Dispense del corso di Teoria della Rappresentazione

Fabio Zoratti

22 novembre 2016

Aggiungi l'esempio della prima lezione

1 Teoria dei gruppi

Definizione 1.1 (Gruppo)**.** Un gruppo è un insieme con associata un operazione binaria $\cdot : G\times G \to G$ che gode di alcune proprietà

1. Associatività $\quad (ab)c = a(bc)$
2. Esistenza unità $\quad ea = ae = a$
3. Esistenza inverso a' per ogni elemento $a \quad a'a = aa' = e$

Esempi

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con l'operazione di somma.
2. $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ con l'operazione di moltiplicazione. (Senza lo 0)
3. $GL_n(\mathbb{R})$ oppure $GL(V)$
4. $f : I \to I$ biunivoca, con I insieme e con l'operazione di composizione. Nel caso in cui I sia un insieme finito, tanto vale scegliere $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. In tal caso questo gruppo si chiama S_n

Alcuni teoremi elementari

1. L'unità e è unica

   Dimostrazione: supponiamo per assurdo che siano due distinte, e, e'. Allora vale

   $$e = ee' = e' \quad \square$$

2. L'inverso è unico.

   Dimostrazione:

   Supponiamo per assurdo che siano due, a', a''

   $$(a'a)a'' = a'(aa'') \Rightarrow ea'' = a'e \quad \square$$

3. Se ho $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il prodotto di questi termini è ben definito senza bisogno di parentesi

4. Esistono le potenze, ovvero $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall a \in G \exists b \in G | a^k = b$

   Vale sempre la regola

   $$a^{k+h} = a^k \cdot a^h$$

   Ricorda che

   $$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Definizione 1.2 (Azione di un gruppo su un insieme)**.**

Definizione 1.3 (Azione transitiva)**.**

Definizione 1.4 (Orbita di un elemento)**.**

2 Algebra multilineare

2.1 Prodotto tensoriale

Definizione 2.1 (Prodotto tensoriale)**.**

Definizione 2.2. DEFINISCI TRACCIA DEL PRODOTTO TENSORE, OVVERO

$$tr(f \otimes g)$$

Teorema 2.1. *Se $f : V \to V$ e $g : W \to W$ sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora vale la formula*

$$tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$$

DIMOSTRAZIONE:

2.2 Prodotto esterno e prodotto simmetrico

Definizione 2.3 (Prodotto esterno)**.**

Teorema 2.2 (Dimensione del prodotto esterno)**.**

Definizione 2.4 (Prodotto simmetrico)**.**

Teorema 2.3 (Dimensione del prodotto simmetrico)**.**

3 Prime proprietà delle rappresentazioni

Definizione 3.1 (Rappresentazione)**.**

Definizione 3.2 (Sottospazio invariante)**.**

3.1 Operazioni con le rappresentazioni

Definizione 3.3 (Somma di rappresentazione)**.**

Definizione 3.4 (Prodotto di rappresentazioni)**.**

Teorema 3.1 (Lemma di Schur)**.**

4 Teoria dei caratteri

Definizione 4.1. Sia $\rho : G \to V_\rho$ una rappresentazione di un gruppo G. Definiamo carattere di ρ la funzione che associa ad ogni elemento del gruppo G la traccia della matrice associata all'elemento, ovvero

$$\chi_\rho(s) := tr(\rho(s)) \qquad \forall s \in G$$

Notare che χ è una funzione che va dal gruppo in $\mathbb{C}^*$, ovvero $\chi : G \to \mathbb{C}^*$

Vediamo delle proprietà elementari del carattere
OSSERVAZIONI:

1. Se $dim(\rho) = 1$ allora il carattere di s è uguale a $\rho(s)$
2. $\chi_{\rho_1} = dim(\rho_1)$ [1]
3. $\chi_{\rho+\sigma}(s) = \chi_\rho(s) + \chi_\sigma(s)$.
   Questo è dovuto al fatto che la somma di rappresentazioni si può scrivere come matrice a blocchi. Una volta scritto così è evidente il risultato.
4. $\chi_{\rho\sigma}(s) = \chi_\rho(s)\chi_\sigma(s)$.
   Questo deriva dal fatto che in generale se $f : V \to V$ e $g : W \to W$ sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora vale $tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$
5. $\chi_{\rho^*}(s) = \overline{\chi_\rho(s)}$.
   Se abbiamo un gruppo finito [2], allora $\exists n | (\rho(s))^n = id$, per cui tutti gli autovalori di $\rho(s)$ sono radici ennesime dell'unità e $\rho(s)$ è diagonalizzabile LINKA IL PUNTO IN CUI LO DIMOSTRI. Dato che possiamo scrivere $\rho(s)$ in una base in modo che sia diagonale per ogni s, è evidente che gli autovalori dell'inversa saranno l'inverso degli autovalori, ma dato che hanno modulo 1, l'inverso è uguale al coniugio.

[1] Al solito ρ_1 è la rappresentazione che manda ogni elemento nell'identità di V_ρ
[2] Ricordiamo che $\rho^*(s) = (\rho(s)^{-1})^*$