa $q_\phi = 0$, in quanto: ${}^tXAX = {}^t({}^tX{}^tAX) \boxed{=} {}^tX(-A)X = -{}^tXAX \;\Rightarrow\; {}^tXAX = 0$ (il passaggio $\boxed{=}$ deriva dal fatto che la trasposizione lascia invariato un numero).

PROPOSIZIONE 4.1.3: Sia $q: V \to \mathbb{K}$ una forma quadratica. Allora esiste uno e un solo prodotto scalare che induce q.
Dimostrazione:
Per definizione $\exists \phi$ forma bilineare tale che $q = q_\phi$, cioè tale che $q(v) = \phi(v, v) \;\; \forall v \in V$.
Allora $\phi'(u, v) = \frac{\phi(u,v)+\phi(v,u)}{2}$ è un prodotto scalare che induce q (in quanto è evidentemente simmetrico e $\phi'(u, u) = \phi(u, u) = q(u)$).
Inoltre se ψ è un prodotto scalare che induce q, allora:

$$q(u + v) - q(u) - q(v) = \psi(u + v, u + v) - \psi(u, u) - \psi(v, v) = \psi(u, v) + \psi(v, u) = \\ = 2\psi(u, v)$$

da cui $\psi(u, v) = \frac{q(u+v)-q(u)-q(v)}{2}$ (detta formula di polarizzazione), dunque ψ è univocamente determinato e quindi unico.

DEFINIZIONE 4.1.5: Definiamo:

- $Bil(V) = \{\phi: V \times V \to \mathbb{K} |\; \phi \text{ è } bilineare\}$
- $PS(V) = \{\phi: V \times V \to \mathbb{K} |\; \phi \text{ è } prodotto\ scalare\}$
- $Q(V) = \{q: V \to \mathbb{K} |\; q \text{ è } forma\ quadratica\}$.

DEFINIZIONE 4.1.6: Definiamo una somma e un prodotto per scalari in $Bil(V)$:

- $\forall \phi, \psi \in Bil(V)$, $(\phi + \psi)(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(v, w) + \psi(v, w)$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \phi \in Bil(V)$, $(\lambda\phi)(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\phi(v, w)$.

PROPOSIZIONE 4.1.4: 1) $Bil(V)$ è uno spazio vettoriale;
2) $PS(V)$ è un sottospazio vettoriale di $Bil(V)$;
3) $Q(V)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(V, \mathbb{K}) = \{f: V \to \mathbb{K}\}$.

Osservazione: $PS(V) \cong Q(V)$, in quanto l'applicazione $F: PS(V) \to Q(V) | F(\phi) = q_\phi$ è un isomorfismo (sappiamo che è bigettiva e si vede con un'immediata verifica che è lineare).

Notazione: Indicheremo con (V, ϕ) lo spazio vettoriale V dotato del prodotto scalare ϕ.

DEFINIZIONE 4.1.7: Siano (V, ϕ) e (W, ψ) $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. $f: V \to W$ lineare si dice **isometria** se:

- f è isomorfismo di spazi vettoriali;
- $\forall x, y \in V, \phi(x, y) = \psi\big(f(x), f(y)\big)$.

DEFINIZIONE 4.1.8: (V, ϕ) e (W, ψ) si dicono **isometrici** se $\exists f: V \to W$ isometria (in tal caso ϕ e ψ si dicono **prodotti scalari isometrici**).

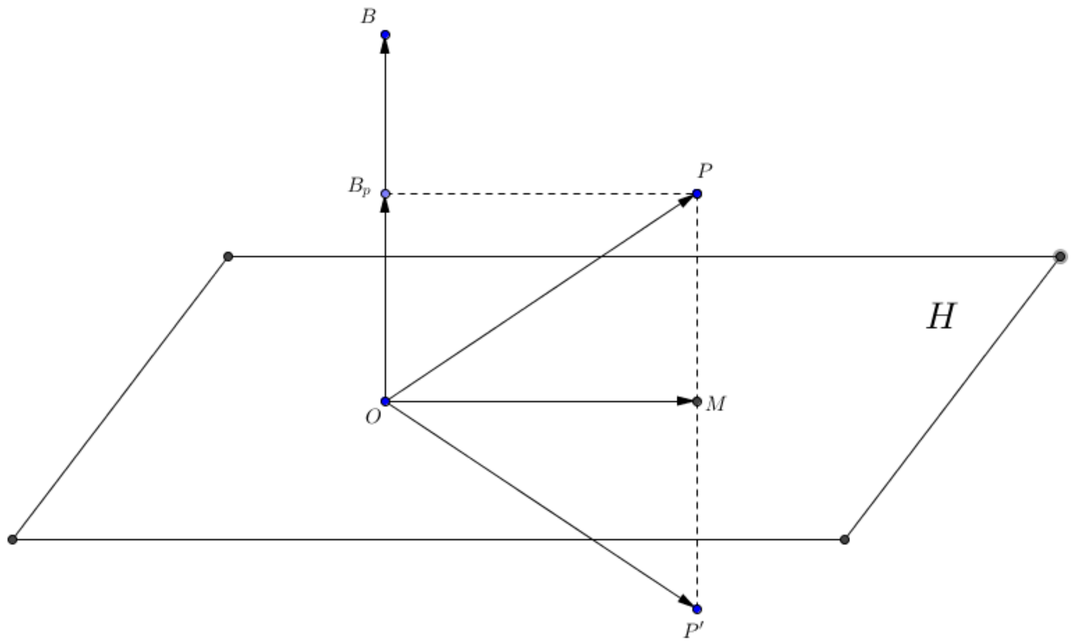
Osservazione: L'essere isometrici è una relazione di equivalenza (la verifica è lasciata al lettore).

Osservazione: Se $f: V \to (W, \psi)$ è un isomorfismo, l'applicazione $f_\psi^*: V \times V \to \mathbb{K} | f_\psi^*(v, w) = \psi\big(f(v), f(w)\big)$ è evidentemente un prodotto scalare su V e $f: \big(V, f_\psi^*\big) \to (W, \psi)$ è un'isometria per costruzione.
Dunque in generale basterà studiare $\{(V, \phi)\}/_{isometrie}$, con V fissato.

Denoteremo con $\langle , \rangle$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$.

Esempi:

1) Le rotazioni di centro l'origine sono isometrie lineari di $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard, infatti sia $\binom{x}{y}$ un vettore di $\mathbb{R}^2$ e sia $\binom{x'}{y'}$ il vettore ottenuto ruotando l'altro di un angolo α; allora:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix};$$
$$\langle \begin{pmatrix} x_1\cos(\alpha) - y_1\sin(\alpha) \\ x_1\sin(\alpha) + y_1\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2\cos(\alpha) - y_2\sin(\alpha) \\ x_2\sin(\alpha) + y_2\cos(\alpha) \end{pmatrix} \rangle =$$
$$= x_1x_2(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) + y_1y_2(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) = x_1x_2 + y_1y_2 =$$
$$= \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle$$
2) Sia $H = \{b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0\}$ un iperpiano in $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ passante per O.
Sia $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Allora $H = \{X | \langle B, X \rangle = 0\}$.
Sia ora $\rho: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la riflessione ortogonale rispetto ad H che associa ad ogni $P \in \mathbb{R}^n$ il simmetrico rispetto ad H.
Grazie alla figura (che è in $\mathbb{R}^3$ ma che comunque rende l'idea della situazione), vediamo che: $\rho(P) = P - 2B_P$; ma avendo l'iperpiano dimensione $n - 1$, su di esso giaceranno $n - 1$ componenti di P, che chiamiamo $M_1, \ldots, M_{n-1}$, mentre l'ultima componente sarà esattamente B_P. Allora:
$\langle P, B \rangle = \langle B_P + \sum_{i=1}^{n-1} M_i, B \rangle = \langle B_P, B \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} \langle M_i, B \rangle = \langle B_P, B \rangle.$



Sia ora $B_P = k \cdot B$; quindi:
$\langle P, B\rangle = \langle B_P, B\rangle = k\langle B, B\rangle \Rightarrow k = \frac{\langle P,B\rangle}{\langle B,B\rangle}$.
Dunque $\rho(P) = P - 2\frac{\langle P,B\rangle}{\langle B,B\rangle}B$.
Notiamo che $\rho^2 = id$, infatti:

$$\rho(\rho(P)) = P - 2\frac{\langle P,B\rangle}{\langle B,B\rangle}B - 2\frac{\langle P - 2\frac{\langle P,B\rangle}{\langle B,B\rangle}B, B\rangle}{\langle B,B\rangle}B =$$
$$= P - 2\frac{B}{\langle B,B\rangle}\left(\langle P,B\rangle + \langle P,B\rangle - 2\frac{\langle P,B\rangle}{\langle B,B\rangle}\langle B,B\rangle\right) = P$$

Inoltre ρ è un'isometria, in quanto:
- è lineare (la verifica è immediata);
- è iniettiva, poiché:
$$Ker(\rho) = \left\{P \mid P = 2\frac{\langle P,B\rangle}{\langle B,B\rangle}B\right\} = \left\{P \mid P = 2\frac{\langle P,B\rangle}{\langle B,B\rangle}B = 2\frac{\langle 2\frac{\langle P,B\rangle}{\langle B,B\rangle}B, B\rangle}{\langle B,B\rangle}B\right\} =$$
$$= \{P \mid \langle P,B\rangle = 2\langle P,B\rangle\} = \{0\}$$
- è surgettiva, poiché la controimmagine di P è $\rho(P)$, in quanto $\rho^2 = id$;
- mantiene i prodotti scalari, in quanto:
$$\langle \rho(X), \rho(Y)\rangle = \langle X - 2\frac{\langle X,B\rangle}{\langle B,B\rangle}B, Y - 2\frac{\langle Y,B\rangle}{\langle B,B\rangle}B\rangle$$
$$= \langle X,Y\rangle - 2\frac{\langle X,B\rangle\langle Y,B\rangle}{\langle B,B\rangle} - 2\frac{\langle X,B\rangle\langle Y,B\rangle}{\langle B,B\rangle} + 4\frac{\langle X,B\rangle\langle Y,B\rangle\langle B,B\rangle}{\langle B,B\rangle\langle B,B\rangle} = \langle X,Y\rangle.$$

DEFINIZIONE 4.1.9: Si definisce **gruppo ortogonale** di (V, ϕ) l'insieme
$O(V,\phi) = \{f \in GL(V) \mid f: (V,\phi) \to (V,\phi)\ \text{è}\ isometria\}$, cioè:
$f \in O(V,\phi) \Leftrightarrow \phi(x,y) = \phi(f(x), f(y))\ \forall x, y \in V$.

PROPOSIZIONE 4.1.5: $(O(V,\phi), \circ)$ è un gruppo ed è sottogruppo di $GL(V)$.

DEFINIZIONE 4.1.10: $x, y \in V$ si dicono **ortogonali** rispetto a ϕ se $\phi(x, y) = 0$.

Osservazione: Se x, y sono ortogonali rispetto a ϕ e $f \in O(V, \phi)$, allora $f(x), f(y)$ sono ortogonali rispetto a ϕ.

DEFINIZIONE 4.1.11: $\phi \in Bil(V)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. Si definisce **matrice associata** a ϕ rispetto a $\mathcal{B}$ la matrice $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ definita da $[\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)]_{ij} = \phi(v_i, v_j)$.

PROPOSIZIONE 4.1.6: Se $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = A$, allora $\forall v, w \in V,\ \phi(v, w) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} A [w]_{\mathcal{B}}$.
Dimostrazione:

$$\phi(v, w) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \phi(v_i, v_j) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} A [w]_{\mathcal{B}}.$$

PROPOSIZIONE 4.1.7: Sia $\mathcal{B}$ base di V. Allora l'applicazione:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}: \begin{array}{ccc} Bil(V) & \to & \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \\ \phi & \to & \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) \end{array}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Dimostrazione:
$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ è evidentemente una bigezione, poiché $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}),\ \phi(v_i, v_j) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} A [w]_{\mathcal{B}}$, dove $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è fissata. Essendo ϕ definita su vettori di base, è univoca l'estensione a tutti i $v \in V$. Inoltre dalla definizione segue la linearità, dunque ho la tesi.

COROLLARIO 4.1.8: $\dim(Bil(V)) = n^2$.

Osservazione: $\phi \in Bil(V)$, $\mathcal{B}$ base di V. Allora $\phi \in PS(V) \iff \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ è simmetrica.

COROLLARIO 4.1.9: $\dim(PS(V)) = \dim(Q(V)) = \frac{n(n+1)}{2}$.
Dimostrazione:
$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}|_{PS(V)}: PS(V) \to \mathcal{S}(n, \mathbb{K})$ è un isomorfismo.

Osservazione: $\mathcal{B}$ base di V, $\phi \in PS(V)$, $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$. Sia ψ_A il prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$ associato alla matrice simmetrica A, cioè $\psi_A(X, Y) = {}^tXAY$.
Allora $[\ ]_{\mathcal{B}}: (V, \phi) \to (\mathbb{K}^n, \psi_A)$ è un'isometria, infatti $\phi(v, w) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} A [w]_{\mathcal{B}} = \psi_A([v]_{\mathcal{B}}, [w]_{\mathcal{B}})$.

PROPOSIZIONE 4.1.10: $f: (V, \phi) \to (W, \psi)$ isomorfismo, $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{S}$ base di W.
Siano $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$, $N = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\psi)$, $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(f)$. Allora f è isometria $\Leftrightarrow M = {}^tANA$.
Dimostrazione:
Siano $X = [v]_{\mathcal{B}}$, $Y = [w]_{\mathcal{B}}$. Allora $\phi(v, w) = {}^tXMY$.
$\psi(f(v), f(w)) = {}^t[f(v)]_{\mathcal{S}} N [f(w)]_{\mathcal{S}} = {}^t(AX)N(AY) = {}^tX{}^tANAY$.
Dunque f è isometria $\Leftrightarrow\ {}^tXMY = {}^tX{}^tANAY\ \ \forall X, Y \in \mathbb{K}^n \Leftrightarrow M = {}^tANA$ (per il solito discorso che quell'uguaglianza deve valere $\forall X, Y$ e quindi in particolare per gli $X = e_i, Y = e_j$).

Osservazione: f isomorfismo. $f \in O(V, \phi) \iff M = {}^tAMA$, dove $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ e $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

4.2 CONGRUENZA E DECOMPOSIZIONE DI WITT

DEFINIZIONE 4.2.1: $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ si dicono **congruenti** se $\exists M \in GL(n, \mathbb{K}) |\ B = {}^tMAM$.

PROPOSIZIONE 4.2.1: Sia $\phi \in Bil(V)$ e $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V. Poniamo $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ e $A' = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.
Allora A e A' sono congruenti.
Dimostrazione:
Sia M la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$; quindi $[v]_{\mathcal{B}} = M[v]_{\mathcal{B}'}\ \ \forall v \in V$.
Allora:
$\phi(u, v) = {}^t[u]_{\mathcal{B}}A[v]_{\mathcal{B}} = {}^t[u]_{\mathcal{B}'}{}^tMAM[v]_{\mathcal{B}'}$;
$\phi(u, v) = {}^t[u]_{\mathcal{B}'}A'[v]_{\mathcal{B}'}$.
Poiché ${}^t[u]_{\mathcal{B}'}{}^tMAM[v]_{\mathcal{B}'} = {}^t[u]_{\mathcal{B}'}A'[v]_{\mathcal{B}'}\ \ \forall u, v \in V$, allora $A' = {}^tMAM$.

Osservazione: La congruenza è una relazione di equivalenza

Osservazione: Il rango è un invariante di congruenza (poiché si moltiplica per matrici invertibili).

DEFINIZIONE 4.2.2: $rk(\phi) = rk\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)\big)$.

Osservazione: La definizione è ben posta perché il rango non dipende da $\mathcal{B}$.

PROPOSIZIONE 4.2.2: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\phi, \psi \in PS(V)$. Sono fatti equivalenti:
1) (V, ϕ) e (V, ψ) sono isometrici;
2) $\forall \mathcal{B}$ base di V, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ e $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ sono congruenti;
3) $\exists \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di $V |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\psi)$.

Dimostrazione:
Analoga a quella per gli endomorfismi.

Osservazione: Gli invarianti rispetto all'isometria in $PS(V)$ corrispondono agli invarianti rispetto alla congruenza in $\mathcal{S}(n, \mathbb{K})$.

Osservazione: Se $B = {}^tMAM$, con $M \in GL(n, \mathbb{K})$, allora $\det(B) = \det(A) \cdot (\det(M))^2$. Quindi:
- il determinante non è invariante di congruenza;
- se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il segno del determinante è invariante per congruenza.

DEFINIZIONE 4.2.3: Sia $\phi \in PS(V)$. Si definisce **radicale** di ϕ l'insieme $Rad(\phi) = \{v \in V |\ \phi(v, w) = 0\ \ \forall w \in V\}$.

PROPOSIZIONE 4.2.3: $Rad(\phi)$ è sottospazio di V e $\dim\big(Rad(\phi)\big) = \dim(V) - rk(\phi)$.
Dimostrazione:
La verifica che sia sottospazio è lasciata.
Sia $\dim(V) = n$ e $\mathcal{B}$ base di V; sia $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
Poniamo $X = [v]_{\mathcal{B}}$ e $Y = [w]_{\mathcal{B}}$.

$v \in Rad(\phi) \Leftrightarrow \phi(v,w) = 0 \;\; \forall w \in V \Leftrightarrow {}^tXAY = 0 \;\; \forall Y \in \mathbb{K}^n \;\boxed{\Leftrightarrow}\; {}^tXA = 0 \Leftrightarrow {}^t({}^tXA) = 0$
$\Leftrightarrow AX = 0$

dove il passaggio $\boxed{\Leftrightarrow}$ segue dal fatto che deve essere ${}^tXAY = 0 \;\; \forall Y \in \mathbb{K}^n$, dunque in particolare per $Y = e_i$, con $1 \leq i \leq n$.
Quindi l'immagine di $Rad(\phi)$ tramite l'isomorfismo $[\;]_{\mathcal{B}}: V \to \mathbb{K}^n$ è $Ker(A)$, per cui $\dim\big(Rad(\phi)\big) = \dim\big(Ker(A)\big) = n - rk(A) = n - rk(\phi)$.

Osservazione: In particolare $Rad(\phi)$ si calcola risolvendo il sistema lineare $AX = 0$.

DEFINIZIONE 4.2.4: Diciamo che $\phi \in PS(V)$ è **non degenere** se $Rad(\phi) = \{0\}$, ossia se $\phi(v,w) = 0 \;\; \forall w \in V \Rightarrow v = 0$ (e **degenere** altrimenti).

COROLLARIO 4.2.4: ϕ è non degenere $\Leftrightarrow rk(\phi) = \dim(V)$.

Osservazione: Se $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ allora ϕ è non degenere $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Notazione: Se W è sottospazio di V e $\phi \in PS(V)$, denoteremo con $\phi|_W$ la restrizione di ϕ a $W \times W$.

Osservazione: Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ prodotto scalare su $\mathbb{K}^2$ e $W = Span(e_1)$.
$\phi|_W \equiv 0$, dunque la restrizione di un prodotto scalare non degenere può essere degenere.

DEFINIZIONE 4.2.5: (V,ϕ) e (W,ψ) si dicono **canonicamente isometrici** se esiste un'isometria fra di essi che non dipende da nessuna base.

PROPOSIZIONE 4.2.5: $\phi \in PS(V)$.
1) Se $V = Rad(\phi) \oplus U$, allora $\phi|_U$ è non degenere.
2) Se $V = Rad(\phi) \oplus U_1 = Rad(\phi) \oplus U_2$, allora U_1 e U_2 sono canonicamente isometrici.

Dimostrazione:
1) Sia $n = \dim(V)$, $p = \dim\big(Rad(\phi)\big)$.
   Sia $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_p\}$ base di $Rad(\phi)$; sia $\mathcal{B}_2 = \{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ base di U.
   Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ (che ovviamente è base di V); allora:
   $$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right),$$
   dove $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_2}(\phi|_U) \in \mathcal{M}(n-p, \mathbb{K})$.
   Poiché $rk\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)\big) = n - \dim\big(Rad(\phi)\big) = n - p$, allora A è invertibile e dunque $\phi|_U$ è non degenere.
2) $\forall u \in U_1 \subseteq V \;\; \exists!\, z_u \in Rad(\phi), u' \in U_2 |\; u = z_u + u'$. Definiamo $L: U_1 \to U_2 |\; L(u) = u'$.
   L è sicuramente lineare, in quanti restrizione di $\pi_{U_2}: V \to U_2$.
   Poiché $\dim(U_1) = \dim(U_2)$, per provare che L è isomorfismo basta provare che è iniettiva.
   Sia $u \in Ker(L) \Rightarrow u' = L(u) = 0 \Rightarrow u = z_u \in Rad(\phi) \Rightarrow u \in U_1 \cap Rad(\phi) = \{0\}$.
   Mostriamo che L è un'isometria:
   $\phi(u,v) = \phi(z_u + u', z_v + v') = \phi(z_u, z_v) + \phi(z_u, v') + \phi(u', z_v) + \phi(u', v') = \phi(u', v') =$
   $= \phi\big(L(u), L(v)\big)$, da cui la tesi.

DEFINIZIONE 4.2.6: Se $\phi \in PS(V)$ e $S \subseteq V$, definiamo ortogonale di S:
$S^\perp = \{v \in V |\ \phi(v,s) = 0\ \ \forall s \in S\}$.

Osservazione: $Rad(\phi) = V^\perp$.

PROPOSIZIONE 4.2.6: Siano $S, T \subseteq V$.
1) $S^\perp$ è sottospazio di V
2) $S \subseteq T\ \Rightarrow T^\perp \subseteq S^\perp$
3) $S^\perp = \left(Span(S)\right)^\perp$
4) $S \subseteq S^{\perp\perp}$

Siano U, W sottospazi di V.
5) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
6) $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$

Dimostrazione:
1) Verifica immediata.
2) $v \in T^\perp\ \Rightarrow\ \phi(v,t) = 0\ \ \forall t \in T \supseteq S\ \Rightarrow\ \phi(v,s) = 0\ \ \forall s \in S\ \Rightarrow v \in S^\perp$.
3) Poiché $S \subseteq Span(S)$, per 2) ho che $\left(Span(S)\right)^\perp \subseteq S^\perp$.
   Inoltre se $v \in S^\perp\ \Rightarrow\ \phi(v,s) = 0\ \ \forall s \in S$.
   Ma se $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, allora:
   $\phi\left(v, \sum_{i=1}^k a_i s_i\right) = \sum_{i=1}^k \phi(v, s_i) = 0$, da cui la tesi.
4) $v \in S\ \Rightarrow\ \phi(v,s) = 0\ \ \forall s \in S^\perp\ \Rightarrow v \in S^{\perp\perp}$.
5) $v \in (U+W)^\perp\ \Leftrightarrow\ \phi(v, u+w) = 0\ \ \forall u \in U, w \in W\ \ \Leftrightarrow\ \ \phi(v,u) + \phi(v,w) = 0\ \boxed{\Leftrightarrow}$
   $\boxed{\Leftrightarrow}\ \phi(v,u) = 0 \wedge \phi(v,w) = 0\ \ \forall u \in U, w \in W\ \ \Leftrightarrow v \in U^\perp \cap W^\perp$,
   dove il passaggio contrassegnato con $\boxed{\Leftrightarrow}$ si ottiene ponendo prima $u = 0$ e poi $w = 0$.
6) $v \in U^\perp + W^\perp\ \Rightarrow v = v_U + v_W$, con $v_U \in U^\perp, v_W \in W^\perp\ \Rightarrow \forall h \in U \cap W,\ \phi(v,h) =$
   $= \phi(v_U + v_W, h) = \phi(v_U, h) + \phi(v_W, h) = 0 + 0 = 0\ \Rightarrow v \in (U \cap W)^\perp$.

Osservazione: Se W è sottospazio di V, allora $W \cap W^\perp = Rad(\phi|_W)$, poiché in $W \cap W^\perp$ ci sono i vettori di W ortogonali a tutti i vettori di W, cioè i vettori di $Rad(\phi|_W)$.

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $W = Span(e_1)$. $W^\perp = Span(e_1)\ \Rightarrow W \cap W^\perp = Rad(\phi|_W) =$ $Span(e_1)$.

PROPOSIZIONE 4.2.7: Se W è sottospazio di V e $W \cap Rad(\phi) = \{0\}$, allora:
$\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$.
(Osservazione: Non è detto che W e $W^\perp$ siano in somma diretta, nonostante abbiamo dimensioni adeguate; un controesempio può essere l'esempio precedente).
Dimostrazione:
Sia $\dim(W) = k$ e $\dim\left(Rad(\phi)\right) = h$.
Esiste una base $\mathcal{B}$ di V del tipo:

$$\mathcal{B} = \left\{\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{base\ di\ W}, v_{k+1}, \dots, v_{n-h}, \underbrace{v_{n-h+1}, \dots, v_n}_{base\ di\ Rad(\phi)}\right\}.$$

Allora:

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & M_2 & 0 \\ \hline {}^tM_2 & M_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e $rk(A) = n - h$.
$W^{\perp} = \{v \in V | \phi(v, w) = 0 \;\; \forall w \in W\} = \{v \in V | \phi(w_1, v) = \ldots = \phi(w_k, v) = 0\}$.
Infatti il contenimento $\subseteq$ è ovvio, mentre l'altro segue dal fatto che ogni $w \in W$ si può scrivere come combinazione lineare dei w_i.
Ora:

$$\begin{array}{l} \phi(w_1, v) = (1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)AX \\ \qquad\qquad \vdots \\ \phi(w_k, v) = (0 \quad \ldots \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)AX \end{array} \text{, con } X = [v]_{\mathcal{B}}.$$

Dunque attraverso l'isomorfismo $[\;]_{\mathcal{B}}$ i vettori di $W^{\perp}$ corrispondono alle soluzioni del sistema lineare:

$\underbrace{(I_k \;\; | \;\; 0)A}_{=(M_1 | M_2 | \, 0)} X = 0.$

Poiché $rk(A) = n - h$, la matrice $\begin{pmatrix} M_1 & | & M_2 \\ {}^tM_2 & | & M_3 \end{pmatrix}$ è invertibile e dunque $rk(M_1 | \, M_2) = k$.
Allora lo spazio delle soluzioni del sistema $(M_1 | \, M_2 | \, 0)X = 0$ ha dimensione $n - k$ e dunque $\dim(W^{\perp}) = n - k$.

COROLLARIO 4.2.8: 1) $\dim(W^{\perp}) = \dim(V) - \dim(W) + \dim\big(W \cap Rad(\phi)\big)$
2) In generale $\dim(W^{\perp}) + \dim(W) \geq \dim(V)$
3) Se ϕ è non degenere, allora $\dim(W^{\perp}) = \dim(V) - \dim(W)$
4) $\phi|_W$ è non degenere $\Leftrightarrow V = W \oplus W^{\perp}$.

Dimostrazione:
1) Sia $W = \big(W \cap Rad(\phi)\big) \oplus W_1$.
   Allora $W^{\perp} = W_1^{\perp}$, infatti sicuramente $W^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$ in quanto $W_1 \subseteq W$, e:
   $v \in W_1^{\perp} \;\Rightarrow\; \phi(v, w') = 0 \;\; \forall w' \in W_1 \;\Rightarrow\; \phi(v, w) = \phi(v, w_0 + w'), w_0 \in Rad(\phi), w' \in W_1$
   $\Rightarrow\; \phi(v, w) = \phi(v, w_0) + \phi(v, w') = 0 + 0 = 0 \;\Rightarrow v \in W^{\perp}$
   Inoltre $W_1 \cap Rad(\phi) = \{0\}$, poiché:
   $\{0\} = W_1 \cap \big(W \cap Rad(\phi)\big) = (W_1 \cap W) \cap Rad(\phi) \boxed{=} W_1 \cap Rad(\phi)$,
   dove il passaggio contrassegnato con $\boxed{=}$ segue dal fatto che $W_1 \subseteq W$.
   Per la proposizione precedente:
   $\dim(W^{\perp}) = \dim(W_1^{\perp}) = \dim(V) - \dim(W_1) = \dim(V) - \big(\dim(W) - \dim\big(W \cap Rad(\phi)\big)\big)$,
   da cui la tesi.
2) Segue dal punto 1).
3) Poiché $Rad(\phi) = \{0\}$ e per il punto 1) si ha la tesi.
4) $\phi|_W$ è non degenere $\Leftrightarrow Rad(\phi|_W) = W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
   Dunque $\dim(W \oplus W^{\perp}) \leq \dim(V)$.
   D'altra parte $\dim(W \oplus W^{\perp}) = \dim(W) + \dim(W^{\perp}) \geq \dim(V)$, dunque ho la tesi.

Osservazione: Se ϕ è non degenere, poiché $U \subseteq U^{\perp\perp}$ e $\dim(U) = \dim\left(U^{\perp\perp}\right)$, allora segue che $U = U^{\perp\perp}$. Inoltre, sapendo che $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$, se ϕ è non degenere segue che $U^{\perp} + W^{\perp} = (U \cap W)^{\perp}$ (con un ragionamento analogo al precedente).

DEFINIZIONE 4.2.7: Se $V = W \oplus W^{\perp}$, la proiezione $\pi_W: V \to W$ è detta **proiezione ortogonale** su W.

Osservazione: $\forall v \in V, v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$.

DEFINIZIONE 4.2.8: $v \in V$ si dice **isotropo** se $\phi(v, v) = 0$.
Denotiamo con $\mathcal{I}(\phi)$ l'insieme dei vettori isotropi per ϕ.

Osservazione: Se ogni $v \in V$ è isotropo per ϕ, allora $\phi \equiv 0$ (per la formula di polarizzazione).

Osservazione: Se v non è isotropo, quindi $V = Span(v) \oplus Span(v)^{\perp}$, allora ogni $w \in V$ si scrive come $w = w_1 + w_2$, con $w_1 \in Span(v)$ e $w_2 \in Span(v)^{\perp}$.
Inoltre $w_1 = c \cdot v$, quindi $w_2 = w - cv$.

$$w_2 = w - cv \in Span(v)^{\perp} \iff \phi(w - cv, v) = 0 \iff \phi(w, v) = c\phi(v, v) \iff c = \frac{\phi(v, w)}{\phi(v, v)}$$

Il numero $c = \frac{\phi(v,w)}{\phi(v,v)}$ prende il nome di **coefficiente di Fourier** di w rispetto a v.
Dunque $\pi|_{Span(v)}(w) = \frac{\phi(v,w)}{\phi(v,v)} v$.

DEFINIZIONE 4.2.9: Una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice **ortogonale** se $\phi(v_i, v_j) = 0 \ \ \forall i \neq j$.

Osservazione: $\mathcal{B}$ è ortogonale $\Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ è diagonale.

PROPOSIZIONE 4.2.9: $\forall \phi \in PS(V)$ esiste una base di V ortogonale rispetto a ϕ.
Dimostrazione 1:
Per induzione su $n = \dim(V)$:
Passo base): $n = 1$: ogni base è ortogonale.
Passo induttivo): Se $\phi(v, v) = 0 \ \ \forall v \in V$, allora $\phi \equiv 0$ e quindi ogni base è ortogonale.
Altrimenti $\exists v_1 | \ \phi(v_1, v_1) \neq 0$; allora $V = Span(v_1) \oplus Span(v_1)^{\perp}$.
Per ipotesi induttiva $\exists \{v_2, \dots, v_n\}$ base di $Span(v_1)^{\perp}$ ortogonale per la restrizione di ϕ (e dunque per ϕ).
Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V ortogonale per ϕ.
Dimostrazione 2 – **Algoritmo di Lagrange**:
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base qualsiasi di V. Sia $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

- Supponiamo $[A]_{11} = \phi(v_1, v_1) \neq 0$, cioè $v_1 \notin \mathcal{I}(\phi)$. Poniamo:
  $v_1' = v_1$;
  $v_2' = v_2 - \frac{\phi(v_2, v_1')}{\phi(v_1', v_1')} v_1'$;
  $\vdots$
  $v_n' = v_n - \frac{\phi(v_n, v_1')}{\phi(v_1', v_1')} v_1'$.
  Allora $\phi(v_j', v_1') = 0 \ \ \forall j \geq 2$ e $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ è una base di V, infatti, se mettiamo i vettori v_i' per colonna in una matrice, otteniamo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -k_2 & -k_3 & & -k_n \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$
che ha evidentemente $\det M = 1 \neq 0$.
Inoltre abbiamo che:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} * & 0 \ \ldots \ 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\quad C \quad} \end{pmatrix}$$

- Se $[A]_{11} = 0$ guardo se $\exists j \in \{2, \ldots, n\} |\ [A]_{jj} \neq 0$.
  Se lo trovo, permuto la base $\mathcal{B}$ in modo che v_j sia il primo vettore e procedo come prima.
  Altrimenti:
- Se $[A]_{ii} = 0\ \ \forall i$ ci sono due casi:
  a) ϕ è nullo, quindi ogni base è ortogonale;
  b) $\exists i \neq j |\ [A]_{ij} = [A]_{ji} \neq 0$. In tal caso $\phi(v_i + v_j, v_i + v_j) = 2[A]_{ij} \neq 0$.
  Allora scelgo una base di V in cui $v_i + v_j$ è il primo vettore e poi applico il primo caso.

Dopo aver ortogonalizzato i vettori rispetto al primo, itero il procedimento sulla matrice C e così via.

COROLLARIO 4.2.10: Ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.

Osservazione: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonale.
Sia $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.
$\phi(v, v_1) = \alpha_1 \phi(v_1, v_1)$, quindi, se v_1 è non isotropo, la coordinata di v_1 coincide con il coefficiente di Fourier di v rispetto a v_1.
Quindi, se ϕ è non degenere:
$$v = \frac{\phi(v, v_1)}{\phi(v_1, v_1)} v_1 + \ldots + \frac{\phi(v, v_n)}{\phi(v_n, v_n)} v_n$$
Inoltre, se W è sottospazio di V, $\dim(W) = k$, $\phi|_W$ è non degenere (per cui $V = W \oplus W^\perp$) e $\{w_1, \ldots, w_k\}$ è una base ortogonale di W, allora:
$$v = \frac{\phi(v, w_1)}{\phi(w_1, w_1)} w_1 + \ldots + \frac{\phi(v, w_k)}{\phi(w_k, w_k)} w_k + z, z \in W^\perp$$
Quindi:
$$\pi_W(v) = \frac{\phi(v, w_1)}{\phi(w_1, w_1)} w_1 + \ldots + \frac{\phi(v, w_k)}{\phi(w_k, w_k)} w_k$$

Osservazione: Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $\dim(V) = n$, $\phi \in PS(V)$, $rk(\phi) = r$.
Allora $\exists \mathcal{S} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortogonale di V tale che:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

con $a_{ii} \neq 0 \ \ \forall i \leq r$.
Sia $\mathcal{B} = \left\{\frac{v_1}{\sqrt{\phi(v_1,v_1)}}, \dots, \frac{v_r}{\sqrt{\phi(v_r,v_r)}}, v_{r+1}, \dots, v_n\right\}$.
$\mathcal{B}$ è detta **base ortogonale normalizzata** per ϕ e:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

TEOREMA DI SYLVESTER COMPLESSO: Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.
Allora (V,ϕ) e (V,ψ) sono isometrici $\Leftrightarrow rk(\phi) = rk(\psi)$.
(Osservazione: Quindi il rango è un sistema completo di invarianti per l'isometria nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Dimostrazione:
(V,ϕ) e (V,ψ) sono isometrici $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}, \mathcal{S}$ basi di $V |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\psi)$.
Poiché abbiamo visto nell'osservazione precedente che se $rk(\phi) = rk(\psi)$ allora $\exists \mathcal{B}, \mathcal{S}$ basi di $V |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\psi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, segue la tesi.

COROLLARIO 4.2.11: Tutti i prodotti scalari non degeneri su un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale sono isometrici.

COROLLARIO 4.2.12: Ogni matrice simmetrica complessa di rango r è congruente a $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ e dunque il rango è un invariante completo di congruenza su $\mathbb{C}$.

Osservazione: Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\dim(V) = n$, $\phi \in PS(V)$, $rk(\phi) = r$.
Allora $\exists \mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortogonale di V tale che:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

con $a_{ii} \neq 0 \ \ \forall i \leq r$.
Supponiamo che $a_{ii} > 0$ per $1 \leq i \leq p$ e $a_{ii} < 0$ per $p+1 \leq i \leq r$.
Sia $\mathcal{B} = \left\{\frac{v_1}{\sqrt{a_{11}}}, \dots, \frac{v_p}{\sqrt{a_{pp}}}, \frac{v_{p+1}}{\sqrt{-a_{(p+1)(p+1)}}}, \frac{v_r}{\sqrt{-a_{rr}}}, v_{r+1}, \dots, v_n\right\}$.
$\mathcal{B}$ è detta **base ortogonale normalizzata** per ϕ e:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & & \\ & \boxed{-I_{r-p}} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE 4.2.10: Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$.

- ϕ si dice **definito positivo** (o **negativo**) se $\phi(v,v) > 0 \;\; \forall v \neq 0$ (oppure $\phi(v,v) < 0 \;\; \forall v \neq 0$);
- ϕ si dice **definito** se è definito positivo o definito negativo;
- ϕ si dice **semidefinito positivo** (o **negativo**) se $\phi(v,v) \geq 0 \;\; \forall v$ (oppure $\phi(v,v) \leq 0 \;\; \forall v$);
- ϕ si dice **semidefinito** se è semidefinito positivo o semidefinito negativo.

Osservazione: ϕ definito $\Rightarrow$ ϕ non degenere; inoltre se W è sottospazio di V e ϕ è (semi)definito, allora $\phi|_W$ è (semi)definito.

DEFINIZIONE 4.2.11: • Il numero $i_+(\phi) = \max\{dim(W)\;|W\;ssv\;di\;V, \phi|_W\;def.positivo\}$ prende il nome di **indice di positività**;

- Il numero $i_-(\phi) = \max\{dim(W)\;|W\;ssv\;di\;V, \phi|_W\;def.negativo\}$ prende il nome di **indice di negatività**;
- Il numero $i_0(\phi) = \dim\big(Rad(\phi)\big)$ prende il nome di **indice di nullità**.

Osservazione: Questi tre numeri sono invarianti per isometria, poiché le isometrie mantengono il prodotto scalare e dunque anche i segni dei prodotti scalari.

DEFINIZIONE 4.2.12: La terna $\sigma(\phi) = \big(i_+(\phi), i_-(\phi), i_0(\phi)\big)$ è detta **segnatura** di ϕ.

TEOREMA DI SYLVESTER REALE: Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\dim(V) = n$, $\phi \in PS(V)$.
Sia $\mathcal{B}$ una base ortogonale di V tale che:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & & \\ & \boxed{-I_q} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Allora $p = i_+(\phi)$ e $q = i_-(\phi)$.
Dimostrazione:
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}, v_{p+q+1}, \dots, v_n\}$.
La restrizione di ϕ a $Span(v_1, \dots, v_p)$ è definita positiva, dunque $i_+(\phi) \geq p$.
Sia ora W un sottospazio di V tale che $\dim(W) = i_+(\phi) \wedge \phi|_W$ è definito positivo.
Sia $Z = Span(v_{p+1}, \dots, v_n)$. Dunque $\forall z \in Z,\; z = a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n$.
$\phi(z,z) = -a_{p+1}^2 - \dots - a_{p+q}^2 \leq 0$, dunque $\phi|_Z$ è semidefinito negativo.
Notiamo che $W \cap Z = \{0\}$, infatti, se $v \in W \cap Z$, allora $\phi(v,v) \geq 0 \wedge \phi(v,v) \leq 0$, quindi $\phi(v,v) = 0$, cioè $v = 0$ perché $v \in W$ ed essendo W definito positivo il suo unico vettore isotropo è il vettore nullo.
Allora esiste $W \oplus Z$ sottospazio di V, per cui $\dim(W \oplus Z) = \dim(W) + \dim(Z) \leq \dim(V) = n$, ossia $i_+(\phi) + n - p \leq n$, cioè $i_+(\phi) \leq p$.
Segue dunque che $i_+(\phi) = p$ e con questo che $i_+(\phi)$ non dipende dalla scelta della base.
Poiché $p + q = rk(\phi)$ e $i_+(\phi) + i_-(\phi) = rk(\phi)$, allora $q = i_-(\phi)$, da cui la tesi.

COROLLARIO 4.2.13: Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (V,ϕ) e (V,ψ) sono isometrici $\Leftrightarrow\; \sigma(\phi) = \sigma(\psi)$, cioè la segnatura è un invariante completo di isometria nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

COROLLARIO 4.2.14: $A, B \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ sono congruenti $\Leftrightarrow\ \sigma(A) = \sigma(B)$, cioè la segnatura è un invariante completo di congruenza nel caso reale.

DEFINIZIONE 4.2.13: V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$. Una base $\mathcal{B}$ di V si dice **ortonormale** per $\phi\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = I$.

Osservazione: Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\exists$una base ortonormale per $\phi\ \Leftrightarrow \phi$ è non degenere.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\exists$una base ortonormale per $\phi\ \Leftrightarrow \phi$ è definito positivo.

DEFINIZIONE 4.2.14: Sia $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$. A si dice **definita positiva** (**negativa**) se ${}^tXAX > 0$ (${}^tXAX < 0$) $\forall X \neq 0$.
Sia $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$. A si dice **semidefinita positiva** (**negativa**) se ${}^tXAX \geq 0$ (${}^tXAX \leq 0$) $\forall X$.

Osservazione: A è definita positiva $\Leftrightarrow \psi_A\colon (X, Y) \to {}^tXAY$ è definito positivo.
Analogamente se è definita negativa.

Osservazione: A è definita positiva $\Leftrightarrow A$ è congruente a $I \Leftrightarrow \exists M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A = {}^tMM$ (dunque $\det(A) = \det({}^tMM) = (\det(M))^2 > 0$).

DEFINIZIONE 4.2.15: $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$. $\forall 1 \leq i \leq n$ si definisce i-esimo minore principale $M_i(A)$ il minore formato dalle prime i righe e dalle prime i colonne.

CRITERIO DEI MINORI PRINCIPALI: $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$.
A è definita positiva $\Leftrightarrow \det\big(M_i(A)\big) > 0\ \ \forall i$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) $M_i(A)$ è la matrice associata alla restrizione di ψ_A al sottospazio $Span(e_1, \dots, e_i)$. Tale restrizione è definita positiva e quindi $\det\big(M_i(A)\big) > 0\ \ \forall i$.
$\Leftarrow$) Per induzione su n:
Passo base): $n = 1$: ovvio.
Passo induttivo): Per ipotesi tutti i minori principali della matrice $M_{n-1}(A)$ hanno determinante positivo.
Allora per ipotesi induttiva la restrizione di ψ_A a $Span(e_1, \dots, e_{n-1})$ è definita positiva e quindi $i_+(\psi_A) \geq n - 1$.
Allora, se $i_+(\psi_A) = n - 1$, esisterebbe per Sylvester una base $\mathcal{B}$ tale che:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi_A) = \begin{pmatrix} \boxed{\ I_{n-1}\ } & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

e $\det\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi_A)\big) = -1 < 0$, assurdo, quindi $i_+(\psi_A) = n$, cioè A è definita positiva.

PROPOSIZIONE 4.2.15: Le trasformazioni di base con l'algoritmo di Lagrange nel caso in cui il vettore non sia isotropo non alterano i determinanti dei minori principali.
Dimostrazione:

$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi) \xrightarrow[trasf.di\ base]{} A' = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\psi)$; $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$.

$$M = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & * & * & & * \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $A' = {}^tMAM$; sia inoltre $W_k = Span(v_1, \dots, v_k)$.
Allora $A_k = \mathfrak{M}_{\{v_1,\dots,v_k\}}(\psi|_{W_k})$, $W_k = Span(v_1', \dots, v_k')$ e $\mathfrak{M}_{\{v_1',\dots,v_k'\},\{v_1,\dots,v_k\}}(id) = M_k$.
Quindi $A_k' = {}^tM_kA_kM_k$.
Ma $\det(M_k) = 1 \ \ \forall k$, quindi $D_k' = \det(A_k') = \det(A_k) \cdot (\det(M_k))^2 = \det(A_k) = D_k$, tesi.

CRITERIO DI JACOBI: $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R}), rk(A) = r$. Supponiamo che $D_i \neq 0 \ \ \forall i \leq r$.
Allora $\exists T$ triangolare superiore, $\det(T) = 1$, tale che:

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} D_1 & & & & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{D_r}{D_{r-1}} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione:
$D_1 \neq 0 \Rightarrow [A]_{11} = D_1 \neq 0$, quindi posso effettuare una trasformazione di base.
$A' = {}^tMAM$, M triangolare superiore, $\det(M) = 1$.

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}' & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & * & & * \end{pmatrix}.$$

Ma si conservano i determinanti dei minori principali $\Rightarrow D_2 = D_2' = D_1 \cdot a_{22}' \ \Rightarrow a_{22}' = \frac{D_2}{D_1}$.
Itero perché $\frac{D_2}{D_1} \neq 0 \ \Rightarrow a_{33}' \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot D_1 = D_3 = D_3' \ \Rightarrow a_{33}' = \frac{D_3}{D_2}$.
In generale $a_{kk}' \cdot \frac{D_{k-1}}{D_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot D_1 = D_k \ \Rightarrow a_{kk}' = \frac{D_k}{D_{k-1}}$.
Quindi, chiamando $\tilde{A}$ la matrice A dopo r trasformazioni di base:
$\tilde{A} = {}^tM_r{}^tM_{r-1} \dots {}^tM_1AM_1 \dots M_r = {}^t(M_1 \dots M_r)AM_1 \dots M_r$,
quindi se $T = M_1 \dots M_r$, allora T è la matrice cercata, in quanto è triangolare superiore (perché prodotto di matrici triangolari superiori) e ha $\det(T) = \det(M_1 \dots M_r) = 1$.

COROLLARIO 4.2.16: Si deduce il criterio dei minori principali.
Dimostrazione:
ψ è definito positivo $\Leftrightarrow D_1 > 0, \frac{D_2}{D_1} > 0, \dots, \frac{D_r}{D_{r-1}} > 0 \ \Leftrightarrow D_1 > 0, \dots, D_r > 0$.

COROLLARIO 4.2.17: A è definita negativa $\Leftrightarrow D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$
Dimostrazione:
ψ è definito negativo $\Leftrightarrow D_1 < 0, \frac{D_2}{D_1} < 0, \dots, \frac{D_r}{D_{r-1}} < 0 \ \Leftrightarrow D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$

DEFINIZIONE 4.2.16: (P, ψ) si dice **piano iperbolico** se P è uno spazio vettoriale di dimensione 2 e ψ è un prodotto scalare di P non degenere per cui esiste un vettore isotropo non nullo.

PROPOSIZIONE 4.2.18: (P, ψ) piano iperbolico, $v \neq 0$ isotropo. Allora v si estende ad una base $\mathcal{B} = \{v, w\}$ di P tale che $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($\mathcal{B}$ è detta **base iperbolica**).
Dimostrazione:
Sia $\mathcal{S} = \{v, z\}$ una base di P. Allora $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$.
ψ non degenere $\Rightarrow a \neq 0$.
Ora cerco $\lambda, \mu |\ w = \lambda v + \mu z$, $\mathcal{B} = \{v, w\}$ sia base di P e $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Notiamo che $\mathcal{B}$ è base $\Leftrightarrow \mu \neq 0$.
$\psi(v, w) = \psi(v, \lambda v + \mu z) = \mu a;\ \psi(w, w) = \psi(\lambda v + \mu z, \lambda v + \mu z) = 2\lambda\mu a + \mu^2 b.$
Allora $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu a = 1 \\ 2\lambda\mu a + \mu^2 b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = a^{-1} \\ \lambda = -2^{-1} b \mu^2 = -b(2a^2)^{-1} \end{cases}.$
Poiché abbiamo trovato tali λ, μ, ho la tesi.

Osservazione: Se (P, ϕ) è un piano iperbolico, allora $\sigma(\phi) = (1,1,0)$. Infatti sia $\{v, w\}$ una base iperbolica per (P, ϕ). Sia $\mathcal{S} = \left\{\frac{v+w}{\sqrt{2}}, \frac{v-w}{\sqrt{2}}\right\}$, che quindi è base di P. Si può facilmente vedere che:
$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
da cui segue che $\sigma(\phi) = (1,1,0)$.

DEFINIZIONE 4.2.17: (V, ϕ) si dice **anisotropo** se V non contiene vettori isotropi non nulli.

PROPOSIZIONE 4.2.19: V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, ϕ prodotto scalare non degenere. Allora:
1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (V, ϕ) è anisotropo $\Leftrightarrow \dim(V) = 1$;
2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (V, ϕ) è anisotropo $\Leftrightarrow \phi$ è definito.

Dimostrazione:
1) $\Leftarrow$) Ovvio.
   $\Rightarrow$) Se per assurdo $\dim(V) \geq 2$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $V |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = I$, allora $\phi(v_1 + iv_2, v_1 + iv_2) = 1 - 1 = 0$ e dunque $v_1 + iv_2 \in \mathcal{I}(\phi)$, assurdo.
2) $\Leftarrow$) Ovvio per definizione.
   $\Rightarrow$) Se per assurdo ϕ non è definito, $\exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ base di V tale che $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & \\ & \boxed{-I_{n-p}} \end{pmatrix}$. Allora $\phi(v_1 + v_{p+1}, v_1 + v_{p+1}) = 1 - 1 = 0$, assurdo.

Notazione: Denoteremo con $W_1 \oplus^{\perp} W_2$ la **somma diretta ortogonale** di W_1 e W_2, che sta ad indicare la somma diretta dei sottospazi W_1 e W_2 tali che $\phi(w_1, w_2) = 0\ \ \forall w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$.

FORMA NORMALE DI WITT: Sia (V, ϕ), ϕ non degenere.

Caso 1): $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) $\dim(V) = n = 2m$.
Sappiamo che $\exists \mathcal{B} = \{v_1, w_1, \dots, v_m, w_m\}$ base di $V \mid \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = I$.
Allora $\mathfrak{M}_{\{v_j, w_j\}}\left(\phi|_{Span(v_j, w_j)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_j + iw_j$ è isotropo, dunque $P_j = Span(v_j, w_j)$ è un piano iperbolico e:
$$V = P_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp P_m,$$
detta **decomposizione di Witt** di V.
Prendendo una base iperbolica in ogni P_j, $\exists \mathcal{S}$ base di V tale che:
$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\phi) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix},$$
detta **forma normale di Witt** di V.

b) $\dim(V) = n = 2m + 1$.
Con un procedimento analogo al precedente si trova la decomposizione di Witt:
$$V = P_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp P_m \oplus^\perp Span(z),$$
Inoltre come prima $\exists \mathcal{S}$ base di $V \mid$
$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\phi) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$
che è la forma normale di Witt di V.

Caso 2): $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1) $i_+(\phi) \leq i_-(\phi)$. Sia $p = i_+(\phi)$.
Allora $\exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_{n-p}\}$ base di $V \mid$
$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & \\ & \boxed{-I_{n-p}} \end{pmatrix}.$$
Si definisca $P_j = Span(v_j, w_j)$ $\forall j$ e $A = Span(w_{p+1}, \dots, w_{n-p})$. Allora P_j è un piano iperbolico $\forall j$ e ϕ_A è definito negativo; inoltre:
$$V = P_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp P_p \oplus^\perp A,$$
che è la decomposizione di Witt di V e $\exists \mathcal{S}$ base di $V \mid$
$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}(\phi) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{-I_{n-2p}} \end{pmatrix},$$
che è la forma normale di Witt di V.

2) $i_-(\phi) \leq i_+(\phi)$.
È del tutto analogo al caso precedente, tranne che $\phi|_A$ è definito positivo.

In generale:

DEFINIZIONE 4.2.18: Se ϕ è non degenere, si chiama **decomposizione di Witt** di (V, ϕ) una decomposizione:

$$V = P_1 \oplus^{\perp} \dots \oplus^{\perp} P_h \oplus^{\perp} A,$$

dove ogni P_j è un piano iperbolico e $\phi|_A$ è anisotropo.

Dunque, grazie a quello che abbiamo visto, segue:

TEOREMA 4.2.20: Se $\mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{K} = \mathbb{R}$ e ϕ è non degenere:

1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\dim(V) = 2m \Rightarrow \begin{cases} \#piani\ iperbolici = m \\ A = \{0\} \end{cases}$
2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\dim(V) = 2m + 1 \Rightarrow \begin{cases} \#piani\ iperbolici = m \\ \dim(A) = 1 \end{cases}$
3) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \#piani\ iperbolici = \min\big(i_+(\phi), i_-(\phi)\big) \\ \phi|_A \text{ è } definito \end{cases}$

Osservazione: Da questo teorema segue che sia nel caso complesso sia in quello reale, il numero dei piani iperbolici è invariante per isometria.

DEFINIZIONE 4.2.19: $\phi \in PS(V)$. Si definisce **indice di Witt** di (V, ϕ) il numero naturale $w(\phi) = \max\{dim(W)\,|W \text{ è } ssv\ di\ V, \phi|_W \equiv 0\}$.

Osservazioni: 1) $w(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi$ è anisotropo;

2) $w(\phi)$ è invariante per isometria;
3) Se ϕ non degenere, $w(\phi) \leq \frac{\dim(V)}{2}$

   Dimostrazione:
   Sia W un sottospazio di V tale che $\dim(W) = w(\phi) \wedge \phi|_W \equiv 0$.
   Allora $\exists \mathcal{B}$ base di $V|$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline \underbrace{{}^tA}_{w(\phi)} & \underbrace{C}_{n-w(\phi)} \end{array}\right)$$

   Quindi $n = rk(\phi) \leq \underbrace{\big(n - w(\phi)\big)}_{=\max(rk({}^tA|C))} + \underbrace{\big(n - w(\phi)\big)}_{=\max(rk(A))} \Rightarrow n \geq 2w(\phi)$, da cui la tesi.
4) Se $V = P_1 \oplus^{\perp} \dots \oplus^{\perp} P_h \oplus^{\perp} A$ è una decomposizione di Witt, allora $h \leq w(\phi)$.

   Dimostrazione:
   Se $\{v_j, w_j\}$ è una base iperbolica per P_j, allora $Z = Span(v_1, \dots, v_h)$ è un sottospazio di $V|$ $\dim(Z) = h$ e $\phi|_Z \equiv 0$, dunque $w(\phi) \geq h$.

TEOREMA 4.2.21: Sia (V, ϕ), ϕ non degenere, $\dim(V) = n$. Allora:

1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $w(\phi) = \left[\frac{n}{2}\right]$;
2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $w(\phi) = \min\big(i_+(\phi), i_-(\phi)\big)$.

Dimostrazione:

1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, abbiamo visto che $V = P_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp P_{\left[\frac{n}{2}\right]} \oplus^\perp A$, con $\dim(A) \leq 1$.
   Allora, per le osservazioni 3) e 4), abbiamo che $\left[\frac{n}{2}\right] \leq w(\phi) \leq \frac{n}{2} \Rightarrow w(\phi) = \left[\frac{n}{2}\right]$.
2) Sia $V = P_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp P_m \oplus^\perp A$ una decomposizione di Witt di V.
   Vogliamo provare che $m = w(\phi)$, ma per l'osservazione 4), $m \leq w(\phi)$.
   Supponiamo per assurdo che $m < w(\phi)$.
   Sia Z sottospazio di V tale che $\dim(Z) = w(\phi)$ e $\phi|_Z \equiv 0$.
   $\phi|_A$ è definito, supponiamo che sia definito negativo (altrimenti la dimostrazione è analoga).
   Allora $\exists W$ sottospazio di V tale che $\dim(W) = n - m$ e $\phi|_W$ è definito negativo (ad esempio $W = A \oplus Span(w_1, \dots, w_m)$, con $w_i \in P_i |\ \phi(w_i, w_i) < 0$).
   Poiché $\dim(Z) + \dim(W) > n \Rightarrow Z \cap W \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0, v \in Z \cap W$.
   Ma $\phi(v, v) = 0$ in quanto $v \in Z$ e $\phi(v, v) < 0$ in quanto $v \in W$, assurdo.
   Quindi abbiamo mostrato che tutte le decomposizioni di Witt in V contengono lo stesso numero di piani iperbolici, in particolare $w(\phi)$ piani iperbolici.
   Poiché abbiamo trovato una decomposizione di Witt di V con $\min\big(i_+(\phi), i_-(\phi)\big)$ piani iperbolici, segue la tesi.

DEFINIZIONE 4.2.20: Definiamo segno di (V, ϕ), con ϕ definito, il numero $sgn(V)$ che è 1 se (V, ϕ) è definito positivo, -1 se è definito negativo.

COROLLARIO 4.2.22: V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, ϕ non degenere.
La coppia $\big(w(\phi), sgn(\phi|_A)\big)$ è un sistema completo di invarianti per isometria su $\mathbb{R}$.
Dimostrazione:
Sappiamo che $w(\phi) = \min\big(i_+(\phi), i_-(\phi)\big)$, inoltre:
- se $sgn(\phi|_A) = 1 \Rightarrow i_+(\phi) \geq i_-(\phi)$ (questo segue facilmente dalla dimostrazione della forma normale di Witt);
- se $sgn(\phi|_A) = -1 \Rightarrow i_+(\phi) \leq i_-(\phi)$.

Dunque la conoscenza di $\big(w(\phi), sgn(\phi|_A)\big)$ porta immediatamente alla conoscenza di $\big(i_+(\phi), i_-(\phi)\big)$. Da questo segue la tesi.

PROPOSIZIONE 4.2.20: Se $V = Rad(\phi) \oplus U$, allora $w(\phi) = \dim\big(Rad(\phi)\big) + w(\phi|_U)$.
Dimostrazione:
Sia Z sottospazio di U tale che $\dim(Z) = w(\phi|_U)$ e $\phi|_Z \equiv 0$.
Allora $\phi|_{Z \oplus Rad(\phi)} \equiv 0$, quindi $w(\phi) \geq \dim\big(Rad(\phi)\big) + w(\phi|_U)$.
Supponiamo per assurdo che $w(\phi) > \dim\big(Rad(\phi)\big) + w(\phi|_U)$.
Allora sia H sottospazio di V tale che $\dim(H) = w(\phi)$ e $\phi|_H \equiv 0$.
Allora $H \cap U$ è un sottospazio di U in cui ϕ si annulla, quindi:

$$\begin{aligned} w(\phi|_U) \geq \dim(H \cap U) &= \dim(H) + \dim(U) - \dim(H + U) > \\ &> \Big(\dim\big(Rad(\phi)\big) + w(\phi|_U)\Big) + \dim(U) - \dim(H + U) = \\ &= \dim(V) + w(\phi|_U) - \dim(H + U) \geq w(\phi|_U), \end{aligned}$$

assurdo.

4.3 ISOMETRIE

PROPOSIZIONE 4.3.1: V spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$, $f \in O(V,\phi)$.
Se W è sottospazio di V tale che $f(W) \subseteq W$, allora $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$.
Dimostrazione:
Essendo f isomorfismo, ho che $f(W) = W$.
Allora, se $w \in W$, $\exists y \in W | \, f(y) = w$.
La tesi è mostrare che $\forall x \in W^\perp,\ f(x) \in W^\perp$, cioè che $\forall x \in W^\perp$, $\forall w \in W$, $\phi(f(x), w) = 0$.
Ora:
$\phi(f(x), w) = \phi\big(f(x), f(y)\big) = \phi(x, y) = 0$, da cui la tesi.

Osservazione: Sia $\phi \in PS(V)$ non degenere. Se $v \in V$ è non isotropo, allora:

$$V = Span(v) \oplus Span(v)^\perp$$

$\forall w \in V$, $w = c(w) \cdot v + (w - c(w) \cdot v)$.
Se $c(w) = \frac{\phi(w,v)}{\phi(v,v)}$, allora $w - c(w) \cdot v \in Span(v)^\perp$.
Poniamo $z(w) = w - c(w) \cdot v$. Allora w si scrive in modo unico come $w = c(w) \cdot v + z(w)$, con $c(w) \cdot v \in Span(v)$ e $w - c(w) \cdot v \in Span(v)^\perp$.

DEFINIZIONE 4.3.1: Definiamo **riflessione parallela a un vettore** v l'applicazione
$\rho_v: V \to V | \, \rho(w) = \rho\big(c(w) \cdot v + z(w)\big) = -c(w) \cdot v + z(w)$.

DEFINIZIONE 4.3.2: Definiamo **luogo dei punti fissi** di un'isometria f l'insieme
$Fix(f) = \{v \in V | f(v) = v\}$.

PROPOSIZIONE 4.3.2: $\rho_v^2 = id$ e $\rho_v \in O(V,\phi)$.
Dimostrazione:
Che $\rho_v^2 = id$ è evidente; inoltre ρ_v è sicuramente un isomorfismo.
Con una semplice verifica si vede che $\phi\big(\rho_v(w_1), \rho_v(w_2)\big) = \phi(w_1, w_2)$.

Osservazione: $\rho_v(v) = -v$ e $Fix(\rho_v) = Span(v)^\perp$.

TEOREMA 4.3.3: $\phi \in PS(V)$ non degenere. Allora $O(V,\phi)$ è generato dalle riflessioni, cioè ogni $f \in O(V,\phi)$ è composizione di un numero finito di riflessioni parallele a vettori non isotropi.
(Osservazione: Conveniamo che id è composizione di 0 riflessioni).
Dimostrazione:
Per induzione su $n = \dim(V)$:
Passo base): $n = 1$: $V = Span(v)$, con v non isotropo perché ϕ non degenere.
Sia $f \in O(V,\phi)$. Allora $f(v) = \lambda v$, $\lambda \neq 0$.
$\phi\big(f(v), f(v)\big) = \lambda^2 \phi(v,v) \Rightarrow \lambda = \pm 1$.
Se $\lambda = 1 \Rightarrow f = id$, che è composizione di 0 riflessioni.
Se $\lambda = -1 \Rightarrow f(v) = -v = \rho_v(v) \Rightarrow f = \rho_v$, poiché coincidono su una base.
Passo induttivo): Sia $w \in V$ non isotropo.
Caso 1): $f(w) = w$.
In questo caso per la prima proposizione si ha che $f(Z_w) = Z_w$, con

$Z_w = Span(w)^{\perp}$, quindi posso applicare l'ipotesi induttiva a $f|_{Z_w}$ e $\phi|_{Z_w}$.
Allora $\exists \widetilde{\rho_1}, \dots, \widetilde{\rho_k}$ riflessioni di $Z_w | \, f|_{Z_w} = \widetilde{\rho_1} \circ \dots \circ \widetilde{\rho_k}$.
Ogni $\widetilde{\rho_i}$ si estende ad una riflessione ρ_i di V (parallela allo stesso vettore) ponendo $\rho_i(w) = w$. Allora $f = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$, da cui la tesi.

Caso 2): $f(w) \neq w$.

Notiamo che $w = \frac{f(w)+w}{2} - \frac{f(w)-w}{2}$. Inoltre $f(w) + w$ e $f(w) - w$ sono ortogonali e non contemporaneamente isotropi, infatti:
$\phi(f(w) + w, f(w) + w) = 2\phi(w, w) + 2\phi(f(w), w)$
$\phi(f(w) - w, f(w) - w) = 2\phi(w, w) - 2\phi(f(w), w)$.
Se fossero entrambi isotropi, sommando avremmo che $4\phi(w, w) = 0$, cioè w isotropo, assurdo. Quindi:
Se $f(w) - w = u$ è non isotropo, allora:

$$\rho_u(w) = \rho_u\left(\underbrace{-\frac{f(w)-w}{2}}_{\in Span(u)} + \underbrace{\frac{f(w)+w}{2}}_{\in Span(u)^{\perp}}\right) = \frac{f(w)-w}{2} + \frac{f(w)+w}{2} = f(w),$$

quindi, applicando ρ_u a entrambi i membri, $(\rho_u \circ f)(w) = \rho_u^2(w) = w$.
Dunque w è punto fisso per $\rho_u \circ f$.
Allora, per il caso 1), $\exists \rho_1, \dots, \rho_k$ di V tali che
$\rho_u \circ f = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$, e perciò $\rho_u^2 \circ f = f = \rho_u \circ \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$.
Se invece è $f(w) + w = u$ a essere non isotropo, possiamo comunque ricondurci al caso precedente in quanto $-u = (-f)(w) - w$.
Dunque $\exists \rho_0, \dots, \rho_k$ riflessioni tali che
$-f = \rho_0 \circ \dots \circ \rho_k$.
Ma $f = (-f) \circ (-id)$, quindi se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale per V:
$-id = \rho_{v_1} \circ \dots \circ \rho_{v_n}$,
poiché ciascuna riflessione cambia di segno la coordinata corrispondente.
Dunque $f = \rho_{v_1} \circ \dots \circ \rho_{v_n} \circ \rho_0 \circ \dots \circ \rho_k$, da cui la tesi.

LEMMA 4.3.4: (V, ϕ) anisotropo, $f \in O(V, \phi)$.
Se $Fix(f) = \{0\}$, allora $\exists \rho$ riflessione tale che $\dim(Fix(\rho \circ f)) = 1$.
Dimostrazione:
Sia $w \in V$, $w \neq 0$. Per ipotesi $f(w) \neq w$.
(V, ϕ) anisotropo $\Rightarrow u = f(w) - w$ è non isotropo.
Come provato prima, $(\rho_u \circ f)(w) = w$, cioè $w \in Fix(\rho_u \circ f)$ e quindi $\dim(Fix(\rho_u \circ f)) \geq 1$.
Proviamo che $Fix(\rho_u \circ f) \cap f^{-1}(Z_u) = \{0\}$, con $Z_u = Span(u)^{\perp}$.
Infatti $\rho_u|_{Z_u} = id$, quindi $(\rho_u \circ f)|_{f^{-1}(Z_u)} = f|_{f^{-1}(Z_u)}$ e poiché f non ha punti fissi, a maggior ragione non li ha $f|_{f^{-1}(Z_u)}$.
Perciò $Fix(\rho_u \circ f) \cap f^{-1}(Z_u) = \{0\}$, e poiché $\dim(f^{-1}(Z_u)) = n - 1$ (in quanto f è isomorfismo), per la formula di Grassmann $\dim(Fix(\rho_u \circ f)) \leq 1$, tesi.

TEOREMA 4.3.5: (V, ϕ) anisotropo, $\dim(V) = n$. Allora ogni $f \in O(V, \phi)$ è composizione di $n - k$ riflessioni, dove $k = \dim(Fix(f))$.
Dimostrazione:
Se $k = n$, allora $f = id$, quindi f è composizione di 0 riflessioni, e $n - k = 0$.

Se $k < n$, allora sia $H = Fix(f)^{\perp}$, così $V = Fix(f) \oplus^{\perp} H$.
Allora $\dim(H) = n - k$, H è f-invariante (poiché $f\big(Fix(f)\big) \subseteq Fix(f)$), $f|_H \in O(H, \phi|_H)$ e $O(H, \phi|_H)$ è anisotropo.
Inoltre evidentemente $Fix(f|_H) = \{0\}$.
Per il lemma $\exists u \in H$ tale che, detta $\widetilde{\rho_u}$ la riflessione in H parallela a u, si ha che $\dim\big(Fix(\widetilde{\rho_u} \circ f|_H)\big) = 1$.
$\widetilde{\rho_u}$ si estende naturalmente alla riflessione ρ_u di V, ponendo $\rho_u(w) = w \ \ \forall w \notin H$.
Allora $Fix(f) \subseteq Span(u)^{\perp} = Fix(\rho_u)$, infatti:
$v \in Fix(f) \Rightarrow v \notin H \ \Rightarrow \ \rho_u(v) = v \ \Rightarrow v \in Fix(\rho_u)$.
Quindi $Fix(f) \oplus Fix(\widetilde{\rho_u} \circ f|_H) \subseteq Fix(\rho_u \circ f)$, in quanto ovviamente $Fix(f) \subseteq Fix(\rho_u \circ f)$ e $Fix(\widetilde{\rho_u} \circ f|_H) \subseteq Fix(\rho_u \circ f)$ e $Fix(f) \cap \underbrace{Fix(\widetilde{\rho_u} \circ f|_H)}_{\subseteq H} \subseteq Fix(f) \cap H = \{0\}$.
Inoltre vale l'uguaglianza $Fix(f) \oplus Fix(\widetilde{\rho_u} \circ f|_H) = Fix(\rho_u \circ f)$, infatti sia $x \in Fix(\rho_u \circ f)$.
Scrivo $x = a + b$, con $a \in Fix(f)$ e $b \in H$; allora:
$x = (\rho_u \circ f)(x) = (\rho_u \circ f)(a) + (\rho_u \circ f)(b) = a + (\rho_u \circ f)(b)$, ma per la scrittura unica $b = (\rho_u \circ f)(b) \ \Rightarrow b \in Fix(\widetilde{\rho_u} \circ f|_H)$, in quanto $b \in H$.
Allora $\dim\big(Fix(\rho_u \circ f)\big) = k + 1$.
Iterando, trovo che $\exists \rho_1, \dots, \rho_{n-k}$ riflessioni tali che $\dim\big(Fix(\rho_{n-k} \circ \dots \circ \rho_1 \circ f)\big) = n$, quindi $\rho_{n-k} \circ \dots \circ \rho_1 \circ f = id$, da cui $f = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_{n-k}$.

4.4 AGGIUNTO

DEFINIZIONE 4.4.1: Sia $\phi \in PS(V)$. $\forall y \in V$ sia $\phi_y : V \to \mathbb{K} |\ v \to \phi_y(v) \overset{\text{def}}{=} \phi(v, y)$.

Osservazione: ϕ_y è lineare, quindi $\phi_y \in V^*$.

DEFINIZIONE 4.4.2: Definiamo $F_\phi : V \to V^* |\ y \to \phi_y$.

PROPOSIZIONE 4.4.1: 1) F_ϕ è lineare;
2) $Ker\big(F_\phi\big) = Rad(\phi)$;
3) $Im\big(F_\phi\big) = Ann\big(Rad(\phi)\big)$;
4) F_ϕ è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ ϕ è non degenere.
Dimostrazione:
1) Semplice verifica.
2) $y \in Ker\big(F_\phi\big) \Leftrightarrow \ \phi_y = 0 \ \Leftrightarrow \ \phi_y(x) = \phi(x, y) = 0 \ \ \forall x \in V \ \ \Leftrightarrow y \in Rad(\phi)$.
3) $Im\big(F_\phi\big) \subseteq Ann\big(Rad(\phi)\big)$, infatti $\forall y \in V$, $F_\phi(y) = \phi_y \in Ann\big(Rad(\phi)\big)$, perché $\forall x \in Rad(\phi)$, $\phi_y(x) = \phi(x, y) = 0$.
   Inoltre $\dim\Big(Im\big(F_\phi\big)\Big) = \dim(V) - \dim\Big(Ker\big(F_\phi\big)\Big) = \dim(V) - \dim\big(Rad(\phi)\big) = $
   $= \dim\Big(Ann\big(Rad(\phi)\big)\Big)$.
4) Ovvia per quanto visto nei punti precedenti (infatti se ϕ non degenere, allora $Ker\big(F_\phi\big) = Rad(\phi) = \{0\}$ e $Im\big(F_\phi\big) = Ann\big(Rad(\phi)\big) = V$).

DEFINIZIONE 4.4.3: $g \in V^*$ è detto **ϕ-rappresentabile** se $g \in Im(F_\phi)$ (ossia se $\exists y \in V$ tale che $g = F_\phi(y)$, ossia se $\exists y \in V$ tale che $g(x) = \phi(x, y) \ \ \forall x \in V$)

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ: Se ϕ è non degenere, ogni $g \in V^*$ è ϕ-rappresentabile in modo unico (cioè $\exists!\, y \in V \mid g(x) = \phi(x, y) \ \forall x \in V$).
Dimostrazione:
Segue dal fatto che F_ϕ è un isomorfismo.

Osservazione: Grazie alla teoria del duale, avevamo trovato un isomorfismo canonico fra V e V^{**}, mentre ora, grazie al teorema di rappresentazione di Riesz, abbiamo trovato un isomorfismo canonico F_ϕ fra V e V^*.

Osservazione: Sia W^* un sottospazio fissato di V^*.
W^* coincide con l'insieme dei funzionali ϕ-rappresentabili $\Leftrightarrow \ W^* = Im(F_\phi) = Ann(Rad(\phi))$.
Dunque se $W^* = Ann(S)$, cioè $S = Ann(W^*)$ (grazie all'isomorfismo canonico ψ_V), allora $W^* = Im(F_\phi) \ \Leftrightarrow S = Rad(\phi)$.

PROPOSIZIONE 4.4.2: Siano U, W sottospazi di V. Allora:
1) $Ann(U + W) = Ann(U) \cap Ann(W)$;
2) $Ann(U \cap W) = Ann(U) + Ann(W)$.

Dimostrazione:
1) $\subseteq$) $U \subseteq U + W \ \Rightarrow Ann(U + W) \subseteq Ann(U)$ e analogamente $Ann(U + W) \subseteq Ann(W)$.
   Dunque $Ann(U + W) \subseteq Ann(U) \cap Ann(W)$.
   $\supseteq$) Sia $f \in Ann(U) \cap Ann(W)$; $f(u + w) = f(u) + f(w) = 0 + 0 = 0 \ \ \forall u \in U, w \in W$, dunque $f \in Ann(U + W)$.
2) $Ann\big(Ann(U) + Ann(W)\big) = Ann\big(Ann(U)\big) \cap Ann\big(Ann(W)\big) = U \cap W$.
   Passando all'annullatore:
   $Ann\Big(Ann\big(Ann(U) + Ann(W)\big)\Big) = Ann(U) + Ann(W) = Ann(U \cap W)$, da cui la tesi.

Esempio: $V = \mathbb{R}^5$. In V^* si considerino:
$f_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
$f_2(x) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5$;
$f_3(x) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5$;
e sia $W^* = Span(f_1, f_2, f_3)$.
Si costruisca in V un prodotto scalare ϕ tale che W^* sia il sottospazio dei funzionali ϕ-rappresentabili.
Dimostrazione:
Cerco $\phi \in PS(V)$ tale che $W^* = Ann\big(Rad(\phi)\big)$.
Vediamo che $(2f_1 - f_2)(x) = f_3(x) \ \ \forall x \in V$, quindi $W^* = Span(f_1, f_2)$.
Allora, grazie all'isomorfismo canonico ψ_V:

$$Ann(W^*) = Ann\big(Span(f_1, f_2)\big) = Ann\big(Span(f_1) + Span(f_2)\big) = Ann(f_1) \cap Ann(f_2) = \\ = Ker(f_1) \cap Ker(f_2)$$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_3 = -x_4 - x_5 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$, quindi:

$$Sol = \left\{ \left. \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right| x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$, cioè, se $W^* = Ann(S) \Rightarrow S = Ann(W^*)$, e:

$$S = Span\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3} \right).$$

Dunque $S = Ann(W^*) = Rad(\phi)$, perciò costruisco $\phi \in PS(V) | \ Rad(\phi) = Span(v_1, v_2, v_3)$.
Completo v_1, v_2, v_3 a base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$ di V. Ad esempio $w_1 = e_1$, $w_2 = e_3$.
Ottengo la tesi con:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSIZIONE 4.4.3: Sia U sottospazio di V. Se ϕ è non degenere, allora $F_\phi(U^\perp) = Ann(U)$.
Dimostrazione:
Sicuramente $F_\phi(U^\perp) \subseteq Ann(U)$, poiché $\forall y \in U^\perp$, $\forall u \in U$, $\phi_y(u) = \phi(y, u) = 0$.
Inoltre $\dim\left(F_\phi(U^\perp)\right) = \dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U) = \dim\big(Ann(U)\big)$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 4.4.4: $\forall \phi \in PS(V)$ non degenere, $\forall f \in End(V)$, $\exists f^*: V \to V$ tale che $\phi(f(x), y)) = \phi(x, f^*(y)) \ \ \forall x, y \in V$.
Dimostrazione:
Fissiamo $y \in V$.
Poniamo inoltre $g(x) = \phi(f(x), y)$; $g(x)$ è evidentemente lineare, cioè $g(x) \in V^*$.
Dunque per il teorema di rappresentazione di Riesz $\exists! \, w \in V | \ g(x) = \phi(x, w) \ \ \forall x \in V$.
Quindi $\phi(f(x), y) = \phi(x, w) \ \ \forall x \in V$.
Poiché w dipende da y, poniamo $w = f^*(y)$.
Dunque è ben definita l'applicazione $f^*: V \to V | \ \phi(f(x), y)) = \phi(x, f^*(y)) \ \ \forall x, y \in V$.

DEFINIZIONE 4.4.4: L'applicazione f^* trovata è detta l'**aggiunto** di f rispetto a ϕ.

PROPOSIZIONE 4.4.5: 1) f^* è lineare;
2) $f^{**} = f$, cioè è un'involuzione;
3) $Ker(f^*) = \big(Im(f)\big)^\perp$;
4) $Im(f^*) = \big(Ker(f)\big)^\perp$;
5) Se $\mathcal{B}$ è base di V, $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$, $A^* = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f^*)$, $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$, allora $A^* = M^{-1}\,{}^tAM$.
Dimostrazione:
1) $\forall x, y_1, y_2 \in V$ si ha:
$\phi\big(x, f^*(y_1 + y_2)\big) = \phi(f(x), y_1 + y_2) = \phi(f(x), y_1) + \phi(f(x), y_2) =$

$= \phi\big(x, f^*(y_1)\big) + \phi\big(x, f^*(y_2)\big) = \phi\big(x, f^*(y_1) + f^*(y_2)\big)$.
Quindi $\phi\big(x, f^*(y_1 + y_2) - f^*(y_1) - f^*(y_2)\big) = 0 \;\; \forall x \in V \;\; \Rightarrow$
$\Rightarrow \big(x, f^*(y_1 + y_2) - f^*(y_1) - f^*(y_2)\big) \in Rad(\phi) = \{0\} \;\Rightarrow f^*(y_1 + y_2) = f^*(y_1) + f^*(y_2)$.
Analogamente per il multiplo $\Rightarrow$ tesi.

2) $\forall x, y \in V$, $\phi(f(x), y) = \phi\big(x, f^*(y)\big) = \phi(f^*(y), x) = \phi\big(y, f^{**}(x)\big) = \phi(f^{**}(x), y)$.
Quindi come prima $f(x) - f^{**}(x) \in Rad(\phi) = \{0\}$, da cui la tesi.
3) $\subseteq$) Sia $v \in Ker(f^*)$. Allora $\forall f(w) \in Im(f)$, $\phi\big(v, f(w)\big) = \phi(f^*(v), w)) = \phi(0, w) = 0$.
$\supseteq$) Sia $v \in \big(Im(f)\big)^{\perp}$. Allora $\forall w \in V$, $\phi(f^*(v), w)) = \phi\big(v, f(w)\big) = 0$, quindi
$f^*(v) \in Rad(\phi) = \{0\}$, da cui $v \in Ker(f^*)$
4) Dalla 3) segue che $Ker(f^{**}) = \big(Im(f^*)\big)^{\perp}$; applicando l'ortogonale si ottiene la tesi.
5) Poiché $\forall v, w \in V$, $\phi(f(v), w) = \phi\big(v, f^*(w)\big)$, allora:
${}^tX{}^tAMY = {}^tXMA^*Y \;\; \forall X, Y \in \mathbb{K}^n$.
Poiché vale $\forall X, Y \in \mathbb{K}^n$, allora ${}^tAM = MA^*$.
Ma ϕ non degenere $\Rightarrow M$ invertibile $\Rightarrow A^* = M^{-1}{}^tAM$.

Osservazioni: 1) Se $\exists \mathcal{B}$ base ortonormale, $A^* = {}^tA$.
2) Il diagramma:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "F_\phi"'] & V \arrow[d, "F_\phi"] \\ V^* \arrow[r, "{}^tf"'] & V^* \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $F_\phi \circ f^* = {}^tf \circ F_\phi$. Infatti $\forall v, x \in V$:
$\big(F_\phi \circ f^*\big)(v)(x) = F_\phi\big(f^*(v)\big)(x) = \phi(f^*(v), x)$;
$\big({}^tf \circ F_\phi\big)(v)(x) = \big({}^tf(\phi_v)\big)(x) = (\phi_v \circ f)(x) = \phi(f(x), v) = \phi(f^*(v), x)$.
Da questo si ricavano di nuovo i punti 3) e 4) della proposizione precedente, infatti:
$Ker(f^*) = Ker\big(F_\phi^{-1} \circ {}^tf \circ F_\phi\big) \boxed{\equiv} Ker\big(F_\phi^{-1} \circ {}^tf\big) \boxed{\equiv} F_\phi^{-1}\big(Ker({}^tf)\big) = F_\phi^{-1}\big(Ann\big(Im(f)\big) =$
$= \big(Im(f)\big)^{\perp}$,
dove i passaggi contrassegnati con $\boxed{\equiv}$ derivano dal fatto che F_ϕ è un isomorfismo.
Analogamente per $Im(f^*)$.
3) $\Psi: (x, y) \to \phi(f(x), y)$ è un prodotto scalare $\Leftrightarrow \forall x, y,\; \phi(f(x), y) = \phi(f(y), x)$,
cioè $\Leftrightarrow\; \phi\big(x, f^*(y)\big) = \phi\big(x, f(y)\big)$, ossia $\Leftrightarrow f^*(y) - f(y) \in Rad(\phi) = \{0\} \;\Leftrightarrow f^* = f$.

DEFINIZIONE 4.4.5: $f \in End(V)$ si dice **autoaggiunto** $\Leftrightarrow f = f^*$.

Osservazione: Supponiamo che $\exists \mathcal{B}$ base di V ortonormale. Allora:
f è autoaggiunto $\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = {}^t\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\big) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K})$.

4.5 SPAZI EUCLIDEI

DEFINIZIONE 4.5.1: (V,ϕ) si dice **spazio euclideo** se V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e ϕ è definito positivo.

Esempi: 1) $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle)$, con $\langle X,Y\rangle = {}^tXY$, cioè il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$;

2) $(\mathcal{M}(n,\mathbb{R}),\phi)$, con $\phi(A,B) = tr({}^tAB)$.
   Infatti $\phi(A,A) = tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [A]_{ji}^2 > 0$ se $A \neq 0$.

DEFINIZIONE 4.5.2: Sia (V,ϕ) spazio euclideo. Si definisce **norma** su V l'applicazione $\| \|: V \to \mathbb{R} |\ \|v\| = \sqrt{\phi(v,v)}$.

PROPOSIZIONE 4.5.1: Valgono le seguenti proprietà:
1) $\|v\| \geq 0\ \ \forall v \in V$ e $\|v\| = 0\ \Leftrightarrow v = 0$;
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$;
3) $\forall v, w \in V$, $|\phi(v,w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (disuguaglianza di Schwarz);
4) $\forall v, w \in V$, $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare).

Dimostrazione:
1) Ovvia.
2) $\|\lambda v\| = \sqrt{\phi(\lambda v, \lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 \phi(v,v)} = |\lambda| \cdot \|v\|$.
3) Se $v = 0 \vee w = 0$ la tesi è ovvia.
   Altrimenti $\phi(tv+w, tv+w) \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, cioè $t^2\phi(v,v) + 2t\phi(v,w) + \phi(w,w) \geq 0\ \forall t$.
   Quindi il discriminante dell'equazione di secondo grado è ≤ 0, cioè:
   $\phi(v,w)^2 - \phi(v,v) \cdot \phi(w,w) \leq 0$, da cui la tesi.
4) $\|v+w\|^2 = \phi(v+w, v+w) = \phi(v,v) + 2\phi(v,w) + \phi(w,w) \boxed{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| +$
   $+ \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$,
   dove il passaggio contrassegnato con $\boxed{\leq}$ segue da 3).

DEFINIZIONE 4.5.3: Una applicazione $d: V \times V \to \mathbb{R}$ si dice **distanza** se verifica le proprietà:
1) $d(x,y) \geq 0\ \ \forall x, y \in V$;
2) $d(x,y) = 0\ \Leftrightarrow x = y$;
3) $d(x,y) = d(y,x)\ \ \forall x, y \in V$;
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\ \ \forall x, y, z \in V$.

DEFINIZIONE 4.5.4: Definiamo $d: V \times V \to \mathbb{R} |\ d(x,y) = \|x - y\|$.

Osservazione: L'applicazione d appena definita è una distanza.

Osservazione: In uno spazio euclideo non esistono vettori isotropi non nulli. Già sappiamo che in ogni spazio euclideo esistono basi ortonormali. Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è ortonormale, allora $\mathcal{B}$ induce una isometria $[\ ]_{\mathcal{B}}: (V,\phi) \to (\mathbb{R}^n, \langle,\rangle)$ data da:

$$v \to [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \phi(v,v_1) \\ \vdots \\ \phi(v,v_n) \end{pmatrix}.$$

Osservazione: Per trovare una base ortonormale in uno spazio euclideo si può procedere applicando a una qualsiasi base dello spazio l'algoritmo di Lagrange e poi normalizzare. Esiste però un metodo più rapido:

METODO DI ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT: $\mathcal{B}$ base di (V,ϕ) euclideo.
Sia $v_1' = v_1$ e $v_2' = v_2 - \frac{\phi(v_2,v_1)}{\phi(v_1,v_1)}v_1$. Allora $\phi(v_1',v_2') = 0$.
Inoltre $Span(v_1,v_2) = Span(v_1',v_2')$ e v_1',v_2' sono linearmente indipendenti.
Ora cerco v_3' in modo che $Span(v_1,v_2,v_3) = Span(v_1',v_2',v_3')$ e $\{v_1',v_2',v_3'\}$ sia base ortogonale di $Span(v_1,v_2,v_3)$.
Notiamo che un tale v_3' si ottiene sottraendo a v_3 la sua proiezione ortogonale su $Span(v_1',v_2') = V_2'$.
Poiché v_1' e v_2' sono ortogonali, conosciamo già l'espressione analitica della proiezione ortogonale su V_2':

$$\pi_{V_2'}: V \to V_2' |\ x \to \frac{\phi(x,v_1')}{\phi(v_1',v_1')}v_1' + \frac{\phi(x,v_2')}{\phi(v_2',v_2')}v_2'.$$

Dunque basta porre:

$$v_3' = v_3 - \frac{\phi(v_3,v_1')}{\phi(v_1',v_1')}v_1' - \frac{\phi(v_3,v_2')}{\phi(v_2',v_2')}v_2'.$$

$v_3' \in Span(v_1',v_2',v_3') = Span(v_1,v_2,v_3)$.
Inoltre la matrice che contiene per colonna le coordinate di v_1',v_2',v_3' rispetto a $\{v_1,v_2,v_3\}$ è:
$M = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dunque $\{v_1',v_2',v_3'\}$ è una base ortogonale di $Span(v_1,v_2,v_3)$.
Itero il procedimento ponendo $\forall j$:

$$v_j' = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\phi(v_j,v_i')}{\phi(v_i',v_i')}v_i'$$

Alla fine ottengo una base ortogonale $\{v_1',\dots,v_n'\}$; basta normalizzare ponendo $w_i = \frac{v_i'}{\|v_i'\|}$.

Abbiamo così ottenuto con una procedura algoritmica il seguente risultato:

TEOREMA DI ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT: (V,ϕ) spazio euclideo, $\{v_1,\dots,v_n\}$ base di V. Allora esiste una base ortonormale $\{w_1,\dots,w_n\}$ di V tale che $Span(w_1,\dots,w_j) = Span(v_1,\dots,v_j)\ \forall j$.

COROLLARIO 4.5.2: (V,ϕ) euclideo, $f \in End(V)$ triangolabile.
Allora esiste $\mathcal{B}$ base di V ortonormale e a bandiera per f.
Dimostrazione:
$\exists \mathcal{S} = \{v_1,\dots,v_n\}$ base a bandiera per f.
Applico Gram-Schmidt a $\mathcal{S}$ e trovo $\mathcal{B} = \{w_1,\dots,w_n\}$ ortonormale.
Poiché $\forall j$, $Span(w_1,\dots,w_j) = Span(v_1,\dots,v_j)$, $\mathcal{B}$ è a bandiera per f.

Osservazione: $f \in End(V)$, con (V,ϕ) spazio euclideo. Se $\phi\big(f(x),f(y)\big) = \phi(x,y)\ \forall x,y \in V$, allora f è un isomorfismo.
Dimostrazione:
Se $x \in Ker(f)$, $\phi(x,x) = \phi\big(f(x),f(x)\big) = \phi(0,0) = 0$, dunque $x = 0$.
Poiché f è lineare e iniettiva, allora è un isomorfismo.
Dunque $f \in O(V,\phi) \iff \phi\big(f(x),f(y)\big) = \phi(x,y)\ \forall x,y \in V$ (se $\phi \in End(V)$ e V euclideo).

ISOMETRIE DI UNO SPAZIO EUCLIDEO: (V,ϕ) euclideo, $f: V \to V$. Sono fatti equivalenti:
1) $f \in O(V,\phi)$
2) $f \in End(V)$ e $\|f(v)\| = \|v\|\ \ \forall v \in V$
3) $f(0) = 0$ e $d\big(f(x),f(y)\big) = d(x,y)\ \ \forall x,y \in V$
4) $f \in End(V)$ e $\forall\{v_1,\dots,v_n\}$ base ortonormale di V, $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ è base ortonormale di V
5) $f \in End(V)$ e $\exists\{v_1,\dots,v_n\}$ base ortonormale di $V|$ $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ è base ortonormale di V
6) $f \in End(V)$ e $f^* \circ f = id$.

Dimostrazione:
1) ⇒ 2): Ovvia perché $\|f(v)\|^2 = \phi\big(f(v),f(v)\big) = \phi(v,v) = \|v\|^2$.
2) ⇒ 1): Usando la formula di polarizzazione:
$$2\phi(v,w) = \phi(v+w,v+w) - \phi(v,v) - \phi(w,w) = \|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 =$$
$$= \|f(v+w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 = \phi\big(f(v+w),f(v+w)\big) - \phi(f(v),f(v) +$$
$$-\phi\big(f(w),f(w)\big) = \phi\big(f(v)+f(w),f(v)+f(w)\big) - \phi(f(v),f(v) - \phi\big(f(w),f(w)\big) =$$
$$= 2\phi\big(f(v),f(w)\big).$$
2) ⇒ 3): $d\big(f(x),f(y)\big) = \|f(x)-f(y)\| = \|f(x-y)\| = \|x-y\| = d(x,y)$.
3) ⇒ 1):
- f conserva la norma:
  $\|f(x)\| = \|f(x)-0\| = \|f(x)-f(0)\| = d\big(f(x),f(0)\big) = d(x,0) = \|x\|$.
- f conserva il prodotto scalare:
  Per ipotesi $\forall x,y \in V$, $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$. Elevando al quadrato ho:
  $\phi\big(f(x)-f(y),f(x)-f(y)\big) = \phi(x-y,x-y)\ \Rightarrow$
  $\Rightarrow\ \underbrace{\|f(x)\|^2}_{=\|x\|^2} + \underbrace{\|f(y)\|^2}_{=\|y\|^2} - 2\phi\big(f(x),f(y)\big) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\phi(x,y)\ \Rightarrow$
  $\Rightarrow\ \phi\big(f(x),f(y)\big) = \phi(x,y)\ \ \forall x,y \in V$.
- f manda basi ortonormali in basi ortonormali:
  Sia $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base ortonormale di V. Poiché f conserva il prodotto scalare, l'insieme $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ è un insieme ortonormale (cioè sono a due a due ortogonali e hanno tutti norma 1).
  Allora $f(v_1),\dots,f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, infatti sia $\sum_{i=1}^n a_i f(v_1) = 0$.
  $\forall j$, $0 = \phi\left(\sum_{i=1}^n a_i f(v_1), f(v_j)\right) = \sum_{i=1}^n a_i \phi\left(f(v_i),f(v_j)\right) = a_j\phi\left(f(v_j),f(v_j)\right) = a_j$
  dunque $\forall j$, $a_j = 0$, quindi $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ è una base ortonormale di V.
- f è lineare:
  $\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, con $x_i = \phi(v,v_i)$ coefficiente di Fourier.
  Ma abbiamo visto che anche $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ è una base ortonormale di V, quindi:
  $f(v) = \sum_{i=1}^n \phi\big(f(v),f(v_i)\big)f(v_i) = \sum_{i=1}^n \phi(v,v_i)f(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(v_i)$,
  dunque f è lineare.
- f è bigettiva in quanto è lineare e manda basi in basi.

Poiché f è isomorfismo e mantiene il prodotto scalare, allora $f \in O(V,\phi)$.

1) $\Rightarrow$ 4): Ovvia perché $\phi\left(f(v_i), f(v_j)\right) = \phi(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ e f manda basi in basi.
4) $\Rightarrow$ 5): Ovvia.
5) $\Rightarrow$ 1): Per ipotesi $\exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale tale che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è base ortonormale.
Siano $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ e $w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Allora:
$\phi(f(v), f(w)) = \phi(f(\sum_{i=1}^n x_i v_i), f(\sum_{i=1}^n y_i v_i)) = \phi(\sum_{=1}^n x_i f(v_i), \sum_{i=1}^n y_i f(v_i)) =$
$= \sum_{i,j} x_i y_j \phi\left(f(v_i), f(v_j)\right) = \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} = \phi(v, w)$.
1) $\Leftrightarrow$ 6): $f \in O(V, \phi) \iff \phi(f(x), f(y)) = \phi(x, y)\ \forall x, y \in V$, ma
$\phi(f(x), f(y)) = \phi\left(x, f^*(f(y))\right)$, quindi $f \in O(V, \phi) \iff \phi\left(x, f^*(f(y))\right) =$
$= \phi(x, y)\ \forall x, y \in V \iff f^*(f(y)) - y \in Rad(\phi) = \{0\}\ \forall y \iff f^* \circ f = id$.

PROPOSIZIONE 4.5.3: $\mathcal{B}$ base ortonormale di (V, ϕ), $f \in End(V)$. Sia $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
Allora $f \in O(V, \phi) \iff {}^tAA = I$.
Dimostrazione:
Poiché $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = I$, $\phi(f(v), f(w)) = {}^tX{}^tAAY\ \ \forall v, w \in V$, $X = [v]_{\mathcal{B}}$, $Y = [w]_{\mathcal{B}}$.
$\phi(v, w) = {}^tXY$.
Quindi $f \in O(V, \phi) \iff {}^tX{}^tAAY = {}^tXY\ \ \forall X, Y \in \mathbb{K}^n \iff {}^tAA = I$.

DEFINIZIONE 4.5.5: $M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ si dice **ortogonale** se ${}^tMM = M{}^tM = I$.
Denotiamo con $O(n) = \{M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) | M \text{ è } ortogonale\}$.

Osservazioni: 1) $M \in O(n) \Rightarrow M$ invertibile e $M^{-1} = {}^tM$
2) $M \in O(n) \iff$ le righe (e le colonne) di M formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Infatti:
$\Rightarrow$) $[{}^tMM]_{ij} = [I]_{ij} = \delta_{ij}$, dunque se $v_j = M^j$, allora $\phi(v_i, v_j) = \delta_{ij}$
$\Leftarrow$) Se $v_j = M^j$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = I \in O(n)$.
3) $O(n)$ dotato del prodotto è un gruppo, detto **gruppo ortogonale**
4) Se $A \in O(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$ (poiché $\det({}^tAA) = det(I) = 1 \Rightarrow (\det(A))^2 = 1$).
In particolare denotiamo con $SO(n) = \{A \in O(n) | \det(A) = 1\}$ il **gruppo ortogonale speciale** (che è un gruppo con il prodotto).
5) Nel caso $n = 2$:
$$O(2) = \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}}_{=SO(2), non\ diagonalizzabili\ (rotazioni)} \cup \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}}_{det=-1, diagonalizzabili\ (riflessioni)}$$
Dimostreremo fra poco che in $O(2)$ esistono solo questi due tipi di matrici.

PROPOSIZIONE 4.5.4: $A \in O(n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore per $A \Rightarrow |\lambda| = 1$.
(Osservazione: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow$ se $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore per A, allora $\lambda = \pm 1$).
Dimostrazione:
Pensiamo $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.
Sia $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ autovettore per A relativo a λ, cioè $AX = \lambda X$.
Poiché A è reale, allora $\overline{AX} = \bar{A}\bar{X} = A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$.
$${}^t(\lambda X)\overline{\lambda X} =< \begin{matrix} \lambda\bar{\lambda}{}^tX\bar{X} \\ {}^t(AX)A\bar{X} = {}^tX{}^tAA\bar{X} = {}^tX\bar{X} \end{matrix}$$

Dunque $(\lambda\bar{\lambda}-1)^t X\bar{X}=0$. Ma $\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|^2$, perciò:
$(|\lambda|^2-1)^t X\bar{X}=0$.
Ora ${}^t X\bar{X}=x_1\overline{x_1}+\ldots+x_n\overline{x_n}=|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2\in\mathbb{R}^+$, poiché $X\neq 0$.
Allora $|\lambda|^2=1 \Rightarrow |\lambda|=1$.

PROPOSIZIONE 4.5.5: (V,ϕ) euclideo, $\mathcal{B}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ base ortonormale di V.
$\mathcal{B}'=\{w_1,\ldots,w_n\}$ base di V; $M=\mathfrak{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id)$. Allora:
$\mathcal{B}'$ è ortonormale $\Leftrightarrow$ M è ortogonale.
Dimostrazione:
$\forall i$, $[w_i]_{\mathcal{B}}=M[w_i]_{\mathcal{B}'}=M^i$.
$\phi(w_i,w_j)={}^t[w_i]_{\mathcal{B}}[w_j]_{\mathcal{B}}={}^t(M^i)M^j=({}^tM)_iM^j=[{}^tMM]_{ij}$.
Dunque $\mathcal{B}'$ è ortonormale $\Leftrightarrow \phi(w_i,w_j)=\delta_{ij}\ \ \forall i,j \ \Leftrightarrow\ [{}^tMM]_{ij}=\delta_{ij}\ \ \forall i,j\ \Leftrightarrow M\in O(n)$.

Dunque possiamo migliorare il teorema di triangolabilità per matrici:

PROPOSIZIONE 4.5.6: $A\in\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ triangolabile. Allora $\exists M\in O(n)|\ M^{-1}AM=T$ triangolare.
Dimostrazione:
Interpretando $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, allora $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}(A)=A$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.
Come conseguenza dell'algoritmo di Gram-Schmidt, $\exists\mathcal{B}$ base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale e a bandiera per A.
Sia $M=\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id)$; allora $M^{-1}AM=\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(A)=T$ triangolare.
Poiché $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi ortonormali, $M\in O(n)$.

Osservazione: Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, la restrizione di $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}: GL(V)\to GL(n,\mathbb{R})$ a $O(V,\phi)$ identifica $O(V,\phi)$ con il sottogruppo $O(n)$ di $GL(n,\mathbb{R})$.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}: O(V,\phi)\to O(n)|\ f\to\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$$

Per quanto visto, se f è isometria, allora:
- $\det(f)=\pm 1$;
- gli unici autovalori reali di f sono ± 1.

Denotiamo con $SO(V,\phi)=\{f\in O(V,\phi)|\ \det(f)=1\}$ il **gruppo ortogonale speciale**.
Gli elementi di $SO(V,\phi)$ sono detti **isometrie dirette** o **rotazioni**.
$f\in O(V,\phi)\backslash SO(V,\phi)$ si dice **isometria inversa**.

Osservazione: Lavoriamo in $(\mathbb{R}^n,\langle,\rangle)$.
Ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ è composizione di al più n riflessioni.
Ogni isometria diretta è composizione di un numero pari di riflessioni, poiché se ρ è una riflessione, $\det(\rho)=-1$, quindi $\det(\rho_1\circ\ldots\rho_k)=1 \ \Leftrightarrow k$ pari.
Analogamente le isometrie inverse sono composizione di un numero dispari di riflessioni.
Se $f\in O(\mathbb{R}^n,\langle,\rangle)$ e $\dim(Fix(f))=k$, allora f è composizione di $n-k$ riflessioni.

PROPOSIZIONE 4.5.7: Ogni matrice in $O(2)$ è della forma:

$$R_\theta=\left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\middle|\,\theta\in\mathbb{R}\right\}\vee\rho_\theta=\left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}\middle|\,\theta\in\mathbb{R}\right\}.$$

Dimostrazione:

Se $A = (v_1 \mid v_2)$, $\{v_1, v_2\}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.
In particolare, se $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, allora $\langle v_1, v_1 \rangle = x_1^2 + x_2^2 = 1$, quindi $\exists \theta_1 |\, x_1 = \cos(\theta_1)$, $x_2 = \sin(\theta_1)$.
Analogamente $v_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$.
Ma:
$0 = \langle v_1, v_2 \rangle = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$.
Dunque $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \lor \ \theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
Se vale la prima, allora $\begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$.
Se vale la seconda, allora $\begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1) \end{pmatrix}$, tesi.

PROPOSIZIONE 4.5.8 (Forma canonica per un'isometria in uno spazio euclideo): Sia $A \in O(n)$. Allora $\exists M \in O(n)$ tale che:

$$^tMAM = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \boxed{I} & & & & \\ & \boxed{-I} & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{R_{\theta_k}} \end{pmatrix},$$

con $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$, con $\theta_i \neq k\pi \ \ \forall i$.
FORMULAZIONE ALTERNATIVA: Sia (V, ϕ) uno spazio euclideo di dimensione n.
Sia $\psi \in O(V, \phi)$. Allora $\exists \mathcal{B}$ base ortonormale di V tale che:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} \boxed{I} & & & & \\ & \boxed{-I} & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{R_{\theta_k}} \end{pmatrix}.$$

(Osservazione: Le due formulazioni sono equivalenti, infatti:
Prima $\Rightarrow$ Seconda: Scelgo $\mathcal{B}'$ base ortonormale per (V, ϕ). Allora $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\phi) = I$.
$\psi \in O(V, \phi) \Rightarrow {}^t\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\psi)\big)\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\phi)\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\psi) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\phi)$, cioè ${}^t\big(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\psi)\big)\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\psi) = I$.
Dunque per la prima formulazione $\exists M \in O(n)$ tale che:

$$^tM\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\psi)M = \begin{pmatrix} \boxed{I} & & & & \\ & \boxed{-I} & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{R_{\theta_k}} \end{pmatrix}$$

Ma $M \in O(n)$, per cui rappresenta un cambio di base da $\mathcal{B}'$ a un'altra base ortonormale, cioè $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id)$, dunque ${}^tM\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\psi)M = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$, tesi.
Il viceversa è analogo.)

Dimostrazione:
Per induzione su n:
Passo base): $n = 1$: Basta osservare che un autovalore reale di A può essere solo ± 1.
Passo induttivo): $n \geq 2$.

Caso a) A ammette l'autovalore reale $\lambda = \pm 1$.

Sia v un autovettore relativo a λ. Allora:
$\mathbb{R}^n = Span(v) \oplus^{\perp} Span(v)^{\perp}$, $Av \in Span(v) \Rightarrow$ (poiché $A \in O(n)$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow Av^{\perp} \subseteq v^{\perp}$, dunque $A|_{v^{\perp}} \in O(v^{\perp}, \langle , \rangle|_{v^{\perp}})$.
Per ipotesi induttiva della seconda formulazione $\exists \mathcal{B}$ base ortonormale di $v^{\perp} |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(A|_{v^{\perp}}) = C$ della forma voluta.
Se scelgo v normalizzato, $B^* = \{v\} \cup \mathcal{B}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}^*}(A) = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, dunque a meno di permutare i vettori di $\mathcal{B}^*$ ho la tesi.

Caso b) A non ha autovalori reali. Sia λ un autovalore complesso.

$|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Sia $v = v_{\mathbb{R}} + i\, v_{\mathbb{I}} \in \mathbb{C}^n$ un autovettore per λ ($v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}} \in \mathbb{R}^n$).
So dalla forma di Jordan reale che $v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}}$ sono indipendenti.
Mostro che $\|v_{\mathbb{R}}\| = \|v_{\mathbb{I}}\|$ e che $\langle v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}} \rangle = 0$.
Se denoto con $\langle , \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{C}^n$,
${}^tAA = I \Rightarrow A \in O(\mathbb{C}^n, \langle , \rangle)$, dunque:
$\langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$.
Ma $\lambda^2 \neq 1$ e dunque $\langle v, v \rangle = 0$, cioè:
$0 = \langle v_{\mathbb{R}} + i\, v_{\mathbb{I}}, v_{\mathbb{R}} + i\, v_{\mathbb{I}} \rangle = \langle v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{R}} \rangle - \langle v_{\mathbb{I}}, v_{\mathbb{I}} \rangle + 2i \langle v_{\mathbb{I}}, v_{\mathbb{R}} \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow$ uguagliando a 0 parte reale e immaginaria:
$\langle v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{R}} \rangle = \langle v_{\mathbb{I}}, v_{\mathbb{I}} \rangle \Rightarrow \|v_{\mathbb{R}}\| = \|v_{\mathbb{I}}\|$ e $\langle v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}} \rangle = 0$.
A meno di riscalare v, posso supporre che $v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}}$ siano ortonormali.
Dalla forma di Jordan reale so che $A\big(Span(v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}})\big) \subseteq Span(v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}})$ e $A|_{Span(v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}})}$ si rappresenta rispetto a $\{v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}}\}$ come:
$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Concludo come prima sfruttando l'invarianza di $Span(v_{\mathbb{R}}, v_{\mathbb{I}})^{\perp}$.

4.6 IL TEOREMA SPETTRALE REALE

In tutto il capitolo lavoreremo in uno spazio euclideo (V, ϕ).

DEFINIZIONE 4.6.1: $f \in End(V)$ si dice **ortogonalmente diagonalizzabile** se $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V ortonormale per ϕ e di autovettori per f (detta anche **base spettrale**).

Osservazione: Se f è ortogonalmente diagonalizzabile, allora f è autoaggiunto.
Infatti se $\exists \mathcal{B}$ base spettrale $\Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = D$ diagonale. Ma poiché f è autoaggiunto $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base di V ϕ-ortonormale$|\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica e D lo è, allora f è autoaggiunto.

LEMMA 4.6.1: $f \in End(V)$ autoaggiunto, W sottospazio di V.
Allora $f(W) \subseteq W \Rightarrow f(W^\perp) \subseteq W^\perp$.
Dimostrazione:
Dobbiamo mostrare che $\forall x \in W^\perp, f(x) \in W^\perp$.
$\forall w \in W$, $0 = \phi\big(x, f(w)\big) = \phi(f(x), w)$, dunque segue la tesi.

LEMMA 4.6.2: $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$. Allora $p_A(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}[t]$.
Dimostrazione:
Consideriamo A come matrice complessa, $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$; sia λ autovalore per A.
Se $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ autovettore per A relativo a λ, allora $AX = \lambda X$, dunque $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$.
Allora:

$$ {}^tXA\bar{X} = < \begin{array}{l} {}^tX\big(\bar{\lambda}\bar{X}\big) = \bar{\lambda}\,{}^tX\bar{X} \\ {}^t(AX)\bar{X} = {}^t(\lambda X)\bar{X} = \lambda\,{}^tX\bar{X} \end{array} $$

Dunque $\big(\bar{\lambda} - \lambda\big){}^tX\bar{X} = 0$.
Ma ${}^tX\bar{X} = x_1\overline{x_1} + \ldots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}^+$, poiché $X \neq 0$.
Dunque $\bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

TEOREMA SPETTRALE REALE: (V, ϕ) spazio euclideo.
$f \in End(V)$ è ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ f è autoaggiunto.
Dimostrazione 1:
$\Rightarrow$) Già vista.
$\Leftarrow$) Per induzione su $n = \dim(V)$:
Passo base): $n = 1$: ovvio.
Passo induttivo): Per il lemma $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore per f.
Sia $v_1 \in V_\lambda$ di norma 1.
Allora $V = Span(v_1) \oplus Span(v_1)^\perp$.
Per il primo lemma, $f(Span(v_1)^\perp) \subseteq Span(v_1)^\perp$; inoltre $\dim(Span(v_1)^\perp) = n - 1$ e $f|_{Span(v_1)^\perp}$ è autoaggiunto.
Dunque per ipotesi induttiva, $\exists\{v_2, \ldots, v_n\}$ base ortonormale di $Span(v_1)^\perp$ di autovettori per $f|_{Span(v_1)^\perp}$ (e quindi per f).
Allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è base spettrale per f, da cui la tesi.
Dimostrazione 2:
$\Rightarrow$) Già vista.
$\Leftarrow$) Sia $\mathcal{S}$ base ϕ-ortonormale, $A = \mathfrak{M}_\mathcal{S}(f)$. Allora ${}^tA = A$.
Per il lemma A è triangolabile, in particolare $\exists P \in O(n) |\ P^{-1}AP = {}^tPAP = T$ triangolare.
A simmetrica $\Rightarrow$ T simmetrica (poiché congruente ad A) $\Rightarrow$ T è diagonale.
Sia $\mathcal{B}$ base di $V |\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(id) = P$.
$P \in O(n) \Rightarrow \mathcal{B}$ ortonormale. $\mathfrak{M}_\mathcal{B}(f) = T$ diagonale $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ di autovettori.

COROLLARIO 4.6.3: $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$. Allora $\exists P \in O(n) |\ P^{-1}AP = {}^tPAP = D$ diagonale.

Osservazione: Sia $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$. In particolare abbiamo dimostrato che:
- A è simile a D tramite una matrice ortogonale, cioè $A\ \mathcal{R}\ D$ in $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})/_{similit.tramite\ el.di\ O(n)}$, che corrisponde a $End(V)/_{coniugio\ tramite\ el.di\ O(V,\phi)}$;

- A è congruente a D tramite matrice ortogonale, ossia $A\ \mathcal{R}\ D$ in $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})/_{congruenza\ tramite\ el.di\ O(n)}$, che corrisponde a $PS(V)/_{isometria\ tramite\ el.di\ O(V,\phi)}$.

Dunque, se $P^{-1}AP = {}^tPAP = D$ diagonale, allora gli elementi sulla diagonale di D sono sia gli autovalori di A, sia permettono di calcolare $\sigma(A)$.
In particolare:
$i_+(A) = \#autovalori\ positivi\ di\ A;$
$i_-(A) = \#autovalori\ negativi\ di\ A;$
$i_0(A) = \#autovalori\ nulli\ di\ A.$

COROLLARIO 4.6.4: $A \in \mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori di A sono positivi.

PROPOSIZIONE 4.6.5: (V,ϕ) euclideo, $f \in End(V)$, $f^* = f$, $\lambda \neq \mu$ autovalori per f.
Allora $V_\lambda \perp V_\mu$ (cioè $\phi(v,w) = 0\ \ \forall v \in V_\lambda, w \in V_\mu$).
Dimostrazione:
$\lambda\phi(v,w) = \phi(\lambda v,w) = \phi(f(v),w) = \phi\big(v,f(w)\big) = \phi(v,\mu w) = \mu\phi(v,w)\ \forall v \in V_\lambda, w \in V_\mu$.
Dunque $(\lambda-\mu)\phi(v,w) = 0\ \ \forall v \in V_\lambda, w \in V_\mu$, ma $\lambda \neq \mu$, da cui la tesi.

TEOREMA DI ORTOGONALIZZAZIONE SIMULTANEA: V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.
$\phi,\psi \in PS(V)$, ϕ definito positivo. Allora $\exists\mathcal{B}$ base di V ortonormale per ϕ e ortogonale per ψ.
Dimostrazione:
Sia $\mathcal{S}$ base ortonormale per ϕ.
Sia $A = \mathfrak{M}_\mathcal{S}(\psi)\ \Rightarrow A$ è simmetrica.
Sia $g \in End(V)|\ \mathfrak{M}_\mathcal{S}(g) = A\ \Rightarrow g$ è autoaggiunto.
Per il teorema spettrale $\exists\mathcal{B}$ base ortonormale per ϕ e di autovettori per g, ossia $\mathfrak{M}_\mathcal{B}(g) = D$ diagonale.
Sia $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{S}}(id)$; poiché $\mathcal{B}$ e $\mathcal{S}$ sono ortonormali, allora $M \in O(n)$.
Inoltre $M^{-1}AM = D$, perciò $M^{-1}AM = {}^tMAM = D$.
Ma $\mathfrak{M}_\mathcal{B}(\psi) = {}^tMAM = D$, per cui la base $\mathcal{B}$ è ortogonale per ψ.

PROPOSIZIONE 4.6.6: $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$. A è simmetrica $\Leftrightarrow \begin{cases} A\,{}^tA = {}^tAA \\ A \text{ è } triangolabile \end{cases}$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Ovvia.
$\Leftarrow$) Come conseguenza di Gram-Schmidt $\exists P \in O(n)|\ P^{-1}AP = {}^tPAP = T$ triangolare superiore.
$T\,{}^tT = {}^tPAP\,{}^tP\,{}^tAP = {}^tPA\,{}^tAP = {}^tP\,{}^tAAP = {}^tP\,{}^tAP\,{}^tPAP = {}^tTT$.
Ma una matrice T triangolare superiore tale che ${}^tTT = T\,{}^tT$ è diagonale, infatti:
$[T\,{}^tT]_{11} = T_1 \cdot T_1 = [T]_{11}^2 + \ldots + [T]_{1n}^2$
$[{}^tTT]_{11} = [T]_{11}^2$,
dunque $[T]_{1j} = 0\ \ \forall 2 \leq j \leq n$.
Iterando, ottengo che T è diagonale.
Allora A è simmetrica perché congruente a T tramite $P \in O(n)$.

COROLLARIO 4.6.7: $A \in O(n)$. Se A ha tutti gli autovalori reali, allora è simmetrica (e dunque diagonalizzabile).

PROPOSIZIONE 4.6.8: $A \in \mathcal{S}(n,\mathbb{R})$. A è definita positiva $\Leftrightarrow \exists! S \in \mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ definita positiva tale che $A = S^2$ (si dice che S è la **radice quadrata** di A).
Dimostrazione:
$\Leftarrow$) $\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, ${}^tXAX = {}^tXS^2X = {}^tX{}^tSSX = {}^t(SX)SX > 0$, poiché $S \in GL(n,\mathbb{R})$, tesi.
$\Rightarrow$) <u>Esistenza</u>: Per ipotesi gli autovalori di A sono reali positivi, quindi $\exists M \in O(n)$ tale che

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D^2 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Allora $A = MD^2M^{-1} = (MD{}^tM)(MD{}^tM)$.
Basta prendere $S = MD{}^tM$ (che è simmetrica e definita positiva perché congruente a D simmetrica e definita positiva).
<u>Unicità</u>: Sia S una qualsiasi matrice simmetrica definita positiva tale che $A = S^2$.
Allora $SA = S \cdot S^2 = S^2 \cdot S = AS$.
Se $\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A)$, $SA = AS \Rightarrow S\left(V_{\lambda_j}(A)\right) \subseteq V_{\lambda_j}(A)\ \forall j$.
Vediamo ora che $S|_{V_{\lambda_j}(A)}$ è completamente determinato (e quindi S è unica).
Sia μ autovalore per $S|_{V_{\lambda_j}(A)}$ e v un autovettore relativo a μ, cioè $Sv = \mu v$.
$\lambda_j v = Av = S^2 v = \mu^2 v \Rightarrow \mu^2 = \lambda_j \Rightarrow \mu = \sqrt{\lambda_j} \Rightarrow S|_{V_{\lambda_j}(A)} = \sqrt{\lambda_j} \cdot id|_{V_{\lambda_j}(A)}$.
Dunque S è determinato univocamente, cioè ho la tesi.

Osservazione: Con la stessa dimostrazione si prova che A è semidefinito positivo $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists! S \in \mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ semidefinita positiva tale che $A = S^2$.

PROPOSIZIONE 4.6.9: $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Allora $\exists! S \in \mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ definita positiva e $P \in O(n)|$ $A = SP$ (questa decomposizione prende il nome di **decomposizione polare**).
Dimostrazione:
<u>Esistenza</u>: A^tA è evidentemente simmetrica e definita positiva, in quanto ${}^tXA{}^tAX = {}^t({}^tAX){}^tAX > 0$, poiché $A \in GL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA \in GL(n,\mathbb{R})$ (oppure ${}^tAA$ è definita positiva perché rappresenta l'identità in una base differente, cioè è una matrice congruente all'identità, che è definita positiva $\Rightarrow {}^tAA$ definita positiva $\Rightarrow A^tA$ è definita positiva).
Dunque per la proposizione precedente $\exists S$ simmetrica definita positiva$|$ $A^tA = S^2$.
Quindi $S^{-1}A^tAS^{-1} = I \Rightarrow S^{-1}A^t(S^{-1}A) = I$, cioè $P = S^{-1}A \in O(n)$.
Inoltre $A = S(S^{-1}A) = SP$, da cui la tesi.
<u>Unicità</u>: Se $A = SP$, allora $A^tA = SP^tPS = S^2$, ma allora S è unica per la proposizione precedente. Poiché $P = S^{-1}A$, anche P è unica.

PROPOSIZIONE 4.6.10: Siano f, g endomorfismi autoaggiunti di uno spazio euclideo $(V, \phi)|$ $f \circ g = g \circ f$. Allora $\exists$base ortonormale di V fatta da autovettori sia per f che per g.
Dimostrazione:
f, g diagonalizzabili per il teorema spettrale. Inoltre $\forall \lambda$ autovalore per f, $V_\lambda(f)$ è g-invariante. $g|_{V_\lambda(f)}$ è autoaggiunto nello spazio euclideo $\left(V_\lambda(f), \phi|_{V_\lambda(f)}\right)$, dunque $g|_{V_\lambda(f)}$ ammette una base $\mathcal{B}_\lambda$ di autovettori ortogonale rispetto a $\phi|_{V_\lambda(f)}$. Al variare di $\lambda_i \in Sp(f)$, pongo $\mathcal{B} = \bigcup_i \mathcal{B}_{\lambda_i}$.
Ogni elemento di $\mathcal{B}$ è di autovettori per f e per g; ma f è autoaggiunto, per cui $V = V_{\lambda_1}(f) \oplus^\perp \dots \oplus^\perp V_{\lambda_k}(f)$, quindi $\mathcal{B}$ è ortonormale; da questo segue la tesi.

5 SPAZI AFFINI

5.1 ISOMETRIE AFFINI

Riprendiamo la notazione $S(X) = \{f: X \to X \; biunivoche\}, X \neq 0$.

DEFINIZIONE 5.1.1: Ogni sottogruppo di $S(X)$ si chiama **gruppo di trasformazioni** di X.

Esempi: 1) Se V è uno spazio vettoriale, con l'algebra lineare abbiamo studiato $GL(V)$ come gruppo di trasformazioni di V.
2) Allo stesso modo abbiamo studiato $O(V, \phi)$ se $\phi \in PS(V)$.

Osservazione: Non tutte le trasformazioni sono lineari, infatti:

DEFINIZIONE 5.1.2: V spazio vettoriale. La trasformazione $\tau_v: V \to V |\, \tau_v(w) = w + v$
è detta **traslazione** del vettore v fissato, $v \in V$.

Osservazione: τ_v è lineare $\Leftrightarrow v = 0$.

Notazione: Indicheremo con $T(V) = \{traslazioni\; di\; V\}$.

PROPOSIZIONE 5.1.1: $(T(V),\circ)$ è un gruppo abeliano di trasformazioni di V e
$(T(V),\circ) \cong (V, +)$.
Dimostrazione:
$\tau_0 = id$, vale evidentemente la proprietà associativa e $(\tau_v)^{-1} = \tau_{-v}$.
Inoltre $\tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w} = \tau_{w+v} = \tau_w \circ \tau_v$.
Quindi $(T(V),\circ)$ è un gruppo abeliano.
Poiché $F: (V, +) \to (T(V),\circ) |\, F(v) = \tau_v$ è sicuramente un isomorfismo, segue anche l'altra tesi.

DEFINIZIONE 5.1.3: Sia G un gruppo. Si chiama **azione** di G su un insieme X ogni omomorfismo $\psi: G \to S(X)$.
L'azione di un gruppo si dice **transitiva** se $\forall x, y \in X, \exists g \in G |\, \psi(g)(x) = y$.

Osservazione: $T(V)$ agisce su V in modo transitivo, infatti $\forall v, w \in V\; \exists \tau \in T(V) |\, \tau(v) = w$
(in particolare $\tau = \tau_{w-v}$ e $\psi(w - v) = \tau_{w-v}$).

DEFINIZIONE 5.1.4: Sia (V, ϕ) uno spazio euclideo e sia d la distanza indotta da ϕ su V.
Allora definiamo $Isom(V, d) = \{f: V \to V \big| d(P, Q) = d\big(f(P), f(Q)\big)\; \forall P, Q \in V\}$ come l'insieme delle **isometrie affini** di V (spesso in seguito le chiameremo semplicemente **isometrie**).

Osservazione: Sicuramente $O(V, \phi) \subseteq Isom(V, d)$ e $T(V) \subseteq Isom(V, d)$, quindi
$\forall v \in V, \forall f \in O(V, \phi), \tau_v \circ f \in Isom(V, d)$.

LEMMA 5.1.2: $\forall v \in V, \forall f \in O(V,\phi)$ (in realtà basterebbe $f \in GL(V)$),
$f \circ \tau_v = \tau_{f(v)} \circ f$ (dunque in generale non commutano).
Dimostrazione:
$(f \circ \tau_v)(x) = f(x+v) = f(x) + f(v) = \left(\tau_{f(v)} \circ f\right)(x)$.

PROPOSIZIONE 5.1.3: $\{\tau_v \circ f | v \in V, f \in O(V,\phi)\}$ è un gruppo rispetto al prodotto di composizioni.
Dimostrazione:
Mostriamo che è chiuso rispetto al prodotto di composizioni:
$(\tau_v \circ f) \circ (\tau_w \circ g) = \tau_v \circ (f \circ \tau_w) \circ g = \underbrace{\tau_v \circ \tau_{f(w)}}_{\in T(V)} \circ \underbrace{f \circ g}_{\in O(V,\phi)}$.
Inoltre $id = \tau_0 \circ id$, dunque rimane da far vedere che $(\tau_v \circ f)^{-1} \in \{\tau_v \circ f | v \in V, f \in O(V,\phi)\}$.

$$\tau_v \circ f \circ \tau_w \circ g = \tau_v \circ \tau_{f(w)} \circ f \circ g = id \Leftrightarrow \begin{cases} f \circ g = id \\ f(w) = -v \end{cases} \begin{cases} g = f^{-1} \\ w = -f^{-1}(v) \end{cases}$$

Quindi $(\tau_v \circ f)^{-1} = \tau_{-f^{-1}(v)} \circ f^{-1}$, da cui la tesi.

Osservazione: Con la stessa dimostrazione si prova che $\{\tau_v \circ f | v \in V, f \in GL(V)\}$ è un gruppo di trasformazioni di V.

TEOREMA 5.1.4: $\{\tau_v \circ f | v \in V, f \in O(V,\phi)\} = Isom(V,d)$.
Dimostrazione:
$\subseteq$) Già vista.
$\supseteq$) Sia $f \in Isom(V,d)$.
Abbiamo già provato che, se $f(0) = 0$, allora $f \in O(V,\phi)$.
Se invece $f(0) = v \neq 0$, allora $\tau_{-v} \circ f \in Isom(V,d)$ e $(\tau_{-v} \circ f)(0) = 0$, dunque $\tau_{-v} \circ f = g \in O(V,\phi)$, da cui $f = \tau_v \circ g$ con $g \in O(V,\phi)$.

Osservazione: Ora andremo a studiare le isometrie di $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle)$.
Notiamo che $Isom(\mathbb{R}^n) = \{X \to AX + B | A \in O(n), B \in \mathbb{R}^n\}$.
Inoltre se $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$, allora $Fix(f) = \{X \in \mathbb{R}^n | AX + B = X\} = \{X \in \mathbb{R}^n | (A-I)X = -B\}$, quindi $Fix(f)$ o è vuoto, oppure è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ con giacitura $\{X \in \mathbb{R}^n | (A-I)X = 0\} = V_1(A) = Fix(A)$.

DEFINIZIONE 5.1.5: $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ è detta **simmetria** se $f^2 = id$.

PROPOSIZIONE 5.1.5: Sia f una simmetria di $\mathbb{R}^n$, $f(X) = AX + B$, con $A \in O(n)$. Allora:
1) $A^2 = I$ e $f(B) = AB + B = 0$;
2) $\frac{B}{2} \in Fix(f)$ (quindi $Fix(f) = \frac{B}{2} + Fix(A)$);
3) B è ortogonale a $Fix(A)$.

Dimostrazione:
1) $\forall X \in \mathbb{R}^n, f^2(X) = X \Rightarrow A(AX+B) + B = A^2X + AB + B = X \Rightarrow A^2 = I$ e $AB + B = 0$.
2) $f\left(\frac{B}{2}\right) = A \cdot \frac{B}{2} + B \boxed{=} -\frac{B}{2} + B = \frac{B}{2}$ (il passaggio $\boxed{=}$ segue da 1)).
3) $Fix(A) = V_1(A)$ e $Fix(A)^\perp = V_{-1}(A)$, in quanto $A^2 = I$ e dunque ha come autovalori solo 1 e -1; inoltre se $x \in V_{-1}(A)$, $y \in V_1(A)$, si ha $\langle x,y\rangle = {}^t xy = {}^t(-Ax)Ay = -{}^t x {}^t AAy = -{}^t xy$,

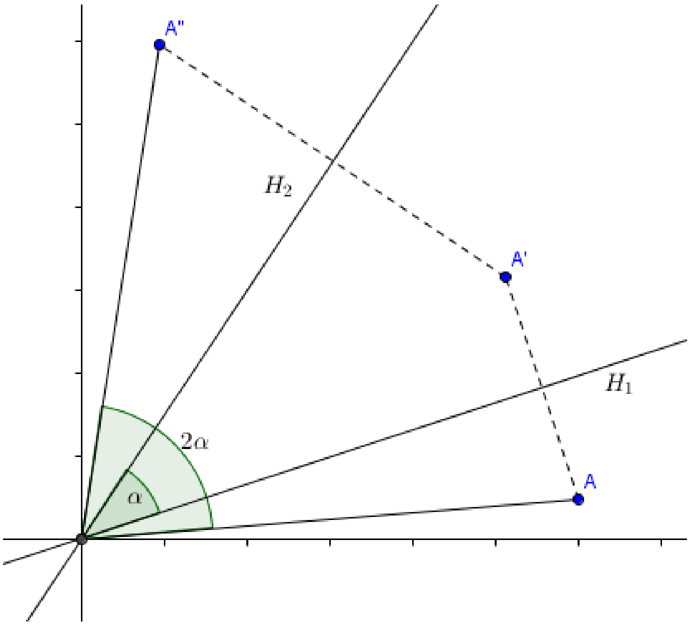
cioè $\langle x, y\rangle = 0$. Poiché per 1) $AB = -B \Rightarrow B \in V_{-1}(A)$, ho la tesi.

DEFINIZIONE 5.1.6: $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ è detta **riflessione** se $f^2 = id$ e $Fix(f)$ è un iperpiano affine (cioè ha come giacitura un sottospazio di dimensione $n-1$).

Osservazione: Se $f(X) = AX + B$ è una riflessione, allora $\dim\big(Fix(A)\big) = n-1$, per cui $A \in O(n)$ è una riflessione lineare rispetto alla giacitura di $Fix(f)$.
In particolare $\det(A) = -1$.

DEFINIZIONE 5.1.7: $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ è detta rotazione se $Fix(f)$ ha come giacitura un sottospazio di dimensione $n-2$.

LEMMA 5.1.7: La composizione di due riflessioni ρ_1, ρ_2 di $\mathbb{R}^n$ rispetto a iperpiani incidenti H_1 e H_2 (non coincidenti) è una rotazione r tale che $Fix(r) = H_1 \cap H_2$.
Dimostrazione:



Dobbiamo mostrare che $\dim\big(Fix(r)\big) = n-2$.
Notiamo che, se W_i è la giacitura di H_i per $i = 1,2$, allora $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) = n-1+n-1-n = n-2$ e $W_1 \cap W_2$ è la giacitura di $H_1 \cap H_2$.
Sicuramente $H_1 \cap H_2 \subseteq Fix(r)$, poiché se $\rho_i(X) = A_iX + B_i$ per $i = 1,2$, allora:
$X \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow A_iX + B_i = X$ per $i = 1,2 \Rightarrow r(X) = (\rho_1 \circ \rho_2)(X) = A_1(A_2X + B_2) + B_1 =$
$= A_1X + B_1 = X$.
Dunque la dimensione della giacitura di r può essere $n-2$ o $n-1$ (se fosse $n \Rightarrow r = id$, cioè i due piani sarebbero coincidenti).
Se la dimensione è $n-1$, allora r è una riflessione, assurdo, perché
$\det(A_1A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) = 1$.
Dunque $Fix(r) = H_1 \cap H_2$.

Osservazione: Notiamo anche che la rotazione r è di un angolo doppio rispetto a quello formato dai due iperpiani H_1 e H_2; questo è semplicemente dimostrabile in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, ma non lo dimostriamo in dimensione maggiore per evitare di definire un angolo in $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE 5.1.8: La composizione di due riflessioni di $\mathbb{R}^n$ può essere una traslazione o una rotazione.
Dimostrazione:
Siano $\rho_1(X) = A_1X + B_1$ e $\rho_2(X) = A_2X + B_2$ le due riflessioni.
Siano $H_1 = Fix(\rho_1)$ e $H_2 = Fix(\rho_2)$ i due iperpiani di punti fissi.
Caso 1): H_1 e H_2 sono paralleli (e quindi hanno la stessa giacitura).
Allora $Fix(A_1) = Fix(A_2)$, cioè A_1 e A_2 sono riflessioni lineari rispetto allo stesso iperpiano lineare $\Rightarrow A_1 = A_2 = A$. Allora:
$(\rho_2 \circ \rho_1)(X) = A(AX + B_1) + B_2 = A^2X + AB_1 + B_2 = X + (AB_1 + B_2) =$
$= X + (B_2 - B_1) \;\Rightarrow\; \rho_2 \circ \rho_1$ è la traslazione $\tau_{\overrightarrow{B_1B_2}}$.
(Osservazione: $B_2 - B_1$ è ortogonale ai due iperpiani e $\|B_2 - B_1\| = 2d(H_1, H_2)$. Pertanto qualsiasi coppia di iperpiani paralleli a H_1, H_2 e aventi la stessa distanza produce $\rho_2 \circ \rho_1$.)
Caso 2): H_1 e H_2 non sono paralleli.
Allora H_1 e H_2 sono incidenti non coincidenti (altrimenti la composizione sarebbe l'identità), dunque la tesi segue per il lemma.

FORMA CANONICA PER UNA SIMMETRIA: Sia $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ una simmetria, $k = \dim\big(Fix(f)\big)$. Allora esiste una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale f si scrive:

$$f(X) = \begin{pmatrix} \boxed{I_k} & 0 \\ 0 & \boxed{-I_{n-k}} \end{pmatrix} X + \alpha v_n.$$

TEOREMA 5.1.9: Ogni $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ è composizione di al più $n + 1$ riflessioni.
Dimostrazione:
Se $f(0) = 0 \;\Rightarrow f \in O(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow f$ è composizione di al più n riflessioni lineari.
Se $f(0) = B \neq 0$, consideriamo $H = \{X \in \mathbb{R}^n | d(X, 0) = d(X, B)\}$.
H è un iperpiano, poiché $X \in H \;\Leftrightarrow\; \|X\|^2 = \|X - B\|^2 \;\Leftrightarrow\; \langle X, X\rangle = \langle X - B, X - B\rangle \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\langle B, X\rangle = \langle B, B\rangle$, che è un'unica equazione. Inoltre $\frac{B}{2} \in H$.
In particolare la giacitura di H è $Span(B)^\perp$.
Sia ρ_H la riflessione rispetto a H. Allora:
$\rho_H \circ f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ e $(\rho_H \circ f)(0) = \rho_H(B) = 0$, quindi $\rho_H \circ f \in O(\mathbb{R}^n)$ è composizione di al più n riflessioni $\Rightarrow f$ è composizione di al più $n + 1$ riflessioni.

DEFINIZIONE 5.1.8: Un'isometria si dice **diretta** se è composizione di un numero pari di riflessioni, **inversa** altrimenti.

Osservazione: $f(X) = AX + B$ è diretta (inversa) $\Leftrightarrow \det(A) = 1$ ($\det(A) = -1$).

DEFINIZIONE 5.1.9: Sia $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$. Diciamo che f è:
- una **glissoriflessione** (o **riflessione traslata**, o **glide**) se è composizione di una riflessione ρ e di una traslazione parallela a $Fix(\rho)$;

- una **riflessione rotatoria** se è composizione di una riflessione ρ e di una rotazione attorno a una iperretta (sottospazio di dimensione $n-2$) che contiene una retta ortogonale a $Fix(\rho)$;
- un **avvitamento** (o **twist**) se è composizione di una rotazione r e di una traslazione (non banale) parallela a $Fix(r)$.

Osservazione: Da quello che abbiamo visto, segue che:
- se $\tau \in T(V)$, allora $\det(\tau) = 1$ e $Fix(\tau) = \emptyset$;
- se ρ è una riflessione, $\det(\rho) = -1$ e $\dim\big(Fix(\rho)\big) = n-1$;
- se r è una rotazione, $\det(r) = 1$ e $\dim\big(Fix(r)\big) = n-2$;
- se g è una glissoriflessione, $\det(g) = -1$ e $Fix(g) = \emptyset$;
- se R è una riflessione rotatoria, $\det(R) = -1$ e $\dim\big(Fix(R)\big) = n-3$ (poiché se $x \in Fix(R)$, è chiaro che $x \in Fix(\rho) \cap Fix(r)$, dove $R = \rho \circ r$, e $\dim\big(Fix(\rho) \cap Fix(r)\big) = \dim\big(Fix(\rho)\big) + \dim\big(Fix(r)\big) - \dim\big(Fix(\rho) + Fix(r)\big) = n-1+n-2-n = n-3$)
- se t è un avvitamento, allora $\det(t) = 1$ e $Fix(t) = \emptyset$.

PROPOSIZIONE 5.1.10: Sia $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$. Se f ha almeno un punto fisso, allora f è composizione di al più n riflessioni.
Dimostrazione:
Sia $f(0) = B$. Se $B = 0$, segue subito la tesi.
Sia allora $B \neq 0$.
Sia $Q | f(Q) = Q$; $H = \{X \in \mathbb{R}^n | d(X,0) = d(X,B)\}$.
Come provato prima, $\rho_H \circ f$ è lineare. Inoltre $Q \in H$, infatti:
$d(Q,0) = d\big(f(Q), f(0)\big) = d(Q,B)$.
Allora $\rho_H(Q) = Q$ e quindi $(\rho_H \circ f)(Q) = Q \;\Rightarrow\; \rho_H \circ f$ è lineare e $\dim Fix(\rho_H \circ f) \geq 1$, quindi $\rho_H \circ f$ è composizione di al più $n-1$ riflessioni, quindi f è composizione di al più n riflessioni, da cui la tesi.

Osservazione: Se $Fix(f) = \emptyset$, possono effettivamente essere necessarie $n+1$ riflessioni:
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 |\, f\big((x,y)\big) = (x+2, -y)$; allora $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$Fix(f) = \emptyset$; non bastano 2 riflessioni perché f non è né una traslazione, né una riflessione, né una rotazione.
D'altra parte, se $f = \tau_v$, $Fix(f) = \emptyset$ ma bastano 2 riflessioni.

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE PIANE: Ogni $f \in Isom(\mathbb{R}^2)$ è:
1) una traslazione;
2) una rotazione;
3) una riflessione;
4) una glissoriflessione.

Dimostrazione:
f è composizione di al più 3 riflessioni.
Se f è composizione di 0 riflessioni, $f = id$.
Se f è composizione di 1 riflessione, allora f è una riflessione.
Se f è composizione di 2 riflessioni, abbiamo visto che f è una traslazione o una rotazione.

Se f è composizione di 3 riflessioni, diciamo $f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$, allora:
Caso 1): $\rho_1 \circ \rho_2 = \tau_v$ traslazione.
Scrivo $v = v_1 + v_2$, con $v_1 // v_3$ e $v_2 \perp r_3$. Allora:
$f = \tau_v \circ \rho_3 = \tau_{v_1} \circ \tau_{v_2} \circ \rho_3$.
Ma $\tau_{v_2} \circ \rho_3$ è una riflessione con asse $r_3' // r_3$, dunque f è una glissoriflessione.
(Osservazione: Se $v_1 = 0$ (cioè $v \perp r_3$), f è una riflessione. Quindi:
$f = \tau_v \circ \rho_3$ è una riflessione $\Leftrightarrow$ gli assi di riflessione sono 3 rette parallele.)
Caso 2): $\rho_1 \circ \rho_2$ è una rotazione attorno ad un punto P con angolo α.

a) $P \notin r_3$.
Allora scrivo la rotazione $R = \rho_1 \circ \rho_2$ come composizione di due riflessioni ρ_1' e ρ_2' rispetto a rette incidenti di angolo $\frac{\alpha}{2}$ e $r_2' // r_3$.
$f = R \circ \rho_3 = \rho_1' \circ \underbrace{\rho_2' \circ \rho_3}_{traslazione} \Rightarrow f$ è glissoriflessione.

b) $P \in r_3$ (gli assi di ρ_1, ρ_2, ρ_3 si dicono **concorrenti** in P).
Scrivo $R = \rho_1 \circ \rho_2$ come $\rho_1' \circ \rho_3$, dove ρ_1' è una riflessione rispetto ad una opportuna retta passante per $P \Rightarrow f = \rho_1' \circ \rho_3 \circ \rho_3 = \rho_1' \Rightarrow f$ è riflessione.
(Osservazione: $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ è riflessione $\Leftrightarrow$ i 3 assi sono concorrenti o paralleli).

Osservazione: La composizione di 3 riflessioni di $\mathbb{R}^3$ rispetto a 3 piani incidenti in un punto P e a due a due ortogonali è una simmetria con $Fix(f) = \{P\}$. Quest'ultima è detta **simmetria centrale** di centro P.
In generale la composizione fra due isometrie "elementari" (riflessioni, traslazioni e rotazioni) non è commutativa, tranne che nei casi speciali della glissoriflessione, della riflessione rotatoria e dell'avvitamento. Ne tralasciamo la dimostrazione.

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE DI $\mathbb{R}^3$: Ogni $f \in Isom(\mathbb{R}^3)$ è una:
- traslazione;
- riflessione;
- rotazione;
- glissoriflessione;
- avvitamento;
- riflessione rotatoria.

Dimostrazione:
$f(X) = AX + B$, con $A \in O(n)$, per cui $\exists \mathcal{B}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} | \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(A) =$
a) I;
b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
c) $\left(\begin{array}{c|c} rot(\theta) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, $\theta \in (0,2\pi)$;
d) $\left(\begin{array}{c|c} rot(\theta) & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$, $\theta \in (0,2\pi)$.

Studiamo i vari casi:
a) f è una traslazione, $f = \tau_0$.

b) $f(X) = AX$ è una riflessione (poiché $f|_{Span(v_1,v_2)} = id$), quindi il tipo di $f(X) = AX + B$ dipende dalla posizione della traslazione B.
Sia $H = Span(v_1, v_2)$ e $\forall v \in \mathbb{R}^3$, v_H, $v_H^\perp$ le proiezioni di v su H e $H^\perp = Span(v_3)$ rispetto a $\mathbb{R}^3 = H \oplus^\perp H^\perp$.
$f(X) = (AX + B_H^\perp) + B_H$.
Studiamo $Fix(X \to AX + B_H^\perp)$:
$AX + B_H^\perp = X \iff (A - I)X = -B_H^\perp$.
Ora $(A - I)|_H \equiv 0$ e $(A - I)|_{H^\perp} = -2I$, dunque:

$$(A - I)X = (A - I)(X_H + X_H^\perp) = -2X_H^\perp \Rightarrow AX + B_H^\perp = X \iff -2X_H^\perp = -B_H^\perp \iff X_H^\perp = \frac{B_H^\perp}{2}$$
$$\iff X = \frac{B_H^\perp}{2} + h, h \in H \iff X \in \frac{B_H^\perp}{2} + H$$

Perciò $Fix(X \to AX + B_H^\perp)$ è un piano affine e $X \to AX + B_H^\perp$ è una riflessione ρ.
$f = \tau_{B_H} \circ \rho$, $B_H \in H$ che è la giacitura di $Fix(S)$.
Dunque f è una riflessione se $B_H = 0$, una glissoriflessione se $B_H \neq 0$.

c) Usando la stessa notazione del punto precedente, vogliamo mostrare che $X \to AX + B_H$ è una rotazione.
$AX + B_H = X \iff (A - I)X = -B_H$.
$(A - I)|_H : H \to H$ è invertibile, $(A - I)|_{H^\perp} \equiv 0$; per cui:
$\exists!\, X_0 \in H | (A - I)X_0 = -B_H$; inoltre $Ker(A - I) = H^\perp$, quindi
X risolve $(A - I)X = -B_H \iff X \in X_0 + H^\perp$.
Quindi $Fix(X \to AX + B_H)$ è una retta affine, per cui $X \to AX + B_H$ è una rotazione.
Dunque se $B_H^\perp = 0$, f è una rotazione, altrimenti f è un avvitamento.

d) $\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} rot(\theta) & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)}_{=A} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} rot(\theta) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)}_{=A_H} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=A_{H^\perp}} - I$

Dunque:

$$f(X) = AX + B = (A_H + A_{H^\perp} - I)X + B_H + B_{H^\perp} =$$
$$= (A_H X + B_H - X_H) + (A_{H^\perp} X + B_{H^\perp} - X_{H^\perp})$$

Sappiamo già per il punto c) che $(A_H X + B_H - X_H): H \to H$ è una rotazione e per il punto b) che $(A_{H^\perp} X + B_{H^\perp} - X_{H^\perp}): H^\perp \to H^\perp$ è una riflessione (con piano di riflessione $\perp$ all'asse di rotazione).
Dunque $\forall B$, f è una riflessione rotatoria.

5.2 SPAZI E SOTTOSPAZI AFFINI

DEFINIZIONE 5.2.1: Definiamo $A(V) = \{\tau_v \circ f | v \in V, f \in GL(V)\}$.

Osservazione: Abbiamo visto che $A(V)$ è un gruppo di trasformazioni di V (che in particolare coincide con il sottogruppo di $S(V)$ generato da $T(V)$ e $GL(V)$)

DEFINIZIONE 5.2.2: G gruppo di trasformazioni di un insieme X. $\forall x \in X$, definiamo **stabilizzatore** di x l'insieme $St_x(G) = \{g \in G | g(x) = x\}$.

PROPOSIZIONE 5.2.1: 1) $St_v(GL(V)) = GL(V) \Leftrightarrow v = 0$
2) $St_v(A(V)) \cong GL(V)\ \forall v \in V$.
Dimostrazione:
1) Ovviamente $St_0(GL(V)) = GL(V)$.
   D'altra parte se $v \neq 0$, $\exists f \in GL(V) |\ f(v) \neq v$.
2) Vediamo intanto che $\forall v, w \in V$, $St_v(A(V))$ e $St_w(A(V))$ sono isomorfi.
   Infatti se $u = v - w$ (così che $\tau_u(w) = v$):
   $$\begin{aligned} St_v(A(V)) &\to St_w(A(V)) \\ f &\to \tau_{-u} \circ f \circ \tau_u \end{aligned}$$
   è un isomorfismo.
   Inoltre $\tau_v \circ f \in St_0(A(V)) \Leftrightarrow (\tau_v \circ f)(0) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Cioè $St_0(A(V)) = GL(V)$, tesi.

Osservazione: Questo fa capire che in V c'è un punto privilegiato, cioè l'origine O, mentre rispetto ad $A(V)$ tutti i punti di V sono equivalenti.
Dunque nella seguente trattazione distingueremo gli elementi di V pensati come punti e i vettori di V pensati come traslazioni (poiché sappiamo che $(T(V), \circ) \cong (V, +)$).

DEFINIZIONE 5.2.3: V spazio vettoriale. Un insieme A (anche $\emptyset$) si dice **spazio affine** su V se $\exists F: A \times A \to V$ che associa ad ogni coppia di punti $P, Q \in A$ un vettore di V, denotato $\overrightarrow{PQ}$, in modo che:
1) $\forall P \in A, \forall v \in V, \exists!\, Q \in A |\ \overrightarrow{PQ} = v$;
2) $\forall P, Q, R \in A$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (relazione di Chasles).

DEFINIZIONE 5.2.4: Definiamo **dimensione** di uno spazio affine A, $\dim(A) = \dim(V)$ se $A \neq \emptyset$, altrimenti $\dim(\emptyset) = -1$.

Osservazione: Dalla relazione di Chasles discende:
- $\forall P \in A$, $\overrightarrow{PP} = 0$ (basta prendere $P = Q = R$);
- $\forall P, Q \in A$, $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$ (basta prendere $P = R$).

Esempi: Alcuni esempi di spazi affini possono essere:
1) $A = V$, $F: V \times V \to V |\ (P, Q) \to \overrightarrow{PQ} \stackrel{\text{def}}{=} Q - P$ (detto **spazio affine standard** su V)
2) $f: U \to W$ lineare, $b \in W$.

Sia $A = f^{-1}(b), V = f^{-1}(0) = Ker(f)$.
Allora A è spazio affine su V tramite $F: A \times A \to V | (a_1, a_2) \to \overrightarrow{a_1 a_2} \stackrel{\text{def}}{=} a_2 - a_1$.

DEFINIZIONE 5.2.5: Definiamo **traslazione** del vettore v, $\tau_v: A \to A | P \to Q$, con $\overrightarrow{PQ} = v$.

Notazione: Se $P \in A$ e $v \in V$, denoteremo con $P + v$ l'unico punto Q di A tale che $\overrightarrow{PQ} = v$.

Osservazione: Con questa notazione si ha:
- $\overrightarrow{P(P+v)} = v$;
- $P + \overrightarrow{PQ} = Q$;
- $\tau_v(P) = P + v$.

Si ha così l'applicazione $A \times V \to A | (P, v) \to P + v$.

LEMMA 5.2.2: $\forall P \in A, \forall v_1, v_2 \in V, (P + v_1) + v_2 = P + (v_1 + v_2)$.
(Osservazione: Questa relazione non è affatto ovvia, in quanto la scrittura $P + v$ è solamente una notazione e non ha niente a che fare con la somma tradizionale.)
Dimostrazione:
Sia $P_1 = P + v_1$, ossia $\overrightarrow{PP_1} = v_1$.
Sia $P_2 = P_1 + v_2$, ossia $\overrightarrow{P_1P_2} = v_2$.
$P + (v_1 + v_2) = P + \left(\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}\right) = P + \overrightarrow{PP_2} = P_2$, da cui la tesi.

DEFINIZIONE 5.2.6: Fissato $P \in A$, definiamo l'applicazione $F_P: A \to V | Q \to \overrightarrow{PQ}$ (a volte questa applicazione prende il nome di **sollevamento** di A su V).

Osservazione: Dagli assiomi segue che F_P è bigettiva e $F_P(P) = \overrightarrow{PP} = 0$, dunque F_P trasforma P nell'origine di V.
In altre parole, con F_P "identifico" A con V, ossia "sollevo" su A una struttura di spazio vettoriale. Questo si può fare $\forall P \in A$.

Osservazione: $\forall v \in V, F_P^{-1}(v) = P + v$.

Osservazione: Cerchiamo di sollevare la nozione di combinazione lineare di vettori nello spazio affine: siano $P_1, \dots, P_k \in A$. Fissiamo $P \in A$.
F_P trasforma P_i in $\overrightarrow{PP_i}$ $\forall i$.
Inoltre $\forall t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}, \exists t_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + t_k\overrightarrow{PP_k} \in V$ e
$F_P^{-1}\left(t_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + t_k\overrightarrow{PP_k}\right) = P + t_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + t_k\overrightarrow{PP_k} \in A$.
Affinché sia una buona definizione, il risultato non deve dipendere da P.
Cioè se $A \ni Q \neq P$, allora deve valere $P + \sum_{i=1}^k t_i\overrightarrow{PP_i} = Q + \sum_{i=1}^k t_i\overrightarrow{QP_i}$.
$$P + \sum_{i=1}^{k} t_i\overrightarrow{PP_i} = P + \sum_{i=1}^{k} t_i\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_i}\right) = P + \left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)\overrightarrow{PQ} + \sum_{i=1}^{k} t_i\overrightarrow{QP_i},$$
che coincide con $Q + \sum_{i=1}^k t_i\overrightarrow{QP_i} \Leftrightarrow P + \left(\sum_{i=1}^k t_i\right)\overrightarrow{PQ} = Q \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k t_i = 1$.

DEFINIZIONE 5.2.7: Dati $P_1, \dots, P_k \in A$ e $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K} | \sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, definiamo combinazione affine dei punti P_i con coefficienti e $t_1, \dots, t_k$ il punto $P + t_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + t_k\overrightarrow{PP_k}$, dove P è un qualunque punto di A.

Osservazione: Notiamo che $\forall P, P_1, \dots, P_k \in A$ e $\forall t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K} | \sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, vale:
$P + t_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + t_k\overrightarrow{PP_k} = t_1P_1 + \dots + t_kP_k$.
Infatti $F_P\left(P + t_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + t_k\overrightarrow{PP_k}\right) = t_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + t_k\overrightarrow{PP_k}$ e
$F_P(t_1P_1 + \dots + t_kP_k) = \overrightarrow{P(t_1P_1 + \dots + t_kP_k)} = t_1\overrightarrow{PP_1} + \dots + t_k\overrightarrow{PP_k}$,
e poiché F_P è bigettiva, ho la tesi.

Esempi: 1) Se $P, Q \in A, \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$ è detto punto medio fra P e Q $(char(\mathbb{K}) \neq 2)$
2) Se $P_1, \dots, P_k \in A, \frac{1}{k}P_1 + \dots + \frac{1}{k}P_k$ è detto baricentro dei P_i $(char(\mathbb{K}) \nmid k)$.

DEFINIZIONE 5.2.8: Definiamo **insieme delle combinazioni affini** dei punti $P_1, \dots, P_k \in A$
$Comb_a(P_1, \dots, P_k) = \{combinazioni\ affini\ di\ P_1, \dots, P_k\}$.

Esempio: $A = \mathbb{K}^n$, $P_1, P_2 \in A$ punti distinti.

$$Comb_a(P_1, P_2) = \{t_1P_1 + t_2P_2 | t_1 + t_2 = 1\} = \left\{P_1 + (1-t)\overrightarrow{P_1P_1} + t\overrightarrow{P_1, P_2} \middle| t \in \mathbb{K}\right\} =$$
$$= \{P_1 + t(P_2 - P_1) | t \in \mathbb{K}\},$$

cioè è la retta passante per P_1 e P_2.
Analogamente se vede che $Comb_a(P_1, P_2, P_3)$ è il piano contenente P_1, P_2, P_3 (se i tre punti non sono allineati).

Similmente al caso lineare, definisco:

DEFINIZIONE 5.2.9: $H \subseteq A$ (anche $H = \emptyset$) è detto sottospazio affine di A se è chiuso per combinazioni affini.

Osservazione: Come nel caso lineare, l'intersezione di una famiglia arbitraria di sottospazi affini è un sottospazio affine.

Notazione: Se $P_0 \in A$ e W è sottospazio di V, indicheremo con $P_0 + W = \{P_0 + w | w \in W\}$.

Osservazione: $P_0 + W = \{\tau_w(P_0) | w \in W\}$ e $F_P^{-1}(W) = P + W$.

PROPOSIZIONE 5.2.3: $\forall P_0 \in A$, $\forall W$ sottospazio di V, $P_0 + W$ è sottospazio affine di A.
Dimostrazione:
Verifico che $P_0 + W$ è chiuso per combinazioni affini.
Siano $P_0 + w_1, \dots, P_0 + w_k \in P_0 + W$; $t_1 + \dots + t_k = 1$.
$t_1(P_0 + w_1) + \dots + t_k(P_0 + w_k) = P_0 + t_1\overrightarrow{P_0(P_0 + w_1)} + \dots + t_k\overrightarrow{P_0(P_0 + w_k)} =$
$= P_0 + t_1w_1 + \dots + t_kw_k \in P_0 + W$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 5.2.4: Sia $H \neq \emptyset$ un sottospazio affine di A. Allora esiste un unico sottospazio W_H di V (detto la **giacitura** di H), tale che $\forall P \in H, H = P + W_H$.
Dimostrazione:
Sia $P_0 \in H$. Cerco W_0 sottospazio di $V \mid H = P_0 + W_0$.
Poiché $P_0 + W_0 = F_{P_0}^{-1}(W_0)$, deve essere $W_0 = F_{P_0}(H) = \{w \in V \mid P_0 + w \in H\}$.
Verifico che l'insieme W_0 è sottospazio di V.
Siano $w_1, w_2 \in W_0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.
Allora $P_0 + w_1 \in H$, $P_0 + w_2 \in H$.
Devo mostrare che $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W_0$, cioè che $P_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in H$.

$$\begin{aligned} P_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 &= P_0 + \alpha_1 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_2)} = \\ &= P_0 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{P_0P_0} + \alpha_1 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_1)} + \alpha_2 \overrightarrow{P_0(P_0 + w_2)}, \end{aligned}$$

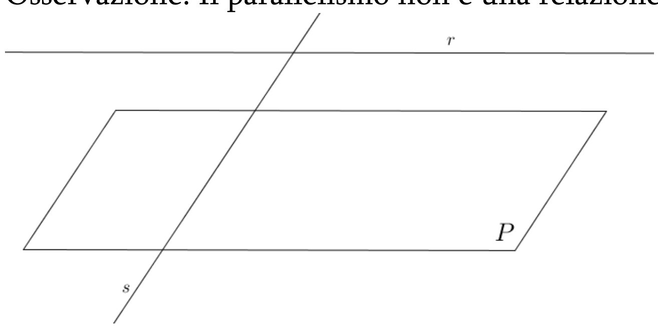
che appartiene a H perché combinazione affine dei punti $P_0, P_0 + w_1, P_0 + w_2$ che stanno in H.
Resta da controllare che W_0 non dipende dalla scelta di P_0, ossia che $\forall P_1, P_2 \in H$,
$F_{P_1}(H) = F_{P_2}(H)$.
$F_{P_1}(H) = \{\overrightarrow{P_1Q} \mid Q \in H\}$.
Sia $\overrightarrow{P_1Q} \in F_{P_1}(H)$.
Allora $\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q} = \underbrace{-\overrightarrow{P_2P_1}}_{\in F_{P_2}(H)} + \underbrace{\overrightarrow{P_2Q}}_{\in F_{P_2}(H)} \in F_{P_2}(H)$,
cioè $F_{P_1}(H) \subseteq F_{P_2}(H)$.
Analogamente si prova l'inclusione opposta $\Rightarrow$ tesi.

DEFINIZIONE 5.2.10: Se H è sottospazio affine di A, si pone $\dim(H) = \dim(W_H)$.
- H è detto **retta** (**affine**) se $\dim(H) = 1$;
- H è detto **piano** (**affine**) se $\dim(H) = 2$;
- H è detto **iperpiano** (**affine**) se $\dim(H) = \dim(A) - 1$.

Osservazione: H, L sottospazi affini di A, $H \cap L \neq \emptyset$.
Allora $\forall P \in H \cap L$, $H = P + W_H$, $L = P + W_L$.
$H \cap L = (P + W_H) \cap (P + W_L) = P + (W_H \cap W_L) \Rightarrow W_{H \cap L} = W_H \cap W_L$.
Dunque $\dim(H \cap L) = \dim(W_H \cap W_L)$.

DEFINIZIONE 5.2.11: Due sottospazi affini H, L si dicono:
- incidenti se $H \cap L \neq \emptyset$;
- paralleli se $W_H \subseteq W_L \vee W_L \subseteq W_H$;
- sghembi se $H \cap L = \emptyset \wedge W_H \cap W_L = \{0\}$.

Osservazione: Il parallelismo non è una relazione di equivalenza:



infatti dalla figura si vede che $W_r \subseteq W_P$ e $W_s \subseteq W_P$, ma $W_s \nsubseteq W_r \wedge W_r \nsubseteq W_s$.

PROPOSIZIONE 5.2.5: $P_0, \dots, P_k \in A$. Allora:
$Comb_a(P_0, \dots, P_k) = P_0 + Span(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k})$.
Quindi $Comb_a(P_0, \dots, P_k)$ è un sottospazio affine di A, detto il sottospazio affine generato da $P_0, \dots P_k$. È il più piccolo sottospazio affine di A contenente $P_0, \dots, P_k$.
Dimostrazione:
Per definizione di combinazione affine vale $\subseteq$.
Mostriamo ora l'inclusione opposta:
$\forall t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$, $P_0 + t_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + t_k\overrightarrow{P_0P_k} = P_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right)\overrightarrow{P_0P_0} + t_1\overrightarrow{P_0P_1} + \dots + t_k\overrightarrow{P_0P_k}$, che appartiene a $Comb_a(P_0, \dots, P_k) \Rightarrow$ tesi.

Osservazione: Dunque $\dim\left(Comb_a(P_0, \dots, P_k)\right) = \dim\left(Span(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k})\right)$.

Notazione: In generale $\forall X \subseteq A, X \neq \emptyset$, denotiamo con $Comb_a(X)$ l'insieme delle combinazioni affini dei punti di X.

PROPOSIZIONE 5.2.6: $X \subseteq A$. $\forall R \in X, Comb_a(X) = R + Span\left(\{\overrightarrow{RQ} \mid Q \in X\}\right)$.
Inoltre se $H \subseteq A$ è un sottospazio affine di A che contiene X, allora $Comb_a(X) \subseteq H$.
Dimostrazione:
È analoga a quella della proposizione precedente.

DEFINIZIONE 5.2.12: Se H, L sono sottospazi affini di A, poniamo $H + L = Comb_a(H \cup L)$.

Osservazione: $H \subseteq L \Rightarrow W_H \subseteq W_L$.
Dimostrazione:
$\forall P \in H, H = P + W_H, L = P + W_L$.
$\forall w \in W_H, P + w \in H \subseteq L \Rightarrow w \in W_L$.

PROPOSIZIONE 5.2.7: H, L sottospazi affini di A. Allora $\forall P \in H, \forall Q \in L$:
$W_{H+L} = W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ})$.
Dimostrazione:
$\supseteq$) $H \subseteq H + L, L \subseteq H + L \Rightarrow W_H + W_L \subseteq W_{H+L}$.
Poiché $Comb_a(P, Q) \subseteq H + L \Rightarrow Span(\overrightarrow{PQ}) \subseteq W_{H+L}$.
$\subseteq$) Considero il sottospazio affine $S = P + \left(W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ})\right)$.
Allora $S \supseteq P + W_H = H$; inoltre $S \supseteq L$, infatti:
$Q = P + \overrightarrow{PQ} \in S \Rightarrow S = Q + \left(W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ})\right) \Rightarrow S \supseteq Q + W_L = L$.
Per minimalità, $S \supseteq H + L \Rightarrow W_S = W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ}) \supseteq W_{H+L}$.

LEMMA 5.2.8: H, L sottospazi affini di A. Allora $H \cap L = \emptyset \Leftrightarrow \forall P \in H, \forall Q \in L, \overrightarrow{PQ} \notin W_H + W_L$.
Dimostrazione:
$\Rightarrow$) Per assurdo supponiamo che $\exists P \in H, Q \in L \mid \overrightarrow{PQ} = w_1 + w_2$, con $w_1 \in W_H, w_2 \in W_L$.

$\underbrace{P + w_1}_{\in H} = P + (\overrightarrow{PQ} - w_2) = (P + \overrightarrow{PQ}) - w_2 = \underbrace{Q - w_2}_{\in L}$, assurdo.

$\Leftarrow$) Per assurdo supponiamo $\exists R \in H \cap L$.
Siano $P \in H$, $Q \in L$, per cui $H = P + W_H$, $L = Q + W_L$.
Allora $\overrightarrow{PQ} = \underbrace{\overrightarrow{PR}}_{\in W_H} + \underbrace{\overrightarrow{RQ}}_{\in W_L} \in W_H + W_L$, assurdo.

FORMULA DI GRASSMANN AFFINE: Siano H, L sottospazi di A.
1) Se $H \cap L \neq \emptyset \Rightarrow \dim(H + L) = \dim(H) + \dim(L) - \dim(H \cap L)$.
2) Se $H \cap L = \emptyset \Rightarrow \dim(H + L) = \dim(H) + \dim(L) - \dim(W_H \cap W_L) + 1$.

Dimostrazione:
$\dim(H + L) = \dim(W_{H+L})$ e $W_{H+L} = W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ})$, con $P \in H$ e $Q \in L$.
1) Per il lemma, se $H \cap L \neq \emptyset$, $\overrightarrow{PQ} \in W_H + W_L \Rightarrow W_{H+L} = W_H + W_L$.
La tesi segue dalla formula di Grassmann vettoriale:
$$\dim(W_{H+L}) = \dim(W_H + W_L) = \dim(W_H) + \dim(W_L) - \dim(W_H \cap W_L) =$$
$$= \dim(H) + \dim(L) - \dim(H \cap L).$$
2) Se $H \cap L = \emptyset$, per il lemma $\overrightarrow{PQ} \notin W_H + W_L$.
Quindi $\dim(W_{H+L}) = \dim\left(W_H + W_L + Span(\overrightarrow{PQ})\right) = \dim(W_H + W_L) + 1$ e si conclude come prima.

Osservazione: Se H e L sono sghembi, allora $\dim(H + L) = \dim(H) + \dim(L) + 1$
(infatti tutte le combinazioni affini di due rette sghembe in $\mathbb{R}^3$ generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$).

DEFINIZIONE 5.2.13: $P_0, \dots, P_k$ si dicono **affinemente indipendenti** se
$\dim(Comb_a(P_0, \dots, P_k)) = k$ (ossia se $\dim\left(Span(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k})\right) = k$, cioè se $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k}$ sono linearmente indipendenti.

DEFINIZIONE 5.2.14: Sia $\dim(A) = n$. Si chiama **riferimento affine** di A ogni insieme ordinato $R = \{P_0, \dots, P_n\}$ di $n + 1$ punti di A affinemente indipendenti.

Osservazione: Essendo R ordinato, scelgo P_0 come "punto base".
Inoltre $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ è una base di V.

Osservazioni: 1) Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, $\forall P_0 \in A$, $\{P_0, P_0 + v_1, \dots, P_0 + v_n\}$ è riferimento affine di A.
2) Se $A = V$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V allora $\{0, v_1, \dots, v_n\}$ è riferimento affine.
Ad esempio in $\mathbb{K}^n$, $\{0, e_1, \dots, e_n\}$ è detto **riferimento affine standard**.

PROPOSIZIONE 5.2.9: Se $R = \{P_0, \dots, P_n\}$ è un riferimento affine di A, ogni punto $P \in A$ si scrive in modo unico come $P = a_0P_0 + \dots + a_nP_n$, con $a_0 + \dots + a_n = 1$.
($(a_1, \dots, a_n)$ sono quindi dette le **coordinate affini** di P rispetto a R).

Dimostrazione:
Per ipotesi $A = Comb_a(P_0, \dots, P_n)$, dunque gli a_i esistono.
Mostriamo che sono unici:

se $P = a_0P_0 + \ldots + a_nP_n = a'_0P_0 + \ldots + a'_nP_n$, con $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a'_i = 1$, allora:
$a_0P_0 + \ldots + a_nP_n = P_0 + a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$;
$a'_0P_0 + \ldots + a'_nP_n = P_0 + a'_1\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + a'_n\overrightarrow{P_0P_n}$,
dunque $a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{P_0P_n} = a'_1\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + a'_n\overrightarrow{P_0P_n}$, ma i $\overrightarrow{P_0P_i}$ sono linearmente indipendenti, perciò $a_i = a'_i\ \forall i \Rightarrow a_0 = a'_0$, da cui la tesi.

DEFINIZIONE 5.2.15: A spazio affine su V, B spazio affine su W, V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.
$f: A \to B$ si dice **trasformazione affine** se conserva le combinazioni affini.

DEFINIZIONE 5.2.16: $f: A \to B$ trasformazione affine si dice **isomorfismo affine** se è biunivoca.

DEFINIZIONE 5.2.17: Un isomorfismo affine $f: A \to A$ si dice affinità.
Poniamo $Aff(A) = \{affinità\ A \to A\}$.

Esempi: 1) Le traslazioni sono affinità.
2) Se R è riferimento affine e $\dim(A) = n$,
$[\,]_R: \begin{matrix} A \to \mathbb{K}^n \\ P \to [P]_R \end{matrix}$, dove $[P]_R$ sono le coordinate affini di P rispetto a R,
è un isomorfismo affine (quindi $A \cong \mathbb{K}^n$).

Osservazione: $[\,]_R$ trasforma i punti di R in $0, e_1, \ldots, e_n$.

PROPOSIZIONE 5.2.10: $A = V$. Se $f: V \to V$ è un'affinità e $f(0) = 0$, allora f è lineare.
Dimostrazione:
$\forall v_1, v_2 \in V, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{K}$:
$$f(t_1v_1 + t_2v_2) = f\big((1 - t_1 - t_2) \cdot 0 + t_1v_1 + t_2v_2\big) = (1 - t_1 - t_2)f(0) + t_1f(v_1) + t_2f(v_2) = $$
$$= t_1f(v_1) + t_2f(v_2),$$
da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 5.2.11: $f \in Aff(V)$. Allora esistono unici $v \in V$, $g \in GL(V) |\ f = \tau_v \circ g$.
Dimostrazione:
Sia $v = f(0)$. Allora $g = \tau_{-v} \circ f \in Aff(V)$ e $g(0) = 0 \Rightarrow g \in GL(V)$.
Poiché $f(0)$ è unico, allora v è unico e quindi anche g è univocamente determinato, tesi.

Osservazione: Dunque $Aff(V) = \{\tau_v \circ g | v \in V, g \in GL(V)\}$.
Di conseguenza $Aff(V)$ coincide con il gruppo di trasformazioni che avevamo precedentemente denotato con $A(V)$, generato dalle traslazioni $T(V)$ di V e da $GL(V)$.
In particolare:
$Aff(\mathbb{K}^n) = \{X \to AX + B | A \in GL(n, \mathbb{K}), B \in \mathbb{K}^n\}$.

Osservazione: Prendiamo $f: A \to B$ biunivoca, con A, B spazi affini su V, W. Allora:
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ F_{P_0}\downarrow & & \downarrow F_{f(P_0)} \\ V & & W \end{array}$$

Sia $\varphi_{P_0}: V \to W$ l'unica applicazione che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ F_{P_0} \downarrow & & \downarrow F_{f(P_0)} \\ V & \xrightarrow[\varphi_{P_0}]{} & W \end{array}$$

Dunque φ_{P_0} è univocamente determinata da $\varphi_{P_0} = F_{f(P_0)} \circ f \circ F_{P_0}^{-1}$.

Osservazioni: Sia φ_{P_0} l'applicazione trovata nel punto precedente. Allora:

1) $A \ni P \xrightarrow{F_{P_0}} \overrightarrow{P_0P} \xrightarrow{\varphi_{P_0}} \varphi_{P_0}(\overrightarrow{P_0P}) \xrightarrow{F_{f(P_0)}^{-1}} f(P_0) + \varphi_{P_0}(\overrightarrow{P_0P})$.
   Dunque $f(P) = f(P_0) + \varphi_{P_0}(\overrightarrow{P_0P})$ e quindi $f(P_0 + v) = f(P_0) + \varphi_{P_0}(v)$.
2) $V \ni v \xrightarrow[F_{P_0}^{-1}]{} P_0 + v \xrightarrow[f]{} f(P_0 + v) \xrightarrow[F_{f(P_0)}]{} \overrightarrow{f(P_0)f(P_0 + v)}$
   Dunque $\varphi_{P_0}(v) = \overrightarrow{f(P_0)f(P_0 + v)}$.

PROPOSIZIONE 5.2.12: f è affine $\Leftrightarrow$ φ_{P_0} è lineare.
Dimostrazione:

$\Rightarrow$) $f(P_0) + \varphi_{P_0}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i v_i\right) \boxed{\equiv} f\left(P_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i v_i\right) = f\left(\left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right)P_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i (P_0 + v_i)\right) =$
$= \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right) f(P_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i f(P_0 + v_i) \boxed{\equiv} \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right) f(P_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i \left(f(P_0) + \varphi_{P_0}(v_i)\right) =$
$= f(P_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi_{P_0}(v_i)$, da cui:
$\varphi_{P_0}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi_{P_0}(v_i)$, cioè φ_{P_0} è lineare (i passaggi con $\boxed{\equiv}$ seguono dalle osservazioni precedenti).

$\Leftarrow$) Siano $P_0, \dots, P_k \in A$, $t_1 + \ldots + t_k = 1$.
$f(t_0P_0 + \cdots + t_kP_k) = f\left(P_0 + t_1\overrightarrow{P_0P_1} + \cdots + t_k\overrightarrow{P_0P_k}\right) = f(P_0) + \varphi_{P_0}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{P_0P_i}\right) =$
$= f(P_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi_{P_0}\left(\overrightarrow{P_0P_i}\right) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{f(P_0)f(P_i)} = t_0 f(P_0) + \ldots + t_k f(P_k)$, cioè f è affine.

PROPOSIZIONE 5.2.13: Sia $f: A \to B$ trasformazione affine. $\forall P_0, P_1 \in A$, $\varphi_{P_0} = \varphi_{P_1}$.
Dimostrazione:
Valgono le relazioni:
$f(P_0 + v) = f(P_0) + \varphi_{P_0}(v)$;
$f(P_1 + v) = f(P_1) + \varphi_{P_1}(v)$, $\forall v \in V$.
Queste relazioni possono essere riscritte nella forma:
$\varphi_{P_0}(v) = f(P_0 + v) - f(P_0)$;
$\varphi_{P_1}(v) = f(P_1 + v) - f(P_1)$.
Sia $P = P_0 + v$. Allora $P_1 + v = P_1 + P - P_0$. Dunque:

$$\varphi_{P_1}(v) = f\underbrace{(P_1 + P - P_0)}_{comb.affine} - f(P_1) = f(P_1) + f(P) - f(P_0) - f(P_1) = f(P) - f(P_0) =$$
$$= f(P_0 + v) - f(P_0) = \varphi_{P_0}(v),$$

da cui la tesi.

COROLLARIO 5.2.14: $f: A \to B$ è affine $\Leftrightarrow \exists \varphi: V \to W$ applicazione lineare tale che $\forall P_0 \in A$, $f(P) = f(P_0) + \varphi(\overrightarrow{P_0P})$.
DEFINIZIONE 5.2.18: Questa $\varphi: V \to W$ prende il nome di **applicazione lineare associata** a f.

Osservazione: Sia $f: A \to B$ applicazione affine con applicazione lineare associata $\varphi: V \to W$.
Sia $g: B \to C$ applicazione affine con applicazione lineare associata $\psi: W \to Z$.
Sia $P_0 \in A$, $Q_0 = f(P_0)$.
Allora:
$f(P) = f(P_0) + \varphi\left(\overrightarrow{P_0P}\right) \ \forall P \in A$,
$g(Q) = g(Q_0) + \psi\left(\overrightarrow{Q_0Q}\right) \ \forall Q \in B$.
$(g \circ f)(P) = g\left(f(P)\right) = g(Q_0) + \psi\underbrace{\left(\overrightarrow{f(P_0)f(P)}\right)}_{\varphi\left(\overrightarrow{P_0P}\right)} = g\left(f(P_0)\right) + (\psi \circ \varphi)\left(\overrightarrow{P_0P}\right)$.

PROPOSIZIONE 5.2.15: Se $f: A \to B$ è affine e invertibile, allora $f^{-1}: B \to A$ è affine.
Dimostrazione:
Sia $\varphi: V \to W$ l'applicazione lineare associata. φ è invertibile e quindi isomorfismo.
Sia $P_0 \in A$, $Q_0 = f(P_0)$.
Sia $g: B \to A$ definita da $g(Q) = f^{-1}(Q_0) + \varphi^{-1}\left(\overrightarrow{Q_0Q}\right)$.
Allora $(g \circ f)(P_0) = g(Q_0) = f^{-1}(Q_0) + \varphi^{-1}\left(\overrightarrow{Q_0Q_0}\right) = P_0$.
Per la formula precedente:
$(g \circ f)(P) = P_0 + (\varphi^{-1} \circ \varphi)\left(\overrightarrow{P_0P}\right) = P_0 + \overrightarrow{P_0P} = P \ \ \forall P$.
Dunque $f^{-1}(Q) = f^{-1}(Q_0) + \varphi^{-1}\left(\overrightarrow{Q_0Q}\right)$, da cui la tesi.

Osservazione: Perciò $Aff(A)$ è un gruppo.

PROPOSIZIONE 5.2.16: A spazio affine su V. $\{P_0, \dots, P_n\}$, $\{Q_0, \dots, Q_n\}$ riferimenti affini di A.
Allora esiste una sola affinità f di A tale che $f(P_i) = Q_i \ \ \forall 0 \leq i \leq n$.
Dimostrazione:
$\forall P \in A$, P si scrive in modo unico come $P = \sum_{i=0}^{n} t_i P_i$, con $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$.
Necessariamente dobbiamo definire $f(P) = \sum_{i=0}^{n} t_i Q_i$.
Verifico che f è un'affinità (che sarà dunque unica per quanto appena visto):
sia $\varphi \in GL(V)$ l'unico isomorfismo che trasforma $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ in $\overrightarrow{Q_0Q_1}, \dots, \overrightarrow{Q_0Q_n}$.

$$f(P) = \sum_{i=0}^{n} t_i Q_i = Q_0 + t_1\overrightarrow{Q_0Q_1} + \ldots + t_n\overrightarrow{Q_0Q_n} = f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi\left(\overrightarrow{P_0P_i}\right) = f(P_0) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{P_0P_i}\right)$$

Ma $P = \sum_{i=0}^{n} t_i P_i = P_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{P_0P_i}$; inoltre $P = P_0 + \overrightarrow{P_0P} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{P_0P_i}$.
Dunque $f(P) = f(P_0) + \varphi\left(\overrightarrow{P_0P}\right) \ \ \forall P \in A$, da cui la tesi.

5.3 GEOMETRIA AFFINE EUCLIDEA

Notazione: Indicheremo con $X \cdot Y$ il prodotto scalare standard fra X e Y in $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 5.3.1: $v \in \mathbb{R}^n$ si dice **ortogonale** al sottospazio affine S se $v \in W_S^\perp$.

Esempio: Se H è l'iperpiano $B \cdot X + d = 0$, allora B è ortogonale a H.

DEFINIZIONE 5.3.2: Due sottospazi affini S e S' si dicono **ortogonali** (e lo denoteremo $S \perp S'$) se $W_S \subseteq W_{S'}^\perp$ ($\Leftrightarrow W_{S'} \subseteq W_S^\perp$).

Esempi: 1) Siano r la retta $X = At + C$ e r' la retta $X = A't + C'$. Allora $r \perp r' \Leftrightarrow W_r \subseteq W_{r'}^\perp \Leftrightarrow A \in \left(Span(A')\right)^\perp \Leftrightarrow A \cdot A' = 0$.

2) r retta di equazione $X = At + C$ e H iperpiano di equazione $B \cdot X + d = 0$. Allora $W_H = \{X | B \cdot X = 0\}$ e $W_H^\perp = Span(B)$, da cui $r \perp H \Leftrightarrow A \parallel B$.

PROPOSIZIONE 5.3.1: Sia S un sottospazio affine di dimensione k. Allora:
1) $S' \perp S \Rightarrow \dim(S') \leq n - k$.
2) $\forall 0 \leq d \leq n - k$ esiste un sottospazio affine S' di dimensione d tale che $S' \perp S$.
3) Tutti i sottospazi affini S' ortogonali a S di dimensione massima ($\dim(S') = n - k$) sono paralleli e ciascuno di essi interseca S in uno e un solo punto.
4) $\forall P \in \mathbb{R}^n$ $\exists!$ sottospazio affine S' ortogonale a S di dimensione massima passante per P.

Dimostrazione:
1) $W_S \subseteq W_{S'}^\perp$. Poiché $\dim(W_S) = k$, allora $\dim\left(W_{S'}^\perp\right) \geq k$ e dunque $\dim(W_{S'}) \leq n - k$.
2) Basta prendere S' tale che $\dim(S') = \dim(W_{S'}) = d$ e $W_{S'} \subseteq W_S^\perp$.
3) Sia $S = R + W_S$ e sia S' come nelle ipotesi; $S' = Q + W_{S'}$ con $W_{S'} \subseteq W_S^\perp$.
   Poiché $\dim(W_{S'}) = \dim(W_S^\perp) = n - k$, si ha $W_{S'} = W_S^\perp$, e dunque ogni S' ha giacitura $W_S^\perp$.
   Consideriamo $S' = Q + W_{S'}$. Visto che $\mathbb{R}^n = W_S \oplus W_S^\perp$, si ha $R - Q = v + w$, con $v \in W_S$ e $w \in W_S^\perp$. Dunque $R - v = Q + w \in S \cap S'$, poiché $R - v \in R + W_S = S$ e $Q + w \in Q + W_S^\perp = S'$. Per ragioni di dimensione, il punto è unico.
4) Basta prendere $S' = P + W_S^\perp$.

Esempio: Sia r una retta in $\mathbb{R}^3$ e $P \in \mathbb{R}^3$. Esiste un unico piano passante per P e ortogonale a r; tale piano interseca r in uno e un solo punto.
In particolare, se r ha equazione $X = At + C$, allora $W_r = Span(A)$; visto che $W_r \subseteq W_H^\perp$, per ragioni di dimensione $W_r = W_H^\perp$, cioè $W_H^\perp = Span(A)$. Dunque H ha equazione $A \cdot X = A \cdot P$.

Osservazione: Siano H e H' due iperpiani in $\mathbb{R}^n$, di equazione rispettivamente $B \cdot X + d = 0$ e $B' \cdot X + d' = 0$; H e H' si dicono ortogonali $\Leftrightarrow B \perp B' \Leftrightarrow B \cdot B' = 0$.

DEFINIZIONE 5.3.3: Sia $P \in \mathbb{R}^n$ e S un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$. Definiamo **distanza** di P da S $d(P, S) = \inf_{X \in S} d(P, X)$.

PROPOSIZIONE 5.3.2: $\exists P_0 \in S$ tale che $d(P,S) = \|P - P_0\|$ (e quindi l'inf è un minimo).
Dimostrazione:
Sia $\dim(S) = k$. Per la proposizione precedente $\exists!\, S'$ sottospazio affine ortogonale a S, di dimensione massima e passante per P; sia P_0 tale che $S \cap S' = \{P_0\}$.
Osserviamo che $(P - P_0) \perp S$.
Vogliamo mostrare che $d(P,S) = \|P - P_0\|$, cioè che $\forall X \in S, X \neq P_0$, $d(P,X) > \|P - P_0\|$.
Abbiamo:

$$\begin{aligned} d(P,X)^2 &= \|P - X\|^2 = \|(P - P_0) + (P_0 - X)\|^2 = \\ &= \big((P - P_0) + (P_0 - X)\big) \cdot \big((P - P_0) + (P_0 - X)\big) = \\ &= d(P,P_0)^2 + d(P_0,X)^2 + 2\underbrace{(P_0 - X) \cdot (P - P_0)}_{=0} = d(P,P_0)^2 + \underbrace{d(P_0,X)^2}_{>0} > \\ &> \|P - P_0\|^2, \end{aligned}$$

da cui la tesi.

COROLLARIO 5.3.3: H iperpiano di $\mathbb{R}^n$ di equazione $B \cdot X + d = 0$, $P \in \mathbb{R}^n$. Allora $d(P,H) = \frac{|B \cdot P + d|}{\|B\|}$.
Dimostrazione:
$d(P,H) = \|P - P_0\|$, dove $P_0 = H \cap r$ con r la retta per P ortogonale a H. r ha equazione $X = Bt + P$.
Per determinare $P_0 = H \cap r$, cerco t tale che $B \cdot (Bt + P) + d = 0$, cioè $t = \frac{-d - B \cdot P}{\|B\|^2}$, ossia $P_0 = \frac{-d - B \cdot P}{\|B\|^2} B + P$.
Finalmente abbiamo $d(P,H) = \|P - P_0\| = \left\|\frac{d + B \cdot P}{\|B\|^2} B\right\| = \frac{|d + B \cdot P|}{\|B\|^2}\|B\| = \frac{|d + B \cdot P|}{\|B\|}$.

Osservazione: Il lettore può trovare in modo analogo la formula per la distanza di un punto da una retta in $\mathbb{R}^3$.

DEFINIZIONE 5.3.4: S, S' sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Definiamo **distanza** fra S e S' $d(S,S') = \inf_{X \in S, Y \in S'} d(X,Y)$.

DISTANZA FRA DUE PIANI IN $\mathbb{R}^3$:
- Se $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, $d(H_1,H_2) = 0$.
- Se $H_1 \parallel H_2$, $d(H_1,H_2) = d(P,H_2)$ $\forall P \in H_1$, che si può calcolare con la formula precedente.

DISTANZA RETTA-PIANO IN $\mathbb{R}^3$:
- Se $r \cap H \neq \emptyset$, $d(r,H) = 0$.
- Se $r \parallel H$, $d(r,H) = d(P,H)$ $\forall P \in r$, che si calcola ancora con la formula precedente.

DISTANZA FRA DUE RETTE IN $\mathbb{R}^3$:
- Se $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$, $d(r_1,r_2) = 0$.
- Se $r_1 \parallel r_2$, $d(r_1,r_2) = d(P,r_2)$ $\forall P \in r_1$.
- Se le rette sono sghembe, diciamo che r_1 e r_2 hanno equazione rispettivamente $X = A_1 t + C_1$ e $X = A_2 t + C_2$; proviamo che $\exists!\, l$ retta ortogonale a r_1 e r_2 che le interseca entrambe. Se P_1 e P_2 sono i punti di intresezione, evidentemente si ha che $d(r_1,r_2) = \|P_1 - P_2\|$.

Dimostrazione:
Il generico punto di r_1 è $P(t) = A_1 t + C_1$, mentre il generico punto di r_2 è $Q(\theta) = A_2\theta + C_2$.
La retta $l(t,\theta)$ congiungente $P(t)$ e $Q(\theta)$ è ovviamente incidente sia a r_1 che a r_2; provo che $\exists!\,(t,\theta)$ tale che $l(t,\theta)$ è ortogonale a entrambe le rette.
Poiché l è parallela al vettore $P(t) - Q(\theta) = A_1 t + C_1 - A_2\theta - C_2$, basta imporre:

$$\begin{cases}(A_1 t + C_1 - A_2\theta - C_2)\cdot A_1 = 0\\(A_1 t + C_1 - A_2\theta - C_2)\cdot A_2 = 0\end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema 2x2 è:

$$M = \begin{pmatrix} A_1\cdot A_1 & -A_1\cdot A_2\\ A_1\cdot A_2 & -A_2\cdot A_2\end{pmatrix};$$

Se $A_1 = (\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1)$ e $A_2 = (\alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2)$, si ha $\det(M) = -(A_1\cdot A_1)(A_2\cdot A_2) + (A_1\cdot A_2)^2 = -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 - (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2$, dunque $\det(M) = 0 \Leftrightarrow$ la matrice:

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix}$$

ha rango 1, cioè A_1 e A_2 sono linearmente dipendenti. Ma le rette sono sghembe, dunque A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti e dunque $\det(M) \neq 0$.
Da questo segue l'unicità (e l'esistenza) della soluzione (t_0,θ_0) del sistema; i punti $P_1 = P(t_0)$ e $P_2 = Q(\theta_0)$ sono quelli cercati.

5.4 AFFINITÁ DI $\mathbb{K}^n$

Osservazione: $Aff(\mathbb{K}^n) = \{X \to MX + N \mid M \in GL(n,\mathbb{K}), N \in \mathbb{K}^n\}$.
Possiamo vedere $Aff(\mathbb{K}^n)$ come un sottogruppo di $GL(n+1,\mathbb{K})$, infatti:
sia $H = \left\{X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{n+1}\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \middle| x_{n+1} = 1\right\}$. H è sottospazio affine di $\mathbb{K}^{n+1}$ con giacitura $W_H = \{X \in \mathbb{K}^{n+1} | x_{n+1} = 0\}$.
Sia $f\colon \mathbb{K}^n \to H |\, X \to \begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix}$ (se $X \in \mathbb{K}^n$, la notazione $\begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix}$ indica il vettore X' di $\mathbb{K}^{n+1}$ tale che $x_i' = x_i\ \ \forall i \le n$ e $x_{n+1}' = 1$).
Poiché $\begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{=e_{n+1}} + \begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}$, allora $f = \tau_{e_{n+1}} \circ \varphi$, dove $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to W_H |\, X \to \begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}$ è un isomorfismo lineare.
Allora f è un isomorfismo affine e $\mathbb{K}^n \cong_{aff} H$.
Sia $G(H) = \{g \in GL(n+1,\mathbb{K}) | g(H) = H\}$ e sia $g \in G(H)$.
Allora:

$$g(Y) = \left(\begin{array}{c|c} M & N\\ \hline {}^tP & q\end{array}\right)\cdot Y$$

per certi $M \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$, $N, P \in \mathbb{K}^n$, $q \in \mathbb{K}\ \ \forall Y \in \mathbb{K}^{n+1}$.
Se $Y = \begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix} \in H$, allora:

$$g\begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} M & N\\ \hline {}^tP & q\end{array}\right)\begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} *\\ \hline {}^tPX + q\end{pmatrix}$$

e dunque ${}^tPX + q = 1 \;\; \forall X \in \mathbb{K}^n$, cioè $P = 0, q = 1$.
Si ha perciò:

$$G(H) = \left\{ \widetilde{M_N} = \left(\frac{M \;\;|\;\; N}{0 \;\;|\;\; 1} \right) \middle| M \in GL(n, \mathbb{K}), N \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Osservazione: $\left(\frac{M_1 \;\;|\;\; N_1}{0 \;\;|\;\; 1} \right)\left(\frac{M_2 \;\;|\;\; N_2}{0 \;\;|\;\; 1} \right) = \left(\frac{M_1M_2 \;\;|\;\; M_1N_2 + N_1}{0 \;\;|\;\; 1} \right) \Rightarrow (G(H), \circ)$ è un sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{K})$.

PROPOSIZIONE 5.4.1: $L: (Aff(\mathbb{K}^n), \circ) \to (G(H), \circ) | \, (X \to MX + N) \to \left(\frac{M \;\;|\;\; N}{0 \;\;|\;\; 1} \right)$ è un isomorfismo di gruppi (e dunque $Aff(\mathbb{K}^n)$ è isomorfo a un sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{K})$).
Dimostrazione:
Siano $f_1, f_2 \in Aff(\mathbb{K}^n)$; $f_1(X) = M_1X + N_1$, $f_2(X) = M_2X + N_2$.
Vediamo che $(f_1 \circ f_2)(X) = f_1(M_2X + N_2) = M_1(M_2X + N_2) + N_1 = M_1M_2X + M_1N_2 + N_1$.
Poiché prima abbiamo visto che:
$L(f_1)L(f_2) = \left(\frac{M_1 \;\;|\;\; N_1}{0 \;\;|\;\; 1} \right)\left(\frac{M_2 \;\;|\;\; N_2}{0 \;\;|\;\; 1} \right) = \left(\frac{M_1M_2 \;\;|\;\; M_1N_2 + N_1}{0 \;\;|\;\; 1} \right)$,
allora effettivamente $L(f_1 \circ f_2) = L(f_1)L(f_2)$, cioè L è lineare.
Poiché è evidentemente bigettiva, ho la tesi.

DEFINIZIONE 5.4.1: Sia G un gruppo di trasformazioni di $\mathbb{K}^n$.
Due sottoinsiemi F_1, F_2 di $\mathbb{K}^n$ sono detti ***G*-equivalenti** se $\exists g \in G | \, g(F_1) = F_2$.

DEFINIZIONE 5.4.2: $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ sono detti **affinemente** (rispettivamente, **metricamente**) **equivalenti** se $\exists g \in Aff(\mathbb{K}^n)$ (rispettivamente, $g \in Isom(\mathbb{K}^n)$) tale che $g(F_1) = F_2$.

Notazione: Se F_1 e F_2 sono affinemente equivalenti, lo indicheremo con $F_1 \sim_{aff} F_2$.

Esempi: $A = \mathbb{K}^n$.

1) Siano $F_1 = \{P_0, \dots, P_k\}$, $F_2 = \{Q_0, \dots, Q_k\}$ $(k+1)$-uple di punti di $\mathbb{K}^n$ affinemente indipendenti. Abbiamo visto che $\exists g \in Aff(\mathbb{K}^n) | \, g(P_i) = Q_i \;\; \forall i$ e dunque F_1 e F_2 sono affinemente equivalenti.
2) H_1, H_2 iperpiani affini di $\mathbb{K}^n$.
   Allora $\exists g \in Aff(\mathbb{K}^n) | \, g(H_1) = H_2$, infatti, se $H_1 = Comb_a(P_0, \dots, P_{n-1})$ e $H_2 = Comb_a(Q_0, \dots, Q_{n-1})$, allora scegliendo P_n, Q_n in modo che sia i P_i che i Q_i siano un riferimento affine, so che $\exists g \in Aff(\mathbb{K}^n) | \, g(P_i) = Q_i \;\; \forall i$, e dunque $g(H_1) = H_2$.
   Dunque $\{iperpiani\ affini\ di\ \mathbb{K}^n\}/_{\sim_{aff}}$ ha una sola classe di equivalenza.

DEFINIZIONE 5.4.3: $\forall g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (dove $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ rappresenta l'anello dei polinomi in $x_1, \dots, x_n$), definiamo **luogo di zeri** di g l'insieme $V(g) = \{X \in \mathbb{K}^n | g(X) = 0\}$.

Osservazione: L'applicazione $V: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{K}^n | \, g \to V(g)$ non è iniettiva, infatti:

- $V(\alpha g) = V(g) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$;

- $V(g^m) = V(g) \;\; \forall m \in \mathbb{N}^+$;
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e g_1, g_2 non contengono fattori multipli, allora:
  $V(g_1) = V(g_2) \;\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\} |\; g_1 = \alpha g_2$.
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la proprietà precedente non vale, infatti $\forall c > 0$, $V(x^2 + y^2 + c) = \emptyset$.

DEFINIZIONE 5.4.4: $g_1, g_2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Diciamo che g_1, g_2 sono **proporzionali** $g_1 \sim g_2 \;\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\} |\; g_1 = \alpha g_2$.

Osservazione: La relazione di proporzionalità fra polinomi è di equivalenza in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (la verifica è immediata).

DEFINIZIONE 5.4.5: Definiamo **ipersuperficie affine** (o semplicemente **ipersuperficie**) ogni classe di proporzionalità di polinomi di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ di grado positivo.

DEFINIZIONE 5.4.6: Se $I = [g]$ è ipersuperficie, $g(X) = 0$ è detta **equazione** di I e $V(g) \subseteq \mathbb{K}^n$ è detto **supporto** di I (indicato anche come $Supp(I)$).

DEFINIZIONE 5.4.7: Se $I = [g]$ è ipersuperficie, definiamo grado di I, $\deg([g]) = \deg(g)$.

Osservazione: È una buona definizione, poiché se $g' \sim g \;\Rightarrow \deg(g_1) = \deg(g_2)$.
- Se $n = 2$, I è detta **curva affine**;
- se $n = 3$, I è detta **superficie affine**;
- le ipersuperfici di grado 2 sono dette **quadriche** (**coniche** se $n = 2$).

Osservazione: Come visto, l'ipersuperficie determina il suo supporto, non il viceversa.
È dunque improprio parlare di equivalenza affine solo per i supporti, in quanto due ipersuperfici possono avere lo stesso luogo di zeri.
Introduciamo quindi il concetto di equivalenza affine anche per le ipersuperfici:

DEFINIZIONE 5.4.8: $I = [g]$ ipersuperficie. $\psi(X) = MX + N \in Aff(\mathbb{K}^n)$.
Definiamo **ipersuperficie "rimontata"** di I tramite ψ l'ipersuperficie $\psi^{-1}(I)$ di equazione $g(\psi(X)) = 0$.

Osservazione:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \supseteq V(g \circ \psi) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "g \circ \psi"'] & V(g) \subseteq \mathbb{K}^n \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

La definizione precedente è coerente con il fatto che ψ trasforma il supporto di $\psi^{-1}(I)$ nel supporto di I, infatti:
$x_0 \in Supp(\psi^{-1}(I)) \;\Leftrightarrow g(\psi(x_0)) = 0 \;\Leftrightarrow\; \psi(x_0) \in V(g) = Supp(I)$.

DEFINIZIONE 5.4.9: Due ipersuperfici affini I e J si dicono affinemente equivalenti se $\exists \psi \in Aff(\mathbb{K}^n) |\; I = \psi^{-1}(J)$.
In altre parole, $I = [f]$ e $J = [g]$ sono affinemente equivalenti se $\exists \psi \in Aff(\mathbb{K}^n) |\; f = g \circ \psi$.

Osservazione:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/_{\sim_{aff}} \ni I \arrow[d, "V"'] & J \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/_{\sim_{aff}} \arrow[l, "\psi^{-1}"'] \arrow[d, "V"] \\ \mathbb{K}^n \supseteq Supp(I) \arrow[r, "\psi"'] & Supp(J) \supseteq \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$I \sim_{aff} J \;\Rightarrow Supp(I) \sim_{aff} Supp(J)$. Il viceversa è falso.

Osservazione: $\sim_{aff}$ classifica dunque i polinomi (e non i supporti) a meno di coordinate affini.

Osservazione: $I = [g]$ ipersuperficie$|$ $V(g)$ è iperpiano. Allora $\deg(g) = 1$.
Sia $g(X) = {}^tAX + b$, $A \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$, $b \in \mathbb{K}$.
Sia $\psi(X) = MX + N$ affinità di $\mathbb{K}^n$.
Allora $(g \circ \psi)(X) = {}^tA(MX + N) + b = ({}^tAM)X + {}^tAN + b$.
Dunque se $J = [f]$ è un altro iperpiano, $f(X) = {}^tA'X + b'$.
$I \sim_{aff} J \;\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0, \exists M \in GL(n, \mathbb{K}), \exists N \in \mathbb{K}^n |$
$\begin{cases} {}^tA' = \alpha{}^tAM \\ b' = \alpha({}^tAN + b) \end{cases}$.
Poiché il sistema ha sempre soluzione, troviamo che due qualsiasi iperpiani sono affinemente equivalenti anche come ipersuperfici, non solo come supporti.

5.5 QUADRICHE

DEFINIZIONE 5.5.1: Il supporto di un'ipersuperficie si dice **cono** se vale la seguente proprietà: se contiene un punto P, allora contiene tutti i punti $tP \;\; \forall t \in \mathbb{K}$.

Osservazione: Prendiamo una quadrica $I = [g]$, dunque $\deg(g) = 2$.
L'equazione generica della quadrica è:
$g(X) = {}^tXAX + 2{}^tBX + c$, con $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K})$, $A \neq 0$, $B \in \mathbb{K}^n$, $c \in \mathbb{K}$.

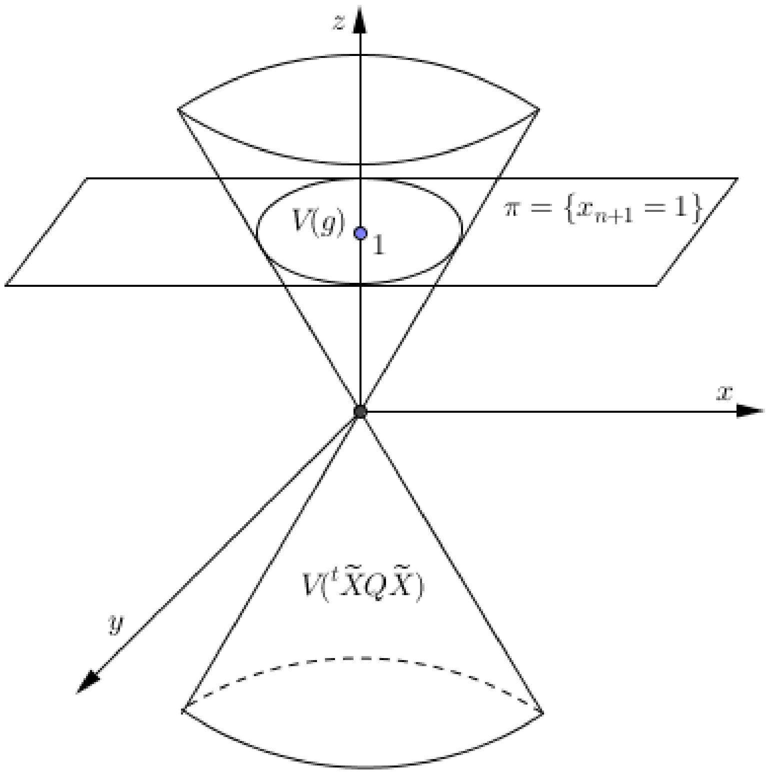
Esempio: $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x^2 + 4x_2 + 5$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $c = 5$.

Osservazione: Se denoto l'equazione con $Q = \left(\begin{array}{cc} \boxed{A} & B \\ {}^tB & c \end{array}\right)$, allora, ponendo $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$:

$${}^t\tilde{X}Q\tilde{X} = ({}^tX \mid 1)\left(\begin{array}{cc} \boxed{A} & B \\ {}^tB & c \end{array}\right)\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = ({}^tXA + {}^tB \mid {}^tXB + c)\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= {}^tXAX + \underbrace{{}^tBX + {}^tXB}_{sono\ numeri} + c = {}^tXAX + 2{}^tBX + c = g(X).$$

Dunque $V(g) = V({}^t\tilde{X}Q\tilde{X})$.

Osservazione: L'equazione ${}^t\tilde{X}Q\tilde{X}$ è omogenea di secondo grado, quindi $V({}^t\tilde{X}Q\tilde{X})$ è un cono. Dunque vedo $V(g)$ come un cono in $\mathbb{K}^{n+1}$ intersecato con l'iperpiano $x_{n+1} = 1$:



Esempio: La figura precedente mostra l'equivalenza fra $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ e $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$.

Osservazione: Sia I la quadrica di equazione ${}^t\tilde{X}Q\tilde{X} = 0$.
Sia $\psi(X) = MX + N$ affinità; calcoliamo l'equazione della quadrica $\psi^{-1}(I)$.
Poniamo $\widetilde{\psi(X)} = \widetilde{M_N}\tilde{X} = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MX + N \\ 1 \end{pmatrix}$.
Dunque $\psi^{-1}(I)$ ha equazione:
${}^t\big(\widetilde{\psi(X)}\big)Q\big(\widetilde{\psi(X)}\big) = {}^t\tilde{X}\,{}^t\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N}\tilde{X} = 0$.
Dunque la matrice associata alla quadrica $\psi^{-1}(I)$ è ${}^t\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N}$.
Perciò studiare $\{quadriche\ di\ \mathbb{K}^n\}/_{\sim_{aff}}$ corrisponde a studiare

$$\left\{ Q = \begin{pmatrix} \boxed{\quad A \quad} & B \\ {}^tB & c \end{pmatrix} \middle| A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\} \Big/_{\sim_{aff}},$$

dove $Q \sim_{aff} Q' \iff \exists \alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}, \exists \widetilde{M_N} \in Aff(\mathbb{K}^n) \mid Q' = \alpha\, {}^t\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N}$.

Vogliamo trovare dei "**rappresentanti canonici**" per equivalenza affine, cioè una famiglia $\{F_1, \dots, F_k\}$ di quadriche di $\mathbb{K}^n$ tali che:

- $\forall J$ quadrica di $\mathbb{K}^n$, $\exists i \mid J \sim_{aff} F_i$;
- $F_i \nsim_{aff} F_j \ \forall i, j$.

Questi rappresentanti prendono il nome di **forme canoniche**.

Restringiamoci al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Cominciamo dal caso $n = 2$, cioè dalle coniche di $\mathbb{K}^2$.

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE:
Sia C la conica di equazione $g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$, $a_{ij} \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$, a_{11}, a_{12}, a_{22} non tutti nulli.

Se $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$, $c = a_{33}$, $Q = \begin{pmatrix} \boxed{A} & B \\ {}^tB & c \end{pmatrix}$, allora

C ha equazione ${}^t\tilde{X}Q\tilde{X} = 0$.
Se $\psi(X') = MX' + N$ è affinità, allora $\psi^{-1}(C)$ ha equazione ${}^t\widetilde{X'}\,{}^t\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N}\widetilde{X'} = 0$.

$$Q' = {}^t\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N} = \begin{pmatrix} {}^tM & 0 \\ \hline {}^tN & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{A} & B \\ {}^tB & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tMAM & {}^tMAN + {}^tMB \\ \hline {}^tN\,{}^tAM + {}^tBM & {}^tNAN + 2\,{}^tNB + c \end{pmatrix}$$

Quindi $A' = {}^tMAM$, $B' = {}^tM(AN + B)$.

Osservazione: M invertibile e $A \neq 0 \Rightarrow A' \neq 0$, quindi l'affinità trasforma la conica in una conica.

Osservazione: Q e Q' sono congruenti e A e A' sono congruenti $\Rightarrow rk(A)$ e $rk(Q)$ sono invarianti per equivalenza affine (non cambiano se Q è moltiplicata per $\alpha \neq 0$).

DEFINIZIONE 5.5.2: C è detta **degenere** se $\det(Q) = 0$. Più precisamente, si dice:

- **semplicemente degenere** se $rk(Q) = 2$;
- **doppiamente degenere** se $rk(Q) = 1$.

DEFINIZIONE 5.5.3: $C = [g]$ è detta conica a centro se $\exists N \in \mathbb{K}^2 \mid g(X) = g\big(\sigma_N(X)\big) \ \forall X$, dove σ_N è la simmetria centrale di centro N.

Osservazione: Se $N = (0,0)$, $\sigma_N(x, y) = (-x, -y)$, dunque $(0,0)$ è centro per $C = [g] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow g(x, y)$ non contiene monomi di primo grado (ossia $B = 0$).
In generale, se $N \in \mathbb{K}^2$ è un centro per C e considero la traslazione $\tau(X) = X + N$, allora $\tau^{-1}(C)$ ha centro in $(0,0)$, e quindi $B' = 0$.
Poiché $B' = {}^tM(AN + B) = AN + B$, in quanto in una traslazione $M = {}^tM = I$, allora N è centro per $C \Leftrightarrow AN = -B$.
In altre parole, i centri della conica C sono le soluzioni del sistema $AY = -B$.

Per la trattazione delle coniche, distinguiamo il caso delle coniche a centro da quelle non a centro:

CONICHE NON A CENTRO: Sia C la conica non a centro tale che

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\quad A \quad} & B \\ {}^tB & c \end{array}\right).$$

Siamo nel caso in cui il sistema $AY = -B$ non ha soluzione, dunque $rk(A) = 1$, poiché $0 < rk(A) < 2$.

Allora $\exists M \in GL(2, \mathbb{K}) \mid {}^tMAM = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi con la trasformazione lineare $X \to MX$ (ossia $\widetilde{M_0}$), ed eventualmente cambiando di segno all'equazione, Q diventa:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ b_1 & b_2 & d \end{pmatrix}.$$

Poiché C non ha centri, $b_2 \neq 0$ (altrimenti il sistema $AY = -B$ avrebbe infinite soluzioni) e quindi $rk(Q) = 3$.

Vediamo che $\exists N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid$ la traslazione $X \to X + N$ trasforma Q_1 in:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } c_2 \neq 0.$$

Infatti impongo che:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \\ (\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + 2(\alpha \quad \beta)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + b_1 = 0 \\ \alpha^2 + 2\alpha b_1 + 2\beta b_2 + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -b_1 \\ 2\beta b_2 = b_1^2 - d \end{cases}$$

che ha soluzione perché $b_2 \neq 0$.

Infine con la trasformazione $\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{y'}{2c_2} \end{cases}$, cioè con l'affinità:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2c_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si ottiene l'equazione } x'^2 - y' = 0, \text{ ossia:}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$ chiamato **tipo C_1** o **parabola**.

CONICHE A CENTRO: Sia C una conica a centro.

Passo 1): Eliminazione dei termini di primo grado con una traslazione.

In particolare, se N è il centro di C, con la traslazione $\tau: X \to X + N$ si ottiene la nuova conica $\tau^{-1}(C)$ che ha per matrice associata:

$$Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\quad A \quad} & 0 \\ 0 & d \end{array}\right).$$

Se $d \neq 0$ posso dividere l'equazione per d, ossia posso supporre $d = 0$ o $d = 1$.

A si modifica per congruenza, quindi la forma canonica dipende dal campo.

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Il rango di A è un invariante completo per congruenza, quindi:

- se $rk(A) = 2$, A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- se $rk(A) = 1$, A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vediamo dunque come si semplifica l'equazione di C a seconda della coppia $\big(rk(A), rk(Q)\big)$:

a) $\begin{cases} rk(A) = 2 \\ rk(Q) = 3 \end{cases}$. Quindi $d = 1$. Allora $C \sim_{aff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che ha equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

b) $\begin{cases} rk(A) = 2 \\ rk(Q) = 2 \end{cases}$. Quindi $d = 0$. Allora $C \sim_{aff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che ha equazione $x^2 + y^2 = 0$ (dunque il supporto è l'unione delle rette incidenti $x - iy = 0$ e $x + iy = 0$);

c) $\begin{cases} rk(A) = 1 \\ rk(Q) = 2 \end{cases}$. Quindi $d = 1$. Allora $C \sim_{aff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che ha equazione $x^2 + 1 = 0$ (ossia il supporto è l'unione delle rette parallele $x - i = 0$ e $x + i = 0$);

d) $\begin{cases} rk(A) = 1 \\ rk(Q) = 1 \end{cases}$. Quindi $d = 0$. Allora $C \sim_{aff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che ha equazione $x^2 = 0$, detta **retta doppia** perché è l'unione di due rette coincidenti.

Osservazione: Ricordiamo che nel caso della conica non a centro si aveva $rk(A) = 1$, $rk(Q) = 3$.

Abbiamo così provato:

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE DI $\mathbb{C}^2$: Ogni conica di $\mathbb{C}^2$ è affinemente equivalente ad una e una sola delle seguenti:

1) $x^2 - y = 0$;
2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
3) $x^2 + y^2 = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;
5) $x^2 = 0$.

La coppia $\big(rk(A), rk(Q)\big)$ è un sistema completo di invarianti per equivalenza affine in $\mathbb{C}^2$.

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Su $\mathbb{R}$ il rango non è un invariante completo per congruenza.

La segnatura lo è, ma non è invariante per $\sim_{aff}$ (in quanto se moltiplico un'equazione per $\alpha < 0$ cambia la segnatura da $\big(i_+(Q), i_-(Q), i_0(Q)\big)$ a $\big(i_-(Q), i_+(Q), i_0(Q)\big)$).

Possiamo però usare l'indice di Witt che è insensibile alla moltiplicazione per scalare $\neq 0$ (infatti $\min\big(i_+(Q), i_-(Q)\big)$ rimane lo stesso).

Passo 2 – Caso reale): Semplifichiamo A.

Infatti dopo il passo 1 ci siamo ridotti alla forma:

$$Q = \begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{ con } d = 0 \vee d = 1.$$

Distinguiamo i casi a seconda dei valori di $\big(rk(A), rk(Q), w(A), w(Q)\big)$.

1) $\begin{cases} rk(A) = 2 \\ rk(Q) = 3 \end{cases}$, quindi C è non degenere, cioè $d = 1$.

Si possono avere i seguenti sottocasi:

$$\begin{cases} w(A) = 0 \ \Rightarrow w(Q) = < \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ w(A) = 1 \ \Rightarrow w(Q) = 1 \end{cases}$$

- $rk(A) = 2, rk(Q) = 3, w(A) = 0, w(Q) = 0$:

  $Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ossia $x^2 + y^2 + 1 = 0$, **tipo C_2**, detta "**ellisse immaginaria**" ($V(f) = \emptyset$).
- $rk(A) = 2, rk(Q) = 3, w(A) = 0, w(Q) = 1$:

  $Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ossia $x^2 + y^2 - 1 = 0$, **tipo C_3**, detta "**ellisse reale**" ($V(f) =$ circonferenza).
- $rk(A) = 2, rk(Q) = 3, w(A) = 1, w(A) = 1$:

  $Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ossia $x^2 - y^2 + 1 = 0$, **tipo C_4**, detta "**iperbole**" ($V(f) =$ iperbole).

2) $\begin{cases} rk(A) = 2 \\ rk(Q) = 2 \end{cases}$, quindi C è semplicemente degenere, cioè $d = 0$.

Si possono avere i seguenti sottocasi:

$$\begin{cases} w(A) = 0 \ \Rightarrow w(Q) = 1 \\ w(A) = 1 \ \Rightarrow w(Q) = 2 \end{cases}$$

- $rk(A) = 2, rk(Q) = 2, w(A) = 0, w(Q) = 1$:

  $Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ossia $x^2 + y^2 = 0$, **tipo C_5**, detta "**rette complesse incidenti**" ($V(f) = \{(0,0)\}$).
- $rk(A) = 2, rk(Q) = 2, w(A) = 1, w(Q) = 2$:

  $Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ossia $x^2 - y^2 = 0$, **tipo C_6**, detta "**rette incidenti**" ($V(f) =$ rette incidenti)

3) $\begin{cases} rk(A) = 1 \\ rk(Q) = 2 \end{cases}$, cioè $d = 1$.

Si possono avere i seguenti sottocasi:

$$\big\{ w(A) = 1 \ \Rightarrow w(Q) = < \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- $rk(A) = 1, rk(Q) = 2, w(A) = 1, w(Q) = 1$:

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, ossia $x^2+1=0$, **tipo C_7**, detta "**rette complesse parallele**" ($V(f)=\emptyset$).

- $rk(A)=1, rk(Q)=2, w(A)=1, w(Q)=2$:

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, ossia $x^2-1=0$, **tipo C_8**, detta "**rette parallele**" ($V(f)=$ rette parallele).

4) $\begin{cases} rk(A)=1 \\ rk(Q)=1 \end{cases}$, cioè $d=0$.

Si possono avere i seguenti sottocasi:

$$\{w(A)=1 \ \Rightarrow w(Q)=2$$

- $rk(A)=1, rk(Q)=1, w(A)=1, w(Q)=2$:

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, ossia $x^2=0$, **tipo C_9**, detta "**retta doppia**" ($V(f)=\{x=0\}$).

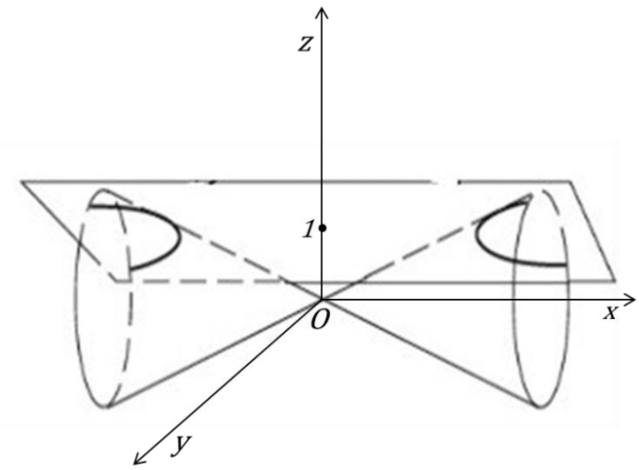
Abbiamo dunque provato:

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE DI $\mathbb{R}^2$: Ogni conica di $\mathbb{R}^2$ è affinemente equivalente a una e una sola delle seguenti:

1) $x^2-y=0$;
2) $x^2+y^2+1=0$;
3) $x^2+y^2-1=0$;
4) $x^2-y^2+1=0$;
5) $x^2+y^2=0$;
6) $x^2-y^2=0$;
7) $x^2+1=0$;
8) $x^2-1=0$;
9) $x^2=0$.

Inoltre la quaterna $\big(rk(A), rk(Q), w(A), w(Q)\big)$ è un sistema completo di invarianti per equivalenza affine in $\mathbb{R}^2$.

Osservazione: La conica C di equazione $x^2-y^2+1=0$ (l'iperbole) può essere vista come: $C=S\cap\{z=1\}$, dove $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-y^2+z^2=0\}$.



Esempio: Sia C la conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 10y + 1 = 0$.
Determinare il modello canonico affine $\tilde{C}$ di C e determinare un'affinità $\psi \in Aff(\mathbb{R}^2) \mid \psi(\tilde{C}) = C$.
Svolgimento:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = -3 \Rightarrow \sigma(A) = (1,1,0) \Rightarrow w(A) = 1$.
$\det(Q) = -3 + 5(-3) - 1(-9) = -9 \Rightarrow \sigma(Q) = (2,1,0) \Rightarrow w(Q) = 1$.

Dunque $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x^2 - y^2 + 1 = 0$, cioè è un'iperbole.

Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 10y + 1$.
Sia $\tilde{f}(x,y) = x^2 - y^2 + 1$.

1) Ricerchiamo il centro di C.
   Dobbiamo risolvere il sistema $AX = -B$, cioè:
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Sia $\psi_1(X) = X + N = X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Allora $\widetilde{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rappresenta l'affinità ψ_1.
   La conica $\psi_1^{-1}(C)$ ha come matrice associata $Q_1 = {}^t\widetilde{M_1} Q \widetilde{M_1}$.
   Per quanto visto nella teoria:
   $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2) Trasformo A nella forma di Sylvester.
   $v_1 = e_1, v_2 = e_2 - \frac{2}{1}e_1 = e_2 - 2e_1$.
   $\langle v_2, v_2 \rangle = \langle e_2 - 2e_1, e_2 - 2e_1 \rangle = 1 + 4 - 8 = -3$. Dunque:
   $\mathfrak{M}_{\{v_1,v_2\},\{e_1,e_2\}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Sia $\psi_2(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, che è rappresentata da $\widetilde{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice relativa alla conica $C_2 = \psi_2^{-1}(C_1)$ è:
   $Q_2 = {}^t\widetilde{M_2} Q_1 \widetilde{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Dobbiamo trasformare il coefficiente di x^2 da 1 a 3, poiché in questo modo otterremmo l'ipersuperficie cercata (poiché nella classo di equivalenza ci sta il polinomio di $\tilde{C}$ moltiplicato per una qualsiasi $\alpha \neq 0$, in questo caso $\alpha = 3$):

$$\widetilde{M_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'affinità cercata è $\widetilde{M_1} \cdot \widetilde{M_2} \cdot \widetilde{M_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cioè:

$\psi(X) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Osservazione: Si possono classificare metricamente le coniche di $\mathbb{R}^2$ in modo simile al caso affine. Si diagonalizza A non con Sylvester ma con il teorema spettrale.

Se $M \in O(2)$, $\det(\widetilde{M_N}) = \det\begin{pmatrix} \boxed{M} & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(M) = \pm 1$, quindi:

- $tr({}^tMAM) = tr(A)$;
- $\det({}^tMAM) = \det(A)$;
- $\det({}^t\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N}) = \det(Q)$ (anche se $\widetilde{M_N} \notin O(3)$).

Se moltiplico l'equazione della conica per $\alpha \neq 0$, la matrice della conica diventa:

$\alpha Q = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha A} & \alpha B \\ \alpha {}^tB & \alpha c \end{pmatrix}$, dunque:

- $\det(\alpha Q) = \alpha^3 \det(Q)$;
- $\det(\alpha A) = \alpha^2 \det(A)$;
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

Quindi (se $tr(A) \neq 0$) i numeri $\frac{\det(A)}{tr(A)^2}$ e $\frac{\det(Q)}{tr(A)^3}$ sono invarianti metrici.

Se C e C' sono metricamente equivalenti, allora $\exists \alpha \neq 0 |$

- $\det(Q') = \alpha^3 \det(Q)$;
- $\det(A') = \alpha^2 \det(A)$;
- $tr(A') = \alpha\, tr(A)$.

Non vale però il viceversa, cioè questi invarianti non sono sufficienti per decidere se due coniche sono metricamente equivalenti. Infatti:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

non sono metricamente equivalenti $\forall c \neq 1$, ma hanno gli stessi invarianti precedenti.

DEFINIZIONE 5.5.4: Sia $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio di grado 2.
Allora $f(X) = {}^tXAX + 2{}^tBX + c$, con $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K})$.
Definiamo **matrice della quadrica** $[f]$:

$$Q = \begin{pmatrix} \boxed{A} & B \\ {}^tB & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n+1, \mathbb{K}).$$

La quadrica C si dice **degenere** se $\det(Q) = 0$.

DEFINIZIONE 5.5.5: Una quadrica C si dice **cono di vertice $\boldsymbol{P_0}$** $\in C$ se $\forall P \in C$, $P \neq P_0$, tutta la retta congiungente P_0 e P è contenuta in C.

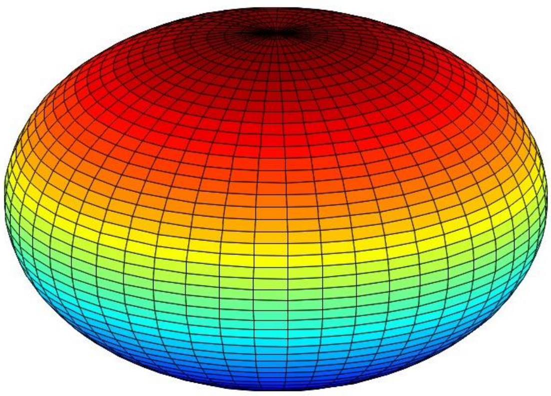
DEFINIZIONE 5.5.6: Una quadrica C è detta **cilindro** se $\exists r$ retta di $\mathbb{K}^n$ tale che $\forall P \in C$ la retta passante per P e parallela a r è contenuta in C.

Esempi: 1) Se f è un polinomio omogeneo di secondo grado, $[f]$ è un cono di vertice l'origine.
2) Se f è un polinomio di secondo grado in $x_1, \dots, x_n$ in cui non compare una variabile x_j, allora $[f]$ è un cilindro parallelo all'asse x_j.
3) $x^2 - y^2 = 0$ in $\mathbb{R}^3$ (che è l'unione di due piani incidenti), è sia un cono di vertice $(0,0,0)$, sia un cilindro parallelo all'asse z.

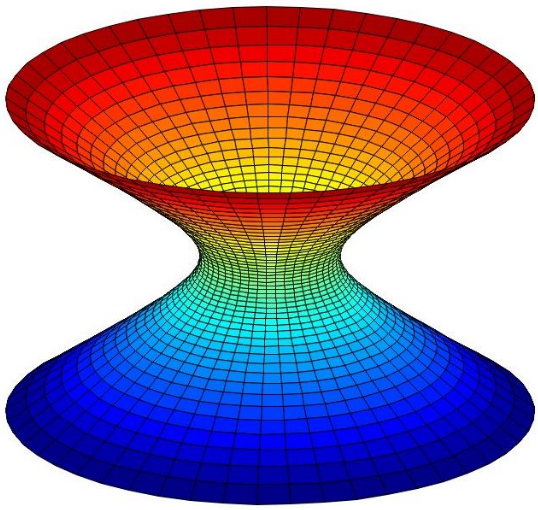
In modo simile al caso delle coniche si prova:

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE QUADRICHE: Ogni quadrica di $\mathbb{K}^n$ è affinemente equivalente ad una e una sola delle seguenti:
1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:
   - $x_1^2 + \ldots + x_r^2 + d = 0$, con $d = 0 \vee d = 1$ (conica a centro);
   - $x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_n = 0$, detto "**paraboloide**".
2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
   - $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 + d = 0$, con $d = 0 \vee d = 1$ (conica a centro);
   - $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 - x_n = 0$, detti "**paraboloidi**".

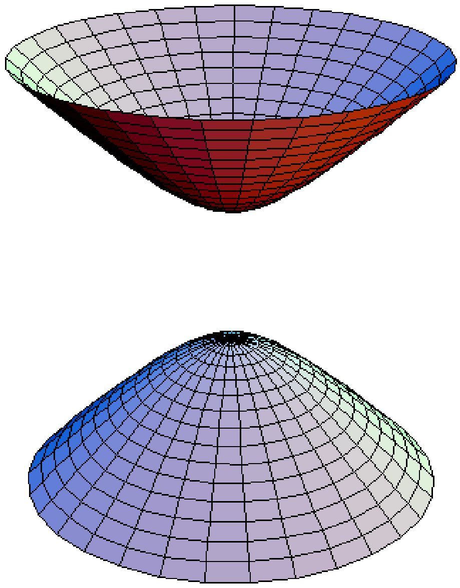
LISTA DEI MODELLI AFFINI PER LE QUADRICHE DI $\mathbb{R}^3$:
a) A centro:
- A centro non degeneri (cioè $c \neq 0$):
  1) $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, detto "**ellissoide immaginario**" ($V(f) = \emptyset$);
  2) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, detto "**ellissoide**";



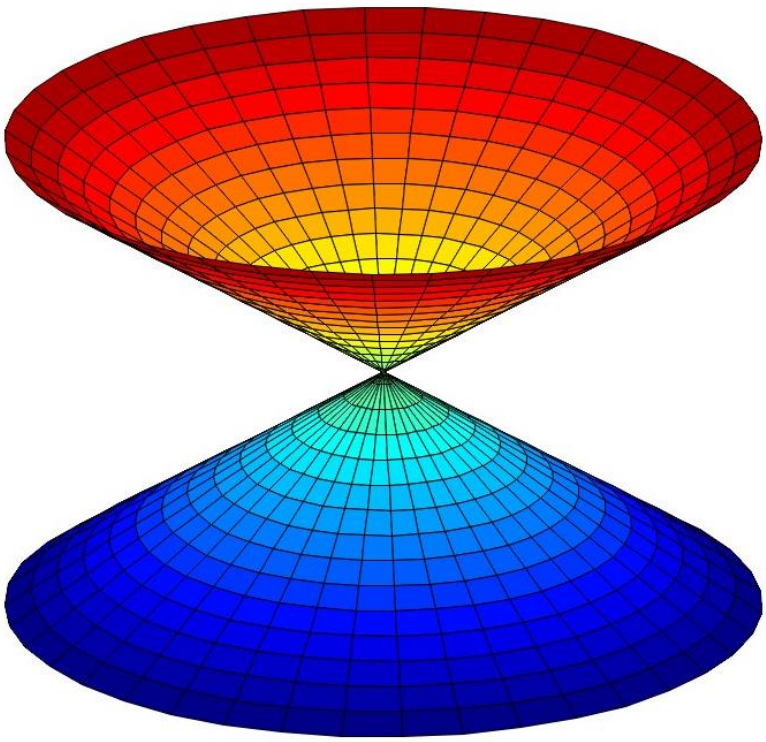
  3) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, detto "**iperboloide a una falda**";



4) $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$, detto "**iperboloide a due falde**"

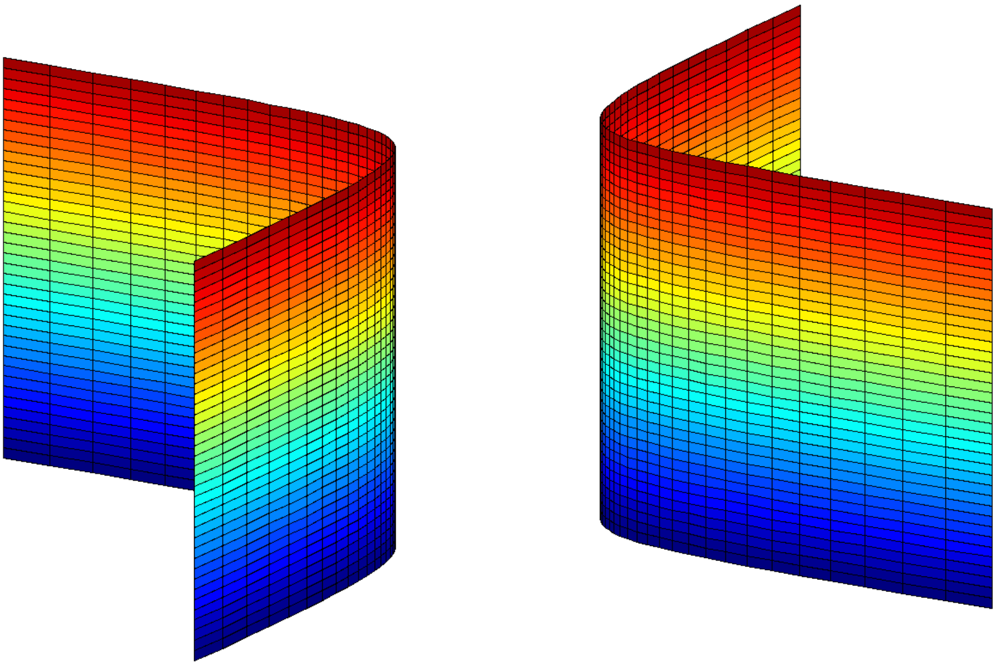


- A centro degeneri con $c = 0$ (dunque coni):
    5) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, detto "**punto**", o "**cono immaginario**" ($V(f) = \{(0,0,0)\}$);
    6) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, detto "**cono reale**";

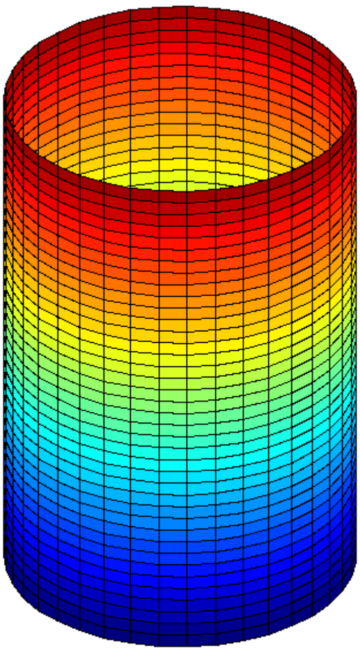


    7) $x^2 + y^2 = 0$, detto "**piani complessi incidenti**" ($V(f) =$ asse z);
    8) $x^2 - y^2 = 0$, detto "**piani incidenti**";
    9) $x^2 = 0$, detto "**piano doppio**";
- A centro degeneri con $c \neq 0$:
    10) $x^2 + y^2 + 1 = 0$, detto "**cilindro immaginario**" ($V(f) = \emptyset$);

11) $x^2 - y^2 + 1 = 0$, detto "**cilindro iperbolico**";



12) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, detto "**cilindro ellittico**";



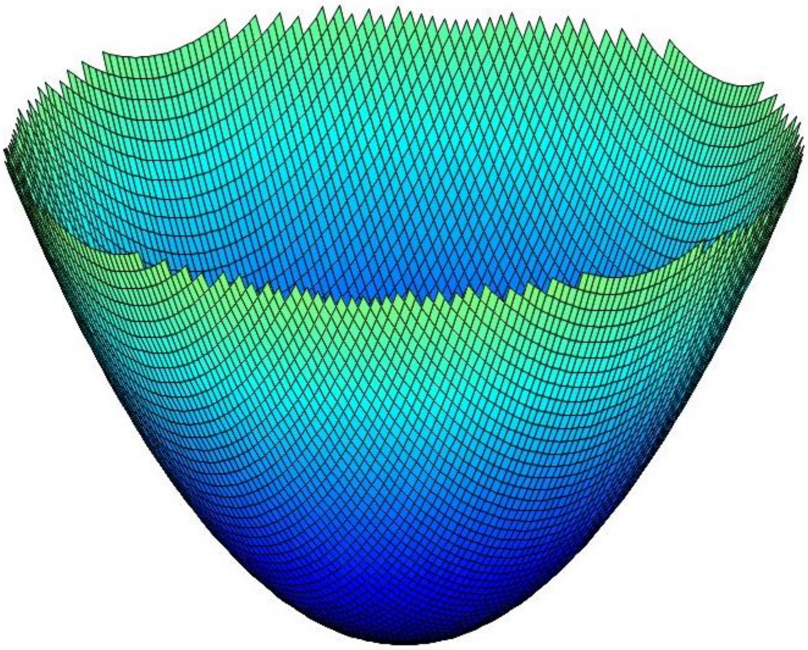
13) $x^2 - 1 = 0$, detto "**piani paralleli**";

14) $x^2 + 1 = 0$, detto "**piani complessi paralleli**" ($V(f) = \emptyset$);

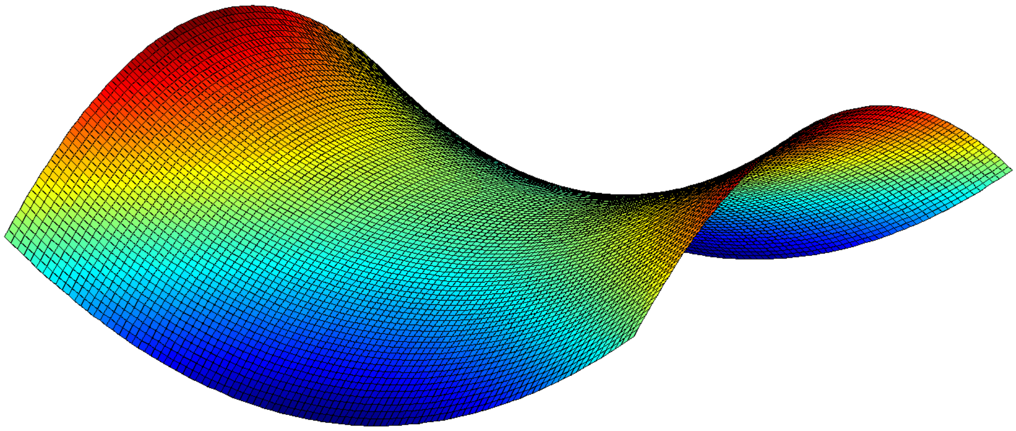
b) Non a centro (paraboloidi):

- Non a centro non degeneri:

15) $x^2 + y^2 - z = 0$, detto "**paraboloide ellittico**";

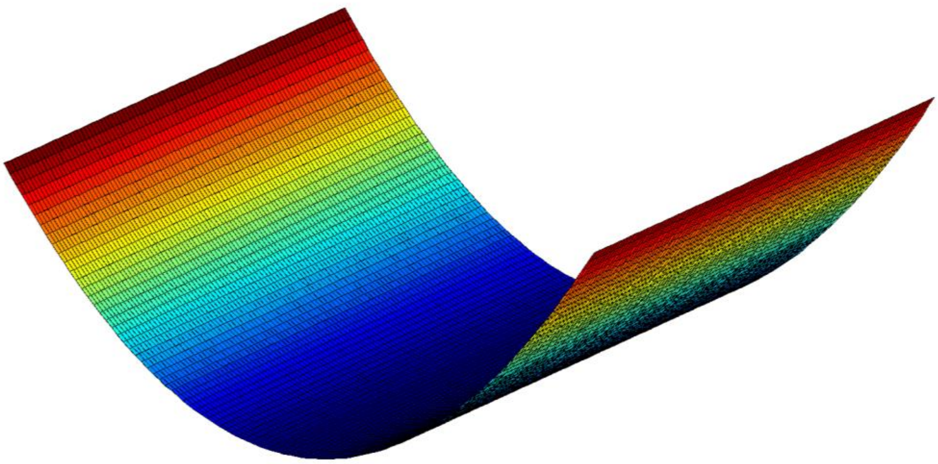


16) $x^2 - y^2 - z = 0$, detto "**paraboloide iperbolico**" o "**sella**";



- Non a centro degeneri:

    17) $x^2 - z = 0$, detto "**cilindro parabolico**";



Osservazione: L'iperboloide a una falda è spesso detto "rigato" perché per ogni suo punto passano due rette incidenti completamente giacenti sull'iperboloide. Infatti:
$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - z^2 = 1 - y^2 \Rightarrow (x + z)(x - z) = (1 + y)(1 - y)$.
Dunque ci sono due tipi di queste rette:
1° tipo: $\begin{cases} \lambda(x - z) = \mu(1 - y) \\ \mu(x + z) = \lambda(1 + y) \end{cases}$
2° tipo: $\begin{cases} \lambda(x - z) = \mu(1 + y) \\ \mu(x + z) = \lambda(1 - y) \end{cases}$.

PROPOSIZIONE 5.5.1: Sia Q una quadrica di $\mathbb{R}^n$ e R un centro di Q. Allora, se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'affinità, $f(R)$ è un centro di $f(Q)$ (cioè le affinità mantengono i centri).
Dimostrazione:
Utilizzando la notazione usuale:
R è centro per $Q \Leftrightarrow {}^tMAM \cdot R = -{}^tM(AN + B) \boxed{\Leftrightarrow} AMR = -AN - B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AMR + AN = -B \Leftrightarrow A(MR + N) = -B \Leftrightarrow A\big(f(R)\big) = -B \Leftrightarrow f(R)$ è centro per $f(Q)$,
dove il passaggio $\boxed{\Leftrightarrow}$ segue dal fatto che M è invertibile, poiché f è affinità.

SITOGRAFIA:

- http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/91/HyperboloidOfTwoSheets.png