Dispense del corso di Teoria della Rappresentazione

Fabio Zoratti

29 novembre 2016

1 Teoria dei gruppi

Definizione 1.1 (Gruppo)**.** Un gruppo è un insieme con associata un operazione binaria $\cdot : G \times G \to G$ che gode di alcune proprietà

1. Associatività $\quad (ab)c = a(bc)$
2. Esistenza unità $\quad ea = ae = a$
3. Esistenza inverso a' per ogni elemento $a \quad a'a = aa' = e$

Esempi

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con l'operazione di somma.
2. $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ con l'operazione di moltiplicazione. (Senza lo 0)
3. $GL_n(\mathbb{R})$ oppure $GL(V)$
4. $f : I \to I$ biunivoca, con I insieme e con l'operazione di composizione. Nel caso in cui I sia un insieme finito, tanto vale scegliere $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. In tal caso questo gruppo si chiama S_n

Alcuni teoremi elementari

1. L'unità e è unica

   Dimostrazione: supponiamo per assurdo che siano due distinte, e, e'. Allora vale

   $$e = ee' = e' \quad \square$$

2. L'inverso è unico.

   Dimostrazione:

   Supponiamo per assurdo che siano due, a', a''

   $$(a'a)a'' = a'(aa'') \Rightarrow ea'' = a'e \quad \square$$

3. Se ho $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il prodotto di questi termini è ben definito senza bisogno di parentesi
4. Esistono le potenze, ovvero $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall a \in G \exists b \in G | a^k = b$

   Vale sempre la regola

   $$a^{k+h} = a^k \cdot a^h$$

   Ricorda che

   $$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Definizione 1.2 (Sottogruppo)**.** Sia G un gruppo, $H \subseteq G$ si dice sottogruppo di G se:

- $e \in H$
- $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

e si indica $H \leq G$.

Definizione 1.3 (Sottogruppo normale)**.** Sia G un gruppo, $H \leq G$ si dice *normale* in G se

$$\forall h \in H, \forall g \in G \qquad ghg^{-1} \in H$$

e si indica $H \trianglelefteq G$.

Definizione 1.4 (Gruppo quoziente)**.** NON LO SCRIVO PERCHÈ È LUNGO, ASPETTO DI VEDERE COME/SE LO DEFINISCE LUI

Definizione 1.5 (Classi di coniugio)**.** Sia G un gruppo, $x \in G$, la classe di coniugio di x è l'insieme $\{gxg^{-1} | g \in G\}$. Si dimostra facilmente che le classi di coniugio di tutti gli elementi di G formano una partizione del gruppo stesso. Si osserva inoltre che un sottogruppo è normale se e solo se è unione di classi di coniugio (ATTENZIONE: è raro che unendo a caso classi di coniugio si ottenga un sottogruppo).

Esempio 1.1 (Le classi di coniugio di $GL_n(\mathbb{C})$)**.** Nel caso del gruppo $GL_n(\mathbb{C})$ due matrici stanno nella stessa classe di coniugio se e solo se sono simili, quindi per ogni classe di coniugio esiste un rappresentante canonico che è la forma di Jordan di una qualsiasi matrice nella classe (con opportune convenzioni sull'ordine dei blocchi e degli autovalori).

AGGIUNGERE DEFINIZIONE DI CENTRO

Definizione 1.6 (Prodotto diretto di gruppi)**.** Siano G e H gruppi. Si definisce prodotto diretto di G e H il gruppo $G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$ con l'operazione componente per componente.

Definizione 1.7 (Omomorfismo (isomorfismo) di gruppi)**.** Siano G ed H gruppi, un'applicazione $\varphi : G \to H$ si dice *omomorfismo di gruppi* se

$$\forall g_1, g_2 \in G \qquad \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

dove la prima moltiplicazione è fatta in G mentre la seconda in H. Se φ è bigettiva, allora si dice *isomorfismo*.

Definizione 1.8 (Azione di un gruppo su un insieme)**.** Sia G un gruppo e I un insieme. Definiamo un azione a di G su I una funzione $a : G \times I \to I$ che rispetti la regola di composizione, ovvero che se $h, h \in G$ e $i \in I$, valga

$$a(h, a(g, i)) = a(hg, i)$$

Normalmente si usa una notazione abbreviata in cui invece di scrivere $a(g, i)$ si scrive direttamente $g \cdot i$ o addirittura gi

Definizione 1.9 (Azione transitiva)**.**

Definizione 1.10 (Orbita di un elemento)**.**

Definizione 1.11 (Azione semplicemente transitiva)**.**

Definizione 1.12 (Funzione G equivariante)**.** Dato un gruppo G che agisce su due insiemi I e J, una funzione $\phi : I \to J$ si dice G equivariante se

$$\phi(s \cdot_I i) = s \cdot_J \phi(i) \qquad \forall s \in G, \quad \forall i \in I$$

1.1 Proprietà dei gruppi abeliani

Teorema 1.1. *Ogni gruppo abeliano finito è isomorfo al prodotto di gruppi ciclici.*

Osservazione. Sia G un gruppo abeliano. Allora

$$|G| = card(\{Hom(G \to \mathbb{C}^*)\})$$

Se invece G non è abeliano allora nella formula precedente all'uguale va sostituito un $>$

1.2 Proprietà del gruppi simmetrici

Teorema 1.2 (Ogni elemento $\sigma \in S_n$ si scrive in modo unico come prodotto di cicli disgiunti a meno dell'ordine dei fattori)**.**

Proposizione 1.3. *Il segno di un ciclo di lunghezza k è esattamente* $(-1)^{k-1}$

1.3 Proprietà dei gruppi ciclici

Osservazione. Due gruppi ciclici dello stesso ordine sono isomorfi

1.4 Proprietà dei gruppi diedrali

2 Algebra multilineare

2.1 Alcune generalizzazioni di algebra lineare

Definizione 2.1 (Base di uno spazio vettoriale)**.**

Lemma 2.1. *Sia $e : I \to V$ una base di V e W uno spazio vettoriale. $f : I \to W$ una funzione. Allora $\exists ! \phi : V \to W$ lineare tale che*

$$\phi(e_i) = f_i$$

Inoltre ϕ è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ f è una base.

2.2 Prodotto tensoriale

Definizione 2.2 (Prodotto tensoriale)**.**

Proposizione 2.2. *Se ho due prodotti tensoriali $V \otimes W$ e $V \overline{\otimes} W$, allora esiste un unico isomorfismo $\phi : V \otimes W \to V \overline{\otimes} W$ tale che*

$$\phi(v \otimes w) = v \overline{\otimes} w$$

Nota. É importante notare che non tutti gli elementi $z \in V \otimes W$ si scrivono come $z = v \otimes w$. In particolare, per fare un esempio concreto che mostra che questa cosa non funziona, prendiamo $W = V^*$. Vedremo fra poco che $V \otimes V^*$ è canonicamente isomorfo allo spazio delle applicazioni bilineari da V in $\mathbb{C}$, che sappiamo scriverlo come matrici $n \times n$. Tuttavia se un elemento si scrive in termini di matrici come $z = v \otimes w$, allora la matrice associata a z in una base avrà rango al massimo 1, ben lontano da coprire tutto lo spazio.

Proposizione 2.3.

$$\langle \{v \otimes w | v \in V, w \in W\} \rangle = V \otimes W$$

Definizione 2.3 (Prodotto tensoriale di mappe lineari)**.**

Osservazione.

$$id_V \otimes id_W = id_{V \otimes W}$$

Proposizione 2.4. *Se e_i è una base di V e f_i è una base di W allora $e_i \otimes f_j$ è una base di $V \otimes W$*

Corollario.

$$dim(V \otimes W) = dimV \cdot dimW$$

Definizione 2.4. DEFINISCI TRACCIA DEL PRODOTTO TENSORE, OVVERO

$$tr(f \otimes g)$$

Teorema 2.5. *Se $f : V \to V$ e $g : W \to W$ sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora vale la formula*

$$tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$$

DIMOSTRAZIONE:

2.3 Prodotto esterno e prodotto simmetrico

Definizione 2.5 (Prodotto esterno)**.**

Teorema 2.6 (Dimensione del prodotto esterno)**.**

Definizione 2.6 (Prodotto simmetrico)**.**

Teorema 2.7 (Dimensione del prodotto simmetrico)**.**

3 Prime proprietà delle rappresentazioni

Definizione 3.1 (Rappresentazione)**.** Sia G un gruppo. Una rappresentazione ρ di G è una coppia composta da uno spazio vettoriale di dimensione qualsiasi V_ρ e una funzione $\rho : G \to GL(V_\rho)$ che manda ciascun elemento del gruppo in un'applicazione lineare di V_ρ, ovvero un suo endomorfismo. Affinché ρ sia una rappresentazione deve essere un omomorfismo di gruppi, ovvero in parole semplici deve rispettare la regola di composizione. In formule, se $s, t \in G$ deve valere

$$\rho(st)v = \rho(s)\rho(t)v \qquad \forall v \in V_\rho, \quad \forall s, t \in G$$

La dimensione di V_ρ viene detta grado della rappresentazione.

Proposizione 3.1. *$\rho(G)$ è evidentemente un sottogruppo di $GL(V_\rho)$, quindi esistono sempre inversi, potenze e tutte le cose che valgono per i gruppi.*

Esempi.

1. La rappresentazione banale, di grado qualsiasi, indicata con ρ_1 che manda qualsiasi elemento di g nell'identità di V_ρ, ovvero

$$\rho(s) = id_{V_\rho} \qquad \forall s \in G$$

2. Dato S_n, il segno di un elemento $s \in S_n$ è una rappresentazione di grado 1. Infatti si ha $sgn(st) = sgn(s)sgn(t)$.

3. L'azione naturale di S_n sui vettori della base. Prendiamo quindi $G = S_n$ e uno spazio vettoriale di dimensione n, che sarà sicuramente isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Prendiamo la base canonica di $\mathbb{C}^n$ e la chiamiamo e_i. Descriviamo la rappresentazione $\rho : S_n \to GL(\mathbb{C}^n)$ dicendo cosa fa agli elementi della base. Per linearità si estenderà a tutto lo spazio.

$$\rho(s)e_i = e_{s(i)}$$

   Notare che in questo caso $deg(\rho) = n$. Notiamo inoltre che se rappresentiamo nella base canonica le matrici associate a $\rho(s)$ queste matrici sono unitarie. Inoltre, ogni colonna (e anche ogni riga) contiene esattamente un 1 e tutti gli altri sono 0.

   Prendiamo come esempio S_3 e vediamo cosa succede. Notiamo innanzitutto che $|S_3| = 3! = 6$ FINISCI DI SCRIVERE

Proposizione 3.2. *Sia G un gruppo finito e $\rho : G \to GL(V_\rho)$ una sua rappresentazione. Allora $\forall g \in G$ la matrice $\rho(g)$ ammette una base di autovettori in V_ρ, ovvero è diagonalizzabile. Inoltre, tutti gli autovalori di $\rho(g)$ sono radici $n-$esime dell'unità.*

Nota bene: *Per ogni matrice in generale la base è diversa, quindi le varie matrici in generale* ***non*** *sono simultaneamente diagonalizzabili. In particolare, tutte le matrici $\rho(s)$ sono simultaneamente diagonalizzabili $\Leftrightarrow$ G è abeliano.*

Dimostrazione: Se G è un gruppo finito, allora $\exists k | g^k = e$[1]. Dato che $\rho : G \to GL(V_\rho)$ mantiene queste proprietà in quanto omomorfismo, dovrà essere

$$\rho(g)^k = id$$

[1] Dato che g è finito, se prendo l'insieme delle potenze $I = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$, proprio perchè G è finito si ha che I ha un numero finito di elementi, quindi ci saranno $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $g^m = g^n = h$. Dato che nei gruppi esiste l'inverso, sarà $g^{n-m} = e$

Con il polinomio minimo si mostra facilmente che $\rho(g)$ è diagonalizzabile. MATEMATICI SCRIVETE IL PERCHÉ. Inoltre da questa formula è anche evidente che tutti gli autovalori di $\rho(g)$ hanno modulo 1 e in particolare saranno radici $k-$esime dell'unità.

Ricordiamo un teorema di algebra lineare per finire l'ultima parte della dimostrazione: due endomorfismi di uno spazio vettoriale diagonalizzabili sono simultaneamente diagonalizzabili $\Leftrightarrow$ commutano. Da questo teorema segue facilmente la seconda parte dell'enunciato. $\square$

Definizione 3.2 (Omomorfismo di rappresentazioni)**.**

Definizione 3.3 (Rappresentazioni isomorfe)**.**

Rappresentazioni di grado 1

Teorema 3.3 (Le classi di isomorfismo delle rappresentazioni di grado 1 sono gli omomorfismi da G in $\mathbb{C}^*$)**.**

Esempio 3.1 (Rappresentazioni di grado 1 di C_n)**.**

Esempio 3.2 (Rappresentazioni di grado 1 di S_3)**.**

Esempio 3.3 (Rappresentazioni di grado 1 di $C_n \times C_n$)**.** (generalizzazione a prodotto di C_{n_i})

3.1 Operazioni con le rappresentazioni

Definizione 3.4 (Somma di rappresentazioni)**.**

Osservazioni:

1. $\rho + \sigma \cong \sigma + \rho$
2. $\rho + (\sigma + \tau) \cong (\rho + \sigma) + \tau$
3. Esiste l'elemento neutro che è la rappresentazione di grado 0 ma non esiste l'inverso.

Definizione 3.5 (Prodotto di rappresentazioni)**.**

Osservazioni:

1. $1 \otimes \rho \cong \rho$
2. $\rho \otimes \sigma \cong \sigma \otimes \rho$
3. $0 \otimes \rho \cong 0$
4. $\rho \otimes (\sigma \otimes \tau) \cong (\rho \otimes \sigma) \otimes \tau$
5. $\rho \otimes (\sigma_1 + \sigma_2) \cong \rho \otimes \sigma_1 + \rho \otimes \sigma_2$

Definizione 3.6 (Rappresentazione duale)**.**

Osservazione: vale

$$(\rho + \sigma)^* \cong \rho^* + \sigma^*$$

E l'isomorfismo è canonico. SCRIVI DIMOSTRAZIONE.

Definizione 3.7 (Rappresentazione regolare)**.**

Esempio 3.4 (La rappresentazione regolare di S_3)**.**

Teorema 3.4.

$$\mathcal{R}_G \cong \sum_i deg(\rho_i)\rho_i$$

3.2 Sottospazi invarianti e scomposizione delle rappresentazioni

Definizione 3.8 (Sottospazio invariante)**.**

Definizione 3.9 (Sottorappresentazione)**.**

Definizione 3.10 (Rappresentazione irriducibile)**.**

Osservazione. Normalmente la cosa che si fa più spesso in teoria della rappresentazione è cercare di scomporre la rappresentazione di un gruppo come somma di rappresentazioni irriducibili. Vedremo quindi adesso diversi teoremi che ci aiuteranno in questi problemi.

Esempio 3.5 (Rappresentazione regolare di S_3)**.**

Teorema 3.5 (Le rappresentazioni di un gruppo finito sono completamente riducibili)**.**

Proposizione 3.6 (Prodotto hermitiano invariante)**.**

Lemma 3.7. *Sia $h : V_\rho \times V_\rho \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana definita positiva e invariante per $\rho : G \to GL(V_\rho)$ e sia $\rho|_W : G \to GL(W)$ una sottorappresentazione di ρ. Allora se $W^\perp$ è l'ortogonale di W, $\rho|_{W^\perp} : G \to GL(W^\perp)$ è una sottorappresentazione.*

Lemma 3.8. *Sia $\rho : G \to GL(V_\rho)$ una rappresentazione di un gruppo finito G. Sia $\rho|_W : G \to GL(W)$ una sottorappresentazione di ρ. Allora esiste una sottorappresentazione $\sigma : G \to GL(W')$ tale che*

$$\rho = \rho|_W + \sigma$$

Osservazione. Notare che il teorema precedente è falso per gruppi finiti. (Esempio con $\mathbb{Z}^+$ che Salvatore non ha scritto con cura. Porco salvatore)

Teorema 3.9. *Siano $\rho : G \to GL(V_\rho)$ e $\sigma : G \to GL(V_\sigma)$ sono rappresentazioni di G e $f : V_\rho \to V_\sigma$ è un omomorfismo di rappresentazioni, allora $Im(f)$ è una sottorappresentazione di σ e $Ker(f)$ è una sottorappresentazione di V_ρ*

Teorema 3.10. *Sia G un gruppo abeliano finito. Allora ogni rappresentazione di G è isomorfa alla somma di rappresentazioni di grado 1.*

Proposizione 3.11. *La rappresentazione regolare $\mathcal{R}$ di C_n è isomorfa alla somma delle n rappresentazioni irriducibili di grado 1 di C_n.*

Lemma 3.12. *Date ρ_1, ρ_2, σ rappresentazioni di G, allora*

$$Hom(\rho_1 + \rho_2, \sigma) \cong Hom(\rho_1, \sigma) \oplus Hom(\rho_2, \sigma)$$

Teorema 3.13 (Lemma di Schur)**.**

Teorema 3.14. *Sia $\rho : G \to GL(V_\rho)$ una rappresentazione e*

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} n_i \rho_i$$

una sua scomposizione come somma di rappresentazioni irriducibili a due a due non isomorfe. Allora la scomposizione è unica.

Lemma 3.15. *Sia ρ una rappresentazione di G e $\mathcal{R}$ la sua rappresentazione regolare. Allora*

$$deg(\rho) = dim(Hom(\mathcal{R}, \rho))$$

Teorema 3.16. *Sia $\mathcal{R}$ la rappresentazione regolare di G, un gruppo finito, e sia*

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{N} n_i \rho_i$$

Con ρ_i irriducibili e a due a due non isomorfe. Allora ogni rappresentazione irriducibile di G è isomorfa ad una ρ_i. Inoltre $n_i = deg(\rho_i)$

Corollario. *Se G è abeliano allora ha $|G|$ rappresentazioni irriducibili di grado 1 e $\mathcal{R}$ è la somma di queste.*

Corollario. *Sia G un gruppo finito. G ha un numero finito di rappresentazioni irriducibili, a meno di isomorfismi. Inoltre*

$$|G| = \sum n_i^2$$

4 Teoria dei caratteri

Definizione 4.1. Sia $\rho : G \to GL(V_\rho)$ una rappresentazione di un gruppo G. Definiamo carattere di ρ la funzione che associa ad ogni elemento del gruppo G la traccia della matrice associata all'elemento, ovvero

$$\chi_\rho(s) := tr(\rho(s)) \qquad \forall s \in G$$

Notare che χ_ρ è una funzione che va dal gruppo in $\mathbb{C}$, ovvero $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$

Vediamo delle proprietà elementari del carattere
OSSERVAZIONI:

1. Se $deg(\rho) = 1$ allora il carattere di s è uguale a $\rho(s)$

2. $\chi_{\rho_1} = deg(\rho)$. [2]
   Questo è vero poichè $[\rho_1] = I_n \Rightarrow tr(\rho_1) = n$ ed $n = deg(\rho)$.

3. $\chi_{\rho+\sigma}(s) = \chi_\rho(s) + \chi_\sigma(s)$.
   Questo è dovuto al fatto che la somma di rappresentazioni si può scrivere come matrice a blocchi. Una volta scritto così è evidente il risultato.

4. $\chi_{\rho\sigma}(s) = \chi_\rho(s)\chi_\sigma(s)$.
   Questo deriva dal seguente fatto generale:

   Lemma 4.1. *Se $f : V \to V$ e $g : W \to W$ sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora $tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$.*

   Dimostrazione: Iniziamo a considerare il caso in cui sia f che g siano diagonalizzabili: prendendo due basi $a : I \to V$, $b : J \to W$ di autovettori rispettivamente per f e per g, si verifica facilmente la verità della proposizione nella base indotta su $V \otimes W$ (ovvero in quella formata dagli $a_i \otimes b_j$).
   Ora, essendo la traccia una funzione continua e le matrice diagonalizzabili dense nello spazio delle matrici, la proprietà affermata dal lemma si estende al caso generale per continuità.

5. $\chi_\rho(s^{-1}) = \overline{\chi_\rho(s)}$
   Essendo G un gruppo finito, $\forall s \in G$ $\rho(s)^n = id$ dove $n = |G|$: dunque tutti gli autovalori di $\rho(s)$ sono radici ennesime dell'unità e $\rho(s)$ è diagonalizzabile[3]. In tale base è evidente che:

   $$\chi_\rho(s^{-1}) = tr(\rho(s^{-1})) = tr(\rho(s)^{-1}) = \sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \overline{\lambda_i} = \overline{tr(\rho(s))} = \overline{\chi_\rho(s)}$$

   in quanto, avendo gli autovalori modulo 1, l'inverso coincide con il coniugio.

6. $\chi_{\rho^*}(s)^4 = \overline{\chi_\rho(s)}$.
   Per l'osservazione precedente vale che

   $$\chi_{\rho^*}(s) = tr({}^t\rho(s^{-1})) = tr(\rho(s^{-1})) = \overline{tr(\rho(s))} = \overline{\chi_\rho(s)}$$

[2] Al solito ρ_1 è la rappresentazione che manda ogni elemento nell'identità di V_ρ
[3] Si veda la proposizione 3.2
[4] Ricordiamo che $\rho^*(s) = (\rho(s)^{-1})^*$

7. $\chi_\rho(hsh^{-1}) = \chi_\rho(s)$ ovvero χ_ρ è costante sulle classi di coniugio di G. La motivazione è semplice: se due elementi sono coniugati tra loro questo significa che le matrici corrispondenti saranno simili e la traccia è un invariante di similitudine.

   Di conseguenza, non sarà necessario calcolare il carattere per ogni elemento del gruppo ma basterà farlo per le classi di coniugio di G.

   Le funzioni che costanti sulle classi di coniugio di un gruppo vengono dette $funzioni\ di\ classe$.

8. Supponiamo di avere una rappresentazione per permutazioni. Sia I un insieme finito e G un gruppo allora
$$\chi_{\rho_I}(s) = \#punti\ fissi\ di\ \rho_I(s) = |I^s|$$
   dove $I^s := \{i \in I | s \circ i = i\}$. La veridicità di questo fatto si vede scrivendo esplicitamente la matrice che rappresenta $\rho_I(s)$.

Esempio: $G = S_3$, $I = \{1, 2, 3\}$. Allora

$$\chi_{\rho_I}(s) = \begin{cases} 3 & \text{se } s = id \\ 1 & \text{se } s \text{ è una trasposizione} \\ 0 & \text{se } s \text{ è un treciclo} \end{cases}$$

Ricordandoci che $\chi_{\rho_I} = \chi_{1+\rho}$ si ha che

$$\chi_\rho(s) = \begin{cases} 2 & \text{se } s = id \\ 0 & \text{se } s \text{ è una trasposizione} \\ -1 & \text{se } s \text{ è un treciclo} \end{cases}$$

Definizione 4.2 (Prodotto hermitiano dei caratteri)**.**

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{f(s)} g(s)$$

Teorema 4.2 (Relazioni di ortogonalità)**.** *Se ρ e σ sono rappresentazioni irriducibili di G, allora vale*

$$\langle \chi_\rho | \chi_\sigma \rangle = \begin{cases} 1 & se\ \rho \cong \sigma \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Osservazioni:

- Ricordiamo che se ρ è una rappresentazione di G, allora ρ si può scrivere in modo unico come

$$\rho = \sum_i n_i \rho_i$$

  Dove le ρ_i sono le rappresentazioni irriducibili di G e gli n_i sono numeri naturali ≥ 0. Dall'equazione scritta sopra segue subito che

$$\chi_\rho = \sum_i n_i \chi_{\rho_i}$$

E possiamo ottenere un'informazione utile prendendo il prodotto scalare dell'equazione precedente con il carattere di una delle rappresentazioni ρ_i

$$\langle \chi_\rho | \chi_{\rho_j} \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_{\rho_i} | \chi_{\rho_j} \rangle \Rightarrow n_i \delta_{ij} = \langle \chi_\rho | \chi_{\rho_j} \rangle \Rightarrow n_i = \langle \chi_\rho | \chi_{\rho_i} \rangle$$

- Se ρ e σ sono 2 rappresentazioni irriducibili allora

$$\rho \cong \sigma \Leftrightarrow \chi_\rho = \chi_\sigma$$

- $\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = |\chi_\rho|^2 = \sum_i n_i^2$.
- Conseguenza dell'ultima osservazione è che una rappresentazione di un gruppo ρ è irriducibile $\Leftrightarrow \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = |\chi_\rho|^2 = 1$

4.1 Esempi di rappresentazioni di gruppi finiti

Esempio 4.1 (Tabella dei caratteri di S_3)**.** La prima cosa da fare per costruire la tabella dei caratteri è vedere quanti elementi ha S_3, suddividerli in classi di coniugio e poi cercare le rappresentazioni irriducibili solo dopo aver fatto tutto questo. Notiamo subito che S_3 ha esattamente 3 classi di coniugio. La prima è ovviamente quella banale, composta solo dall'identità e. Poi c'è la classe delle trasposizioni $\{(12), (23), (13)\}$ che ha 3 elementi e poi ci sono i 3cicli, ovvero (123) e (132). Possiamo cominciare a scrivere una tabella vuota 3×3

S_3	e 1	(12) 3	(1 2 3) 2

Una rappresentazione irriducibile che c'è sempre è la rappresentazione banale di grado 1, ovvero quella che manda ogni elemento nell'identità. La tabella con questa informazione diventa

S_3	e 1	(12) 3	(1 2 3) 2
ρ_1	1	1	1

Un'altra rappresentazione che già conosciamo è il segno, ϵ, che ricordiamo vale $(-1)^{n-1}$ dove n è la lunghezza del ciclo. La tabella diventa

S_3	e 1	(12) 3	(1 2 3) 2
ρ_1	1	1	1
ϵ	1	-1	1

A questo punto ci sono due motivi per dire che l'ultima rappresentazione ha grado 2: il primo è che è l'unico modo di ottenere la relazione

$$|G| = \sum_i n_i^2$$

Il secondo è che se fossero due rappresentazioni di grado 1 allora il gruppo avrebbe solo rappresentazioni irriducibili di grado 1 e un teorema che abbiamo fatto implicherebbe che S_3 sia abeliano, cosa palesemente falsa.

Per trovare il carattere dell'ultima rappresentazione possiamo agire in più modi. Innanzitutto la tabella ora ha la forma

S_3	e 1	(12) 3	(1 2 3) 2
ρ_1	1	1	1
ϵ	1	-1	1
ρ	2		

In generale ci saranno due numeri complessi a, b nelle due caselle che mancano. Tuttavia noi sappiamo un sacco di teoremi che ci permettono di restringere il campo dei valori che possono avere. Per esempio noi sappiamo che

$$\langle \rho_i | \rho_j \rangle = \delta_{ij}$$

Per cui imponendo che il prodotto scalare con entrambe le precedenti faccia 0 abbiamo due equazioni e due incognite, ovvero un problema risolvibile. L'altro modo è dire che

$$\mathcal{R} = 1 + \epsilon + 2\rho$$

E dato che il carattere si comporta bene con la somma di rappresentazioni,

$$\chi_{\mathcal{R}} = \chi_1 + \chi_\epsilon + 2\chi_\rho$$

Ma sappiamo anche che

$$\chi_{\mathcal{R}}(s) = \begin{cases} |G| & \text{se } s = e \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per cui con agili conti riusciamo a completare la tabella

S_3	e 1	(12) 3	(1 2 3) 2
ρ_1	1	1	1
ϵ	1	-1	1
ρ	2	0	1

Tabella 1: Tabella dei caratteri di S_3

L'ultimo modo è cercare di scomporre un'altra rappresentazione a caso di S_3, cercando di trovare la rappresentazione che ci manca. Per esempio ricordiamo l'azione di S_3 sui vettori di base di $\mathbb{R}^3$

$$\tau(s)e_i = e_{s(i)}$$

Ricordiamo che il sottospazio di dimensione 1 fatto dallo span del vettore $v = e_1 + e_2 + e_3$ è un sottospazio invariante in cui $\tau(s)$ è sostanzialmente l'identità. Il suo ortogonale è un altro sottospazio invariante su cui ρ è irriducibile. Di conseguenza potremo scrivere

$$\tau = 1 + \rho$$

E siamo sicuri che l'altra rappresentazione di grado 2 sia esattamente quella che stiamo cercando proprio grazie al teorema che ci dice che tutte le rappresentazioni irriducibili di un gruppo compaiono nella sua rappresentazione regolare. (Teorema 3.16)

Dato che è facile calcolare il carattere di $\tau(s)$ in quanto è uguale a $Fix(s)$, possiamo scrivere

$$Fix(s) = 1 + \chi_\rho$$

Da cui si ricava subito il carattere della rappresentazione ρ

Esempio 4.2 (Tabella dei caratteri di S_4)**.** Facciamo la prima cosa importante: dividiamo S_4 in classi di coniugio. Per i soliti teoremi sugli S_n, le classi di coniugio saranno

$$\{e\}, \{(ab)\}, \{(abc)\}, \{(abcd)\}, \{(ab)(cd)\}$$

E notiamo che sono 5. Possiamo quindi cominciare a compilare la tabella dei caratteri vuota

S_4	e 1	(12) 6	(1 2 3) 8	(1234) 6	(12)(34) 3
ρ_1	1	1	1	1	1

Dove ho già messo la rappresentazione banale. Anche per S_4, essendo un gruppo simmetrico c'è la rappresentazione segno di grado 1.

S_4	e 1	(12) 6	(1 2 3) 8	(1234) 6	(12)(34) 3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1

Dato che S_4 ha $4! = 24$ elementi, dobbiamo adesso trovare un modo per ottenere 22 come somma di 3 quadrati. Si vede subito che devono essere < 4, ma se fossero anche tutti al massimo 2 non ce la faremmo, per cui ne esiste almeno una di grado 3.

$$22 = a^2 + b^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$$

A questo punto è facile vedere che l'unica soluzione è $(2, 3)$, ovviamente a meno dell'ordine. La tabella diventa

A questo punto bisogna fare cose a caso cercando le rappresentazioni irriducibili. Per esempio possiamo di nuovo considerare la rappresentazione per permutazioni

$$\tau(s)e_i = e_{s(i)}$$

Che si scompone anche questa come

S_4	e 1	(12) 6	(1 2 3) 8	(1234) 6	(12)(34) 3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1
	2				
	3				
	3				

$$\tau = 1 + \rho$$

Vorremmo sapere se ρ è irriducibile. Potremmo invocare qualche teorema ma lo faremo con le mani calcolando il carattere di ρ

$$\chi_\rho(s) = Fix(s) - 1 = \begin{cases} 3 & \text{Se } s = e \\ 1 & \text{Se } s = (ab) \\ 0 & \text{Se } s = (abc) \\ -1 & \text{Se } s = (abcd), (ab)(cd) \end{cases}$$

E andando a calcolare

$$\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = \frac{1}{24}\left(3^2 + 6 \cdot 1^2 + 0 + (-1)^2 \cdot (3+6)\right) = 1$$

Per cui è effettivamente irriducibile. Aggiungiamola alla tabella

S_4	e 1	(12) 6	(1 2 3) 8	(1234) 6	(12)(34) 3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1
	2				
ρ	3	1	0	-1	-1
	3				

A questo punto possiamo considerare $\rho\epsilon$ come altra rappresentazione. DIMOSTRA PRIMA CHE É UNA RAPPRESENTAZIONE DI $|G|$ ED É IRRIDUCIBILE

S_4	e 1	(12) 6	(1 2 3) 8	(1234) 6	(12)(34) 3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1
	2				
ρ	3	1	0	-1	-1
$\rho\epsilon$	3	-1	0	1	-1

E a questo punto dato che ce ne manca solo una possiamo usare il trucco di prima e concludere

Esempio 4.3 (Tabella dei caratteri di D_5)**.** La prima cosa da fare è dividere D_5 in classi di coniugio FINIRE

S_4	e 1	(12) 6	(1 2 3) 8	(1234) 6	(12)(34) 3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1
σ	2	0	-1	0	2
ρ	3	1	0	-1	-1
$\rho\epsilon$	3	-1	0	1	-1

Tabella 2: Tabella dei caratteri di S_4