

Dispense del corso di Teoria della Rappresentazione

Fabio Zoratti

30 novembre 2016

1 Teoria dei gruppi

Definizione 1.1 (Gruppo). Un gruppo è un insieme con associata un'operazione binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$ che gode di alcune proprietà

1. Associatività $(ab)c = a(bc)$
2. Esistenza unità $ea = ae = a$
3. Esistenza inverso a' per ogni elemento a $a'a = aa' = e$

Esempi

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con l'operazione di somma.
2. $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ con l'operazione di moltiplicazione. (Senza lo 0)
3. $GL_n(\mathbb{R})$ oppure $GL(V)$
4. $f : I \rightarrow I$ biunivoca, con I insieme e con l'operazione di composizione. Nel caso in cui I sia un insieme finito, tanto vale scegliere $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. In tal caso questo gruppo si chiama S_n

Alcuni teoremi elementari

1. L'unità e è unica

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che siano due distinte, e, e' . Allora vale

$$e = ee' = e' \quad \square$$

2. L'inverso è unico.

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che siano due, a', a''

$$(a'a)a'' = a'(aa'') \Rightarrow ea'' = a'e \quad \square$$

3. Se ho a_1, a_2, \dots, a_n , il prodotto di questi termini è ben definito senza bisogno di parentesi
4. Esistono le potenze, ovvero $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall a \in G \exists b \in G | a^k = b$

Vale sempre la regola

$$a^{k+h} = a^k \cdot a^h$$

Ricorda che

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Definizione 1.2 (Sottogruppo). Sia G un gruppo, $H \subseteq G$ si dice sottogruppo di G se:

- $e \in H$
- $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

e si indica $H \leq G$.

Definizione 1.3 (Sottogruppo normale). Sia G un gruppo, $H \leq G$ si dice *normale* in G se

$$\forall h \in H, \forall g \in G \quad ghg^{-1} \in H$$

e si indica $H \trianglelefteq G$.

Definizione 1.4 (Gruppo quoziente). NON LO SCRIVO PERCHÈ È LUNGO, ASPETTO DI VEDERE COME/SE LO DEFINISCE LUI

Definizione 1.5 (Classi di coniugio). Sia G un gruppo, $x \in G$, la classe di coniugio di x è l'insieme $\{gxg^{-1} | g \in G\}$. Si dimostra facilmente che le classi di coniugio di tutti gli elementi di G formano una partizione del gruppo stesso. Si osserva inoltre che un sottogruppo è normale se e solo se è unione di classi di coniugio (ATTENZIONE: è raro che unendo a caso classi di coniugio si ottenga un sottogruppo).

Esempio 1.1 (Le classi di coniugio di $GL_n(\mathbb{C})$). Nel caso del gruppo $GL_n(\mathbb{C})$ due matrici stanno nella stessa classe di coniugio se e solo se sono simili, quindi per ogni classe di coniugio esiste un rappresentante canonico che è la forma di Jordan di una qualsiasi matrice nella classe (con opportune convenzioni sull'ordine dei blocchi e degli autovalori).

Definizione 1.6 (Centro di un gruppo). Sia G un gruppo, il *centro* di G si indica con $Z(G)$ ed è il sottoinsieme degli elementi che commutano con tutto G :

$$Z(G) = \{h \in G \mid hg = gh \forall g \in G\}$$

È immediato verificare che $Z(G)$ è un sottogruppo di G .

Definizione 1.7 (Prodotto diretto di gruppi). Siano G e H gruppi. Si definisce prodotto diretto di G e H il gruppo $G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$ con l'operazione componente per componente.

Definizione 1.8 (Omomorfismo (isomorfismo) di gruppi). Siano G ed H gruppi, un'applicazione $\varphi : G \rightarrow H$ si dice *omomorfismo di gruppi* se

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$$

dove la prima moltiplicazione è fatta in G mentre la seconda in H . Se φ è bigettiva, allora si dice *isomorfismo*.

Definizione 1.9 (Azione di un gruppo su un insieme). Sia G un gruppo e I un insieme. Definiamo un'azione a di G su I una funzione $a : G \times I \rightarrow I$ che rispetti la regola di composizione, ovvero che se $h, g \in G$ e $i \in I$, valga

$$a(h, a(g, i)) = a(hg, i)$$

Normalmente si usa una notazione abbreviata in cui invece di scrivere $a(g, i)$ si scrive direttamente $g \cdot i$ o addirittura gi

Definizione 1.10 (Azione transitiva). Un'azione di un gruppo G su un insieme $I \neq \emptyset$ si dice *transitiva* se $\forall i, j \in I \exists s \in G$ t.c. $j = s \cdot i$.

SAREBBE UTILE SCRIVERE UN COMANDO PER SCRIVERE ORB(X) SOLO CHE NON SO COME SI FA...

Definizione 1.11 (Orbita di un elemento). Sia G un gruppo che agisce sull'insieme I , dato $x \in I$ si chiama *orbita* di x in G l'insieme $Orb_G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$, se il gruppo utilizzato è chiaro si può scrivere semplicemente $Orb(x)$. Si osserva subito che un'azione è transitiva se e solo se induce una unica orbita.

Osservazione. Le classi di coniugio sono le orbite degli elementi generate mediante l'azione per coniugio.

Definizione 1.12 (Azione semplicemente transitiva). Un'azione di G su un insieme $I \neq \emptyset$ si dice *semplicemente transitiva* se $\forall i, j \in I \exists! s \in G$ t.c. $j = s \cdot i$.

Definizione 1.13 (Funzione G equivariante). Dato un gruppo G che agisce su due insiemi I e J , una funzione $\phi : I \rightarrow J$ si dice G equivariante se

$$\phi(s \cdot_I i) = s \cdot_J \phi(i) \quad \forall s \in G, \quad \forall i \in I$$

1.1 Proprietà dei gruppi abeliani

Teorema 1.1. *Ogni gruppo abeliano finito è isomorfo al prodotto di gruppi ciclici.*

Osservazione. Sia G un gruppo abeliano. Allora

$$|G| = \text{card}(\{\text{Hom}(G \rightarrow \mathbb{C}^*)\})$$

Se invece G non è abeliano allora nella formula precedente all'uguale va sostituito un $>$

1.2 Proprietà dei gruppi simmetrici

Teorema 1.2 (Ogni elemento $\sigma \in S_n$ si scrive in modo unico come prodotto di cicli disgiunti a meno dell'ordine dei fattori).

Proposizione 1.3. *Il segno di un ciclo di lunghezza k è esattamente $(-1)^{k-1}$*

1.3 Proprietà dei gruppi ciclici

Osservazione. Due gruppi ciclici dello stesso ordine sono isomorfi

1.4 Proprietà dei gruppi diedrali

2 Algebra multilineare

2.1 Alcune generalizzazioni di algebra lineare

Definizione 2.1 (Base di uno spazio vettoriale).

Lemma 2.1. Sia $e : I \rightarrow V$ una base di V e W uno spazio vettoriale. $f : I \rightarrow W$ una funzione. Allora $\exists! \phi : V \rightarrow W$ lineare tale che

$$\phi(e_i) = f_i$$

Inoltre ϕ è un isomorfismo $\Leftrightarrow f$ è una base.

2.2 Prodotto tensoriale

Definizione 2.2 (Prodotto tensoriale).

Proposizione 2.2. Se ho due prodotti tensoriali $V \otimes W$ e $V \overline{\otimes} W$, allora esiste un unico isomorfismo $\phi : V \otimes W \rightarrow V \overline{\otimes} W$ tale che

$$\phi(v \otimes w) = v \overline{\otimes} w$$

Nota. È importante notare che non tutti gli elementi $z \in V \otimes W$ si scrivono come $z = v \otimes w$. In particolare, per fare un esempio concreto che mostra che questa cosa non funziona, prendiamo $W = V^*$. Vedremo fra poco che $V \otimes V^*$ è canonicamente isomorfo allo spazio delle applicazioni bilineari da V in \mathbb{C} , che sappiamo scriverlo come matrici $n \times n$. Tuttavia se un elemento si scrive in termini di matrici come $z = v \otimes w$, allora la matrice associata a z in una base avrà rango al massimo 1, ben lontano da coprire tutto lo spazio.

Proposizione 2.3.

$$\langle \{v \otimes w | v \in V, w \in W\} \rangle = V \otimes W$$

Definizione 2.3 (Prodotto tensoriale di mappe lineari).

Osservazione.

$$id_V \otimes id_W = id_{V \otimes W}$$

Proposizione 2.4. Se e_i è una base di V e f_j è una base di W allora $e_i \otimes f_j$ è una base di $V \otimes W$

Corollario.

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

Definizione 2.4. DEFINISCI TRACCIA DEL PRODOTTO TENSORE, OVVERO

$$tr(f \otimes g)$$

Teorema 2.5. Se $f : V \rightarrow V$ e $g : W \rightarrow W$ sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora vale la formula

$$tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$$

DIMOSTRAZIONE:

2.3 Prodotto esterno e prodotto simmetrico

Definizione 2.5 (Prodotto esterno).

Teorema 2.6 (Dimensione del prodotto esterno).

Definizione 2.6 (Prodotto simmetrico).

Teorema 2.7 (Dimensione del prodotto simmetrico).

3 Prime proprietà delle rappresentazioni

Definizione 3.1 (Rappresentazione). Sia G un gruppo. Una rappresentazione ρ di G è una coppia composta da uno spazio vettoriale di dimensione qualsiasi V_ρ e una funzione $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$ che manda ciascun elemento del gruppo in un'applicazione lineare di V_ρ , ovvero un suo endomorfismo. Affinché ρ sia una rappresentazione deve essere un omomorfismo di gruppi, ovvero in parole semplici deve rispettare la regola di composizione. In formule, se $s, t \in G$ deve valere

$$\rho(st)v = \rho(s)\rho(t)v \quad \forall v \in V_\rho, \quad \forall s, t \in G$$

La dimensione di V_ρ viene detta grado della rappresentazione.

Proposizione 3.1. $\rho(G)$ è evidentemente un sottogruppo di $GL(V_\rho)$, quindi esistono sempre inversi, potenze e tutte le cose che valgono per i gruppi.

Esempi.

1. La rappresentazione banale, di grado qualsiasi, indicata con ρ_1 che manda qualsiasi elemento di G nell'identità di V_ρ , ovvero

$$\rho(s) = id_{V_\rho} \quad \forall s \in G$$

2. Dato S_n , il segno di un elemento $s \in S_n$ è una rappresentazione di grado 1. Infatti si ha $sgn(st) = sgn(s)sgn(t)$.
3. L'azione naturale di S_n sui vettori della base. Prendiamo quindi $G = S_n$ e uno spazio vettoriale di dimensione n , che sarà sicuramente isomorfo a \mathbb{C}^n . Prendiamo la base canonica di \mathbb{C}^n e la chiamiamo e_i . Descriviamo la rappresentazione $\rho : S_n \rightarrow GL(\mathbb{C}^n)$ dicendo cosa fa agli elementi della base. Per linearità si estenderà a tutto lo spazio.

$$\rho(s)e_i = e_{s(i)}$$

Notare che in questo caso $deg(\rho) = n$. Notiamo inoltre che se rappresentiamo nella base canonica le matrici associate a $\rho(s)$ queste matrici sono unitarie. Inoltre, ogni colonna (e anche ogni riga) contiene esattamente un 1 e tutti gli altri sono 0.

Prendiamo come esempio S_3 e vediamo cosa succede. Notiamo innanzitutto che $|S_3| = 3! = 6$
FINISCI DI SCRIVERE

Proposizione 3.2. Sia G un gruppo finito e $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$ una sua rappresentazione. Allora $\forall g \in G$ la matrice $\rho(g)$ ammette una base di autovettori in V_ρ , ovvero è diagonalizzabile. Inoltre, tutti gli autovalori di $\rho(g)$ sono radici n -esime dell'unità.

NOTA BENE: Per ogni matrice in generale la base è diversa, quindi le varie matrici in generale **non** sono simultaneamente diagonalizzabili. In particolare, tutte le matrici $\rho(s)$ sono simultaneamente diagonalizzabili $\Leftrightarrow G$ è abeliano.

DIMOSTRAZIONE: Se G è un gruppo finito, allora $\exists k | g^k = e^1$. Dato che $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$ mantiene queste proprietà in quanto omomorfismo, dovrà essere

$$\rho(g)^k = id$$

¹Dato che g è finito, se prendo l'insieme delle potenze $I = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$, proprio perchè G è finito si ha che I ha un numero finito di elementi, quindi ci saranno $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $g^m = g^n = h$. Dato che nei gruppi esiste l'inverso, sarà $g^{n-m} = e$

Con il polinomio minimo si mostra facilmente che $\rho(g)$ è diagonalizzabile. **MATEMATICI SCRIVETE IL PERCHÉ.** Inoltre da questa formula è anche evidente che tutti gli autovalori di $\rho(g)$ hanno modulo 1 e in particolare saranno radici k -esime dell'unità.

Ricordiamo un teorema di algebra lineare per finire l'ultima parte della dimostrazione: due endomorfismi di uno spazio vettoriale diagonalizzabili sono simultaneamente diagonalizzabili \Leftrightarrow commutano. Da questo teorema segue facilmente la seconda parte dell'enunciato. \square

Definizione 3.2 (Omomorfismo di rappresentazioni). Siano ρ e σ due rappresentazioni di G su V_ρ e V_σ rispettivamente, un omomorfismo di spazi vettoriali $\varphi : V_\rho \rightarrow V_\sigma$ si dice *omomorfismo di rappresentazioni* se

$$\forall a \in G, \forall v \in V_\rho \quad \varphi(\rho(a)(v)) = \sigma(a)(\varphi(v))$$

oppure equivalentemente

$$\forall a \in G \quad \varphi \circ \rho(a) = \sigma(a) \circ \varphi$$

Definizione 3.3 (Rappresentazioni isomorfe). Due rappresentazioni si dicono *isomorfe* se esiste un omomorfismo di rappresentazioni tra di loro che è anche bigettivo.

Rappresentazioni di grado 1

Teorema 3.3 (Le classi di isomorfismo delle rappresentazioni di grado 1 sono gli omomorfismi da G in \mathbb{C}^*).

Esempio 3.1 (Rappresentazioni di grado 1 di C_n).

Esempio 3.2 (Rappresentazioni di grado 1 di S_3).

Esempio 3.3 (Rappresentazioni di grado 1 di $C_n \times C_n$). (generalizzazione a prodotto di C_{n_i})

3.1 Operazioni con le rappresentazioni

Definizione 3.4 (Somma di rappresentazioni).

Osservazioni:

1. $\rho + \sigma \cong \sigma + \rho$
2. $\rho + (\sigma + \tau) \cong (\rho + \sigma) + \tau$
3. Esiste l'elemento neutro che è la rappresentazione di grado 0 ma non esiste l'inverso.

Definizione 3.5 (Prodotto di rappresentazioni).

Osservazioni:

1. $1 \otimes \rho \cong \rho$
2. $\rho \otimes \sigma \cong \sigma \otimes \rho$
3. $0 \otimes \rho \cong 0$
4. $\rho \otimes (\sigma \otimes \tau) \cong (\rho \otimes \sigma) \otimes \tau$
5. $\rho \otimes (\sigma_1 + \sigma_2) \cong \rho \otimes \sigma_1 + \rho \otimes \sigma_2$

Definizione 3.6 (Rappresentazione duale).

Osservazione: vale

$$(\rho + \sigma)^* \cong \rho^* + \sigma^*$$

E l'isomorfismo è canonico. SCRIVI DIMOSTRAZIONE.

Definizione 3.7 (Rappresentazione regolare).

Esempio 3.4 (La rappresentazione regolare di S_3).

Teorema 3.4.

$$\mathcal{R}_G \cong \sum_i \deg(\rho_i) \rho_i$$

3.2 Sottospazi invarianti e scomposizione delle rappresentazioni

Definizione 3.8 (Sottospazio invariante). NON VA MESSO TUTTO ASSIEME NELLA DEFINIZIONE DI SOTTORAPPRESENTAZIONE???

Definizione 3.9 (Sottorappresentazione). Sia ρ una rappresentazione di G su V_ρ , una sottorappresentazione di ρ è un sottospazio vettoriale $W \subseteq V_\rho$ tale che $\rho(s)(W) \subseteq W \ \forall s \in G$. Posso definire una rappresentazione σ con $V_\sigma = W$ e $\sigma(s) = \rho(s) \upharpoonright W$ (la indicherò con $\sigma \subseteq \rho$). COME SI SCRIVE LA RESTRIZIONE DI UNA FUNZIONE A UN DOMINIO PIÙ PICCOLO?????

Definizione 3.10 (Rappresentazione irriducibile). Una rappresentazione ρ di G è *irriducibile* se

1. $\rho \neq 0$ ($\deg(\rho) \geq 1$)
2. ρ non ha sottorappresentazioni non banali (diverse da 0 e V_ρ).

Osservazione. Normalmente la cosa che si fa più spesso in teoria della rappresentazione è cercare di scomporre la rappresentazione di un gruppo come somma di rappresentazioni irriducibili. Vedremo quindi adesso diversi teoremi che ci aiuteranno in questi problemi.

Esempio 3.5 (Rappresentazione regolare di S_3).

Teorema 3.5 (Le rappresentazioni di un gruppo finito sono completamente riducibili).

Proposizione 3.6 (Prodotto hermitiano invariante).

Lemma 3.7. Sia $h : V_\rho \times V_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ una forma hermitiana definita positiva e invariante per $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$ e sia $\rho|_W : G \rightarrow GL(W)$ una sottorappresentazione di ρ . Allora se W^\perp è l'ortogonale di W , $\rho|_{W^\perp} : G \rightarrow GL(W^\perp)$ è una sottorappresentazione.

Lemma 3.8. Sia $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$ una rappresentazione di un gruppo finito G . Sia $\rho|_W : G \rightarrow GL(W)$ una sottorappresentazione di ρ . Allora esiste una sottorappresentazione $\sigma : G \rightarrow GL(W')$ tale che

$$\rho = \rho|_W + \sigma$$

Osservazione. Notare che il teorema precedente è falso per gruppi finiti. (Esempio con \mathbb{Z}^+ che Salvatore non ha scritto con cura. Porco salvatore)

Teorema 3.9. Siano $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$ e $\sigma : G \rightarrow GL(V_\sigma)$ sono rappresentazioni di G e $f : V_\rho \rightarrow V_\sigma$ è un omomorfismo di rappresentazioni, allora $\text{Im}(f)$ è una sottorappresentazione di σ e $\text{Ker}(f)$ è una sottorappresentazione di V_ρ

Teorema 3.10. Sia G un gruppo abeliano finito. Allora ogni rappresentazione di G è isomorfa alla somma di rappresentazioni di grado 1.

Proposizione 3.11. La rappresentazione regolare \mathcal{R} di C_n è isomorfa alla somma delle n rappresentazioni irriducibili di grado 1 di C_n .

Lemma 3.12. Date ρ_1, ρ_2, σ rappresentazioni di G , allora

$$\text{Hom}(\rho_1 + \rho_2, \sigma) \cong \text{Hom}(\rho_1, \sigma) \oplus \text{Hom}(\rho_2, \sigma)$$

Teorema 3.13 (Lemma di Schur).

Teorema 3.14. Sia $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$ una rappresentazione e

$$\rho = \sum_{i=1}^N n_i \rho_i$$

una sua scomposizione come somma di rappresentazioni irriducibili a due a due non isomorfe. Allora la scomposizione è unica.

Lemma 3.15. Sia ρ una rappresentazione di G e \mathcal{R} la sua rappresentazione regolare. Allora

$$\deg(\rho) = \dim(\text{Hom}(\mathcal{R}, \rho))$$

Teorema 3.16. Sia \mathcal{R} la rappresentazione regolare di G , un gruppo finito, e sia

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N n_i \rho_i$$

Con ρ_i irriducibili e a due a due non isomorfe. Allora ogni rappresentazione irriducibile di G è isomorfa ad una ρ_i . Inoltre $n_i = \deg(\rho_i)$

Corollario. *Se G è abeliano allora ha $|G|$ rappresentazioni irriducibili di grado 1 e \mathcal{R} è la somma di queste.*

Corollario. *Sia G un gruppo finito. G ha un numero finito di rappresentazioni irriducibili, a meno di isomorfismi. Inoltre*

$$|G| = \sum n_i^2$$

4 Teoria dei caratteri

Definizione 4.1. Sia $\rho : G \rightarrow GL(V_\rho)$ una rappresentazione di un gruppo G . Definiamo carattere di ρ la funzione che associa ad ogni elemento del gruppo G la traccia della matrice associata all'elemento, ovvero

$$\chi_\rho(s) := \text{tr}(\rho(s)) \quad \forall s \in G$$

Notare che χ_ρ è una funzione che va dal gruppo in \mathbb{C} , ovvero $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$

Vediamo delle proprietà elementari del carattere

OSSERVAZIONI:

1. Se $\deg(\rho) = 1$ allora il carattere di s è uguale a $\rho(s)$
2. $\chi_{\rho_1} = \deg(\rho)$.²
Questo è vero poichè $[\rho_1] = I_n \Rightarrow \text{tr}(\rho_1) = n$ ed $n = \deg(\rho)$.
3. $\chi_{\rho+\sigma}(s) = \chi_\rho(s) + \chi_\sigma(s)$.
Questo è dovuto al fatto che la somma di rappresentazioni si può scrivere come matrice a blocchi. Una volta scritto così è evidente il risultato.
4. $\chi_{\rho\sigma}(s) = \chi_\rho(s)\chi_\sigma(s)$.
Questo deriva dal seguente fatto generale:

Lemma 4.1. Se $f : V \rightarrow V$ e $g : W \rightarrow W$ sono endomorfismi di spazi vettoriali, allora $\text{tr}(f \otimes g) = \text{tr}(f)\text{tr}(g)$.

Dimostrazione: Iniziamo a considerare il caso in cui sia f che g siano diagonalizzabili: prendendo due basi $a : I \rightarrow V$, $b : J \rightarrow W$ di autovettori rispettivamente per f e per g , si verifica facilmente la verità della proposizione nella base indotta su $V \otimes W$ (ovvero in quella formata dagli $a_i \otimes b_j$).

Ora, essendo la traccia una funzione continua e le matrici diagonalizzabili dense nello spazio delle matrici, la proprietà affermata dal lemma si estende al caso generale per continuità.

5. $\chi_\rho(s^{-1}) = \overline{\chi_\rho(s)}$
Essendo G un gruppo finito, $\forall s \in G$ $\rho(s)^n = \text{id}$ dove $n = |G|$: dunque tutti gli autovalori di $\rho(s)$ sono radici ennesime dell'unità e $\rho(s)$ è diagonalizzabile³. In tale base è evidente che:

$$\chi_\rho(s^{-1}) = \text{tr}(\rho(s^{-1})) = \text{tr}(\rho(s)^{-1}) = \sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \overline{\lambda_i} = \overline{\text{tr}(\rho(s))} = \overline{\chi_\rho(s)}$$

in quanto, avendo gli autovalori modulo 1, l'inverso coincide con il coniugio.

6. $\chi_{\rho^*}(s)^4 = \overline{\chi_\rho(s)}$.
Per l'osservazione precedente vale che

$$\chi_{\rho^*}(s) = \text{tr}({}^t\rho(s^{-1})) = \text{tr}(\rho(s^{-1})) = \overline{\text{tr}(\rho(s))} = \overline{\chi_\rho(s)}$$

²Al solito ρ_1 è la rappresentazione che manda ogni elemento nell'identità di V_ρ

³Si veda la proposizione 3.2

⁴Ricordiamo che $\rho^*(s) = (\rho(s)^{-1})^*$

7. $\chi_\rho(hsh^{-1}) = \chi_\rho(s)$ ovvero χ_ρ è costante sulle classi di coniugio di G . La motivazione è semplice: se due elementi sono coniugati tra loro questo significa che le matrici corrispondenti saranno simili e la traccia è un invariante di similitudine.

Di conseguenza, non sarà necessario calcolare il carattere per ogni elemento del gruppo ma basterà farlo per le classi di coniugio di G .

Le funzioni che costanti sulle classi di coniugio di un gruppo vengono dette *funzioni di classe*.

8. Supponiamo di avere una rappresentazione per permutazioni. Sia I un insieme finito e G un gruppo allora

$$\chi_{\rho_I}(s) = \# \text{punti fissi di } \rho_I(s) = |I^s|$$

dove $I^s := \{i \in I \mid s \circ i = i\}$. La veridicità di questo fatto si vede scrivendo esplicitamente la matrice che rappresenta $\rho_I(s)$.

Esempio: $G = S_3$, $I = \{1, 2, 3\}$. Allora

$$\chi_{\rho_I}(s) = \begin{cases} 3 & \text{se } s = id \\ 1 & \text{se } s \text{ è una trasposizione} \\ 0 & \text{se } s \text{ è un treciclo} \end{cases}$$

Ricordandoci che $\chi_{\rho_I} = \chi_{1+\rho}$ si ha che

$$\chi_\rho(s) = \begin{cases} 2 & \text{se } s = id \\ 0 & \text{se } s \text{ è una trasposizione} \\ -1 & \text{se } s \text{ è un treciclo} \end{cases}$$

Definizione 4.2 (Prodotto hermitiano dei caratteri).

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{f(s)} g(s)$$

Teorema 4.2 (Relazioni di ortogonalità). *Se ρ e σ sono rappresentazioni irriducibili di G , allora vale*

$$\langle \chi_\rho | \chi_\sigma \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho \cong \sigma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazioni:

- Ricordiamo che se ρ è una rappresentazione di G , allora ρ si può scrivere in modo unico come

$$\rho = \sum_i n_i \rho_i$$

Dove le ρ_i sono le rappresentazioni irriducibili di G e gli n_i sono numeri naturali ≥ 0 . Dall'equazione scritta sopra segue subito che

$$\chi_\rho = \sum_i n_i \chi_{\rho_i}$$

E possiamo ottenere un'informazione utile prendendo il prodotto scalare dell'equazione precedente con il carattere di una delle rappresentazioni ρ_i

$$\langle \chi_\rho | \chi_{\rho_j} \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_{\rho_i} | \chi_{\rho_j} \rangle \Rightarrow n_i \delta_{ij} = \langle \chi_\rho | \chi_{\rho_j} \rangle \Rightarrow n_i = \langle \chi_\rho | \chi_{\rho_i} \rangle$$

- Se ρ e σ sono 2 rappresentazioni irriducibili allora

$$\rho \cong \sigma \Leftrightarrow \chi_\rho = \chi_\sigma$$

- $\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = |\chi_\rho|^2 = \sum_i n_i^2$.
- Conseguenza dell'ultima osservazione è che una rappresentazione di un gruppo ρ è irriducibile $\Leftrightarrow \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = |\chi_\rho|^2 = 1$

4.1 Esempi di rappresentazioni di gruppi finiti

Esempio 4.1 (Tabella dei caratteri di S_3). La prima cosa da fare per costruire la tabella dei caratteri è vedere quanti elementi ha S_3 , suddividerli in classi di coniugio e poi cercare le rappresentazioni irriducibili solo dopo aver fatto tutto questo. Notiamo subito che S_3 ha esattamente 3 classi di coniugio. La prima è ovviamente quella banale, composta solo dall'identità e . Poi c'è la classe delle trasposizioni $\{(12), (23), (13)\}$ che ha 3 elementi e poi ci sono i 3cicli, ovvero (123) e (132) . Possiamo cominciare a scrivere una tabella vuota 3×3

S_3	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$
	1	3	2

Una rappresentazione irriducibile che c'è sempre è la rappresentazione banale di grado 1, ovvero quella che manda ogni elemento nell'identità. La tabella con questa informazione diventa

S_3	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$
	1	3	2
ρ_1	1	1	1

Un'altra rappresentazione che già conosciamo è il segno, ϵ , che ricordiamo vale $(-1)^{n-1}$ dove n è la lunghezza del ciclo. La tabella diventa

S_3	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$
	1	3	2
ρ_1	1	1	1
ϵ	1	-1	1

A questo punto ci sono due motivi per dire che l'ultima rappresentazione ha grado 2: il primo è che è l'unico modo di ottenere la relazione

$$|G| = \sum_i n_i^2$$

Il secondo è che se fossero due rappresentazioni di grado 1 allora il gruppo avrebbe solo rappresentazioni irriducibili di grado 1 e un teorema che abbiamo fatto implicherebbe che S_3 sia abeliano, cosa palesemente falsa.

Per trovare il carattere dell'ultima rappresentazione possiamo agire in più modi. Innanzitutto la tabella ora ha la forma

S_3	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$
	1	3	2
ρ_1	1	1	1
ϵ	1	-1	1
ρ	2		

In generale ci saranno due numeri complessi a, b nelle due caselle che mancano. Tuttavia noi sappiamo un sacco di teoremi che ci permettono di restringere il campo dei valori che possono avere. Per esempio noi sappiamo che

$$\langle \rho_i | \rho_j \rangle = \delta_{ij}$$

Per cui imponendo che il prodotto scalare con entrambe le precedenti faccia 0 abbiamo due equazioni e due incognite, ovvero un problema risolvibile. L'altro modo è dire che

$$\mathcal{R} = 1 + \epsilon + 2\rho$$

E dato che il carattere si comporta bene con la somma di rappresentazioni,

$$\chi_{\mathcal{R}} = \chi_1 + \chi_{\epsilon} + 2\chi_{\rho}$$

Ma sappiamo anche che

$$\chi_{\mathcal{R}}(s) = \begin{cases} |G| & \text{se } s = e \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per cui con agili conti riusciamo a completare la tabella

S_3	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$
	1	3	2
ρ_1	1	1	1
ϵ	1	-1	1
ρ	2	0	1

Tabella 1: Tabella dei caratteri di S_3

L'ultimo modo è cercare di scomporre un'altra rappresentazione a caso di S_3 , cercando di trovare la rappresentazione che ci manca. Per esempio ricordiamo l'azione di S_3 sui vettori di base di \mathbb{R}^3

$$\tau(s)e_i = e_{s(i)}$$

Ricordiamo che il sottospazio di dimensione 1 fatto dallo span del vettore $v = e_1 + e_2 + e_3$ è un sottospazio invariante in cui $\tau(s)$ è sostanzialmente l'identità. Il suo ortogonale è un altro sottospazio invariante su cui ρ è irriducibile. Di conseguenza potremo scrivere

$$\tau = 1 + \rho$$

E siamo sicuri che l'altra rappresentazione di grado 2 sia esattamente quella che stiamo cercando proprio grazie al teorema che ci dice che tutte le rappresentazioni irriducibili di un gruppo compaiono nella sua rappresentazione regolare. (Teorema 3.16)

Dato che è facile calcolare il carattere di $\tau(s)$ in quanto è uguale a $Fix(s)$, possiamo scrivere

$$Fix(s) = 1 + \chi_\rho$$

Da cui si ricava subito il carattere della rappresentazione ρ

Esempio 4.2 (Tabella dei caratteri di S_4). Facciamo la prima cosa importante: dividiamo S_4 in classi di coniugio. Per i soliti teoremi sugli S_n , le classi di coniugio saranno

$$\{e\}, \{(ab)\}, \{(abc)\}, \{(abcd)\}, \{(ab)(cd)\}$$

E notiamo che sono 5. Possiamo quindi cominciare a compilare la tabella dei caratteri vuota

S_4	e	(12)	(1 2 3)	(1234)	(12)(34)
	1	6	8	6	3
ρ_1	1	1	1	1	1

Dove ho già messo la rappresentazione banale. Anche per S_4 , essendo un gruppo simmetrico c'è la rappresentazione segno di grado 1.

S_4	e	(12)	(1 2 3)	(1234)	(12)(34)
	1	6	8	6	3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1

Dato che S_4 ha $4! = 24$ elementi, dobbiamo adesso trovare un modo per ottenere 22 come somma di 3 quadrati. Si vede subito che devono essere < 4 , ma se fossero anche tutti al massimo 2 non ce la faremmo, per cui ne esiste almeno una di grado 3.

$$22 = a^2 + b^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$$

A questo punto è facile vedere che l'unica soluzione è $(2, 3)$, ovviamente a meno dell'ordine. La tabella diventa

A questo punto bisogna fare cose a caso cercando le rappresentazioni irriducibili. Per esempio possiamo di nuovo considerare la rappresentazione per permutazioni

$$\tau(s)e_i = e_{s(i)}$$

Che si scompone anche questa come

S_4	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$	(1234)	$(12)(34)$
	1	6	8	6	3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1
	2				
	3				
	3				

$$\tau = 1 + \rho$$

Vorremmo sapere se ρ è irriducibile. Potremmo invocare qualche teorema ma lo faremo con le mani calcolando il carattere di ρ

$$\chi_\rho(s) = \text{Fix}(s) - 1 = \begin{cases} 3 & \text{Se } s = e \\ 1 & \text{Se } s = (ab) \\ 0 & \text{Se } s = (abc) \\ -1 & \text{Se } s = (abcd), (ab)(cd) \end{cases}$$

E andando a calcolare

$$\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = \frac{1}{24} (3^2 + 6 \cdot 1^2 + 0 + (-1)^2 \cdot (3 + 6)) = 1$$

Per cui è effettivamente irriducibile. Aggiungiamola alla tabella

S_4	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$	(1234)	$(12)(34)$
	1	6	8	6	3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1
	2				
ρ	3	1	0	-1	-1
	3				

A questo punto possiamo considerare $\rho\epsilon$ come altra rappresentazione. DIMOSTRA PRIMA CHE È UNA RAPPRESENTAZIONE DI $|G|$ ED È IRRIDUCIBILE

S_4	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$	(1234)	$(12)(34)$
	1	6	8	6	3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1
	2				
ρ	3	1	0	-1	-1
$\rho\epsilon$	3	-1	0	1	-1

E a questo punto dato che ce ne manca solo una possiamo usare il trucco di prima e concludere

Esempio 4.3 (Tabella dei caratteri di D_5). La prima cosa da fare è dividere D_5 in classi di coniugio FINIRE

S_4	e	(12)	$(1\ 2\ 3)$	(1234)	$(12)(34)$
	1	6	8	6	3
ρ_1	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	-1	1
σ	2	0	-1	0	2
ρ	3	1	0	-1	-1
$\rho\epsilon$	3	-1	0	1	-1

Tabella 2: Tabella dei caratteri di S_4