

# Dispense del corso di Teoria della Rappresentazione

Fabio Zoratti

24 novembre 2016

# 1 Teoria dei gruppi

**Definizione 1.1** (Gruppo). Un gruppo è un insieme con associata un'operazione binaria  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  che gode di alcune proprietà

1. Associatività  $(ab)c = a(bc)$
2. Esistenza unità  $ea = ae = a$
3. Esistenza inverso  $a'$  per ogni elemento  $a$   $a'a = aa' = e$

## Esempi

1.  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  con l'operazione di somma.
2.  $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$  con l'operazione di moltiplicazione. (Senza lo 0)
3.  $GL_n(\mathbb{R})$  oppure  $GL(V)$
4.  $f : I \rightarrow I$  biunivoca, con  $I$  insieme e con l'operazione di composizione. Nel caso in cui  $I$  sia un insieme finito, tanto vale scegliere  $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . In tal caso questo gruppo si chiama  $S_n$

## Alcuni teoremi elementari

1. L'unità  $e$  è unica

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che siano due distinte,  $e, e'$ . Allora vale

$$e = ee' = e' \quad \square$$

2. L'inverso è unico.

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che siano due,  $a', a''$

$$(a'a)a'' = a'(aa'') \Rightarrow ea'' = a'e \quad \square$$

3. Se ho  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , il prodotto di questi termini è ben definito senza bisogno di parentesi
4. Esistono le potenze, ovvero  $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall a \in G \exists b \in G | a^k = b$

Vale sempre la regola

$$a^{k+h} = a^k \cdot a^h$$

Ricorda che

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

**Definizione 1.2** (Sottogruppo). Sia  $G$  un gruppo,  $H \subseteq G$  si dice sottogruppo di  $G$  se:

- $e \in H$
- $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

**Definizione 1.3** (Sottogruppo normale). Sia  $G$  un gruppo,  $H \subseteq G$  si dice *normale* in  $G$  se

$$\forall h \in H, \forall g \in G \quad ghg^{-1} \in H$$

**Definizione 1.4** (Gruppo quoziente).

**Definizione 1.5** (Classi di coniugio).

**Esempio 1.1** (Le classi di coniugio di  $GL_n(\mathbb{C})$ ).

**Definizione 1.6** (Prodotto di gruppi).

**Definizione 1.7** (Omomorfismo (isomorfismo) di gruppi). Siano  $G$  ed  $H$  gruppi, un'applicazione  $\varphi : G \rightarrow H$  si dice *omomorfismo di gruppi* se

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$$

dove la prima moltiplicazione è fatta in  $G$  mentre la seconda in  $H$ . Se  $\varphi$  è bigettiva, allora si dice *isomorfismo*.

**Definizione 1.8** (Azione di un gruppo su un insieme). Sia  $G$  un gruppo e  $I$  un insieme. Definiamo un'azione  $a$  di  $G$  su  $I$  una funzione  $a : G \times I \rightarrow I$  che rispetti la regola di composizione, ovvero che se  $h, g \in G$  e  $i \in I$ , valga

$$a(h, a(g, i)) = a(hg, i)$$

Normalmente si usa una notazione abbreviata in cui invece di scrivere  $a(g, i)$  si scrive direttamente  $g \cdot i$  o addirittura  $gi$

**Definizione 1.9** (Azione transitiva).

**Definizione 1.10** (Orbita di un elemento).

**Definizione 1.11** (Azione semplicemente transitiva).

**Definizione 1.12** (Funzione  $G$  equivariante). Dato un gruppo  $G$  che agisce su due insiemi  $I$  e  $J$ , una funzione  $\phi : I \rightarrow J$  si dice  $G$  equivariante se

$$\phi(s \cdot_I i) = s \cdot_J \phi(i) \quad \forall s \in G, \quad \forall i \in I$$

## 1.1 Proprietà dei gruppi abeliani

**Teorema 1.1.** *Ogni gruppo abeliano finito è isomorfo al prodotto di gruppi ciclici.*

**Osservazione.** Sia  $G$  un gruppo abeliano. Allora

$$|G| = \text{card}(\{\text{Hom}(G \rightarrow \mathbb{C}^*)\})$$

Se invece  $G$  non è abeliano allora nella formula precedente all'uguale va sostituito un  $>$

## 1.2 Proprietà dei gruppi simmetrici

**Teorema 1.2** (Ogni elemento  $\sigma \in S_n$  si scrive in modo unico come prodotto di cicli disgiunti a meno dell'ordine dei fattori).

**Proposizione 1.3.** *Il segno di un ciclo di lunghezza  $k$  è esattamente  $(-1)^{k-1}$*

## 1.3 Proprietà dei gruppi ciclici

**Osservazione.** Due gruppi ciclici dello stesso ordine sono isomorfi

## 1.4 Proprietà dei gruppi diedrali

## 2 Algebra multilineare

### 2.1 Alcune generalizzazioni di algebra lineare

**Definizione 2.1** (Base di uno spazio vettoriale).

**Lemma 2.1.** *Sia  $e : I \rightarrow V$  una base di  $V$  e  $W$  uno spazio vettoriale.  $f : I \rightarrow W$  una funzione. Allora  $\exists! \phi : V \rightarrow W$  lineare tale che*

$$\phi(e_i) = f_i$$

*Inoltre  $\phi$  è un isomorfismo  $\Leftrightarrow f$  è una base.*

### 2.2 Prodotto tensoriale

**Definizione 2.2** (Prodotto tensoriale).

**Proposizione 2.2.** *Se ho due prodotti tensoriali  $V \otimes W$  e  $V \overline{\otimes} W$ , allora esiste un unico isomorfismo  $\phi : V \otimes W \rightarrow V \overline{\otimes} W$  tale che*

$$\phi(v \otimes w) = v \overline{\otimes} w$$

*Nota.* È importante notare che non tutti gli elementi  $z \in V \otimes W$  si scrivono come  $z = v \otimes w$ . In particolare, per fare un esempio concreto che mostra che questa cosa non funziona, prendiamo  $W = V^*$ . Vedremo fra poco che  $V \otimes V^*$  è canonicamente isomorfo allo spazio delle applicazioni bilineari da  $V$  in  $\mathbb{C}$ , che sappiamo scriverlo come matrici  $n \times n$ . Tuttavia se un elemento si scrive in termini di matrici come  $z = v \otimes w$ , allora la matrice associata a  $z$  in una base avrà rango al massimo 1, ben lontano da coprire tutto lo spazio.

**Proposizione 2.3.**

$$\langle \{v \otimes w | v \in V, w \in W\} \rangle = V \otimes W$$

**Definizione 2.3** (Prodotto tensoriale di mappe lineari).

**Osservazione.**

$$id_V \otimes id_W = id_{V \otimes W}$$

**Proposizione 2.4.** *Se  $e_i$  è una base di  $V$  e  $f_j$  è una base di  $W$  allora  $e_i \otimes f_j$  è una base di  $V \otimes W$*

**Corollario.**

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

**Definizione 2.4.** DEFINISCI TRACCIA DEL PRODOTTO TENSORE, OVVERO

$$tr(f \otimes g)$$

**Teorema 2.5.** *Se  $f : V \rightarrow V$  e  $g : W \rightarrow W$  sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora vale la formula*

$$tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$$

DIMOSTRAZIONE:

### **2.3 Prodotto esterno e prodotto simmetrico**

**Definizione 2.5** (Prodotto esterno).

**Teorema 2.6** (Dimensione del prodotto esterno).

**Definizione 2.6** (Prodotto simmetrico).

**Teorema 2.7** (Dimensione del prodotto simmetrico).

### 3 Prime proprietà delle rappresentazioni

**Definizione 3.1** (Rappresentazione). Sia  $G$  un gruppo. Una rappresentazione  $\rho$  di  $G$  è una coppia composta da uno spazio vettoriale di dimensione qualsiasi  $V_\rho$  e una funzione  $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$  che manda ciascun elemento del gruppo in un'applicazione lineare di  $V_\rho$ , ovvero un suo endomorfismo. Affinché  $\rho$  sia una rappresentazione deve essere un omomorfismo di gruppi, ovvero in parole semplici deve rispettare la regola di composizione. In formule, se  $s, t \in G$  deve valere

$$\rho(st)v = \rho(s)\rho(t)v \quad \forall v \in V_\rho, \quad \forall s, t \in G$$

La dimensione di  $V_\rho$  viene detta grado della rappresentazione.

**Proposizione 3.1.**  $\rho(G)$  è evidentemente un sottogruppo di  $GL(V_\rho)$ , quindi esistono sempre inversi, potenze e tutte le cose che valgono per i gruppi.

**Esempi.**

1. La rappresentazione banale, di grado qualsiasi, indicata con  $\rho_1$  che manda qualsiasi elemento di  $G$  nell'identità di  $V_\rho$ , ovvero

$$\rho(s) = id_{V_\rho} \quad \forall s \in G$$

2. Dato  $S_n$ , il segno di un elemento  $s \in S_n$  è una rappresentazione di grado 1. Infatti si ha  $sgn(st) = sgn(s)sgn(t)$ .
3. L'azione naturale di  $S_n$  sui vettori della base. Prendiamo quindi  $G = S_n$  e uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , che sarà sicuramente isomorfo a  $\mathbb{C}^n$ . Prendiamo la base canonica di  $\mathbb{C}^n$  e la chiamiamo  $e_i$ . Descriviamo la rappresentazione  $\rho : S_n \rightarrow GL(\mathbb{C}^n)$  dicendo cosa fa agli elementi della base. Per linearità si estenderà a tutto lo spazio.

$$\rho(s)e_i = e_{s(i)}$$

Notare che in questo caso  $deg(\rho) = n$ . Notiamo inoltre che se rappresentiamo nella base canonica le matrici associate a  $\rho(s)$  queste matrici sono unitarie. Inoltre, ogni colonna (e anche ogni riga) contiene esattamente un 1 e tutti gli altri sono 0.

Prendiamo come esempio  $S_3$  e vediamo cosa succede. Notiamo innanzitutto che  $|S_3| = 3! = 6$   
FINISCI DI SCRIVERE

**Proposizione 3.2.** Sia  $G$  un gruppo finito e  $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$  una sua rappresentazione. Allora  $\forall g \in G$  la matrice  $\rho(g)$  ammette una base di autovettori in  $V_\rho$ , ovvero è diagonalizzabile. Inoltre, tutti gli autovalori di  $\rho(g)$  sono radici  $n$ -esime dell'unità.

NOTA BENE: Per ogni matrice in generale la base è diversa, quindi le varie matrici in generale **non** sono simultaneamente diagonalizzabili. In particolare, tutte le matrici  $\rho(s)$  sono simultaneamente diagonalizzabili  $\Leftrightarrow G$  è abeliano.

DIMOSTRAZIONE: Se  $G$  è un gruppo finito, allora  $\exists k | g^k = e^1$ . Dato che  $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$  mantiene queste proprietà in quanto omomorfismo, dovrà essere

$$\rho(g)^k = id$$

---

<sup>1</sup>Dato che  $g$  è finito, se prendo l'insieme delle potenze  $I = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$ , proprio perchè  $G$  è finito si ha che  $I$  ha un numero finito di elementi, quindi ci saranno  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $g^m = g^n = h$ . Dato che nei gruppi esiste l'inverso, sarà  $g^{n-m} = e$

Con il polinomio minimo si mostra facilmente che  $\rho(g)$  è diagonalizzabile. **MATEMATICI SCRIVETE IL PERCHÉ.** Inoltre da questa formula è anche evidente che tutti gli autovalori di  $\rho(g)$  hanno modulo 1 e in particolare saranno radici  $k$ -esime dell'unità.

Ricordiamo un teorema di algebra lineare per finire l'ultima parte della dimostrazione: due endomorfismi di uno spazio vettoriale diagonalizzabili sono simultaneamente diagonalizzabili  $\Leftrightarrow$  commutano. Da questo teorema segue facilmente la seconda parte dell'enunciato.  $\square$

**Definizione 3.2** (Omomorfismo di rappresentazioni).

**Definizione 3.3** (Rappresentazioni isomorfe).

### Rappresentazioni di grado 1

**Teorema 3.3** (Le classi di isomorfismo delle rappresentazioni di grado 1 sono gli omomorfismi da  $G$  in  $\mathbb{C}^*$ ).

**Esempio 3.1** (Rappresentazioni di grado 1 di  $C_n$ ).

**Esempio 3.2** (Rappresentazioni di grado 1 di  $S_3$ ).

**Esempio 3.3** (Rappresentazioni di grado 1 di  $C_n \times C_n$ ). (generalizzazione a prodotto di  $C_{n_i}$ )



### 3.1 Operazioni con le rappresentazioni

**Definizione 3.4** (Somma di rappresentazioni).

Osservazioni:

1.  $\rho + \sigma \cong \sigma + \rho$
2.  $\rho + (\sigma + \tau) \cong (\rho + \sigma) + \tau$
3. Esiste l'elemento neutro che è la rappresentazione di grado 0 ma non esiste l'inverso.

**Definizione 3.5** (Prodotto di rappresentazioni).

Osservazioni:

1.  $1 \otimes \rho \cong \rho$
2.  $\rho \otimes \sigma \cong \sigma \otimes \rho$
3.  $0 \otimes \rho \cong 0$
4.  $\rho \otimes (\sigma \otimes \tau) \cong (\rho \otimes \sigma) \otimes \tau$
5.  $\rho \otimes (\sigma_1 + \sigma_2) \cong \rho \otimes \sigma_1 + \rho \otimes \sigma_2$

**Definizione 3.6** (Rappresentazione duale).

Osservazione: vale

$$(\rho + \sigma)^* \cong \rho^* + \sigma^*$$

E l'isomorfismo è canonico. SCRIVI DIMOSTRAZIONE.

**Definizione 3.7** (Rappresentazione regolare).

**Esempio 3.4** (La rappresentazione regolare di  $S_3$ ).

**Teorema 3.4.**

$$\mathcal{R}_G \cong \sum_i \deg(\rho_i) \rho_i$$

### 3.2 Sottospazi invarianti e scomposizione delle rappresentazioni

**Definizione 3.8** (Sottospazio invariante).

**Definizione 3.9** (Sottorappresentazione).

**Definizione 3.10** (Rappresentazione irriducibile).

**Osservazione.** Normalmente la cosa che si fa più spesso in teoria della rappresentazione è cercare di scomporre la rappresentazione di un gruppo come somma di rappresentazioni irriducibili. Vedremo quindi adesso diversi teoremi che ci aiuteranno in questi problemi.

**Esempio 3.5** (Rappresentazione regolare di  $S_3$ ).

**Teorema 3.5** (Le rappresentazioni di un gruppo finito sono completamente riducibili).

**Proposizione 3.6** (Prodotto hermitiano invariante).

**Lemma 3.7.** Sia  $h : V_\rho \times V_\rho \rightarrow \mathbb{C}$  una forma hermitiana definita positiva e invariante per  $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$  e sia  $\rho|_W : G \rightarrow GL(W)$  una sottorappresentazione di  $\rho$ . Allora se  $W^\perp$  è l'ortogonale di  $W$ ,  $\rho|_{W^\perp} : G \rightarrow GL(W^\perp)$  è una sottorappresentazione.

**Lemma 3.8.** Sia  $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$  una rappresentazione di un gruppo finito  $G$ . Sia  $\rho|_W : G \rightarrow GL(W)$  una sottorappresentazione di  $\rho$ . Allora esiste una sottorappresentazione  $\sigma : G \rightarrow GL(W')$  tale che

$$\rho = \rho|_W + \sigma$$

**Osservazione.** Notare che il teorema precedente è falso per gruppi finiti. (Esempio con  $\mathbb{Z}^+$  che Salvatore non ha scritto con cura. Porco salvatore)

**Teorema 3.9.** Siano  $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$  e  $\sigma : G \rightarrow GL(V_\sigma)$  sono rappresentazioni di  $G$  e  $f : V_\rho \rightarrow V_\sigma$  è un omomorfismo di rappresentazioni, allora  $\text{Im}(f)$  è una sottorappresentazione di  $\sigma$  e  $\text{Ker}(f)$  è una sottorappresentazione di  $V_\rho$ .

**Teorema 3.10.** Sia  $G$  un gruppo abeliano finito. Allora ogni rappresentazione di  $G$  è isomorfa alla somma di rappresentazioni di grado 1.

**Proposizione 3.11.** La rappresentazione regolare  $\mathcal{R}$  di  $C_n$  è isomorfa alla somma delle  $n$  rappresentazioni irriducibili di grado 1 di  $C_n$ .

**Lemma 3.12.** Date  $\rho_1, \rho_2, \sigma$  rappresentazioni di  $G$ , allora

$$\text{Hom}(\rho_1 + \rho_2, \sigma) \cong \text{Hom}(\rho_1, \sigma) \oplus \text{Hom}(\rho_2, \sigma)$$

**Teorema 3.13** (Lemma di Schur).

**Teorema 3.14.** Sia  $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$  una rappresentazione e

$$\rho = \sum_{i=1}^N n_i \rho_i$$

una sua scomposizione come somma di rappresentazioni irriducibili a due a due non isomorfe. Allora la scomposizione è unica.

**Lemma 3.15.** Sia  $\rho$  una rappresentazione di  $G$  e  $\mathcal{R}$  la sua rappresentazione regolare. Allora

$$\deg(\rho) = \dim(\text{Hom}(\mathcal{R}, \rho))$$

**Teorema 3.16.** Sia  $\mathcal{R}$  la rappresentazione regolare di  $G$ , un gruppo finito, e sia

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N n_i \rho_i$$

Con  $\rho_i$  irriducibili e a due a due non isomorfe. Allora ogni rappresentazione irriducibile di  $G$  è isomorfa ad una  $\rho_i$ . Inoltre  $n_i = \deg(\rho_i)$

**Corollario.** Se  $G$  è abeliano allora ha  $|G|$  rappresentazioni irriducibili di grado 1 e  $\mathcal{R}$  è la somma di queste.

**Corollario.** Sia  $G$  un gruppo finito.  $G$  ha un numero finito di rappresentazioni irriducibili, a meno di isomorfismi. Inoltre

$$|G| = \sum n_i^2$$

## 4 Teoria dei caratteri

**Definizione 4.1.** Sia  $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$  una rappresentazione di un gruppo  $G$ . Definiamo carattere di  $\rho$  la funzione che associa ad ogni elemento del gruppo  $G$  la traccia della matrice associata all'elemento, ovvero

$$\chi_\rho(s) := \text{tr}(\rho(s)) \quad \forall s \in G$$

Notare che  $\chi$  è una funzione che va dal gruppo in  $\mathbb{C}^*$ , ovvero  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$

Vediamo delle proprietà elementari del carattere

OSSERVAZIONI:

1. Se  $\dim(\rho) = 1$  allora il carattere di  $s$  è uguale a  $\rho(s)$
2.  $\chi_{\rho_1} = \dim(\rho_1)$  <sup>2</sup>
3.  $\chi_{\rho+\sigma}(s) = \chi_\rho(s) + \chi_\sigma(s)$ .  
Questo è dovuto al fatto che la somma di rappresentazioni si può scrivere come matrice a blocchi. Una volta scritto così è evidente il risultato.
4.  $\chi_{\rho\sigma}(s) = \chi_\rho(s)\chi_\sigma(s)$ .  
Questo deriva dal fatto che in generale se  $f : V \rightarrow V$  e  $g : W \rightarrow W$  sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora vale  $\text{tr}(f \otimes g) = \text{tr}(f)\text{tr}(g)$
5.  $\chi_{\rho^*}(s) = \overline{\chi_\rho(s)}$ .  
Se abbiamo un gruppo finito <sup>3</sup>, allora  $\exists n | (\rho(s))^n = id$ , per cui tutti gli autovalori di  $\rho(s)$  sono radici ennesime dell'unità e  $\rho(s)$  è diagonalizzabile<sup>4</sup>. Dato che possiamo scrivere  $\rho(s)$  in una base in modo che sia diagonale per ogni  $s$ , è evidente che gli autovalori dell'inversa saranno l'inverso degli autovalori, ma dato che hanno modulo 1, l'inverso è uguale al coniugio.
6. Notiamo inoltre che  $\chi_\rho$  è costante sulle classi di coniugio di  $G$ , ovvero: dati  $s, t \in G$ , se esiste un elemento  $r \in G$  |  $rsr^{-1} = t$ , allora si ha

$$\chi_\rho(s) = \chi_\rho(t)$$

La motivazione è semplice: sappiamo che  $\text{tr}(MAM^{-1}) = \text{tr}(A)$  in quanto la traccia è la somma degli autovalori ed è quindi un invariante di similitudine.

Di conseguenza, non sarà necessario calcolare il carattere per ogni elemento del gruppo ma basterà farlo per le classi di coniugio di  $G$ .

**Definizione 4.2** (Prodotto hermitiano dei caratteri).

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{f(s)} g(s)$$

**Teorema 4.1** (Relazioni di ortogonalità). Se  $\rho$  e  $\sigma$  sono rappresentazioni irriducibili di  $G$ , allora vale

$$\langle \rho | \sigma \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho \cong \sigma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Al solito  $\rho_1$  è la rappresentazione che manda ogni elemento nell'identità di  $V_\rho$

<sup>3</sup>Ricordiamo che  $\rho^*(s) = (\rho(s)^{-1})^*$

<sup>4</sup>Si veda la proposizione 3.2

Osservazioni:

- Ricordiamo che se  $\rho$  è una rappresentazione di  $G$ , allora  $\rho$  si può scrivere in modo unico come

$$\rho = \sum_i n_i \rho_i$$

Dove le  $\rho_i$  sono le rappresentazioni irriducibili di  $G$  e gli  $n_i$  sono numeri naturali  $\geq 0$ .  
Dall'equazione scritta sopra segue subito che

$$\chi_\rho = \sum_i n_i \chi_{\rho_i}$$

E possiamo ottenere un'informazione utile prendendo il prodotto scalare dell'equazione precedente con il carattere di una delle rappresentazioni  $\rho_i$

$$\langle \chi_\rho | \chi_{\rho_j} \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_{\rho_i} | \chi_{\rho_j} \rangle \Rightarrow n_i \delta_{ij} = \langle \chi_\rho | \chi_{\rho_j} \rangle \Rightarrow n_i = \langle \chi_\rho | \chi_{\rho_i} \rangle$$

- Una rappresentazione di un gruppo  $\rho$  è irriducibile  $\Leftrightarrow \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = |\chi_\rho|^2 = 1$

#### 4.1 Esempi di rappresentazioni di gruppi finiti