

Consideriamo l'immersione standard  $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ ; spezziamo  $\mathbb{H}$  come somma diretta  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ . Notiamo che, siccome  $ji = -ij$ , abbiamo  $aj = j\bar{a}$  per ogni  $a \in \mathbb{C}$ .

Sia  $V$  uno spazio vettoriale sinistro su  $\mathbb{H}$ ; consideriamo  $V$  come spazio vettoriale complesso tramite la restrizione di scalari a  $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ . Una *forma hermitiana quaternionica su  $V$*  è una funzione  $\mathbb{R}$ -bilinare  $h: V \times V \rightarrow \mathbb{H}$  tale che per ogni  $x, y \in V$  abbiamo

- (a)  $h(ax, y) = ah(x, y)$  per ogni  $a \in \mathbb{H}$ , e
- (b)  $h(y, x) = \overline{h(x, y)}$ .

Se  $a \in \mathbb{H}$ , allora  $h(x, ay) = h(x, y)\bar{a}$ : infatti

$$h(x, ay) = \overline{h(ay, x)} = \overline{ah(y, x)} = \overline{h(y, x)}\bar{a} = h(x, y)\bar{a}.$$

Scomponiamo  $h$  come  $h(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y)j$ , dove  $h_1$  e  $h_2$  sono forme  $\mathbb{R}$ -bilineari  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ . Allora  $h_1$  è una forma  $\mathbb{C}$ -hermitiana, mentre  $h_2$  è  $\mathbb{C}$ -bilinare e alternante. Infatti dall'uguaglianza  $h(ax, y) = ah(x, y)$  ricaviamo subito che  $h_1$  e  $h_2$  sono  $\mathbb{C}$ -lineari nella prima variabile; mentre, se  $a \in \mathbb{C}$  abbiamo

$$\begin{aligned} h_1(x, ay) + h_2(x, ay)j &= h(x, ay) \\ &= h(x, y)\bar{a} \\ &= (h_1(x, y) + h_2(x, y)j)\bar{a} \\ &= h_1(x, y)\bar{a} + h_2(x, y)j\bar{a} \\ &= \bar{a}h_1(x, y) + \bar{a}h_2(x, y)j. \end{aligned}$$

Inoltre  $h(x, x) = \overline{h(x, x)}$  è sempre reale, da cui si ricava subito che  $h_2(x, x) = 0$  per ogni  $x \in V$ , il che dimostra che  $h_2$  è alternante.