

# Elementi Di Teoria Delle Rappresentazioni

F. Ghiró

19 luglio 2016

## Indice

## 1 Notazioni

- $V$  spazio vettoriale,  $\dim V = \dim(V)$ ,  $V^\vee$  il suo duale
- $G$  gruppo,  $H < G$  sottogruppo,  $N \triangleleft G$  sottogruppo normale
- $X$  insieme,  $S(X)$  gruppo delle bigezioni di  $X$  in sè
- $Y \hookrightarrow X$ :  $Y$  immerso in  $X$
- $\varphi : G \curvearrowright X$  azione di  $G$  su  $X$  tramite  $\varphi$  (aka  $\varphi : G \rightarrow S(X)$  omomorfismo)
- $\delta_{i,j}$  indica la delta di Kronecker. **Achtung!** Nel seguito  $i$  e  $j$  non saranno necessariamente indici ma qualsiasi oggetti (rappresentazioni, funzioni etc...) il significato sarà quello "classico": 0 se oggetto1 diverso da oggetto2, 1 se sono isomorfi/uguali

## 2 Algebra Lineare e Multilineare

### Costruzioni Universali

**Blanket Hypothesis:** D'ora in avanti  $K$  indicherà un generico campo,  $V$  un  $K$ -spazio vettoriale.

#### 2.1 Somma diretta

##### TODO Prossimamente

**Def:** Sia  $W \subseteq V$  un ssv. Allora  $U \subseteq V$  si dice **supplementare** se  $V = W \oplus U$  (**da sistemare per bene:** la somma diretta non vive in  $V \dots$ ).

#### 2.2 Spazio quoziente

**Def:** Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio vettoriale di  $V$ . Un **quoziente** di  $V$  su  $W$  é una coppia  $(V/W, \pi)$ , con  $V/W$   $K$ -spazio vettoriale e  $\pi : V \rightarrow V/W$  lineare tale che:

- $\pi$  é suriettiva;
- Se  $U$  é un qualsiasi  $K$ -spazio vettoriale e  $\psi : V \rightarrow U$  lineare con  $W \subseteq \text{Ker}(\psi)$ ,  $\exists!$   $\varphi : V/W \rightarrow U$  che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & U \\ \pi \searrow & & \nearrow \varphi \\ & V/W & \end{array}$$

**Oss:**  $W \subseteq \text{Ker}(\pi)$ .

**Thm:** Sia  $W \subseteq V$  un s.s.v. Allora  $\exists!$  (a meno di isomorfismi) lo spazio quoziente.

**Dim:**

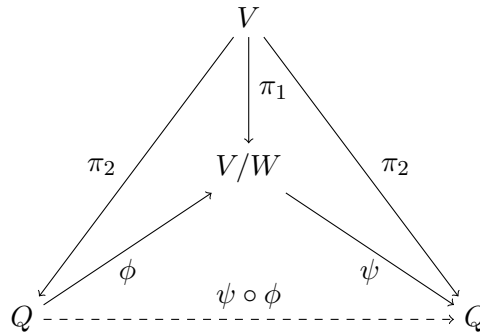
$\square$

Poiché  $W$  é un sottogruppo di un gruppo abeliano  $V$ , é possibile costruire il *gruppo* quoziente  $Q = V/W$ . Basta ora definire una moltiplicazione per scalari  $\circ : K \times Q \rightarrow V/W$  che renda lineare la proiezione al quoziente.  $\circ : (\lambda, [v]) = [\lambda v]$ , le verifiche (buona definizione, assiomi di spazio vettoriale, linearit di  $\pi$  etc...) sono banali. Lievemente piú delicata la verifica

della proprietà universale. Infatti sia  $U$  un  $K$ -spazio e  $f : V \rightarrow U$  una mappa lineare con  $W \subseteq \text{Ker}(f)$ , allora  $\exists! \varphi : Q \rightarrow U$  omomorfismo di gruppi. Bisogna ora mostrare che  $\varphi$  è anche omogenea;  $\forall \lambda \in K$  e  $\forall [v] \in Q$   $\varphi([\lambda v]) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \varphi([v]) \Rightarrow$  il quoziente esiste nella categoria  $\text{Vec}_K$  (per chi è abbastanza uomo da conoscere le categorie).

□

Siano  $(V/W, \pi_1)$  e  $(Q, \pi_2)$  due quozienti di  $V$  su  $W$ . Per proprietà universale di  $Q$  la mappa  $\pi_1$  si fattorizza al quoziente in  $\phi : Q \rightarrow V/W$ , analogamente  $\pi_2$  si fattorizza tramite  $\pi_1$  in  $\psi : V/W \rightarrow Q$ . Da cui il diagramma commutativo:



In particolare,  $\psi \circ \phi$  fa commutare il triangolo esterno; ma anche l'identità  $\mathbb{1}_Q$  lo fa  $\Rightarrow \psi \circ \phi \equiv \mathbb{1}_Q$ . Scambiando  $Q$  e  $V/W$  nel diagramma, si ottiene che  $\phi \circ \psi \equiv \mathbb{1}_{V/W} \Rightarrow \phi \equiv \psi^{-1}$  e  $V/W \simeq Q$ .

Piccola idea di dimostrazione: per mostrare che due spazi sono uguali, costruisco due mappe (una per direzione) e mostro che la composizione è l'identità (passando per la proprietà universale).

■

**Oss:** Questo dimostra anche che vale  $W = \text{Ker}(\pi)$ .

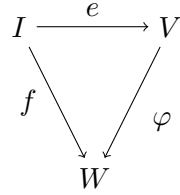
**Thm:**  $W, W' \subseteq V$  ssv, con  $i_{W'} : W' \hookrightarrow V$  l'inclusione e  $\pi : V \rightarrow V/W$  la proiezione al quoziente. Allora

$$V = W \oplus W' \Leftrightarrow W' \simeq V/W \text{ tramite la mappa } \pi \circ i_{W'}$$

## 2.3 Basi e Spazi Vettoriali Liberi

**Blanket Hypothesis:**  $I$  è un generico insieme di indici.

**Def:**  $e : I \rightarrow V$  si dice **base** per  $V$  se, data una qualsiasi funzione  $f : I \rightarrow W$  ( $W$  un  $K$ -spazio vettoriale),  $\exists! \varphi : V \rightarrow W$  lineare che chiuda diagramma:



**Def:** Una funzione  $a : I \rightarrow K$  si dice **a supporto finito** se l'insieme  $\{i \in I \mid a_i \neq 0\}$  é finito.

**Thm:** Sia  $e : I \rightarrow V$ . Allora  $e$  é base  $\Leftrightarrow \forall v \in V \exists! a : I \rightarrow K$  a supporto finito tale che  $v = \sum_{i \in I} a_i e_i$

**Dim:**

$\Leftarrow$

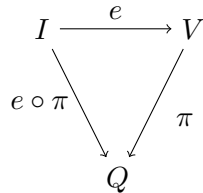
Sia  $W$  un  $K$ -spazio e  $f : I \rightarrow W$  una funzione. Definisco  $\varphi : V \rightarrow W$ ,  $\varphi : x = \sum_{i \in I} a_i e_i \mapsto \sum_{i \in I} a_i f(i)$ . Questa é ben definita, lineare e fa commutare il diagramma (tutte facili verifiche).

$\Rightarrow$

Mostriamo prima l'esistenza di tale  $a$  e poi l'unicità.

$\exists$

Sia  $W = \{v \in V \mid \exists a : I \rightarrow K \text{ a supporto finito tale che } v = \sum_i a_i e_i\}$ ; questo é un sottospazio di  $V$  e dunque é possibile considerare il quoziente  $Q = V/W$ , sia inoltre  $\pi$  la proiezione. La tesi é allora equivalente a mostrare che  $Q = \{0\}$ ; si consideri ora il seguente diagramma:



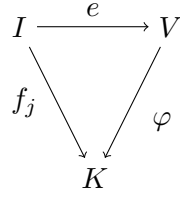
Poiché  $\forall i \in I \pi(e_i) = 0$  si ha che  $\pi$  lo chiude. Tuttavia anche la mappa nulla  $\mathbb{O} : V \rightarrow Q$  chiude il diagramma, per unicità si ha che  $\pi \equiv \mathbb{O}$ .

Piccola idea di dimostrazione: per mostrare che un sottospazio é in realtà tutto, quoziente e mostro che viene banale.

$!$

Basta mostrare che  $\sum_{i \in I} a_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I a_i = 0$ .

**P.A.**  $\exists j \in I$  t.c.  $a_j \neq 0$ . Sia  $f_j : I \rightarrow K$ ,  $f_j : i \mapsto \delta_{i,j}$ . Per proprietà universale di base  $\exists! \varphi : V \rightarrow K$  che fa commutare il diagramma:

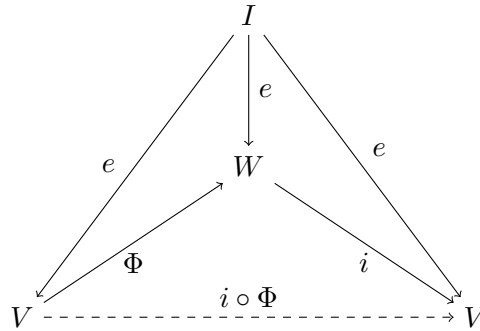


Si ha quindi che  $\varphi(e_i) = \delta_{i,j}$ , tuttavia  $0 = \varphi(0) = \varphi(\sum_{i \in I} a_i e_i) = a_j$  ⚡

■

Diamo ora un'altra dimostrazione di questo fatto utilizzando però un approccio diverso, molto simile a quello usato per mostrare l'unicità del quoziente.

**Dim:** Sia  $W$  come sopra. Allora  $i : W \hookrightarrow V$  immersione ( $W \subseteq V$ ) ed  $\exists! \Phi : V \rightarrow W$  che chiude il primo triangolo:



Si ha che  $i \circ \Phi$  fa commutare il triangolo esterno. Ma anche l'identità  $1_V$  lo fa  $\Rightarrow i \circ \Phi \equiv 1_V \Rightarrow i$  suriettiva, cioè  $W = V$ . ■

**Def:** Sia  $I$  insieme,  $V$   $K$ -spazio, si dice  **$K$ -spazio vettoriale libero** su  $I$  se  $\exists e : I \rightarrow V$  base.

**Thm:** Ogni insieme ammette un  $K$ -spazio libero.

**Dim:** L'insieme  $V = K^{(I)} = \{f : I \rightarrow K \mid f \text{ é a supporto finito}\}$  ha una naturale struttura di  $K$ -spazio vettoriale ( $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$  e  $(\lambda f)(i) = \lambda f(i)$ ). Inoltre  $e : I \rightarrow V$   $e : i \mapsto (j \mapsto \delta_{i,j})$  é una base (facile verifica con la caratterizzazione equivalente).

**Oss:** Siano  $e : I \rightarrow V$  e  $f : I \rightarrow V$  basi. Allora  $\exists! \psi : V \rightarrow V$  isomorfismo tale che  $\forall i \in I \psi(e_i) = f_i$ .

**Thm:** Ogni spazio vettoriale ammette una base

**Dim:** classica applicazione del lemma di Zorn **TODO Prossimamente**

**Thm:** Ogni sottospazio vettoriale ammette un supplementare.

**Dim:** TODO Prossimamente

## 2.4 Mappe multilineari e prodotto tensore

**Def:** Siano  $V, W, Z$   $K$ -spazi vettoriali. Una mappa  $B : V \times W \rightarrow Z$  si dice **bilineare** se:

- $\forall v \in V$  la mappa  $B(v, \bullet) : W \rightarrow Z$  é lineare.
- $\forall w \in W$  la mappa  $B(\bullet, w) : V \rightarrow Z$  é lineare.

**Def:** Siano  $V, W$   $K$ -spazi. Un **prodotto tensore** tra  $V$  e  $W$  é una coppia  $(V \otimes W, \otimes)$ , con  $V \otimes W$  un  $K$ -spazio e  $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$  mappa bilineare, tale che, se  $Z$  é un  $K$ -spazio e  $h : V \times W \rightarrow Z$  é una funzione bilineare,  $\exists!$   $\bar{h} : V \otimes W \rightarrow Z$  lineare che chiuda il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{h} & Z \\ & \searrow \otimes \quad \nearrow \bar{h} & \\ & V \otimes W & \end{array}$$

**Thm:** Siano  $V$  e  $W$   $K$ -spazi. Allora esiste il prodotto tensore ed é unico a meno di isomorfismi.

**Dim:**

□

Siano  $(P, T_P)$  e  $(Q, T_Q)$  due prodotti tensori. Poiché  $T_Q$  e  $T_P$  sono bilineari, entrambe fattorizzano al prodotto tensore in  $\Phi$  e  $\Psi$  rispettivamente:

$$\begin{array}{ccccc} & & V \times W & & \\ & \swarrow & \downarrow T_Q & \searrow & \\ & P & & Q & \\ & \swarrow \Phi & & \searrow \Psi & \\ & P & \xrightarrow{\Psi \circ \Phi} & P & \end{array}$$

Da cui  $\Psi \circ \Phi$  fa commutare il diagramma esterno  $\Rightarrow \Psi \circ \Phi \equiv \mathbb{1}_P$ .

*Mutati mutandis*, si ottiene  $\Phi \circ \Psi \equiv \mathbb{1}_Q$

□

## 2.5 Mappe alternanti e potenze esterne

## 2.6 Mappe e potenze simmetriche



### 3 Definizioni e Primi Risultati

**Def:** Sia  $G$  gruppo, una **rappresentazione** di  $G$  consiste in una coppia  $(V, \rho)$ , con  $V$  spazio vettoriale su  $K$ ,  $\rho : G \rightarrow \text{End}(V)$  omomorfismo (in seguito il termine “rappresentazione” potrà essere usato per indicare solo uno dei due elementi della coppia).

**Oss:** Equivalentemente si può chiedere che  $\rho : G \curvearrowright V$  sia un’azione lineare ( $\rho(g) \in \text{Aut}(V) \subseteq S(V)$ )

**Oss:** Dal momento che ogni elemento  $g \in G$  è invertibile,  $\text{Im}(\rho) \subseteq \text{Aut}(V) \subseteq \text{End}(V)$ .

Se non specificato, il campo base è  $\mathbb{C}$ ; inoltre se  $\rho$  è rappresentazione di  $G$ , lo spazio vettoriale su cui agisce si indica con  $V_\rho$

**Def:**  $G$  gruppo,  $\rho, \sigma$  rappresentazioni,  $\psi : V_\rho \rightarrow V_\sigma$  si dice **omomorfismo di rappresentazioni** se è lineare e  $\forall g \in G, \sigma(g) \circ \psi = \psi \circ \rho(g)$ ; se  $\psi$  è anche un isomorfismo (di spazi vettoriali) allora si dice **isomorfismo di rappresentazioni**.

**Oss:** Composizione di omomorfismi è omomorfismo, composizione di isomorfismi è isomorfismo; inverso di isomorfismo è isomorfismo (per gli eroi categorici: le rappresentazioni di un gruppo  $G$  fissato sono la categoria  $\text{Rep}_G$  dei funtori da  $G$  a  $\text{Vec}_K$ ).

**Def:** Sia  $G$  gruppo,  $\rho$  rappresentazione,  $\#V_\rho \in \mathbb{N}$ , si dice **grado** di  $\rho$  la dimensione di  $V_\rho$ ,  $\deg(\rho) = \#V_\rho$ .

**Oss:** Una rapp. di grado 1 di  $G$  è un omomorfismo da  $G$  in  $\mathbb{C}^*$  (indipendentemente dallo spazio vettoriale su cui  $G$  agisce).

Ora un paio di teoremi fondamentali (lol):

**Thm:** Tutte le rappresentazioni di grado zero sono isomorfe.

**Thm:** Due rappresentazioni  $\rho$  e  $\sigma$  di grado 1 sono isomorfe  $\Leftrightarrow \forall g \in G$   
 $\rho(g) = \sigma(g)$