

Meccanica Classica

Appunti (non rivisti) delle lezioni del professor d'Emilio



un progetto di



www.eigenlab.org

a cura di

Francesco Ciciarella

Note legali



Copyright © 2011-2012 di Francesco Ciciarella

Appunti di Meccanica Classica

è rilasciato sotto i termini della licenza

Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia.

Per visionare una copia completa della licenza, visita

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/legalcode>

Liberatoria, mantenimento e segnalazione errori

Questo documento viene pubblicato, in formato elettronico, senza alcuna garanzia di correttezza del suo contenuto. Il testo, nella sua interezza, è opera di

Francesco Ciciarella

<f[DOT]ciciarella[AT]inventati[DOT]org>

e viene mantenuto dallo stesso, a cui possono essere inviate eventuali segnalazioni di errori.

Pisa, 10 Ottobre 2012

Indice

1	Meccanica Analitica	4
1.1	Richiami	5
1.2	Formalismo Lagrangiano	7
1.2.1	Proprietà della funzione Lagrangiana	8
1.3	Leggi di conservazione	9
1.3.1	Energia	9
1.3.2	Momento	10
1.3.3	Centro di massa	11
1.3.4	Momento angolare	12
1.4	Elettromagnetismo	13
1.4.1	Trasformazioni di gauge	14
1.5	Calcolo variazionale	15
1.6	Oscillatori armonici	17
1.6.1	Caso I - Oscillatore libero smorzato	17
1.6.2	Caso II - Oscillatore forzato	18
1.7	Piccole oscillazioni	21
1.7.1	Richiami di algebra lineare	21
1.8	Problema dei due corpi	25
1.8.1	Potenziale gravitazionale	28
1.9	Trasformazioni	31
1.10	Formalismo Hamiltoniano	32
1.10.1	La funzione di Routh	32
1.11	Trasformazioni canoniche infinitesime	33
1.12	Parentesi di Poisson	35
2	Relatività Speciale	37
2.1	Introduzione	38
2.1.1	Pippone sul perché la relatività è saltata fuori	38
2.1.2	Spaziotempo di Minkowski	39
2.2	Trasformazioni di Lorentz	39
2.2.1	In 1+1 dimensioni	39
2.2.2	In 3+1 dimensioni	42
2.3	Cenni di teoria dei gruppi	43
2.3.1	Rappresentazioni di gruppi	43
2.3.2	Rappresentazioni irriducibili	46
2.4	Formulazione covariante della Dinamica	48
2.4.1	Principi della Dinamica	48

2.4.2	Quantità di moto	49
2.4.3	Secondo principio	51
2.4.4	Forze	54
2.5	Meccanica analitica e relatività	55
2.6	Esercizi	56
3	Fisica Statistica	62
3.1	Richiami di Meccanica Classica	63
3.2	Sistemi ed ensembles	64
3.3	Il teorema di Liouville	65
3.4	Entropia in Meccanica Statistica	67
3.5	Esempi elementari di distribuzione di probabilità ed entropia	68
3.6	Calcolo dell'entropia di un gas perfetto tramite gli ensemble microcanonici	72
3.7	Ensemble canonico	75

Capitolo 1

Meccanica Analitica

1.1 Richiami

Meccanica del punto

Dato un punto materiale di massa m e coordinata \mathbf{r} , funzione del tempo, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t)$, definiamo la velocità del punto, la sua quantità di moto e la forza agente sul punto rispettivamente come

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} . \quad (1.1.1)$$

Trovare la traiettoria di un punto, vuol dire risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a} \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} . \quad (1.1.2)$$

Da questa notiamo che $\mathbf{F} \equiv 0$ implica \mathbf{p} costante. Dato un punto materiale dotato di impulso \mathbf{p} , definiamo il momento angolare rispetto a un polo O :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} , \quad (1.1.3)$$

dove \mathbf{r} è la distanza tra il polo e il punto materiale. Osserviamo adesso:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} . \quad (1.1.4)$$

Definiamo dunque il momento della forza come la derivata rispetto al tempo del momento angolare. Il lavoro compiuto da una forza su una particella è dato da:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} dt \\ &= \int_1^2 m \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt = \int_1^2 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right] dt \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 = T_2 - T_1 , \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

dove abbiamo introdotto l'energia cinetica $T = m\mathbf{v}^2/2$. Se la forza è tale che $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$, cioè è scrivibile come gradiente di un potenziale dipendente solo dalla distanza, allora:

$$W_{12} = \int_1^2 -\nabla U(\mathbf{r}) d\mathbf{s} = U_1 - U_2 , \quad (1.1.6)$$

dove abbiamo introdotto l'energia potenziale U . Eguagliando le due espressioni del lavoro così trovate, otteniamo il teorema di conservazione dell'energia:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 . \quad (1.1.7)$$

Sistemi di punti

Per un sistema formato da N punti materiali, le equazioni assumono la forma:

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} , \quad (1.1.8)$$

(che deve essere sommata sull'indice $\alpha = 1, \dots, N$). Ma per il terzo principio di Newton, $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$, allora:

$$\sum_{\alpha} \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right] = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\mathbf{F}_{\alpha\beta} - \mathbf{F}_{\beta\alpha}) = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{ext} \quad (1.1.9)$$

Chiamiamo $M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$ e $\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$. L'equazione (1.1.9) diventa pertanto:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} \equiv M \ddot{\mathbf{R}} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{ext} , \quad (1.1.10)$$

dove $M\mathbf{R} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}$ è la coordinata del baricentro del sistema. Osserviamo che se $\sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{ext} = 0$, allora \mathbf{P} si conserva. Definiamo il momento angolare totale di un sistema di punti materiali come:

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) . \quad (1.1.11)$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{r}_{\beta} \times \mathbf{F}_{\beta\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} - \mathbf{r}_{\beta} \times \mathbf{F}_{\alpha\beta}) \\ &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} [(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \times \mathbf{F}_{\alpha\beta}] \\ &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} , \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ è diretta lungo la congiungente tra i due punti. Definiamo dunque il momento delle forze totale:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} . \quad (1.1.13)$$

1.2 Formalismo Lagrangiano

Consideriamo un certo sistema ad un dato istante t fisso. Vogliamo su di esso eseguire degli *spostamenti virtuali compatibili* $\delta \mathbf{r}_\alpha$, cioè tali che siano piccoli e coerenti con i vincoli del sistema e $\delta \dot{\mathbf{r}}_\alpha = 0$. Allora possiamo esprimere i $\delta \mathbf{r}_\alpha$ in termini delle coordinate lagrangiane q_k :

$$\delta \mathbf{r}_\alpha = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (1.2.1)$$

da cui:

$$\sum_\alpha (\dot{\mathbf{P}}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha^{ext} - \mathbf{F}_\alpha^{reaz}) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0, \quad (1.2.2)$$

ma $\mathbf{F}_\alpha^{reaz} = 0$ perché i vincoli non compiono lavoro. Otteniamo dunque il principio di D'Alembert dei lavori virtuali:

$$\sum_\alpha (\dot{\mathbf{P}}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha^{ext}) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0. \quad (1.2.3)$$

I $\delta \mathbf{r}_\alpha$ sono linearmente dipendenti. Cerco di esprimerli in funzione delle coordinate lagrangiane q_k :

$$\begin{aligned} -\mathbf{F}_\alpha^{ext} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha &= -\left(\mathbf{F}_\alpha^{ext} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \nabla_{\mathbf{r}_\alpha} U \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \frac{\partial U}{\partial r_\alpha^i} \cdot \frac{\partial r_\alpha^i}{\partial q_k} \delta q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha &= m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial q_k} \right] \delta q_k. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Poiché $\partial \mathbf{r}_\alpha / \partial q_k = \partial \mathbf{v}_\alpha / \partial \dot{q}_k$, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha &= \left[\frac{d}{dt} \left(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial q_k} \right] \delta q_k \\ &= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 \right) \right] \delta q_k \\ &= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Quindi il principio di D'Alembert in termini delle coordinate lagrangiane diventa:

$$\delta q_k \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) T + \frac{\partial}{\partial q_k} U \right] = \delta q_k \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U) \right] = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.2.7)$$

Definiamo a questo punto la funzione *Lagrangiana* $L = T - U$. Avremo a questo punto le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.2.8)$$

che restituiscono direttamente le equazioni del moto.

1.2.1 Proprietà della funzione Lagrangiana

Consideriamo due Lagrangiane $L(q, \dot{q})$ e $L'(q, \dot{q})$ che differiscono per la derivata totale rispetto al tempo di una funzione $F \equiv F(q, t)$:

$$L' = L + \frac{dF}{dt} = L + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (1.2.9)$$

Definiamo il *momento canonico generalizzato* $p_\alpha \equiv \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$. Allora si ha:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} = p'_\alpha = p_\alpha + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} . \quad (1.2.10)$$

Derivando entrambi i membri rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} = \dot{p}_\alpha + \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} . \quad (1.2.11)$$

Ma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} , \quad (1.2.12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{dF}{dt} . \quad (1.2.13)$$

Allora:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(L + \frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial L'}{\partial q_\alpha} . \quad (1.2.14)$$

Dunque concludiamo che le equazioni del moto generate da L' sono le stesse di quelle generate da L . In generale, *due Lagrangiane che differiscono per la derivata totale di una certa funzione generano le stesse equazioni del moto.*

Se la Lagrangiana non dipende da una certa coordinata q_α , detta *coordinata ciclica*, (può tuttavia dipendere dalle sue derivate), allora:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 . \quad (1.2.15)$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange segue che il momento canonico p_α si conserva, infatti:

$$\dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt} p_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 . \quad (1.2.16)$$

1.3 Leggi di conservazione

Durante il moto di un sistema meccanico, le $2n$ quantità q_i e \dot{q}_i ($i = 1, \dots, n$) che caratterizzano lo stato del sistema variano nel tempo. Tuttavia, esistono funzioni di queste quantità che rimangono costanti durante il moto, e dipendono solamente dalle condizioni iniziali. Tali funzioni sono chiamate *integrali primi del moto*. Il numero di integrali primi indipendenti per un sistema con n gradi di libertà è $2n - 1$.

1.3.1 Energia

La prima legge di conservazione discende dall'omogeneità del tempo. In virtù di tale omogeneità, la Lagrangiana di un sistema chiuso non dipende esplicitamente dal tempo. La derivata totale rispetto al tempo della Lagrangiana può essere quindi scritta come:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i. \quad (1.3.1)$$

Sostituendo $\partial L / \partial q_i$ in accordo con le equazioni di Eulero-Lagrange, otteniamo:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (1.3.2)$$

ovvero, per linearità dell'operatore derivata:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0. \quad (1.3.3)$$

Notiamo che la quantità:

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (1.3.4)$$

rimane costante durante il moto, cioè è un integrale primo del moto; essa è detta *energia* del sistema. Sappiamo che in un sistema chiuso la Lagrangiana è della forma $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$, con T funzione quadratica delle velocità, data da:

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{r}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, k, l} m_{\alpha} \frac{\partial r_{\alpha}}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l = \sum_{k, l} F_{kl}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (1.3.5)$$

Allora:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i &= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{k, l} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (F_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l) = \sum_{k, l} F_{kl} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_k \dot{q}_l) \\ &= \sum_{k, l} F_{kl} \sum_i (\delta_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_l + \delta_{il} \dot{q}_i \dot{q}_k) = \sum_{k, l} (F_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + F_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l) \\ &= T + T = 2T. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Da ciò concludiamo che T è omogenea di grado 1. Dunque, sostituendo quanto trovato nella (1.3.4):

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - U) = T(q, \dot{q}) + U(q), \quad (1.3.7)$$

che coincide con la nota espressione dell'energia meccanica di un sistema.

1.3.2 Momento

Una seconda legge di conservazione deriva dall'omogeneità dello spazio. In virtù di tale omogeneità, le proprietà meccaniche di un sistema chiuso rimangono invariate per ogni spostamento congruo dell'intero sistema. Consideriamo uno spostamento infinitesimo ϵ e ricaviamo la condizione per cui la Lagrangiana rimane invariata. Uno spostamento congruo è una trasformazione in cui ogni punto del sistema è spostato della stessa quantità e nella stessa direzione, e quindi il raggio vettore \mathbf{r} diventa $\mathbf{r} + \epsilon$. La variazione della Lagrangiana per una variazione infinitesima delle coordinate, le velocità delle particelle rimanenti fisse, è

$$\delta L = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \epsilon \cdot \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} . \quad (1.3.8)$$

Dato che ϵ è arbitrario, la condizione $\delta L = 0$ è equivalente a:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} = 0 . \quad (1.3.9)$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange segue che:

$$\sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}} = 0 . \quad (1.3.10)$$

Concludiamo quindi che, in un sistema meccanico chiuso, il vettore:

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}} , \quad (1.3.11)$$

rimane costante durante il moto; \mathbf{P} è detto *momento* o *quantità di moto* del sistema. Differenziando la Lagrangiana $L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, troviamo che il momento è dato in termini delle velocità delle particelle da:

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} . \quad (1.3.12)$$

L'additività del momento è evidente. In più, a differenza dell'energia, il momento del sistema è uguale alla somma dei momenti $\mathbf{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$ delle singole particelle.

L'equazione (1.3.9) ha un semplice significato fisico. La derivata $\partial L / \partial \mathbf{r}_{\alpha} = -\partial U / \partial \mathbf{r}_{\alpha}$ è la forza \mathbf{F}_{α} che agisce sulla particella α -esima. Quindi l'equazione (1.3.9) significa che la somma delle forze agenti su tutte le particelle in un sistema chiuso è zero¹.

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = 0 . \quad (1.3.13)$$

Se il moto è descritto per mezzo di coordinate generalizzate q_i , le derivate della Lagrangiana rispetto alle velocità generalizzate:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} , \quad (1.3.14)$$

sono chiamate *momenti generalizzati*, e le derivate della Lagrangiana rispetto alle coordinate generalizzate:

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} , \quad (1.3.15)$$

¹In particolare, per un sistema di sole due particelle, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$, che coincide con la *terza legge di Newton*.

sono chiamate *forze generalizzate*. In questa notazione, le equazioni di Eulero-Lagrange diventano:

$$\dot{p}_i = F_i . \quad (1.3.16)$$

In coordinate cartesiane, i momenti generalizzati sono le componenti dei vettori \mathbf{p}_α . In generale, tuttavia, le p_i sono funzioni omogenee lineari delle velocità generalizzate \dot{q}_i e non si riducono a prodotti di massa e velocità.

1.3.3 Centro di massa

Il momento di un sistema meccanico chiuso assume valori diversi in diversi sistemi di riferimento inerziali. Se un sistema di riferimento K' si muove con velocità \mathbf{V} relativamente a un altro sistema di riferimento K , allora le velocità \mathbf{v}'_α e \mathbf{v}_α delle particelle relative ai due sistemi di riferimento sono tali che $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}'_\alpha + \mathbf{V}$. I momenti \mathbf{P} e \mathbf{P}' nei due sistemi di riferimento sono dunque legati da:

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha + \mathbf{V} \sum_\alpha m_\alpha , \quad (1.3.17)$$

oppure:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_\alpha m_\alpha . \quad (1.3.18)$$

In particolare, esiste sempre un sistema di riferimento K' in cui il momento totale è zero. Imponendo $\mathbf{P}' = 0$ troviamo dunque la velocità di tale sistema di riferimento:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} . \quad (1.3.19)$$

Questa formula mostra che la relazione fra il momento \mathbf{P} e la velocità \mathbf{V} del sistema è la stessa di quella che sussiste fra il momento e la velocità di una singola particella di massa $M = \sum m_\alpha$, la somma delle masse delle particelle del sistema. Il secondo membro della (1.3.19) può essere scritto come la derivata totale rispetto al tempo della quantità:

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} . \quad (1.3.20)$$

Possiamo affermare che la velocità del sistema nel suo complesso è la variazione della posizione nello spazio del punto il cui raggio vettore è \mathbf{R} . Questo punto è chiamato *centro di massa* del sistema. La legge di conservazione del momento per un sistema chiuso può essere riformulata dicendo che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme.

L'energia di un sistema meccanico che è nel complesso a riposo è solitamente chiamata *energia interna* E_i . L'energia totale di un sistema che si muove nel complesso con velocità V può essere scritta:

$$E = \frac{1}{2} M V^2 + E_i . \quad (1.3.21)$$

Infatti le energie E e E' di un sistema in due sistemi di riferimento K e K' sono legate da:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + U \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{v}'_{\alpha} + \mathbf{V})^2 + U \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 + U \\
&= E' + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' + \frac{1}{2} M V^2 .
\end{aligned} \tag{1.3.22}$$

Se il centro di massa è a riposo in K' , allora $\mathbf{P}' = 0$, $E = E_i$ e si ottiene la (1.3.21).

1.3.4 Momento angolare

Deriviamo adesso la legge di conservazione che discende dall'isotropia dello spazio. Questa isotropia implica che le proprietà meccaniche di un sistema chiuso non cambiano quando esso è ruotato interamente in qualunque maniera nello spazio. Consideriamo quindi una rotazione infinitesima del sistema, e otteniamo la condizione affinché la Lagrangiana rimanga invariata.

Usiamo il vettore $\delta\phi$ per indicare una rotazione infinitesima, il cui modulo è l'angolo di rotazione $\delta\phi$ e la cui direzione è quella dell'asse di rotazione. Ricaviamo innanzitutto la variazione del raggio vettore da un'origine sull'asse a una qualunque particella del sistema. Lo spostamento è collegata alla rotazione da $|\delta\mathbf{r}| = r \sin \theta \delta\phi$, dove θ è l'angolo compreso fra l'asse di rotazione e \mathbf{r} . La direzione di $\delta\mathbf{r}$ è perpendicolare al piano individuato dai vettori \mathbf{r} e $\delta\phi$. Risulta chiaro dunque che:

$$\delta\mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r} . \tag{1.3.23}$$

Inoltre, quando il sistema ruota, anche le velocità delle particelle variano in direzione secondo la relazione:

$$\delta\mathbf{v} = \delta\phi \times \mathbf{v} . \tag{1.3.24}$$

Scriviamo a questo punto la condizione che la variazione della Lagrangiana sia nulla:

$$\delta L = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} \cdot \delta\mathbf{r}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{\alpha}} \cdot \delta\mathbf{v}_{\alpha} \right) = 0 . \tag{1.3.25}$$

Sostituendo la (1.3.23) e la (1.3.24) nella (1.3.25), e ricordando che $\partial L / \partial \mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{p}_{\alpha}$ e $\partial L / \partial \mathbf{r}_{\alpha} = \dot{\mathbf{p}}_{\alpha}$, otteniamo:

$$\sum_{\alpha} (\dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \delta\phi \times \mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \delta\phi \times \mathbf{v}_{\alpha}) = 0 . \tag{1.3.26}$$

Permutando ciclicamente i fattori e portando $\delta\phi$ fuori dalla sommatoria:

$$\delta\phi \cdot \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} + \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta\phi \cdot \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = 0 . \tag{1.3.27}$$

Dato che $\delta\phi$ è arbitrario, segue che $(d/dt) \sum \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = 0$, e concludiamo che il vettore:

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} , \tag{1.3.28}$$

chiamato *momento angolare* del sistema, è conservato durante il moto in un sistema chiuso. Come il momento, esso è additivo.

1.4 Elettromagnetismo

L'equazione del moto in presenza di campi elettrico e magnetico è data da

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) , \quad (1.4.1)$$

dove e è la carica dell'elettrone, \mathbf{v} è la sua velocità, \mathbf{E} è il campo elettrico, \mathbf{B} il campo magnetico e $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ è la velocità della luce nel vuoto. Il secondo membro rappresenta la *forza di Lorentz generalizzata*. Dalle equazioni di Maxwell, sappiamo che $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$. Poiché $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, allora $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dove \mathbf{A} è il potenziale vettore del campo magnetico. Introduciamo il simbolo di Ricci ϵ_{ijk} :

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{se due indici sono uguali} \end{cases} . \quad (1.4.2)$$

Tramite il simbolo di Ricci è possibile esprimere i prodotti vettoriali: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ ². Vale inoltre la relazione $\epsilon_{ijk} \epsilon_{abk} = \delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}$. L'espressione della divergenza del campo magnetico può essere allora riscritta come:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_i B_i = \partial_i (\nabla \times \mathbf{A})_i = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0 . \quad (1.4.3)$$

E parimenti, l'espressione del rotore del campo elettrico diventa:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) , \quad (1.4.4)$$

cioè:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (1.4.5)$$

Se un vettore ha rotore nullo, allora esso può essere scritto come il gradiente di una funzione scalare cambiato di segno, quindi:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi . \quad (1.4.6)$$

Φ rappresenta il potenziale scalare del campo elettrico. Allora, sostituendo nell'espressione della forza di Lorentz i valori dei campi, otteniamo:

$$\begin{aligned} F_i &= e \left[-\partial_i \Phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} (\epsilon_{ijk} v_j (\nabla \times \mathbf{A})_k) \right] \\ &= e \left[-\partial_i \Phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} (\epsilon_{ijk} \epsilon_{lkm} v_j \partial_l A_m) \right] \\ &= e \left[-\partial_i \Phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} ((\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \partial_l A_m) \right] \\ &= e \left[-\partial_i \Phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} (v_j \partial_j A_i - v_l \partial_l A_i) \right] \\ &= e \left[-\partial_i \left(\Phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) A_i \right] \\ &= e \left[-\partial_i \left(\Phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\Phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \right] . \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

²In queste espressioni si usa la notazione di Einstein, ovvero sono omesse le sommatorie sugli indici ripetuti, i.e. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$.

Pertanto la Lagrangiana di un elettrone che si muove in presenza di campi elettrico e magnetico sarà:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e \left(\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right) . \quad (1.4.8)$$

1.4.1 Trasformazioni di gauge

Una *trasformazione di gauge* è una particolare trasformazione dei potenziali \mathbf{A} e Φ così definita:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t) \\ \Phi_1 \rightarrow \Phi_2 = \Phi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{r}, t) \end{cases} , \quad (1.4.9)$$

dove $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ è una generica funzione scalare. Osserviamo che:

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2 = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \mathbf{A}_1 + \nabla \times \nabla \Lambda , \quad (1.4.10)$$

ma il rotore di un gradiente è nullo, dunque si ottiene $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1$, cioè il campo magnetico è invariante per trasformazioni di gauge. Inoltre:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\nabla \Phi_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} = -\nabla \Phi_1 + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Lambda \\ &= -\nabla \Phi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} = \mathbf{E}_1 . \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Dunque i potenziali ottenuti tramite una trasformazione di gauge generano i medesimi campi \mathbf{E} e \mathbf{B} . Ci aspettiamo similmente che la Lagrangiana scritta in termini dei potenziali \mathbf{A}_2, Φ_2 sia la stessa di quella scritta in termini di \mathbf{A}_1, Φ_1 . Infatti, si ha:

$$L_2 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e \left(\Phi_2 - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \cdot \mathbf{A}_2 \right) \quad (1.4.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e \left(\Phi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \cdot \mathbf{A}_1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \cdot \nabla \Lambda \right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e \left(\Phi_1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \cdot \mathbf{A}_1 \right) + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \Lambda \right) \\ &= L_1 + \frac{e}{c} \frac{d\Lambda}{dt} . \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Poiché le due Lagrangiane differiscono per la derivata totale rispetto al tempo di $\Lambda(\mathbf{r}, t)$, esse generano le stesse equazioni del moto. Dunque si conclude che la Lagrangiana è invariante per trasformazione di gauge.

1.5 Calcolo variazionale

Consideriamo un sistema costituito da una particella di massa m che si muove sotto l'effetto del campo gravitazionale fra due punti di coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . Vogliamo trovare la traiettoria che congiunge i due punti per cui il tempo di percorrenza è minimo. Sappiamo che in generale è $dt = ds/v$. Allora il tempo di percorrenza τ è dato da:

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}} dx \equiv \tau[y(x)]_{x_0}^{x_1}. \quad (1.5.1)$$

Dunque si tratta di minimizzare il funzionale $\tau[y(x)]$ nell'intervallo $[x_0, x_1]$. Se $y(x)$ è la funzione che lo minimizza, allora per ogni incremento $\delta y(x)$ si ha $\tau[y(x)] < \tau[y(x) + \delta y(x)]$. In generale, si ha:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x) dx. \quad (1.5.2)$$

Eseguiamo la trasformazione:

$$\begin{cases} y(x) \mapsto y(x) + \delta y(x) \\ y'(x) \mapsto y'(x) + \frac{d}{dx} \delta y(x) = y'(x) + \delta y'(x) \end{cases}. \quad (1.5.3)$$

L'incremento del funzionale I sarà allora dato da:

$$\begin{aligned} I[y(x) + \delta y(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} F(y + \delta y, y' + \delta y', x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[F(y, y', x) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) \right] dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx} \right) dx \\ &= I[y(x)] + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx} \right) dx. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

A questo punto imponiamo che la variazione del funzionale $\delta I = I[y + \delta y] - I[y]$ sia nulla, a condizione che la variazione di y si annulli agli estremi, ossia $\delta y(x_1) = \delta y(x_0) = 0$:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx} dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y dx = 0. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Il secondo termine è identicamente nullo in quanto abbiamo supposto che la variazione δy si annulli agli estremi. Abbiamo dunque:

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y dx = 0. \quad (1.5.6)$$

Poiché δy è arbitrario, dobbiamo imporre che il termine in parentesi sia identicamente nullo, ottenendo così le ben note equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (1.5.7)$$

Nel nostro caso, F non dipende esplicitamente da y ($F = \sqrt{(1 + y'^2)/x}$), quindi y è una coordinata ciclica e di conseguenza il momento generalizzato coniugato $\partial F/\partial y'$ è costante:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}} = c . \quad (1.5.8)$$

Da questa espressione ricaviamo il valore di y' in funzione di x (ponendo $c^2 = C$):

$$y' = \sqrt{\frac{Cx}{1 - Cx}} . \quad (1.5.9)$$

Integrando, infine, troviamo l'equazione della traiettoria che minimizza il tempo di percorrenza:

$$\int dy = \int \sqrt{\frac{Cx}{1 - Cx}} dx \quad \Rightarrow \quad y - K = \int \sqrt{\frac{Cx}{1 - Cx}} dx . \quad (1.5.10)$$

Effettuando la sostituzione $x = \cos^2 \theta / C$, $dx = -\frac{2}{C} \cos \theta \sin \theta d\theta$ troviamo:

$$\begin{aligned} y - K &= \int -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{2}{C} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{2}{C} \int \cos^2 \theta d\theta = -\frac{2}{C} \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{C} \int d\theta - \frac{1}{C} \cos(2\theta) d\theta = -\frac{1}{C} \theta + \frac{1}{2C} \sin(2\theta) . \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Posto $2\theta = t$, troviamo le equazioni parametriche della curva che minimizza il tempo di percorrenza:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2C}(1 + \cos t) \\ y = K + \frac{1}{2C}(t + \sin t) \end{cases} , \quad (1.5.12)$$

che rappresentano una cicloide.

1.6 Oscillatori armonici

Un oscillatore armonico, nella forma più generale, è descritto da un'equazione del tipo:

$$m\ddot{q}(t) = -\beta\dot{q}(t) - kq(t) + f(t), \quad \beta, k > 0. \quad (1.6.1)$$

1.6.1 Caso I - Oscillatore libero smorzato

Nell'oscillatore libero smorzato si ha $f(t) \equiv 0$, quindi l'equazione del moto è:

$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + kq = 0. \quad (1.6.2)$$

Dividendo per m e ponendo $\omega_0^2 = k/m$, $\gamma = \beta/m$ si ottiene:

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) q = 0. \quad (1.6.3)$$

Cerchiamo una soluzione della forma $q(t) = Ae^{i\alpha t}$. Sostituendo, si ottiene:

$$(-\alpha^2 + i\alpha\gamma + \omega_0^2)e^{i\alpha t} = 0. \quad (1.6.4)$$

Poiché $e^{i\alpha t} \neq 0$ sempre, si ha che l'uguaglianza è verificata per i valori di α che verificano l'equazione:

$$\alpha^2 - i\alpha\gamma - \omega_0^2 = 0, \quad (1.6.5)$$

le cui soluzioni sono:

$$\alpha = \frac{i\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (1.6.6)$$

Definiamo il *fattore di qualità* dell'oscillatore Q come $Q = 1/\gamma$. Abbiamo dunque:

$$\alpha = \frac{i}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{1}{Q^2}}. \quad (1.6.7)$$

Esaminiamo i vari casi. Se $\omega_0^2 > 1/Q^2$, le soluzioni della (1.6.2) saranno:

$$q(t) = e^{i(\frac{i}{2Q} \pm \Omega)t} = e^{-t/2Q} e^{\pm i\Omega t}, \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q\omega_0)^2}}. \quad (1.6.8)$$

Osserviamo che la presenza del fattore $e^{-t/2Q}$ implica sottosmorzamento delle oscillazioni. Nel caso in cui $\omega_0^2 \gg 1/4Q^2$, avremo un oscillatore lievemente smorzato. Scriviamo le due soluzioni indipendenti nella forma:

$$q(t) = A_c e^{-t/2Q} \cos(\Omega t) + A_s e^{-t/2Q} (\sin \Omega t). \quad (1.6.9)$$

Nell'approssimazione di smorzamento lieve, $A_c e^{-t/2Q} \simeq A_s e^{-t/2Q} = A$. L'energia dell'oscillatore sarà data da:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \simeq A_{c,s}^2 e^{-t/Q}, \quad (1.6.10)$$

dunque l'energia diminuisce seguendo un decadimento esponenziale. Nel caso $\omega_0^2 < 1/Q^2$, abbiamo l'oscillatore *sovrasmorzato*. Le soluzioni in questo caso, entrambi reali, saranno:

$$q(t) = e^{i(\frac{i}{2Q} \pm i\Omega)t} = e^{-t/2Q} e^{\pm \Omega t}, \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q\omega_0)^2}}. \quad (1.6.11)$$

Nel caso $\omega_0^2 = 1/4Q^2$, avremo l'oscillatore *criticamente smorzato*. Avremo una sola soluzione indipendente:

$$q_1(t) = e^{-t/2Q} . \quad (1.6.12)$$

Per trovare la seconda soluzione indipendente, la cerchiamo nella forma $q_2 = q_1(t)g(t)$. La sostituzione nell'equazione dell'oscillatore restituisce:

$$\ddot{q}_1 f + 2\dot{q}_1 \dot{g} + q_1 \ddot{g} + \frac{1}{Q} \dot{q}_1 g + \frac{1}{Q} q_1 \dot{g} + \omega_0^2 q_1 g = 0 . \quad (1.6.13)$$

cioè:

$$g \left(\ddot{q}_1 + \frac{1}{Q} \dot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 \right) + \dot{g} \left(2\dot{q}_1 + \frac{1}{Q} q_1 \right) + q_1 \ddot{g} = 0 . \quad (1.6.14)$$

Il coefficiente di g è nullo in quanto q_1 è soluzione dell'equazione. Rimane pertanto:

$$\dot{g} \left(2\dot{q}_1 + \frac{1}{Q} q_1 \right) + q_1 \ddot{g} = 0 \iff \dot{g} \left(-\frac{1}{Q} e^{-t/2Q} + \frac{1}{Q} e^{-t/2Q} \right) + q_1 \ddot{g} = 0 . \quad (1.6.15)$$

E dunque:

$$q_1 \ddot{g} = 0 \implies \ddot{g} = 0 , \quad (1.6.16)$$

in quanto $q_1 \neq 0$. Integrando due volte troviamo infine $g(t) = at + b$. Quindi la soluzione generale per l'oscillatore criticamente smorzato sarà:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) = e^{-t/2Q} + (at + b)e^{-t/2Q} = (at + b + 1)e^{-t/2Q} . \quad (1.6.17)$$

1.6.2 Caso II - Oscillatore forzato

Inseriamo adesso un termine di sorgente $f(t)$ (non consideriamo però in prima analisi il termine di smorzamento, i.e $\gamma = 0$). L'equazione sarà allora:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = f(t) , \quad (1.6.18)$$

ovvero:

$$Oq = f(t), \quad O \equiv \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 . \quad (1.6.19)$$

Scomponiamo la sorgente in sorgenti puntiformi e cerchiamo una funzione $G(t)$ tale che:

$$OG(t) = \delta(t) , \quad (1.6.20)$$

dove $\delta(t)$ è la *delta di Dirac*. Effettuando una traslazione otteniamo:

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t - t') + \omega_0^2 G(t - t') = \delta(t - t') \quad (1.6.21)$$

Allora la funzione:

$$q(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t') , \quad (1.6.22)$$

è soluzione della (1.6.18). Infatti:

$$O_t q(t) = O_t \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t - t') f(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' O_t G(t - t') f(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(t - t') f(t') = f(t) . \quad (1.6.23)$$

Indicando con G_R la funzione tale che $OG_R = \delta$, allora $\forall \alpha, \beta$ la funzione $G(t) = G_R(t) + \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$ è soluzione dell'equazione, dove $\alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$ è soluzione dell'omogenea associata $OG = 0$. Abbiamo come condizioni iniziali $G(0) = 0$ e $\dot{G}(0) = 1$. Imponendole troviamo:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{\omega_0} . \quad (1.6.24)$$

Dunque la funzione:

$$G_R = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (t > 0) , \quad (1.6.25)$$

risolve $OG_R = \delta$, e pertanto:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_R(t-t') f(t') ,$$

$$G_R(t-t') = \begin{cases} 0 & \text{se } t-t' < 0 \\ \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t-t')) & \text{se } t-t' > 0 . \end{cases} , \quad (1.6.26)$$

risolve $Oq = f(t)$. In particolare, poiché $t-t' < 0$ per $t' > t$, l'espressione di q si riduce a:

$$q(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^t dt' \sin(\omega_0(t-t')) f(t') . \quad (1.6.27)$$

Riprendiamo in esame l'equazione dell'oscillatore smorzato e forzato:

$$\ddot{q} + \frac{1}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = f(t) , \quad (1.6.28)$$

ed applichiamo lo stesso ragionamento: cerchiamo una funzione G che risolve:

$$\ddot{G} + \frac{1}{Q} \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t) . \quad (1.6.29)$$

Si ha, pertanto:

$$G_R(t) = \frac{e^{-t/2Q}}{\Omega} \sin(\Omega t), \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4Q^2}} . \quad (1.6.30)$$

Indicando con q_{om} la soluzione dell'equazione omogenea associata si ottiene:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(t-t')/2Q}}{\Omega} \sin(\Omega(t-t')) f(t') dt' + q_{om} . \quad (1.6.31)$$

Se $\omega_0^2 \gg 1/4Q^2$, allora $\Omega \sim \omega_0$. Scriviamo inoltre $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$. Quindi abbiamo:

$$q(t) = f_0 \int_0^t \frac{e^{-(t-t')/2Q}}{\omega_0} \sin(\omega_0(t-t')) \sin(\omega t') dt' + q_{om}$$

$$= \frac{f_0}{2i\omega_0} e^{-t/2Q} \int_0^t e^{t'/2Q} (e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t'} - e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 t'}) \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) dt' + q_{om} \quad (1.6.32)$$

Se $t \gg Q$, $q_{om} \simeq 0$:

$$q(t) = -\frac{f_0}{4\omega_0} e^{-t/2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[e^{i(\omega-\omega_0-i/2Q)t'} - e^{i(-\omega-\omega_0-i/2Q)t'} \right] e^{i\omega_0 t} + \right. \\ \left. + \left[e^{i(-\omega+\omega_0-i/2Q)t'} - e^{i(\omega+\omega_0-i/2Q)t'} \right] e^{-i\omega_0 t} \right\} dt' . \quad (1.6.33)$$

I termini aventi ω e ω_0 di segno concorde tendono a zero e possono essere trascurati:

$$q(t) = -\frac{f_0}{4\omega_0} e^{-t/2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{t'/2Q+i[(\omega-\omega_0)t'+\omega_0 t]} + e^{t'/2Q-i[(\omega-\omega_0)t'+\omega_0 t]} \right] dt' . \quad (1.6.34)$$

Poiché sto sommando un numero e il suo complesso coniugato (c.c), prendo due volte la parte reale:

$$q(t) \simeq -\frac{f_0}{4\omega_0} e^{-t/2Q} \left[\frac{e^{i\omega_0 t} \cdot e^{i(\omega-\omega_0-i/2Q)t} \Big|_0^t}{i(\omega-\omega_0-i/2Q)} + \text{c.c.} \right] \\ = -\frac{f_0}{4\omega_0} e^{-t/2Q} \left[\frac{e^{i\omega_0 t} (e^{i(\omega-\omega_0-i/2Q)t} - 1)}{i(\omega-\omega_0-i/2Q)} + \text{c.c.} \right] . \quad (1.6.35)$$

Per $t \gg Q$, si ha $e^{-t/Q} \ll 1$, quindi il termine può essere trascurato per tempi lunghi:

$$q(t) = -\frac{f_0}{4\omega_0} \left[\frac{e^{i\omega_0 t} e^{i(\omega-\omega_0)t}}{i(\omega-\omega_0-i/2Q)} + \text{c.c.} \right] \\ = -\frac{f_0}{4\omega_0} \frac{e^{i\omega t}}{i(\omega-\omega_0-i/2Q)} + \text{c.c.} . \quad (1.6.36)$$

Questa rappresenta l'espressione della soluzione generale dell'equazione del moto. L'energia dell'oscillatore infine sarà data da:

$$E(\omega) = |q(t)|^2 = \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + 1/4Q^2} . \quad (1.6.37)$$

Osserviamo che l'energia si distribuisce, in funzione della frequenza, secondo una Lorentziana.

1.7 Piccole oscillazioni

1.7.1 Richiami di algebra lineare

Sia V uno spazio vettoriale sul corpo complesso e u, v, w i suoi elementi, denotati $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle$. Un *prodotto scalare* su V è un'applicazione $(,) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ denotata con $(u, v) = \langle u | \cdot | v \rangle = \langle u | v \rangle$ che gode delle seguenti proprietà:

1. $\langle u | \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u | v \rangle + \mu \langle u | w \rangle$ (linearità nella seconda variabile);
2. $\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^*$ (sesquilinearità nella prima variabile);
3. $\langle u | v \rangle = 0 \ \forall v \iff u = 0$ (non degenerazione del prodotto scalare).

Un prodotto scalare non degenerare induce una *norma* $\|u\|^2 = \langle u | u \rangle$ con le seguenti proprietà:

1. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$;
2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (disuguaglianza triangolare);
3. $\|u\| = 0 \iff u \equiv 0$.

Trasformazioni lineari Hermitiane

Sia T un operatore lineare e $u, v \in V$. Consideriamo il seguente prodotto scalare:

$$(u, Tv) = u_i^* T_{ij} v_j = T_{ij} u_i^* v_j = ({}^t T_{ij}^* u_i)^* v_j = (T^\dagger u, v) \quad (1.7.1)$$

dove:

$$(T^\dagger)_{ij} \equiv ({}^t T)_{ij}^* \quad (1.7.2)$$

è l'operatore *aggiunto* di T . In particolare, un operatore T si dice *hermitiano* se è autoaggiunto, cioè $T = T^\dagger$.

Introducendo la *notazione di Dirac*:

$$\langle Tu | v \rangle = \langle u | Tv \rangle \equiv \langle u | T | v \rangle . \quad (1.7.3)$$

Un operatore ammette un *sistema completo di autovalori* quando:

$$T|k\rangle = \lambda_k |k\rangle, \quad k = 1, \dots, n . \quad (1.7.4)$$

Un'osservazione significativa è che *gli autovalori di un operatore Hermitiano sono tutti reali*. Infatti:

$$\langle k | T | k \rangle = \begin{cases} \lambda_k \langle k | k \rangle & \text{se } T \text{ agisce a destra} \\ \lambda_k^* \langle k | k \rangle & \text{se } T \text{ agisce a sinistra} \end{cases} . \quad (1.7.5)$$

Allora $(\lambda_k - \lambda_k^*) \langle k | k \rangle = 0$. Ma $\langle k | k \rangle = \|k\|^2$ è sicuramente diverso da zero, dunque risulta $\lambda_k = \lambda_k^*$ e quindi $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Se un operatore T è Hermitiano, allora:

- T ha tutti gli autovalori reali;
- autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali.

Abbiamo dunque:

$$|k\rangle\langle k|l\rangle = 0, \quad |k\rangle\langle k|k\rangle = |k\rangle, \quad (1.7.6)$$

$$|k\rangle\langle k| \left(\alpha|k\rangle + \sum_{l \neq k} \beta_l|l\rangle \right) = \alpha|k\rangle. \quad (1.7.7)$$

Si definisce di conseguenza un *operatore di proiezione* o *proiettore*:

$$P_k \equiv |k\rangle\langle k|. \quad (1.7.8)$$

Valgono i seguenti fatti:

- $P_k^2 = P_k$;
- i proiettori sono operatori Hermitiani;
- $\sum_k |k\rangle\langle k| = \mathbb{I}_{n \times n}$.

Se un operatore T è Hermitiano, quindi ammette un set completo di autovettori, allora la sua *decomposizione spettrale* sarà:

$$T = \sum_k |k\rangle\lambda_k\langle k|. \quad (1.7.9)$$

Si verifica che l'operatore inverso T^{-1} ammette un set completo di autovettori, e la sua decomposizione spettrale sarà:

$$T^{-1} = \sum_l |l\rangle\frac{1}{\lambda_l}\langle l|. \quad (1.7.10)$$

Infatti:

$$TT^{-1} = \sum_{k,l} |k\rangle\lambda_k\langle k|l\rangle\frac{1}{\lambda_l}\langle l| = \sum_{k,l} |k\rangle\lambda_k\delta_{kl}\frac{1}{\lambda_l}\langle l| = \sum_k |k\rangle\langle k| = \mathbb{I}_{n \times n}. \quad (1.7.11)$$

A partire dalla decomposizione spettrale di un operatore T , è possibile definire una *funzione di operatori*:

$$f(T) = \sum_k |k\rangle f(\lambda_k)\langle k|. \quad (1.7.12)$$

Se $f(\lambda_k) \in \mathbb{R}$ per ogni k , allora f è Hermitiano.

Consideriamo adesso un sistema descritto da N coordinate generalizzate ξ_1, \dots, ξ_N , con cui è possibile esprimere le coordinate cartesiane \mathbf{r}_a tramite espressioni indipendenti dal tempo, i.e. $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(\xi)$, dove $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$. La Lagrangiana del sistema sarà data da:

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a - U(\mathbf{r}_a) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} A_{ij}(\xi) \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - V(\xi), \quad (1.7.13)$$

dove:

$$A_{ij}(\xi) = \sum_a m_a \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial \xi_j} . \quad (1.7.14)$$

Sia $\bar{\xi}$ un punto di equilibrio stabile del sistema, cioè tale che:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi_i} V(\xi) \right|_{\xi=\bar{\xi}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.7.15)$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} V(\xi) \right|_{\xi=\bar{\xi}_i} \equiv V_{ij} = V_{ji} > 0 \quad \forall i, j, \quad (1.7.16)$$

allora, sviluppando la Lagrangiana intorno al punto $\xi = \bar{\xi}$ e introducendo il nuovo set di coordinate generalizzate $q_i \equiv \xi_i - \bar{\xi}_i$ otteniamo:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} V_{ij} q_i q_j . \quad (1.7.17)$$

Le equazioni del moto generate da questa Lagrangiana saranno:

$$T_{ij} \ddot{q}_j + V_{ij} q_j = 0, \quad (1.7.18)$$

che costituiscono un sistema differenziale lineare omogeneo nella variabile $q(t) \equiv \{q_1(t), \dots, q_N(t)\}$. Cercando la soluzione nella forma $q_i(t) = q_i(0)e^{i\omega t}$ troviamo che, posto $q(0) = \{q_1(0), \dots, q_N(0)\}$:

$$(-\omega^2 T + V)q(0) = 0. \quad (1.7.19)$$

In questa equazione le incognite sono i valori che ω^2 deve assumere affinché l'unica soluzione non sia quella identicamente nulla e le componenti dei vettori $q(0)$. Di quest'ultimi, essendo il sistema lineare ed omogeneo, si potranno trovare unicamente i rapporti fra le componenti di ciascun vettore $q_a(0)/q_b(0)$ per $a, b = 1, \dots, N$. Il problema è del tutto analogo a quello della diagonalizzazione di una matrice $(-\lambda \mathbb{I}_N + A)a = 0$, in cui λ sono gli autovalori e a i corrispondenti autovettori della matrice A . Il problema (1.7.19) non è perfettamente identico alla diagonalizzazione di una matrice, ed in più vi è il problema di garantire la positività degli ω^2 . Se trovassimo un valore $\omega^2 < 0$, il moto corrispondente sarebbe del tipo $q(t) = ce^{|\omega|t} + de^{-|\omega|t}$ che non si svolge in un intorno del punto di equilibrio stabile $\bar{\xi}$ precedentemente determinato. Tuttavia, il problema (1.7.19) può essere ricondotto a quello della diagonalizzazione di una matrice. Osserviamo innanzitutto che T è una matrice Hermitiana (infatti è reale e simmetrica) e definita positiva:

$$\langle \dot{q} | \mathcal{T} | \dot{q} \rangle = \sum_{i,j} \dot{q}_i \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_j > 0 \quad \forall \dot{q}. \quad (1.7.20)$$

A questo punto è sufficiente riscrivere l'equazione (1.7.19) nella forma:

$$\frac{1}{\sqrt{T}}(-\omega^2 T + V) \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{T} q(0) = \left(-\omega^2 \mathbb{I}_N + \frac{1}{\sqrt{T}} V \frac{1}{\sqrt{T}} \right) \sqrt{T} q(0), \quad (1.7.21)$$

che ha esattamente la forma del problema di diagonalizzazione, con $A = T^{-1/2} V T^{1/2}$. Notiamo che:

- A è simmetrica: ${}^t A = {}^t T^{-1/2} {}^t V {}^t T^{-1/2} = T^{-1/2} V T^{-1/2} = A$, in quanto sia T (e le sue funzioni) che V sono simmetriche;

- A è definita positiva: $\langle u|A|u\rangle = \langle u|T^{-1/2}VT^{-1/2}|u\rangle = \langle v|V|v\rangle > 0$, con $|v\rangle = T^{-1/2}|u\rangle$.

La matrice A avrà autovalori positivi e autovettori "a sufficienza" che chiameremo Q_i (vettori colonna con N componenti reali corrispondenti agli autovalori ω_i^2) normalizzabili a 1: $\langle Q_i|Q_j\rangle = \delta_{ij}$. La più generale soluzione reale corrispondente all'autovalore ω_i^2 di A è quindi:

$$\alpha_i Q_i \cos(\omega_i t) + \beta_i Q_i \sin(\omega_i t) , \quad (1.7.22)$$

e la soluzione generale dell'equazione delle piccole oscillazioni è:

$$q(t) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i Q_i \cos(\omega_i t) + \beta_i Q_i \sin(\omega_i t)) , \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} . \quad (1.7.23)$$

Resta da calcolare l'unica soluzione che evolve nel tempo con dati iniziali $q(0), \dot{q}(0)$. Ponendo $t = 0$ nell'equazione precedente si ottiene:

$$q(0) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i = \langle Q_i|q(0)\rangle . \quad (1.7.24)$$

Mentre, derivando la soluzione e imponendo $t = 0$ troviamo:

$$\dot{q}(0) = \sum_{i=1}^N \omega_i \beta_i Q_i \quad \Longrightarrow \quad \beta_i = \omega_i^{-1} \langle Q_i|\dot{q}(0)\rangle . \quad (1.7.25)$$

1.8 Problema dei due corpi

Consideriamo il moto di due corpi di massa m_1, m_2 descritto in coordinate Cartesiane dalla Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V_1(\mathbf{r}_1) - V_2(\mathbf{r}_2) - V_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) , \quad (1.8.1)$$

dove V_{12} è il potenziale di interazione. Se questo è nullo, i sistemi sono disaccoppiati e possono essere trattati singolarmente. Supponiamo che sul sistema non agiscano campi esterni, i.e. $V_1 = V_2 \equiv 0$. Notiamo che il potenziale di interazione deve essere invariante per traslazione, quindi non può dipendere separatamente da \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Allora $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, dove $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è la *distanza relativa* fra i due corpi. Allora la Lagrangiana sarà:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) . \quad (1.8.2)$$

Se applichiamo al sistema una variazione continua, allora il moto dei due corpi sarà descritto dalle medesime equazioni, i.e. la Lagrangiana deve rimanere invariata. Appliciamo al sistema la trasformazione continua:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}_i + \epsilon \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{r}}_i \mapsto \dot{\mathbf{r}}_i \end{cases} . \quad (1.8.3)$$

La variazione della Lagrangiana sarà data da:

$$\delta L = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{1k}} \delta \dot{r}_{1k} + \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{2k}} \delta \dot{r}_{2k} - \frac{\partial V}{\partial r_{1k}} \delta r_{1k} - \frac{\partial V}{\partial r_{2k}} \delta r_{2k} = 0 .$$

Poiché nella trasformazione in questione le velocità non cambiano, $\delta \dot{r}_{1k} = \delta \dot{r}_{2k} = 0$. Dunque:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\frac{\partial V}{\partial r_{1k}} \delta r_{1k} - \frac{\partial V}{\partial r_{2k}} \delta r_{2k} = (\text{Eulero-Lagrange}) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{1k}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{2k}} \right) \\ &= \frac{d}{dt} (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2) = 0 . \end{aligned}$$

Da cui deduciamo che la quantità:

$$\mathbf{P} \equiv m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 , \quad (1.8.4)$$

detta *impulso totale*, è un integrale primo del moto. A questo punto, definiamo il nuovo set di coordinate generalizzate:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} . \quad (1.8.5)$$

Invertendo, ricaviamo le espressioni di $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ in funzione delle nuove coordinate \mathbf{r}, \mathbf{R} , ottenendo:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \end{cases} , \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} \end{cases} ,$$

dove si è posto $M = m_1 + m_2$. Allora la Lagrangiana, nelle nuove coordinate, diventa:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}} \right)^2 - V(\mathbf{r}) \\
&= \frac{1}{2}m_1 \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_1 m_2^2}{2M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_2 m_1^2}{2M^2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) .
\end{aligned} \tag{1.8.6}$$

Poniamo $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, detta *massa ridotta*, ottenendo:

$$L = \frac{1}{2}M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) . \tag{1.8.7}$$

Osserviamo che $L = L_{cdm}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) + L_{rel}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, dunque nel nuovo set di coordinate, riusciamo a scomporre il sistema in due sistemi disaccoppiati.

Consideriamo adesso la Lagrangiana del sistema del centro di massa (i.e. $\dot{\mathbf{R}} \equiv 0$):

$$L_{rel} = \frac{1}{2}\mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) . \tag{1.8.8}$$

Notiamo che se V è funzione del modulo di \mathbf{r} , allora non esistono direzioni privilegiate per il moto. Appliciamo adesso una rotazione infinitesima:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta \mathbf{r} \\ \delta \mathbf{r} = -\mathbf{n} \times \mathbf{r} \cdot \epsilon = \epsilon \mathbf{r} \times \mathbf{n} \\ \delta \dot{\mathbf{r}} = \epsilon \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{n} \end{cases} , \tag{1.8.9}$$

e scriviamo la variazione della Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
\delta L_{rel} &= \frac{\partial L_{rel}}{\partial r_{\alpha,k}} \delta r_{\alpha,k} + \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}} \delta \dot{r}_{\alpha,k} \\
&= \frac{\partial L_{rel}}{\partial r_{\alpha,k}} \delta r_{\alpha,k} + \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}} \frac{d}{dt} \delta r_{\alpha,k} \\
&= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}} \right) \delta r_{\alpha,k} + \frac{\partial L_{rel}}{\partial r_{\alpha,k}} \left(\frac{d}{dt} \delta r_{\alpha,k} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}} \delta r_{\alpha,k} \right) .
\end{aligned} \tag{1.8.10}$$

Allora se $\delta L_{rel} = 0$, i.e. la Lagrangiana è invariante per rotazioni, la quantità:

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}} \delta r_{\alpha,k} \tag{1.8.11}$$

è un integrale primo del moto. Si ha in particolare:

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}} \delta r_{\alpha,k} = \mu \dot{r}_{\alpha,k} \epsilon (\mathbf{r}^a \times \mathbf{n})_k = \text{costante} . \tag{1.8.12}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ϵ , si conclude che:

$$\mu \dot{\mathbf{r}}_{\alpha,k} (\mathbf{r}^a \times \mathbf{n})_k = \text{costante} . \quad (1.8.13)$$

Allora:

$$\mu \dot{\mathbf{r}}_{\alpha,k} (\mathbf{r}^a \times \mathbf{n})_k = \mu \dot{\mathbf{r}}_{\alpha,k} \epsilon_{kij} r_{\alpha,i} n_j = n_j \epsilon_{jki} (\mu \dot{\mathbf{r}}_{\alpha,k}) r_{\alpha,i} = -n_j (\epsilon_{jik} r_{\alpha,i} \mu \dot{\mathbf{r}}_{\alpha,k}) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} , \quad (1.8.14)$$

dove:

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} \quad (1.8.15)$$

è il momento angolare totale del sistema.

Data dunque la Lagrangiana:

$$L_{rel} = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(|\mathbf{r}|) , \quad (1.8.16)$$

e la variazione infinitesima $\delta \mathbf{r} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} \delta \varphi$, sappiamo che sotto queste condizioni $\delta \mathcal{L}_{rel} = \delta \phi n_a (\epsilon_{abc} r_b \mu \dot{\mathbf{r}}_c) = \delta \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = 0$. Calcoliamo adesso:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r}(t) = r_a L_a = \epsilon_{abc} r_a r_b \mu \dot{\mathbf{r}}_c = 0 \quad \forall t . \quad (1.8.17)$$

Deduciamo dunque che, fissato \mathbf{L} , l'orbita in ogni istante è perpendicolare a \mathbf{L} , dunque il moto è piano. Calcoliamo adesso l'area spazzata dal raggio vettore tra gli istanti t e $t + \delta t$:

$$\delta A = r \cdot r \frac{d\varphi}{dt} \delta t = r^2 \dot{\varphi} \delta t . \quad (1.8.18)$$

Definiamo dunque la *velocità areolare*:

$$\frac{dA}{dt} = r^2 \dot{\varphi} . \quad (1.8.19)$$

Poiché, in coordinate sferiche, $|\mathbf{L}| = \mu r^2 \dot{\varphi}$, possiamo esprimere la velocità areolare in termini del momento angolare come:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{\mu} . \quad (1.8.20)$$

Scriviamo adesso la Lagrangiana L_{rel} in coordinate sferiche:

$$L_{rel} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r) . \quad (1.8.21)$$

Fissiamo $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = 0$:

$$L_{rel} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) . \quad (1.8.22)$$

Se sostituiamo adesso $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$, otteniamo:

$$L_{rel} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r) . \quad (1.8.23)$$

Tuttavia questa espressione risulta sostanzialmente errata in quanto le variazioni che abbiamo effettuato non sono indipendenti. Passiamo dunque a considerare l'energia:

$$E = \frac{1}{2}(\mu\dot{r}^2 + \mu r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) . \quad (1.8.24)$$

Possiamo adesso sostituire $\dot{\varphi} = L^2/(\mu r^2)$, ottenendo:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \equiv \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) , \quad (1.8.25)$$

dove:

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) , \quad (1.8.26)$$

è detto *potenziale efficace*.

1.8.1 Potenziale gravitazionale

Fissiamo adesso $V(r) = -k/r$, $k > 0$. Questa è la tipica espressione di un potenziale di tipo gravitazionale. Si ha dunque:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \quad \Longrightarrow \quad d\varphi = \frac{L}{\mu r^2} dt , \quad (1.8.27)$$

ossia:

$$\frac{\mu r^2}{L} d\varphi = dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\varphi} = \frac{d}{dt} . \quad (1.8.28)$$

Poniamo $u = 1/r$, ottenendo:

$$\frac{1}{u^2} \frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu} \frac{d}{d\varphi} . \quad (1.8.29)$$

Allora risulta:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\varphi} . \quad (1.8.30)$$

Scriviamo adesso l'energia in funzione di u :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2}\mu \frac{L^2}{\mu^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu} u^2 - ku \\ &= \frac{L^2}{2\mu} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - ku . \end{aligned} \quad (1.8.31)$$

Imponendo $dE/d\varphi = 0$, otteniamo l'equazione:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu k}{L^2} , \quad (1.8.32)$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico soggetto ad una forza esterna costante. Le soluzioni saranno date da:

$$u(\varphi) = A \cos(\varphi + \varphi_0) + \frac{\mu k}{L^2} . \quad (1.8.33)$$

Possiamo fissare $\varphi_0 = 0$ e sostituire $u = 1/r$:

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{1}{p} + A \cos \varphi , \quad (1.8.34)$$

dove $p = L^2/(\mu k)$. Osserviamo che si ha $r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$, quindi l'orbita è chiusa e il moto è periodico. Riscriviamo la (1.8.34) nella forma:

$$\frac{p}{r} = pA \cos \varphi + 1 . \quad (1.8.35)$$

Poniamo $pA = e$:

$$p = r + re \cos \varphi . \quad (1.8.36)$$

In coordinate Cartesiane si ha:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{x^2 + y^2} + ex \\ p - ex &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ p^2 - 2pex + e^2x^2 &= x^2 + y^2 . \end{aligned} \quad (1.8.37)$$

Ovvero:

$$p^2 = (1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 = (1 - e^2) \left[x^2 + 2\frac{pe}{1 - e^2}x + \left(\frac{ep}{1 - e^2} \right)^2 \right] - \frac{e^2p^2}{1 - e^2} + y^2 , \quad (1.8.38)$$

dove abbiamo aggiunto e sottratto la quantità $e^2p^2/(1 - e^2)$ per completare il quadrato:

$$\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \right) p^2 = (1 - e^2) \left(x + \frac{ep}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 . \quad (1.8.39)$$

Posto $x_C = -ep/(1 - e^2)$ otteniamo:

$$(1 - e^2)(x - x_C)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} , \quad (1.8.40)$$

cioè:

$$\frac{(x - x_C)^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - e^2}} = 1 , \quad (1.8.41)$$

che, a seconda del valore di e , detto *eccentricità*, può rappresentare le seguenti orbite:

$$\begin{cases} e < 1 \implies \text{l'orbita è un'ellisse} \\ e = 0 \implies \text{l'orbita è una circonferenza} \\ e > 1 \implies \text{l'orbita è un'iperbole} \end{cases} . \quad (1.8.42)$$

Adesso costruiamo un'altra costante del moto nel caso del potenziale gravitazionale. Sappiamo che:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} = \text{costante} . \quad (1.8.43)$$

Definiamo il *vettore di Lenz*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + km \frac{\mathbf{r}}{r} . \quad (1.8.44)$$

Osserviamo innanzitutto che il vettore di Lenz è perpendicolare al momento angolare:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \frac{km}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0 , \quad (1.8.45)$$

in quanto $\mathbf{p} \times \mathbf{L} \perp \mathbf{L}$ per definizione di prodotto vettoriale e $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}$ per lo stesso motivo, in quanto $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Calcoliamo adesso il modulo quadro di \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} A^2 &= p^2 L^2 + k^2 m^2 + 2 \frac{mk}{r} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \\ &= 2m \left(E - \frac{k}{r} \right) L^2 + k^2 m^2 + \frac{2km}{r} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= 2mEL^2 - \frac{2mkL^2}{r} + k^2 m^2 + \frac{2kmL^2}{r} = 2mEL^2 + k^2 m^2 . \end{aligned} \quad (1.8.46)$$

Consideriamo infine la quantità:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = \mathbf{F} \times \mathbf{L} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{L} \\ &= -\frac{km}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{km}{r^3} (r^2 \dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r}) \\ &= -km \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \mathbf{r} \frac{\dot{r}}{r^2} \right) = -km \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) . \end{aligned} \quad (1.8.47)$$

Allora:

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) + km \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} \times \mathbf{L} + km \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \equiv \frac{d\mathbf{A}}{dt} , \quad (1.8.48)$$

e questo dimostra che il vettore di Lenz è una costante del moto.

1.9 Trasformazioni

Consideriamo un generico sistema descritto in un sistema di coordinate generalizzate $q = \{q_1, \dots, q_N\}$ dalla Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$. Le equazioni del moto si otterranno dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 . \quad (1.9.1)$$

In un secondo set di coordinate generalizzate $Q = \{Q_1, \dots, Q_N\}$, legato al primo dalla relazione $q = q(Q, t)$, si ha:

$$L'(Q, \dot{Q}, t) \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L'}{\partial Q} = 0 . \quad (1.9.2)$$

Inoltre, per il principio di invarianza in valore:

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) . \quad (1.9.3)$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} . \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

Ricordando che $\partial \dot{q}_k / \partial \dot{Q}_i = \partial q_k / \partial Q_i$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - \frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{dq_k}{dt} \right) . \quad (1.9.5)$$

Il secondo termine è identicamente nullo per la commutatività delle derivate. Allora otteniamo la relazione tra le equazioni di Eulero-Lagrange generate da L e quelle generate da L' :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) . \quad (1.9.6)$$

$\partial q_k / \partial Q_i$ rappresenta l'elemento di posto (k, i) della matrice Jacobiana della trasformazione. Poiché la trasformazione può essere invertita, la Jacobiana risulterà invertibile.

1.10 Formalismo Hamiltoniano

Si definisce *Hamiltoniana* la funzione:

$$H(q, \dot{q}, p, t) \equiv p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) . \quad (1.10.1)$$

Vogliamo adesso che H non dipenda dalle velocità generalizzate \dot{q} : differenziando, si ha:

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}dp + p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\dot{q} + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt . \end{aligned} \quad (1.10.2)$$

Se imponiamo $p = \partial L / \partial \dot{q}$, H non dipende da \dot{q} . Si ha dunque:

$$dH = \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt , \quad (1.10.3)$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt . \quad (1.10.4)$$

Dal confronto si ottengono pertanto le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} , \quad (1.10.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\frac{dp}{dt} = -\dot{p} , \quad (1.10.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} . \quad (1.10.7)$$

Da queste ricaviamo le *equazioni di Hamilton*:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} . \quad (1.10.8)$$

Il vantaggio del formalismo Hamiltoniano consiste nel dover risolvere, per un sistema con n gradi di libertà, $2n$ equazioni differenziali del prim'ordine anziché n del secondo ordine del formalismo Lagrangiano.

1.10.1 La funzione di Routh

In certi casi è conveniente, nel cambio di variabili, sostituire solo alcune delle velocità generalizzate con i rispettivi momenti, invece che tutte. Supponiamo di avere solo due coordinate q e ξ e trasformiamo le variabili $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$ in $q, \xi, p, \dot{\xi}$, dove p è il momento generalizzato corrispondente a q . Il differenziale della Lagrangiana è:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} \\ &= \dot{p}dq + p d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} . \end{aligned} \quad (1.10.9)$$

Quindi:

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p}dq - \dot{q}dp + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} . \quad (1.10.10)$$

Definiamo la *Routhiana* come:

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) \equiv p\dot{q} - L , \quad (1.10.11)$$

dove la velocità \dot{q} è espressa in termini di p tramite l'equazione $p = \partial L / \partial \dot{q}$. Il differenziale di R è:

$$dR = -\dot{p}dq + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} . \quad (1.10.12)$$

Otteniamo pertanto:

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q} , \quad (1.10.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} . \quad (1.10.14)$$

Se sostituiamo queste equazioni nella Lagrangiana per la coordinate ξ , abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi} . \quad (1.10.15)$$

Pertanto la Routhiana è un'Hamiltoniana rispetto alla coordinata q e una Lagrangiana rispetto alla coordinata ξ . L'energia del sistema è:

$$E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L = p\dot{q} + \dot{\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L . \quad (1.10.16)$$

In termini della Routhiana:

$$E = R - \dot{\xi} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} . \quad (1.10.17)$$

L'uso della Routhiana è conveniente in particolare quando alcune delle coordinate sono cicliche.

1.11 Trasformazioni canoniche infinitesime

Consideriamo una generica Hamiltoniana $H(q, p, t)$ e la trasformazione:

$$\begin{cases} q_i \mapsto Q_i \equiv q_i + \epsilon f_i(q, p, t) \\ p_i \mapsto P_i \equiv p_i + \epsilon g_i(q, p, t) \end{cases} . \quad (1.11.1)$$

Sia infine $K(Q, P, t)$ l'Hamiltoniana scritta in termini delle nuove coordinate. Vogliamo ricavare delle condizioni sulle funzioni $h(q, p, t)$ tali che:

$$\begin{aligned} H(q, p, t) + \epsilon h(q, p, t) &= K(Q, P, t) , \\ q &\equiv q(Q, P, t) , \\ p &\equiv p(Q, P, t) . \end{aligned} \quad (1.11.2)$$

Si ha innanzitutto che:

$$h(q, p, t) = \frac{1}{\epsilon} [K(Q, P, t) - H(q, p, t)] . \quad (1.11.3)$$

Deriviamo rispetto a q_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial q_i} &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial K}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial K}{\partial p_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left(-\dot{P}_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \dot{Q}_k \frac{\partial P_k}{\partial q_i} + \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left[- \left(\dot{p}_k + \epsilon \frac{dg_k}{dt} \right) \left(\delta_{ki} + \epsilon \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right) + \left(\dot{q}_k + \epsilon \frac{df_k}{dt} \right) \epsilon \frac{\partial g_k}{\partial q_i} + \dot{p}_i \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left(-\dot{p}_i - \epsilon \dot{p}_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \epsilon \frac{dg_i}{dt} - \epsilon^2 \frac{dg_k}{dt} \frac{\partial f_k}{\partial q_i} + \epsilon \dot{q}_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} + \epsilon^2 \frac{df_k}{dt} \frac{\partial g_k}{\partial q_i} + \dot{p}_i \right) \end{aligned} \quad (1.11.4)$$

Semplificando e trascurando i termini in ϵ^2 , rimaniamo con:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial q_i} &\simeq -\dot{p}_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{dg_i}{dt} + \dot{q}_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} \\ &= -\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial g_i}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial g_i}{\partial p_k} \dot{p}_k - \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \dot{p}_k + \frac{\partial g_k}{\partial q_i} \dot{q}_k . \end{aligned} \quad (1.11.5)$$

Dunque si ha

$$\frac{\partial h}{\partial q_i} \simeq -\frac{\partial g_i}{\partial t} + \dot{q}_k \left(\frac{\partial g_k}{\partial q_i} - \frac{\partial g_i}{\partial q_k} \right) - \dot{p}_k \left(\frac{\partial g_i}{\partial p_k} + \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right) , \quad (1.11.6)$$

e similmente

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} \simeq \frac{\partial f_i}{\partial t} + \dot{q}_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \frac{\partial g_k}{\partial q_i} \right) + \dot{p}_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial p_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right) . \quad (1.11.7)$$

Per garantire la compatibilità delle soluzioni, imponiamo le condizioni:

$$\begin{cases} \partial g_k / \partial q_i = \partial g_i / \partial q_k \\ \partial f_k / \partial p_i = \partial f_i / \partial p_k \\ \partial g_i / \partial p_k + \partial f_k / \partial q_i = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} g_i = \partial g / \partial q_i \\ f_i = \partial f / \partial p_i \end{cases} , \quad (1.11.8)$$

per ogni i, k . Si ha inoltre:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial q_i} + \frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial p_k} = 0 , \quad (1.11.9)$$

da cui segue che deve essere necessariamente $g = -f$. Si ottengono dunque le condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \frac{\partial h}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{cases} \implies h = \frac{\partial f}{\partial t} . \quad (1.11.10)$$

Allora le *trasformazioni canoniche infinitesime* saranno della forma:

$$H(q, p, t) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial t}(q, p, t) = K(Q, P, t) . \quad (1.11.11)$$

Vogliamo adesso sapere quale trasformazione canonica si ottiene scegliendo $f(q, p, t) \equiv H(q, p, t)$. In questo caso, si ottiene:

$$\begin{cases} q_k \mapsto q_k + \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_k} = q_k(t) + \epsilon \dot{q}_k \simeq q_k(t + \epsilon) \\ p_k \mapsto p_k - \epsilon \frac{\partial H}{\partial q_k} = p_k(t) + \epsilon \dot{p}_k \simeq p_k(t + \epsilon) \end{cases} . \quad (1.11.12)$$

Allora

$$K(Q, P, t) = \begin{cases} H(q, p, t) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial t} \\ K \left(q + \epsilon \frac{\partial f}{\partial p}, p - \epsilon \frac{\partial f}{\partial q}, t \right) = H(q, p, t) + \epsilon \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \end{cases} . \quad (1.11.13)$$

Dal confronto otteniamo che:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \frac{\partial f}{\partial p_k} - \dot{q}_k \frac{\partial f}{\partial q_k} , \quad (1.11.14)$$

da cui:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \equiv \frac{df}{dt} = 0 . \quad (1.11.15)$$

In particolare, si osserva che tutte le funzioni generatrici di trasformazioni canoniche sono costanti del moto.

1.12 Parentesi di Poisson

Sia $f(p, q, t)$ una funzione delle coordinate, momenti e tempo. La sua derivata totale rispetto al tempo è data da:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) . \quad (1.12.1)$$

Sostituendo le equazioni di Hamilton per \dot{q}_k, \dot{p}_k otteniamo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} , \quad (1.12.2)$$

dove:

$$\{H, f\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \quad (1.12.3)$$

è detta *parentesi di Poisson* delle quantità H e f . Osserviamo che una quantità f è un integrale primo del moto se:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 . \quad (1.12.4)$$

In particolare, se l'integrale primo non dipende esplicitamente dal tempo, la condizione diventa:

$$\{H, f\} = 0 . \quad (1.12.5)$$

Per qualunque coppia di funzioni f, g la parentesi di Poisson è definita in modo simile:

$$\{f, g\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) . \quad (1.12.6)$$

Le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
- se c è una costante $\{f, c\} = 0$;
- sono lineari in entrambi gli argomenti;
- $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}$.

Prendendo la derivata parziale della parentesi di Poisson rispetto al tempo, troviamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} . \quad (1.12.7)$$

Se una delle funzioni f, g è uno dei momenti o delle coordinate, la parentesi di Poisson si riduce ad una derivata parziale:

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} , \quad (1.12.8)$$

$$\{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k} . \quad (1.12.9)$$

Scegliendo nelle formule precedenti $f = q_i$ o $f = p_i$, otteniamo le *parentesi di Poisson* canoniche:

$$\{q_i, q_k\} = \{p_i, p_k\} = 0 , \quad (1.12.10)$$

$$\{p_i, q_k\} = \delta_{ik} . \quad (1.12.11)$$

Inoltre, vale la seguente relazione, chiamata *identità di Jacobi*:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 . \quad (1.12.12)$$

Un'altra importante proprietà delle parentesi di Poisson è il *teorema di Poisson*: se f, g sono due integrali del moto, allora la loro parentesi di Poisson è ancora un integrale del moto. Se f, g non dipendono dal tempo, allora fissando $h = H$ nell'identità di Jacobi si ottiene:

$$\{H, \{f, g\}\} + \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0 . \quad (1.12.13)$$

Quindi, se $\{H, g\} = \{H, f\} = 0$ per ipotesi, allora $\{H, \{f, g\}\} = 0$ e quindi la tesi è dimostrata. Se invece f, g dipendono esplicitamente dal tempo, allora partiamo da:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\} \right\} \\ &= \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (1.12.14)$$

Capitolo 2

Relatività Speciale

2.1 Introduzione

2.1.1 Pippone sul perché la relatività è saltata fuori

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodu posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

2.1.2 Spaziotempo di Minkowski

Un punto dello spaziotempo di Minkowski è detto *evento*, e le traiettorie sono dette *linee d'universo*. La bisettrice indica come si muove la luce, tutti gli altri eventi possono propagarsi nel doppio cono individuato dalle bisettrici. V_+ è denominato *cono futuro* e V_- invece *cono passato*. La quantità:

$$\Delta\tau = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} , \quad (2.1.1)$$

è detta *tempo proprio*.

2.2 Trasformazioni di Lorentz

2.2.1 In 1+1 dimensioni

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, K, K' , con K' che si muove rispetto a K con velocità β . All'istante $t = 0$, le origini dei due sistemi coincidono. Il versore dell'asse ct' nel sistema K è $\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1)$; allora le coordinate in K dei punti A ed E saranno:

$$A \equiv \frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1) , \quad (2.2.1)$$

$$E \equiv -\frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(\beta, 1) . \quad (2.2.2)$$

Per costruzione, si ha:

$$A = E + r(1, 1) + s(-1, 1) ,$$

da cui si ottiene:

$$r = \frac{1+\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\tau , \quad s = \frac{1-\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\tau , \quad (2.2.3)$$

e di conseguenza le coordinate di R nel sistema di riferimento K saranno:

$$R = \frac{\tau}{\sqrt{1+\beta^2}}(1, \beta) . \quad (2.2.4)$$

R pertanto giace su una retta simmetrica a ct' rispetto alla bisettrice, che rappresenta l'asse x' nel sistema K . Passando da K' a K avremo dunque le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} &\mapsto a(\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} t , \\ R = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} &\mapsto b(\beta) \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} x . \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Se tali trasformazioni sono lineari, allora conoscendo una base dello spazio è possibile sapere come viene trasformato ogni punto. Intanto, osserviamo che mandano rette in rette. La linearità discende direttamente dall'omogeneità dello spazio. In virtù di ciò, possiamo riscrivere le trasformazioni come:

$$\begin{cases} t' = a(\beta)t + b(\beta)\beta x \\ x' = a(\beta)\beta t + b(\beta)x \end{cases} . \quad (2.2.6)$$

Restano quindi da determinare $a(\beta), b(\beta)$. Osserviamo che se K' si muove rispetto a K con velocità β , allora K si muoverà rispetto a K' con velocità $-\beta$. Allora le equazioni (2.2.6) diventano:

$$\begin{cases} t = a(-\beta)t' - b(\beta)\beta x' \\ x = a(-\beta)\beta t' + b(-\beta)x' \end{cases} . \quad (2.2.7)$$

Dato che mandando β in $-\beta$ le trasformazioni devono coincidere, si conclude che a, b sono funzioni pari di β , cioè:

$$\begin{cases} t' = a(|\beta|)t + b(|\beta|)\beta x \\ x' = a(|\beta|)\beta t + b(|\beta|)x \end{cases} , \quad \begin{cases} t = a(|\beta|)t' - b(|\beta|)\beta x' \\ x = -a(|\beta|)\beta t' + b(|\beta|)x' \end{cases} . \quad (2.2.8)$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta b \\ \beta a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta b \\ \beta a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\beta b \\ -\beta a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} . \quad (2.2.9)$$

Allora dovrà essere:

$$\begin{pmatrix} a & \beta b \\ \beta a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\beta b \\ -\beta a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - \beta^2 ab & -\beta ab + \beta b^2 \\ \beta a^2 - \beta ab & -\beta^2 ab + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.2.10)$$

Da ciò si ricava:

$$\begin{cases} \beta b(a - b) = 0 & \implies & a = b \\ a^2(1 - \beta^2) = 1 & \implies & a^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \end{cases} . \quad (2.2.11)$$

Dunque, posto $\beta = v/c$, si ha:

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma(v) . \quad (2.2.12)$$

In conclusione, le equazioni:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta t) \\ t' = \gamma(t + \beta x) \end{cases} , \quad (2.2.13)$$

rappresentano le *trasformazioni di Lorentz ortocrone e proprie in 1+1 dimensioni*. In forma matriciale, le trasformazioni saranno:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} . \quad (2.2.14)$$

Ricaviamo infine la legge di composizione delle velocità. Eseguiamo il differenziale delle trasformazioni (2.2.13):

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx + \beta dt) \\ dt' = \gamma(dt + \beta dx) \end{cases}, \quad (2.2.15)$$

e dunque:

$$\frac{dx'}{dt'} = v' = \frac{dx + \beta dt}{dt + \beta dx} = \frac{dx/dt + \beta}{1 + \beta dx/dt} = \frac{u + \beta}{1 + \beta u/c} . \quad (2.2.16)$$

La quantità conservata nella metrica di Minkowski è la *lunghezza di Minkowski* $\sqrt{(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2}$. Osserviamo che $\det L = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$. Allora esisterà un parametro ϑ , detto *rapidità*, tale che:

$$\begin{cases} \gamma = \cosh \vartheta \\ \beta\gamma = \sinh \vartheta \end{cases}. \quad (2.2.17)$$

Allora le trasformazioni di Lorentz possono essere scritte nella forma:

$$\begin{pmatrix} dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & \sinh \vartheta \\ \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix}. \quad (2.2.18)$$

Verifichiamo se vi sono analogie con le rotazioni in \mathbb{R}^2 . Se applichiamo due trasformazioni con rapidità ϑ_1 e ϑ_2 , si ha:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_1 & \sinh \vartheta_1 \\ \sinh \vartheta_1 & \cosh \vartheta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_2 & \sinh \vartheta_2 \\ \sinh \vartheta_2 & \cosh \vartheta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_1 \cosh \vartheta_2 + \sinh \vartheta_1 \sinh \vartheta_2 & \cosh \vartheta_2 \sinh \vartheta_2 + \sinh \vartheta_1 \cosh \vartheta_2 \\ \sinh \vartheta_1 \cosh \vartheta_2 + \cosh \vartheta_1 \sinh \vartheta_2 & \sinh \vartheta_1 \sinh \vartheta_2 + \cosh \vartheta_1 \cosh \vartheta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \sinh(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \sinh(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cosh(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Osserviamo che anche in questa forma la lunghezza di Minkowski è conservata:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= (dt')^2 - (dx')^2 = (\cosh \vartheta dt + \sinh \vartheta dx)^2 - (\sinh \vartheta dt + \cosh \vartheta dx)^2 \\ &= (\cosh^2 \vartheta - \sinh^2 \vartheta)dt^2 - (\cosh^2 \vartheta - \sinh^2 \vartheta)dx^2 \\ &= dt^2 - dx^2. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Il gruppo di matrici indotte dalle trasformazioni di Lorentz è denominato *gruppo ortogonale speciale* $(1,1)$, e si denota con $SO(1,1)$. Ricaviamo anche in questa forma la legge di composizione delle velocità. Sapendo che:

$$\frac{v}{c} = \beta = \frac{\sinh \vartheta}{\cosh \vartheta} = \tanh \vartheta, \quad (2.2.21)$$

si ha:

$$\beta_1 \circ \beta_2 = \tanh(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \frac{\tanh \vartheta_1 + \tanh \vartheta_2}{1 + \tanh \vartheta_1 \tanh \vartheta_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \quad (2.2.22)$$

Moltiplicando tutto per c otteniamo:

$$v_1 \circ v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} . \quad (2.2.23)$$

La legge di composizione delle velocità della meccanica Newtoniana rientra nell'ordine zero di approssimazione per piccole velocità. Infatti se $v_1/c, v_2/c \ll 1$, allora, sviluppando in serie di Taylor il denominatore della (2.2.23) si ha:

$$v_1 \circ v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \simeq (v_1 + v_2) \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2} + \dots \right) \simeq v_1 + v_2 . \quad (2.2.24)$$

Introduciamo adesso il *tensore metrico* $g_{\mu\nu}$ dato da:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 . \quad (2.2.25)$$

In 1+1 dimensioni, cioè nello spaziotempo \mathbb{M}^2 :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (2.2.26)$$

con $\mu, \nu = 0, 1$. Le trasformazioni di Lorentz sono date da:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = L(\vartheta) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} , \quad (2.2.27)$$

$$(x'_\mu)^T g_{\mu\nu} x'_\nu = x_\mu^T L^T(\vartheta) g_{\mu\nu} L(\vartheta) x_\nu , \quad (2.2.28)$$

da cui $g = L^T g L$.

Dato un punto nel cono-luce, è sempre possibile trovare un sistema di riferimento in cui il punto non abbia componenti sugli assi spaziali, cioè in modo tale che:

$$dx' = \gamma(dx + \beta dt) = 0 \quad \implies \quad \frac{dx}{dt} = -\beta , \quad (2.2.29)$$

quindi è sufficiente scegliere un sistema di riferimento che si muova rispetto al primo con velocità $-\beta$. Un vettore dello spaziotempo non avente componenti sugli assi spaziali è detto *vettore-tempo*. Si osserva che il prodotto scalare fra due vettori-tempo è sempre negativo. Da questo si deduce che i coni-luce V_+ e V_- sono invarianti per trasformazioni di Lorentz.

2.2.2 In 3+1 dimensioni

Il gruppo delle rotazioni in \mathbb{R}^3 è un sottogruppo delle matrici di Lorentz. Nello spazio di Minkowski \mathbb{M}^4 , possiamo generalizzare quanto detto prima a 3+1 dimensioni:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad (2.2.30)$$

con la condizione che la matrice della trasformazione, che denotiamo Λ sia tale che $\Lambda^T g \Lambda = g$. Allora i quadrivettori $(x, y, z, t) \in \mathbb{M}_4$ sono tali che:

$$\begin{cases} x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu \\ \Lambda^T g \Lambda = g \\ \langle x', y' \rangle = \langle x, y \rangle \end{cases} \quad \Lambda \in SO(3, 1) . \quad (2.2.31)$$

Vi sono particolari forme della matrice di Lorentz Λ che danno luogo alle cosiddette *inversioni*:

- se $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$ abbiamo l'*inversione temporale*, cioè:

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} ; \quad (2.2.32)$$

- se $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$ abbiamo l'*inversione spaziale*, cioè:

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} ; \quad (2.2.33)$$

- se $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -\mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$ abbiamo l'*inversione dello spaziotempo*, cioè:

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} . \quad (2.2.34)$$

Il gruppo costituito dalle matrici indotte da trasformazioni di Lorentz è denominato *gruppo di Lorentz* e si denota con \mathcal{L} . Si tratta di un gruppo continuo non compatto ed è unione di quattro sottogruppi:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\uparrow^+ \cup \mathcal{L}_\downarrow^+ \cup \mathcal{L}_\uparrow^- \cup \mathcal{L}_\downarrow^- .$$

Il sottogruppo \mathcal{L}_\uparrow^+ è il *gruppo di Lorentz ortocrono*, cioè costituito da trasformazioni che non coinvolgono inversioni.

2.3 Cenni di teoria dei gruppi

2.3.1 Rappresentazioni di gruppi

Consideriamo il gruppo delle rotazioni in \mathbb{R}^2 , con tensore metrico $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Una rotazione intorno all'asse \hat{z} è data da:

$$R(\hat{z}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2) . \quad (2.3.1)$$

Le matrici del gruppo delle rotazioni sono tali che $R^T = R^{-1}$. Abbiamo inoltre una rappresentazione del gruppo $(\mathbb{R}, +)$ in $R(\theta)$ dotato del prodotto righe per colonne data da:

$$\theta_1, \theta_2 \in (\mathbb{R}, +) \quad \mapsto \quad \theta_1 + \theta_2, \quad (2.3.2)$$

$$R(\theta_1), R(\theta_2) \in (R(\theta), \circ) \quad \mapsto \quad R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2). \quad (2.3.3)$$

Introduciamo adesso il *generatore* L_z del sottogruppo delle rotazioni intorno all'asse \hat{z} dato da:

$$L_z \equiv \left. \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Osserviamo che:

$$L_z^2 = -\mathbb{I}, \quad L_z^3 = -L_z, \quad L_z^4 = \mathbb{I}. \quad (2.3.5)$$

Allora, esponenziando il generatore e sviluppando in serie di Taylor otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{\theta L_z} &= \mathbb{I} + \theta L_z + \frac{1}{2!} \theta^2 L_z^2 + \frac{1}{3!} \theta^3 L_z^3 + \frac{1}{4!} \theta^4 L_z^4 + \dots \\ &= \mathbb{I} + \theta L_z - \frac{1}{2} \theta^2 \mathbb{I} - \frac{1}{6} \theta^3 L_z^3 + \frac{1}{24} \theta^4 \mathbb{I} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \dots \right) \mathbb{I} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots \right) L_z. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Il termine proporzionale a \mathbb{I} è lo sviluppo di $\cos \theta$, mentre quello proporzionale a L_z è lo sviluppo di $\sin \theta$, dunque si ottiene:

$$e^{\theta L_z} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(\theta). \quad (2.3.7)$$

Vediamo se adesso troviamo dei generatori del gruppo di Lorentz nello spazio di Minkowski \mathbb{M}^2 . Il tensore metrico sarà $g = \text{diag}(-1, 1)$ e consideriamo una trasformazione di rapidità ϑ :

$$L(\hat{x}, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & \sinh \vartheta \\ \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix} \in SO(1, 1). \quad (2.3.8)$$

Anche in questo caso, ricordiamo, abbiamo una rappresentazione del gruppo $(\mathbb{R}, +)$ in \mathcal{L} dotato del prodotto righe per colonne del tutto analoga a quella delle rotazioni, cioè:

$$L(\hat{x}, \vartheta_1)L(\hat{x}, \vartheta_2) = L(\hat{x}, \vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (2.3.9)$$

Le matrici di Lorentz soddisfano la relazione $L^T g L = g$. Definiamo a questo punto, analogamente al caso delle rotazioni, il *generatore del sottogruppo ad un parametro del boost di Lorentz* (lungo l'asse \hat{x}) M_x :

$$M_x \equiv \left. \frac{dL(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Si ha che $M_x^2 = \mathbb{I}$ e $M_x^3 = M_x$, allora, sempre in analogia alle rotazioni, tramite l'esponenziazione del generatore e lo sviluppo in serie di Taylor, troviamo che:

$$L(\hat{x}, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & \sinh \vartheta \\ \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix} = e^{\vartheta M_x}. \quad (2.3.11)$$

Considerando adesso le rotazioni in \mathbb{R}^3 , otteniamo che, dato che possiamo ruotare intorno a tre assi indipendentemente, abbiamo tre generatori distinti L_x, L_y, L_z , dati da:

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.12)$$

Sappiamo che le rotazioni non sono commutative, dunque, introducendo l'operatore *commutatore* $[A, B] = AB - BA$ si ha:

$$\begin{cases} [L_x, L_y] = -L_z \\ [L_y, L_z] = -L_x \\ [L_z, L_x] = -L_y \end{cases} \quad [L_a]_{bc} = \epsilon_{abc} L_c. \quad (2.3.13)$$

In \mathbb{M}^4 , a seconda degli assi su cui viene eseguito il boost di Lorentz, abbiamo tre generatori di boost M_x, M_y, M_z :

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

Dunque in \mathbb{M}^4 si hanno sei generatori, tre di boost e tre di rotazioni per cui valgono le relazioni:

$$\begin{cases} [L_a, L_b] = -\epsilon_{abk} L_k \\ [M_a, M_b] = \epsilon_{abk} L_k \\ [L_a, M_b] = \epsilon_{abk} M_k \end{cases}. \quad (2.3.15)$$

Prendiamo in esame adesso un boost di Lorentz in \mathbb{M}^4 sull'asse \hat{x} , senza rotazioni sugli altri assi, di rapidità ϑ , cioè:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & \sinh \vartheta & 0 & 0 \\ \sinh \vartheta & \cosh \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.3.16)$$

Le trasformazioni di Lorentz in forma differenziale saranno pertanto:

$$\begin{cases} dt' = \gamma(dt + \beta dx) \\ dx' = \gamma(dx + \beta dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}. \quad (2.3.17)$$

Vogliamo adesso scrivere come trasforma la velocità componente per componente. Dividendo ciascuna delle componenti spaziali per la componente temporale si ottengono le relazioni:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{v + dx/dt}{1 + \frac{v}{c^2} dx/dt} , \quad (2.3.18)$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dy}{dt + \beta dx} = \frac{1}{\gamma} \frac{dy/dt}{1 + \frac{v}{c^2} dx/dt} , \quad (2.3.19)$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dz/dt}{1 + \frac{v}{c^2} dx/dt} . \quad (2.3.20)$$

Queste trasformazioni però non sono soddisfacenti, in quanto le componenti y e z della velocità dipendono dalla componente x . L'obiettivo è scrivere una trasformazione simile a quella per i quadrivettori. L'unica cosa è pensare la velocità anch'essa come un quadrivettore. Definiamo perciò la velocità u :

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} , \quad (2.3.21)$$

dove $d\tau$ è il tempo proprio. Sappiamo che la relazione fra il tempo proprio di un sistema di riferimento e lo stesso tempo misurato in un altro sistema di riferimento è data da $d\tau = dt/\gamma$. Allora:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt} , \quad (2.3.22)$$

da cui:

$$\begin{cases} u_0 = \gamma \frac{d}{dt}(ct) = \gamma c \\ \mathbf{u} = \gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \gamma \mathbf{v} \end{cases} . \quad (2.3.23)$$

Per i quadrivettori, sapevamo che il prodotto scalare:

$$\sum_{\mu=0}^3 x_\mu x_\mu = x^2 - (ct)^2 \quad (2.3.24)$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz. Per le *quadrivelocità*, la quantità invariante è il modulo, dato da:

$$g_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 v^2 = \frac{v^2 - c^2}{1 - v^2/c^2} = c^2 \frac{v^2 - c^2}{c^2 - v^2} = -c^2 , \quad (2.3.25)$$

in questo caso, dato che si tratta del quadrato della velocità della luce, oltre ad essere invariante, è anche costante.

2.3.2 Rappresentazioni irriducibili

Trovare dunque una rappresentazione irriducibile, significa trovare l'unica decomposizione dello spazio in sottospazi invarianti non ulteriormente riducibili. Il problema delle rappresentazioni irriducibili può essere riportato a trovare i generatori delle rotazioni. Il gruppo delle rotazioni, ricordiamo, è definito da:

$$x'_i = R_{ia} x_a , \quad i, a = 1, 2, 3 . \quad (2.3.26)$$

Le quantità scalari sono tali che $s' = s$, mentre i tensori sono matrici le cui componenti trasformano sotto rotazione nel seguente modo:

$$T'_{ij} = R_{ia} R_{jb} T_{ab} . \quad (2.3.27)$$

Tramite i tensori siamo in grado di trasformare i polinomi omogenei. Rappresentando il tensore T come un vettore colonna di nove componenti, cioè:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ \vdots \\ T_{33} \end{pmatrix} , \quad (2.3.28)$$

allora la rotazione (2.3.27) può essere espressa come:

$$T' = (R \circ R) T , \quad (2.3.29)$$

dove $R \in M(9, \mathbb{R})$ è tale che $R_1 \circ R_1 \cdot R_2 \circ R_2 = R_1 R_2 \circ R_1 R_2$ e dunque $R_1 R_2 = R_{1 \circ 2}$. In termini di versore \hat{n} e angolo di rotazione φ si ha:

$$(\hat{n}, \varphi) \mapsto R_{9 \times 9}(\hat{n}, \varphi), \quad R_1^{9 \times 9} \cdot R_2^{9 \times 9} = R_{1 \circ 2}^{9 \times 9} . \quad (2.3.30)$$

Abbiamo dunque una *rappresentazione 9-dimensionale* del gruppo delle rotazioni. Come tensore, data la posizione e l'impulso di una singola particella, possiamo considerare il prodotto esterno $T_{ab} = x_a p_b$. Se un tensore S è simmetrico, cioè $S_{ab} = S_{ba}$, sarà ancora simmetrico in un sistema di riferimento ruotato? Applichiamo una rotazione al tensore S :

$$S'_{ij} = R_{ia} R_{jb} S_{ab} = R_{ia} R_{jb} S_{ba} = R_{jb} R_{ia} S_{ba} = S'_{ji} . \quad (2.3.31)$$

Stessa cosa se il tensore è antisimmetrico. In particolare, ogni tensore a due indici può essere scritto come somma di un tensore simmetrico e di uno antisimmetrico. Allora, lo spazio vettoriale dei tensori è somma diretta del sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche e di quello delle matrici antisimmetriche, il primo avente dimensione 6 e il secondo 3:

$$T = S + A, \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.3.32)$$

Poiché gli spazi stanno in somma diretta, rappresentando il tensore in forma vettoriale e applicando una rotazione, le componenti provenienti dalla matrice simmetrica non devono mischiarsi con quelle provenienti dalla matrice antisimmetrica. Allora avremo qualcosa della forma:

$$\begin{pmatrix} R_1^{6 \times 6} & 0 \\ 0 & R_1^{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ \vdots \\ s_{33} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} . \quad (2.3.33)$$

Notiamo inoltre che in tre dimensioni, i tensori antisimmetrici possono essere identificati con i vettori tramite la contrazione con l'indice antisimmetrico ϵ_{iab} , $A_{ab}\epsilon_{iab} \equiv L_i$. Dunque bisogna ridurre il sottospazio delle matrici simmetriche. Sia S un tensore simmetrico, e ne considero la traccia:

$$s = s_{11} + s_{22} + s_{33} . \quad (2.3.34)$$

Allora:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ & s_{22} & s_{23} \\ & & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} - s/3 & s_{12} & s_{13} \\ & s_{22} - s/3 & s_{23} \\ & & s_{33} - s/3 \end{pmatrix} . \quad (2.3.35)$$

Inoltre:

$$\delta_{ij}S'_{ij} = \delta^{ij}R_{ia}R_{jb}S_{ab} = R_{ai}^T\delta_{ij}R_{jb}S_{ab} = R_{ai}^TR_{ib}S_{ab} = \delta_{ab}S_{ab} . \quad (2.3.36)$$

Da questa relazione concludiamo che la traccia di un tensore simmetrico è uno scalare (infatti abbiamo provato che è invariante per rotazione). Allora, in quanto sussiste una relazione di dipendenza lineare non banale, abbiamo trovato una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni in \mathbb{R}^3 , costituita dai tensori simmetrici a traccia nulla (cinque parametri liberi), i vettori (matrici antisimmetriche, tre parametri liberi) e uno spazio unidimensionale formato dagli scalari (le tracce dei tensori simmetrici). Abbiamo dunque: $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$. Passando adesso al gruppo di Lorentz, le quantità invarianti per boost di Lorentz sono i 4-scalari. Avremo similmente i 4-tensori (rango 2: $T_{\{\mu\nu\}}, F_{[\mu\nu]}, \dots$).

2.4 Formulazione covariante della Dinamica

2.4.1 Principi della Dinamica

1. Principio d'inerzia. Tutti i sistemi di riferimento inerziali in moto relativo uniforme sono indistinguibili. Questo è un caso particolare del principio di relatività, quindi rimane valido anche nella formulazione relativistica;
2. l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza applicata su di esso;
3. ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, agente sulla stessa retta.

L'introduzione delle trasformazioni di Lorentz ha avuto come conseguenza la perdita del concetto di *simultaneità* degli eventi, infatti se per un osservatore in un determinato sistema di riferimento due eventi accadono nello stesso istante, è immediato verificare che esistono infiniti sistemi di riferimento in cui essi sono sfasati. Questa è una diretta conseguenza della costanza della velocità della luce. Inoltre, i sistemi in cui si lavorava nella meccanica Newtoniana erano *isolati*, cioè in assenza di forze esterne. Con l'introduzione dei campi (gravitazionale, elettromagnetico) che regolano i diversi tipi di interazione, questa ipotesi non è più valida, unitamente all'ipotesi di *istantaneità* della propagazione dell'interazione. Difatti, la velocità della luce è quella massima con cui un segnale può propagarsi, dunque, per esempio, se muovo una carica e di conseguenza modifico il campo elettromagnetico che essa crea, una seconda carica posta a distanza r risentirà delle perturbazioni causate dalla prima al più dopo un tempo r/c . Pertanto, vengono meno i presupposti su cui veniva enunciato il terzo principio, e la sua validità non può essere estesa alla formulazione relativistica. Tuttavia, due conseguenze importanti derivanti dal terzo principio, sono la conservazione del *tri-impulso* e del momento angolare, dunque è naturale domandarsi se

tali quantità siano ancora costanti nel moto nel limite relativistico o ve ne siano comunque delle altre.

2.4.2 Quantità di moto

Ricordiamo la definizione della *quadrivelocità* in un sistema di riferimento K :

$$\begin{cases} u_0 = \gamma(v)c \\ \mathbf{u} = \gamma(v)\mathbf{v} \end{cases}, \quad (2.4.1)$$

con il parametro γ dipendente esclusivamente dal modulo della velocità. In un sistema di riferimento K' che si muove rispetto a K con velocità β lungo l'asse \hat{x} , la quadrivelocità u_μ era data dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} u'_0 = \gamma(\beta)(u_0 + \beta u_x) \\ u'_x = \gamma(\beta)(u_x + \beta u_0) \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}. \quad (2.4.2)$$

Supponiamo adesso di avere, in un sistema di riferimento K_0 , un urto tra due particelle puntiformi di velocità iniziale uguale e di modulo v . Per la conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{p}_{\text{in}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad \mathbf{p}_{\text{fin}} = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0. \quad (2.4.3)$$

Cerchiamo adesso di scrivere la quantità di moto nel caso generale, fermo restando che essa sia proporzionale alla velocità:

$$\mathbf{p} \stackrel{?}{=} f(v)\mathbf{v}. \quad (2.4.4)$$

Il fattore di proporzionalità dev'essere funzione unicamente del modulo di \vec{v} , in quanto deve essere invariante per rotazione. Sappiamo che nel limite non relativistico $f(v \ll c) \simeq m$, dove m è la quantità scalare chiamata *massa* del corpo. Inoltre, la funzione f deve essere iniettiva. Assumiamo adesso che esista una *energia cinetica* $T(v)$, funzione scalare del modulo della velocità, anch'essa iniettiva, che si conserva, allora $T(v_1) + T(v_2) = T(v'_1) + T(v'_2)$. Se inoltre $v_1 = v_2 = v$ e $v'_1 = v'_2 = v'$, allora $T(v) = T(v')$. Nel sistema del centro di massa, l'urto può essere descritto dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} v_x^i = v_x^{i'} \\ v_y^i = -v_y^{i'} \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (2.4.5)$$

Queste relazioni valgono per le tri-velocità anche nel limite relativistico. In termini di quadrivelocità, otteniamo che il modulo delle componenti spaziali è lo stesso, dunque possiamo riscrivere la (2.4.4) come:

$$\mathbf{p} = g(v)\mathbf{u}, \quad (2.4.6)$$

in quanto $\mathbf{u} = \gamma(v)\mathbf{v}$. Dalla relazione $\Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)_y = 0$ segue che $|\Delta\mathbf{p}_1| = |\Delta\mathbf{p}_2|$, cioè:

$$|\Delta p_1^y| = g(v_1)|\Delta u_1^y|, \quad |\Delta p_2^y| = g(v_2)|\Delta u_2^y|. \quad (2.4.7)$$

Sommando le relazioni ed imponendo che $\Delta u_1^y + \Delta u_2^y = 0$, troviamo che $g(v_1) = g(v_2)$. Questa relazione è valida in ogni sistema di riferimento inerziale, dunque $g(v_1) = g(v_2) = g(v)$ è una quantità costante, che denotiamo m . Pertanto:

$$g(v) = \frac{f(v)}{\gamma(v)} = m \quad \implies \quad f(v) = \gamma(v)m. \quad (2.4.8)$$

A questo punto, possiamo definire il *quadri-impulso* p_μ come $p = m\gamma u$, o in altre parole:

$$\begin{cases} p_0 = mu_0 \\ \mathbf{p} = m\mathbf{u} \end{cases}. \quad (2.4.9)$$

Se si conserva il tri-impulso, cioè $\Delta\mathbf{p} = 0$, considero le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} \Delta p'_x = \gamma(\beta)(\Delta p_x + \beta\Delta p_0) \\ \Delta p'_0 = \gamma(\beta)(\Delta p_0 + \beta\Delta p_x) \end{cases}. \quad (2.4.10)$$

Se $\Delta p_x = 0$, allora esso sarà nullo in tutti i sistemi di riferimento inerziali, dunque si avrà anche $\Delta p'_x = 0$, e dalla prima trasformazione, segue che anche $\Delta p_0 = 0$. Il secondo membro della seconda trasformazione è identicamente nullo, dunque sarà anche $\Delta p'_0 = 0$. Concludiamo che se il tri-impulso si conserva, allora si conserverà anche la componente p_0 del quadri-impulso. Vediamo dunque cosa rappresenta. Dalla definizione di quantità di modo appena data:

$$p_0 = m\gamma c = mc \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (2.4.11)$$

Nel limite non relativistico $v/c \ll 1$ si ottiene, sviluppando in serie di Taylor:

$$p_0 = \frac{1}{c}mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots\right) = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots\right) : \quad (2.4.12)$$

In termini del problema delle due particelle di massa m_1 e m_2 e velocità v_1 e v_2 ciò comporta:

$$m_1c^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_2c^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = m_1c^2 + \frac{1}{2}m_1(v'_1)^2 + m_2c^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2)^2, \quad (2.4.13)$$

cioè:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(v'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2)^2, \quad (2.4.14)$$

che è esattamente la legge di conservazione dell'energia cinetica nel limite non relativistico. Concludiamo dunque che la componente p_0 rappresenta l'energia cinetica del sistema, e, generalizzando quanto visto, possiamo asserire che energia e tri-impulso sono le componenti di un quadrivettore denominato *quadri-impulso*. Possiamo dunque scrivere l'impulso nella formulazione relativistica:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma\mathbf{v}, \quad (2.4.15)$$

dove m è un quadri-scalare. Da questa formula, appare che, all'aumentare della velocità della particella, aumenti proporzionalmente anche la sua massa, cioè $m\gamma = m(v)$. In tal caso, sarebbe giustificato il valore di c come limite superiore di propagazione di un evento.

2.4.3 Secondo principio

Nella formulazione di Newton, ricordiamo, il secondo principio era dato da:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} , \quad (2.4.16)$$

che possiamo riscrivere come:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} , \quad (2.4.17)$$

con \mathbf{p} dato dalla (2.4.15). Nel caso di moto unidimensionale con dato iniziale nullo, e assumendo che la massa sia invariante, abbiamo:

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = \frac{F}{m} = g \quad \implies \quad \gamma v = gt . \quad (2.4.18)$$

Sostituendo l'espressione di γ otteniamo:

$$v = \frac{gt}{\gamma} = gt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \quad (2.4.19)$$

Elevando al quadrato e dividendo per c^2 ambo i membri otteniamo:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{gt}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) . \quad (2.4.20)$$

Ricavando da questa relazione il valore di v/c , si ha:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{(gt/c)^2}{1 + (gt/c)^2} . \quad (2.4.21)$$

Essendo tutte quantità sempre positive, possiamo osservare che $v/c < 1$, che è in accordo con quanto precedentemente detto. Ricavando infine la velocità v :

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt/c)^2}} , \quad (2.4.22)$$

otteniamo che la linea d'universo descritta dalla particella è un'iperbole.

Consideriamo adesso il seguente esempio: in un certo sistema di riferimento, un blocco di massa M è in quiete e due corpi puntiformi, ciascuno di massa m si avvicinano ad esso con velocità uguali e opposte, rispettivamente \mathbf{u} e $-\mathbf{u}$ dirette lungo l'asse \hat{y} . L'urto è anelastico. Allora, per la legge di conservazione della quantità di moto della meccanica classica, si ha:

$$M \cdot 0 + m(u_x + u_y) = 0 = (M + 2m) \cdot 0 . \quad (2.4.23)$$

Questa relazione deve valere in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Consideriamo adesso un secondo sistema di riferimento, in moto rispetto al primo con velocità uniforme \mathbf{v} diretta lungo l'asse \hat{x} . Allora, il blocco sarà visto in movimento con velocità \mathbf{v} e le particelle avranno velocità $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $-\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Lungo l'asse \hat{y} vale la relazione descritta nel caso precedente, mentre lungo l'asse \hat{x} si ha:

$$(M + 2m)v = (M + 2m)v' \quad \implies \quad v = v' . \quad (2.4.24)$$

Anche in questo caso, la velocità del blocco rimane immutata lungo gli assi e quindi viene rispettato il principio di conservazione della quantità di moto. Adesso consideriamo il blocco in quiete e mandiamo contro di esso due impulsi luminosi ϵ/c . In questo caso, il blocco assorbirà gli impulsi e rimarrà fermo, in accordo con il principio classico. Se adesso diamo a tutti gli elementi una velocità \mathbf{v} lungo \hat{x} e indichiamo con α l'angolo compreso tra la direzione degli impulsi e \mathbf{v} , sfruttando la relatività, otteniamo la seguente relazione:

$$M\gamma v + 2\frac{\epsilon'}{c} \sin \alpha = M\gamma_f v_f . \quad (2.4.25)$$

Questa relazione sembra violare il principio di relatività, in quanto $v_f \neq v$. Questo è un assurdo nato dall'aver assunto che la massa del blocco rimanesse costante nell'evoluzione dell'evento. Imponendo che $v_f = v$, la relazione si modifica in:

$$M\gamma v + 2\frac{\epsilon'}{c} \sin \alpha = M_f \gamma v \quad \Longleftrightarrow \quad (M_f - M)\gamma v = 2\frac{\epsilon'}{c} \sin \alpha . \quad (2.4.26)$$

Il seno dell'angolo α corrisponde al rapporto v/c , per cui:

$$(M_f - M)\gamma v = \frac{2\epsilon'}{c} \frac{v}{c} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta(M\gamma c^2) = 2\epsilon' = \Delta E_{\text{luce}} , \quad (2.4.27)$$

con la condizione:

$$\frac{\epsilon'}{\gamma} = \epsilon . \quad (2.4.28)$$

In conclusione, siamo in grado di preservare la conservazione dell'impulso e dell'energia solo se ammettiamo che la massa non rimanga costante. A questo punto, emerge ancora più chiaramente, nell'equivalenza massa-energia, che l'energia abbia un ruolo primitivo rispetto alla massa. In virtù di queste considerazioni, vogliamo adesso fornire un'espressione del quadri-impulso indipendente dalla massa, ma solamente dall'energia:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{E}{c} = m\gamma c \\ \mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathbf{p}}{E/c^2} = \mathbf{v} . \quad (2.4.29)$$

Allora definiamo il quadri-impulso come:

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) . \quad (2.4.30)$$

Adesso consideriamo la quantità $p_\mu p_\mu$. Con la nuova definizione si ha:

$$p_\mu p_\mu = \mathbf{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} ,$$

dove si è usata la definizione del prodotto scalare di Minkowski. Usando invece la definizione che coinvolge la quadrivelocità, si ha:

$$p_\mu p_\mu = m^2 u_\mu u_\mu = -(mc)^2 . \quad (2.4.31)$$

Uguagliando le due espressioni, otteniamo la *relazione energia-impulso*:

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (2.4.32)$$

dove la quantità mc^2 è detta *massa a riposo*. Notiamo che questa relazione fornisce una relazione riguardante il quadrato dell'energia, quindi bisogna stare attenti a considerare il doppio segno quando si estrae la radice.

Esempio 2.4.1 (Effetto Compton). Consideriamo un fotone con quadri-impulso dato da:

$$k_\mu = \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (2.4.33)$$

Abbiamo che $k^2 = 0$, il che implica che siamo sul bordo del cono-luce. Trattandosi di un fotone, la cosa ha senso. Ricordando la definizione di quadri-impulso appena data ciò implica che la massa del fotone è nulla, il che ha ancora senso. L'effetto fotoelettrico, d'altra parte, ci garantisce che:

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \end{cases}, \quad (2.4.34)$$

dove E, \mathbf{p} sono l'energia e l'impulso dell'elettrone, soddisfacenti $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$. Se adesso consideriamo un elettrone fermo, verso cui mandiamo il fotone di impulso k_μ e lunghezza d'onda λ , dopo l'assorbimento seguirà un'emissione, che risulterà inclinata di un angolo θ rispetto alla direzione iniziale e con una lunghezza d'onda $\lambda' \neq \lambda$, e dunque con impulso $k' \neq k$. Imponiamo la conservazione dell'energia sugli indici zero dei quadri-impulsi (lavoriamo in unità $c = 1$):

$$\hbar\omega + m = \hbar\omega' + E' \quad \Longleftrightarrow \quad E' - m = \hbar(\omega - \omega'). \quad (2.4.35)$$

Poiché deve essere $\omega - \omega' > 0$, da questa relazione otteniamo che la lunghezza d'onda λ' è maggiore di quella iniziale. Sugli indici $i = 1, 2, 3$ del quadri-impulso imponiamo che:

$$\hbar(k - k') = p' - p. \quad (2.4.36)$$

Elevando al quadrato si ottiene:

$$\hbar^2(-2k \cdot k') = 2m^2 - 2p \cdot p' \quad \Longrightarrow \quad \hbar^2 k \cdot k' = p \cdot p' - m^2. \quad (2.4.37)$$

Poiché la quantità $p \cdot p'$ è invariante per trasformazione di Lorentz, ne consideriamo solo la componente zero, quindi:

$$\hbar^2 k \cdot k' = m(E' - m). \quad (2.4.38)$$

In conclusione, otteniamo la relazione:

$$\hbar^2 \omega' \omega (1 - \cos \theta) = m(E' - m). \quad (2.4.39)$$

Mettendo a sistema le equazioni (2.4.35) e (2.4.39) troviamo:

$$\lambda' - \lambda = \frac{\hbar}{mc} (1 - \cos \theta), \quad \text{con } \frac{\hbar}{mc} = 0,024 \text{ \AA}. \quad (2.4.40)$$

Inoltre, dopo alcuni passaggi algebrici, otteniamo un'altra relazione:

$$\lambda E = \hbar c, \quad (2.4.41)$$

che ci consente di capire che per registrare variazioni bisogna usare lunghezze d'onda sufficientemente piccole.

Vogliamo adesso fare qualche considerazione sul momento angolare \mathbf{L} . Sappiamo che \mathbf{L} può essere interpretato come un tensore antisimmetrico tale che:

$$\epsilon_{ijk} L_k = x_i p_j - x_j p_i . \quad (2.4.42)$$

In \mathbb{M}^4 estendiamo questo concetto considerando un tensore antisimmetrico $F_{\mu\nu}$ e introducendo il simbolo ϵ a quattro indici $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$. Applicando il simbolo al tensore si ha:

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \hat{F}_{\alpha\beta} . \quad (2.4.43)$$

Otteniamo dunque un tensore a due indici antisimmetrico, detto il *duale* di F . Se avevamo completato il tri-impulso con l'energia, possiamo completare le tre componenti del momento angolare (che ricordiamo sono i generatori delle rotazioni) inserendole in un tensore antisimmetrico insieme ai generatori del gruppo di Lorentz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 \\ -\mathcal{L}_1 & 0 & L_3 & -L_2 \\ -\mathcal{L}_2 & -L_3 & 0 & L_1 \\ -\mathcal{L}_3 & L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.4.44)$$

Possiamo definire dunque il *tensore momento angolare* $M_{\mu\nu}$:

$$M_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} x_\alpha p_\beta . \quad (2.4.45)$$

Poiché $M_{\mu\nu}$ è antisimmetrico, avrà sei componenti linearmente indipendenti, tre che generano le rotazioni e tre che generano i boost di Lorentz. Questo tensore si conserva.

2.4.4 Forze

In analogia con il secondo principio:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} , \quad (2.4.46)$$

derivando il quadri-impulso rispetto al tempo proprio otteniamo qualcosa di simile a una quadri-forza:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \equiv G_\mu = \frac{dp_\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \begin{cases} \gamma \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} \right) = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} & \mu = 0 \\ \gamma \mathbf{F} & \mu = 1, 2, 3 \end{cases} . \quad (2.4.47)$$

Poiché G_μ è un quadrivettore, esso deve trasformare secondo le trasformazioni di Lorentz. Consideriamo un sistema di riferimento in cui una particella è a riposo, e scriviamo G_μ :

$$G_\mu^{\text{rest}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}^{\text{rest}} \end{pmatrix} . \quad (2.4.48)$$

Se invece osserviamo la particella in un sistema di riferimento in moto relativo con velocità \mathbf{v} lungo l'asse \hat{x} , allora G_μ sarà data da:

$$G_\mu^v = \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} / c \\ \gamma \mathbf{F} \end{pmatrix} . \quad (2.4.49)$$

Queste due quantità saranno connesse da una trasformazione di Lorentz:

$$G_x^v = \gamma F_x^v = \gamma(F_x^{\text{rest}} + v \cdot 0) = \gamma F_x^{\text{rest}} , \quad (2.4.50)$$

$$G_y^v = \gamma F_y^v = G_y^v = G_y^{\text{rest}} = F_y^{\text{rest}} . \quad (2.4.51)$$

Quindi, indicando con F_{\parallel} la componente parallela al boost e con F_{\perp} quelle ortogonali, otteniamo le seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} F_{\parallel}^v = F_{\parallel}^{\text{rest}} \\ F_{\perp}^v = \frac{1}{\gamma} F_{\perp}^{\text{rest}} \end{cases} . \quad (2.4.52)$$

Allora il secondo principio covariante diventa:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) = \mathbf{F} . \quad (2.4.53)$$

Esplicitando la derivata:

$$m\gamma \mathbf{a} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{F} . \quad (2.4.54)$$

Si ha che:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \gamma^3 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} . \quad (2.4.55)$$

Dunque otteniamo:

$$m\gamma \mathbf{a} + m\mathbf{v} \gamma^3 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} = \mathbf{F} . \quad (2.4.56)$$

Proiettando tutto nelle direzioni longitudinali ed ortogonali:

$$\begin{cases} (m\gamma) \vec{a}_{\perp} = \vec{F}_{\perp} \\ m\gamma a_{\parallel} + m\mathbf{v} \gamma \frac{va_{\parallel}}{c^2} = ma_{\parallel} \gamma \left[1 + \frac{v^2}{c^2} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \right] = ma_{\parallel} \gamma^3 = F_{\parallel} \end{cases} . \quad (2.4.57)$$

La prima relazione implica che $m(v) \equiv m\gamma$, mentre la seconda implica invece $m(v) = m\gamma^3$. Poiché sono contraddittorie, non vale la pena considerarle e conviene dunque tenersi la massa come uno scalare.

2.5 Meccanica analitica e relatività

In meccanica analitica, l'azione W era definita da:

$$W = \int_{t_A}^{t_B} L[q(t), \dot{q}(t)] dt , \quad (2.5.1)$$

dove L è la funzione, detta *Lagrangiana*, tale che $\delta W = 0$ e soddisfacente a tal fine le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 . \quad (2.5.2)$$

In analogia col caso analitico, vogliamo scrivere l'azione per una particella libera in ambito relativistico:

$$W = -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} d\tau = -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{\gamma} = -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \quad (2.5.3)$$

Poniamo dunque $L(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Verifichiamo se questa è una buona definizione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} = m\gamma v = p & \implies \frac{dp}{dt} = 0 . \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Quindi è consistente. Scriviamo adesso l'energia:

$$E = pv - L = pv + \frac{mc^2}{\gamma} = m\gamma v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = m\gamma \left(v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2} \right) = m\gamma c^2 . \quad (2.5.5)$$

Eliminando la dipendenza esplicita dalla velocità, cioè esprimendo l'energia in funzione dell'impulso, otteniamo la funzione *Hamiltoniana* $H(p, q)$:

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} . \quad (2.5.6)$$

Per una carica in presenza di campo elettromagnetico, abbiamo:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + q \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \varphi(\mathbf{r}, t) \right) , \quad (2.5.7)$$

$$H = \sqrt{c^2 \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + m^2 c^4} + q\varphi(\mathbf{r}, t) . \quad (2.5.8)$$

2.6 Esercizi

1. Supponiamo di avere una particella in un sistema di riferimento K con velocità \mathbf{v} e con velocità \mathbf{v}' in un secondo sistema di riferimento K' , in velocità relativa u rispetto a K . Associa a \mathbf{v}, \mathbf{v}' le loro corrispondenti quadrivelocità \tilde{v} e \tilde{v}' . Dimostrare che la legge di composizione delle velocità è uguale (sia per i trivettori, che per i quadrivettori).

Le trasformazioni di Lorentz sono date da:

$$\begin{cases} dt' = \gamma_u(dt + udx) \\ dx' = \gamma_u(dx + udt) , \end{cases} \quad (2.6.1)$$

con $v = dx/dt$ e $v' = dx'/dt'$. Sostituendo:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx + udt}{dt + udx} = \frac{v + u}{1 + uv} . \quad (2.6.2)$$

Dunque:

$$\tilde{v}' = \begin{pmatrix} \gamma_{v'} \\ \gamma_{v'} v' \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \gamma_u & \gamma_u u \\ \gamma_u u & \gamma_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v \\ \gamma_v v \end{pmatrix} . \quad (2.6.3)$$

Svolgendo i prodotti ed eguagliando componente per componente otteniamo:

$$\begin{cases} \gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v (1 + uv) \\ \gamma_u \gamma_v (u + v) = \gamma_{v'} v' \end{cases} . \quad (2.6.4)$$

Elevando al quadrato la prima equazione si ha:

$$\gamma_{v'}^2 = \left(1 - \left(\frac{u+v}{1+uv} \right)^2 \right)^{-1} = \frac{(1+uv)^2}{(1+uv)^2 - (u+v)^2} = \frac{(1+uv)^2}{(1-u)(1-v)} , \quad (2.6.5)$$

da cui semplificando otteniamo l'uguaglianza. La seconda equazione è banalmente vera perché segue direttamente dalla legge di composizione delle velocità, quindi le leggi di composizione sono equivalenti.

2. Urto tra una particella di velocità u e una parete che si avvicina con velocità v . Dire la velocità della particella dopo l'urto.

In un sistema di riferimento K' in moto rispetto al primo con velocità $-\mathbf{v}$, la parete è in quiete. La velocità della particella in K' sarà data da:

$$u' = \frac{u+v}{1+uv} . \quad (2.6.6)$$

Dopo l'urto, la particella torna indietro con velocità $u'_f = -u'$. Ritornando adesso al sistema di riferimento K :

$$u_f = \frac{u'_f - v}{1 - u'_f v} = \frac{-u' - v}{1 + u'v} = - \left(\frac{\frac{u+v}{1+uv} + v}{1 + \frac{u+v}{1+uv} \cdot v} \right) = - \frac{u + 2v + uv^2}{1 + 2uv + v^2} . \quad (2.6.7)$$

Questa formula è consistente, infatti se $u = 1$ (cioè la particella è un fotone), sostituendo nella relazione trovata otteniamo $u_f = -1$, cioè il fotone viene riflesso con velocità di modulo invariato (infatti la velocità della luce è costante) di segno opposto.

3. Stesso problema del precedente, ma le velocità \mathbf{u} e \mathbf{v} non sono collineari e formano un angolo α .

Poiché $\mathbf{u} \equiv (u_x \cos \alpha, u_y \cos \alpha)$, si ha $\tan \alpha = u_y/u_x$. Dopo l'urto, la particella formerà un angolo α_f con la normale alla superficie dato da:

$$\tan \alpha_f = \frac{u_{fy}}{u_{fx}} . \quad (2.6.8)$$

La quadrivelocità è $\tilde{u} \equiv (\gamma(u), \gamma(u)u_x, \gamma(u)u_y)$. Possiamo dunque definire gli angoli di incidenza e di riflessione in termini della quadrivelocità:

$$\tan \alpha = \frac{\tilde{u}_y}{\tilde{u}_x} , \quad \tan \alpha_f = \frac{\tilde{u}_{fy}}{\tilde{u}_{fx}} . \quad (2.6.9)$$

In termini matriciali:

$$\tilde{u}_f = L^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L \tilde{u} = L^{-1} R L \tilde{u} . \quad (2.6.10)$$

La matrice di Lorentz indotta dalla trasformazione è:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma(v) & \gamma(v)v & 0 \\ \gamma(v)v & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (2.6.11)$$

quindi:

$$\tilde{u}_f = \begin{pmatrix} \gamma(u_f) \\ \gamma(u_f)u_{fx} \\ \gamma(u_f)u_{fy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)v & 0 \\ -\gamma(v)v & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(v) & \gamma(v)v & 0 \\ \gamma(v)v & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u) \\ \gamma(u)u_x \\ \gamma(u)u_y \end{pmatrix} . \quad (2.6.12)$$

Eseguendo il prodotto matriciale, si ottiene:

$$\tilde{u}_f = \gamma^2(v) \begin{pmatrix} 1+v^2 & 2v & 0 \\ -2v & -(1+v^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u) \\ \gamma(u)u_x \\ \gamma(u)u_y \end{pmatrix} , \quad (2.6.13)$$

e dunque scrivendo le componenti di \tilde{u}_f possiamo ricavare l'angolo di rifrazione:

$$\tan \alpha_f = \frac{1}{\gamma^2(v)} \frac{\sin \alpha}{(1+v^2) \cos \alpha + 2v/u} . \quad (2.6.14)$$

Se la parete è ferma, $v = 0$ e si ha $\tan \alpha = \tan \alpha_f$, coerente con la meccanica classica.

4. È possibile che un fotone “decada” in due fotoni con velocità formanti un angolo θ_{12} ?

Ad un fotone è associato un quadri-impulso $p(\gamma) = \hbar(\omega, \mathbf{k})$. Allora, scrivendo la conservazione del quadri-impulso $p = p_1 + p_2$ ed elevando al quadrato si ha (ricordando che il modulo del quadri-impulso di un fotone è zero):

$$p^2 = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 \quad \implies \quad 0 = p_1 \cdot p_2 = -\omega_1 \omega_2 (\cos \theta_{12} - 1) . \quad (2.6.15)$$

Quindi la conservazione è rispettata se e solo se $\theta_{12} = 0$, cioè i due fotoni prodotti sono collineari.

5. Un protone e un neutrone formano uno stato legato denominato *deutone*. Il difetto di massa B è dato da $B = M_p + M_n - M_d$. Per un protone e un neutrone $M_p = M_n = 940$ MeV e $B = 2.2$ MeV. Mostrare che la reazione $p + n \rightarrow d$ non è consistente con la conservazione del quadri-impulso.

I quadri-impulsi delle due particelle sono dati da:

$$p_{1\mu} = (M_p \gamma, M_p \gamma \mathbf{v}), \quad p_{2\mu} = (M_n \gamma, M_n \gamma \mathbf{v}) . \quad (2.6.16)$$

Ci poniamo nel sistema del centro di massa delle due particelle: il tri-impulso iniziale, così come quello finale, è zero, quindi bisogna scrivere la conservazione dell'energia (componente zero):

$$M_d = M_p \gamma(v) + M_n \gamma(v) > M_p + M_n = B + M_d , \quad (2.6.17)$$

da cui otteniamo $B < 0$, che contraddice l'ipotesi, dunque questa reazione è impossibile.

6. Consideriamo adesso la reazione $p + n \rightarrow d + \gamma$, dove γ è un fotone e verifichiamone la consistenza con la conservazione del quadri-impulso.

Nel sistema del c.d.m.:

$$M_p \gamma(v_p) + M_n \gamma(v_n) = M_d \gamma(v_d) + E_\gamma , \quad (2.6.18)$$

dove abbiamo considerato anche l'energia del fotone. Supponiamo adesso che $v_p, v_n \ll 1$. Osserviamo che in questo caso, per non violare la conservazione del tri-impulso, il deutone prodotto deve avere una velocità non nulla. Inoltre deve essere soddisfatta:

$$M_p \gamma(v_p) \mathbf{v}_p + M_n \gamma(v_n) \mathbf{v}_n = M_d \gamma(v_d) \mathbf{v}_d + \mathbf{p} . \quad (2.6.19)$$

Possiamo condensare le due equazioni in una usando il quadri-impulso:

$$p_p + p_n = p_d + p_\gamma . \quad (2.6.20)$$

Elevando questa al quadrato:

$$(M_p + M_n)^2 = (E_d + E_\gamma)^2 . \quad (2.6.21)$$

Da cui otteniamo:

$$M_p + M_n = \sqrt{p^2 + M_d^2} + p . \quad (2.6.22)$$

Isoliamo la radice ed eleviamo al quadrato:

$$p^2 + M_d^2 = (M_n + M_p - p)^2 = M_n^2 + M_p^2 + p^2 + 2M_n M_p - 2M_n p - 2M_p p , \quad (2.6.23)$$

e quindi:

$$p = \frac{-M_d^2 + (M_n + M_p)^2}{2(M_n + M_p)} = \frac{(M_n + M_p + M_d)(M_n + M_p - M_d)}{2(M_n + M_p)} = B \frac{2(M_n + M_p) - B}{2(M_n + M_p)} . \quad (2.6.24)$$

Concludiamo dunque che:

$$|\mathbf{p}| = B \left(1 - \frac{B}{2(M_n + M_p)} \right) . \quad (2.6.25)$$

Il rapporto è di una parte su 10^5 , dunque la differenza di massa B viene quasi interamente assorbita dal fotone. Di conseguenza, il deutone prodotto ha una velocità quasi nulla (non totalmente nulla, altrimenti verrebbe violata la conservazione del tri-impulso).

7. Consideriamo la reazione $e^- + e^+ \rightarrow z_0$, con $m_0 \simeq 90$ GeV. Vogliamo sapere, in termini di energia, se nel sistema del laboratorio è meno dispendioso tenere fermo l'elettrone e spararvi contro il positrone, oppure accelerare entrambi.

Nel sistema del c.d.m. si ha $p_+ + p_- = p_0$. In termini di energia: $E_+ + E_- = E_0$ e poiché $E_+ = E_- = E$ si ha $2E = E_0$, e quindi $E \simeq 45$ GeV. Nel sistema del laboratorio, invece, si ha:

$$\begin{cases} E_{\text{lab}}^+ + m_e = M_0 \gamma(v_0) , \\ m \gamma(v_+) v_+ = M_0 \gamma(v_0) v_0 \end{cases} . \quad (2.6.26)$$

Riprendiamo la relazione dei quadri-impulsi e facciamone il quadrato:

$$p_+^2 + p_-^2 + 2p_+ \cdot p_- = p_0^2 \quad \implies \quad 2m_e^2 + 2E_{\text{lab}}^+ m_e = M_0^2 , \quad (2.6.27)$$

da cui:

$$E_{\text{lab}}^+ = \frac{M_0^2 - 2m_e^2}{2m_e^2} = \frac{M_0}{2} \left(\frac{M_0}{m_e} - 2 \frac{m_e}{M_0} \right) = \frac{M_0^2}{2m_e} \left(1 - 2 \left(\frac{m_e}{M_0} \right)^2 \right) \simeq 45 \cdot 10^4 \text{ GeV} . \quad (2.6.28)$$

Quindi l'energia necessaria in questo caso è molto maggiore che nel caso precedente.

8. Consideriamo due particelle con quadri-impulsi:

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1), \quad p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2) . \quad (2.6.29)$$

Descriviamo nel caso più generale il centro di massa. La formula Newtoniana non è più applicabile in quanto presuppone la validità del terzo principio per sistemi isolati.

Il quadri-impulso totale del sistema è dato da:

$$P = (E_1 + E_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) . \quad (2.6.30)$$

Possiamo sempre trovare un sistema di riferimento in cui la componente spaziale del quadri-impulso totale sia solo lungo \hat{x} , cioè:

$$P = (E_1 + E_2, (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)_x, 0, 0) , \quad (2.6.31)$$

e quindi, poiché l'impulso nel sistema del c.d.m. deve essere $P_{cm} = (E_1' + E_2', 0, 0, 0)$, si ottiene:

$$p_x' = \gamma(v) (p_{1x} + p_{2x} - v(E_1 + E_2)) = 0 . \quad (2.6.32)$$

La velocità \mathbf{v} sarà dunque data da:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{E_1 + E_2} . \quad (2.6.33)$$

9. Consideriamo i decadimenti:

$$B \rightarrow J/\Psi + K_0 , \quad K_0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- . \quad (2.6.34)$$

Calcolare l'energia di K_0 .

$p_B - p_K = p_{J/\Psi}$, elevando al quadrato:

$$M_B^2 + M_K^2 - 2M_B E_K = M_{J/\Psi}^2 , \quad (2.6.35)$$

da cui:

$$E_K = \frac{M_B^2 + M_K^2 - M_{J/\Psi}^2}{2M_B} , \quad (2.6.36)$$

e per l'impulso:

$$\mathbf{p}_K^2 = E_K^2 - M_K^2 = \frac{(M_B^2 - M_K^2 - M_{J/\Psi}^2)^2}{4M_B^2} , \quad (2.6.37)$$

cioè:

$$|\mathbf{p}_K| = \frac{M_B^2 - M_K^2 - M_{J/\Psi}^2}{2M_B} , \quad (2.6.38)$$

$$|\mathbf{v}_K| = \frac{|\mathbf{p}_K|}{E_K} \ll 1 . \quad (2.6.39)$$

Capitolo 3

Fisica Statistica

3.1 Richiami di Meccanica Classica

Consideriamo un sistema conservativo classico con n gradi di libertà. Per N punti materiali, n sarà uguale a $3N$. Supponiamo di avere un set di coordinate generalizzate per il sistema q_1, q_2, \dots, q_n , che possono essere Cartesiane, polari o qualunque set conveniente di coordinate. Le velocità generalizzate associate a queste coordinate sono $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$.

L'espressione della seconda legge di Newton tramite le equazioni di moto di Eulero-Lagrange è:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (3.1.1)$$

dove per un semplice sistema non relativistico la *Lagrangiana* L è data da:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - V. \quad (3.1.2)$$

T è l'energia cinetica e V è l'energia potenziale. L'equazione (3.1.1) è facilmente verificata se le q_i sono coordinate cartesiane, infatti si ha:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_j M_j \dot{q}_j^2 - V. \quad (3.1.3)$$

e, posto $q_i = x$ si ha:

$$M\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.1.4)$$

Ma $-\partial V / \partial x$ altri non è che la componente x della forza \mathbf{F} ; pertanto si ha semplicemente:

$$F_x = M\ddot{x}. \quad (3.1.5)$$

La forma Hamiltoniana delle equazioni del moto sostituisce le n equazioni differenziali del second'ordine (3.1.1) con $2n$ equazioni differenziali del prim'ordine. Definiamo i *momenti generalizzati* come:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.1.6)$$

La funzione *Hamiltoniana* H è data da:

$$H(p_i, q_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i). \quad (3.1.7)$$

Allora

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) \\ &= \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

I termini in $d\dot{q}_i$ si eliminano per la definizione (3.1.6) delle p_i . Inoltre, dalle equazioni di Eulero-Lagrange (3.1.1) si vede che:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i. \quad (3.1.9)$$

Quindi, dalla (3.1.8), si deve avere:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i. \quad (3.1.10)$$

Queste sono le equazioni di moto di Hamilton.

3.2 Sistemi ed ensembles

Lo sviluppo di un sistema composto da N atomi nel tempo è noto quando si conoscono i valori delle $6N$ coordinate e momenti p e q come funzioni del tempo. È possibile rappresentare graficamente tale evoluzione come un'unica orbita nello spazio $6N$ -dimensionale delle p e delle q . Tale spazio è detto *spazio delle fasi* o *spazio* Γ del sistema.

Le quantità fisiche di particolare interesse negli equilibri termodinamici sono quasi sempre le medie temporali su un segmento della traiettoria nello spazio delle fasi del sistema, con la media presa su un appropriato intervallo di tempo. Il problema è che per determinati sistemi, un intervallo di tempo appropriato può essere anche diversi anni. L'*idoneità* dell'intervallo di tempo su cui eseguire le misure e le medie dipende da un tempo caratteristico detto *tempo di rilassamento*. Il tempo di rilassamento descrive approssimativamente il tempo necessario a smorzarsi per una fluttuazione (spontanea o indotta) delle proprietà del sistema. Il valore del tempo di rilassamento dipende dalle particolari condizioni iniziali. J. Willard Gibbs fece un significativo passo avanti nella risoluzione del problema di calcolare valori medi di quantità fisiche. Egli suggerì, anziché usare medie temporali, di immaginare un insieme di sistemi simili, ma opportunamente casuali, e di eseguire delle medie su questo insieme ad un istante fissato. Il gruppo di sistemi simili è chiamato *ensemble*.

Un ensemble è composto da una moltitudine di sistemi costruiti l'uno simile all'altro. Ogni sistema nell'ensemble è una replica esatta del sistema attuale che si sta studiando ed è equivalente, ai fini pratici, ad esso. L'ensemble è opportunamente causale nel senso che ogni configurazione di coordinate e velocità accessibile all'attuale sistema nel corso del tempo è rappresentato nell'ensemble da uno o più sistemi in ogni istante. Si dice che l'ensemble rappresenti il sistema. Gibbs propose di sostituire le medie temporali con le medie sugli ensemble, che sono medie su tutti i sistemi appartenenti all'ensemble ad un istante fissato. L'incertezza che si ha nella conoscenza delle condizioni iniziali di un sistema e le conseguenti incertezze sulle medie temporali sono perfettamente descritte dalla media sull'ensemble.

Il prossimo problema è stabilire come costruire opportunamente gli ensemble. Se il sistema da rappresentare è in equilibrio termico, possiamo ragionevolmente richiedere che la media sull'ensemble sia indipendente dal tempo. Le proprietà fisiche medie macroscopiche di un sistema in equilibrio termico non cambiano col tempo; quindi l'ensemble rappresentativo deve essere tale che le medie non dipendano dal particolare istante in cui esse sono state misurate.

3.3 Il teorema di Liouville

Un ensemble può essere descritto dando il numero di sistemi:

$$P(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q} , \quad (3.3.1)$$

nell'elemento di volume $d\mathbf{p} d\mathbf{q}$ dello spazio delle fasi. Per N punti materiali:

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= \prod_{i=1}^{3N} dp_i , \\ d\mathbf{q} &= \prod_{i=1}^{3N} dq_i , \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

cioè, specifichiamo un ensemble dando la densità di sistemi nello spazio delle fasi (spazio Γ). Diremo che i sistemi sono rappresentati in senso statistico dall'ensemble $P(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

La media sull'ensemble di una certa quantità $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ è dunque definita come:

$$\bar{f} = \frac{\int f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) P(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{\int P(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q}} . \quad (3.3.3)$$

Volendo soddisfare la richiesta che la media sull'ensemble non dipenda dal tempo, bisogna imporre che $\partial P / \partial t = 0$. Inoltre, vogliamo anche che il numero di stati sia costante lungo la traiettoria nello spazio delle fasi; per questo scriviamo un'equazione di continuità per P :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (P \mathbf{v}) = 0 , \quad (3.3.4)$$

dove \mathbf{v} è la velocità e $\vec{\nabla} \cdot$ denota l'operatore divergenza nello spazio delle fasi $6N$ -dimensionale. Esplicitando la divergenza troviamo:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial q_i} (P \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} (P \dot{p}_i) \right] = 0 , \quad (3.3.5)$$

ed esplicitando le derivate dentro la sommatoria:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_i \left[\frac{\partial P}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P}{\partial p_i} \dot{p}_i + P \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \right] = 0 . \quad (3.3.6)$$

Il termine in parentesi tonde è identicamente nullo; infatti, dalle equazioni di Hamilton:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 , \quad (3.3.7)$$

poiché:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} . \quad (3.3.8)$$

Sostituendo otteniamo il *teorema di Liouville*:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial P}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] \equiv \frac{dP}{dt} = 0 . \quad (3.3.9)$$

Il teorema di Liouville afferma sostanzialmente che il tasso di variazione di P lungo una linea di flusso è zero. Avevamo precedentemente richiesto, affinché un ensemble fosse una soddisfacente rappresentazione di un sistema in equilibrio, che il valore della densità della funzione $P(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ fosse indipendente dal tempo in ogni punto dello spazio delle fasi. Imponendo $\partial P/\partial t = 0$ in accordo con questa richiesta nella (3.3.9) si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial P}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 , \quad (3.3.10)$$

o:

$$\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} P = 0 . \quad (3.3.11)$$

cioè il sistema si muove su una superficie a P costante.

Un modo semplice di costruire un ensemble in equilibrio è di avere P inizialmente distribuito uniformemente in tutto lo spazio delle fasi. In questo modo, si ha che $\partial P/\partial q_i$ e $\partial P/\partial p_i$ sono ambedue singolarmente nulli e, dalla (3.3.9), si ottiene che l'ensemble così scelto è uniforme.

Una condizione ancora più generale per l'equilibrio statistico è di prendere P come funzione solamente di certe quantità che sono costanti del moto del sistema. Sia α una quantità, come ad esempio l'energia, costante del moto, cioè tale che $\partial \alpha/\partial t = 0$. Se $\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ è una costante del moto, il sistema si muove lungo una superficie con α costante e, poichè P è stata scelta come funzione unicamente di α , ciò implica che il sistema si muove lungo una superficie con P costante. Dunque la (3.3.11) è verificata, e $\partial P/\partial t = 0$ è consistente con il teorema di Liouville.

3.4 Entropia in Meccanica Statistica

Dai principi della termodinamica sappiamo che l'entropia S ha le seguenti proprietà:

1. dS è un differenziale esatto ed è uguale a $\delta Q/T$ per un processo reversibile, dove δQ è la quantità di calore scambiata dal sistema;
2. l'entropia è additiva: $S = S_1 + S_2$. L'entropia di un sistema combinato è la somma delle entropie delle singole parti;
3. $\Delta S \geq 0$. Se lo stato di un sistema chiuso è dato macroscopicamente ad un certo istante, lo stato più probabile ad un certo istante successivo è uno con entropia maggiore od uguale.

Definiamo l'entropia σ di un sistema (in Meccanica Statistica classica) in equilibrio come:

$$\sigma = \log \Delta\Gamma , \quad (3.4.1)$$

dove $\Delta\Gamma$ è il volume dello spazio delle fasi accessibile al sistema, per esempio il volume corrispondente a valori dell'energia compresi tra E_0 e $E_0 + \delta E$. Notiamo che le variazioni di entropia sono indipendenti dalle unità usate per misurare $\Delta\Gamma$. Poichè $\Delta\Gamma$ è un volume nello spazio delle fasi di N punti materiali, esso ha le dimensioni:

$$(\text{Momento} \times \text{Lunghezza})^{3N} = (\text{Azione})^{3N} .$$

Sia h l'unità di azione; allora $\Delta\Gamma/h^{3N}$ è una quantità adimensionale. Se definiamo:

$$\sigma = \log \frac{\Delta\Gamma}{h^{3N}} = \log \Delta\Gamma - 3N \log h , \quad (3.4.2)$$

osserviamo che per le variazioni si ha:

$$\delta\sigma = \delta \log \Delta\Gamma , \quad (3.4.3)$$

indipendentemente dalle unità di misura. Osserviamo immediatamente che σ è additiva. Consideriamo un sistema costituito da due parti, uno con N_1 punti materiali, l'altro con N_2 punti materiali. Allora:

$$N = N_1 + N_2 , \quad (3.4.4)$$

e lo spazio delle fasi del sistema combinato è il prodotto degli spazi delle fasi delle singole parti:

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_1 \Delta\Gamma_2 . \quad (3.4.5)$$

L'addittività dell'entropia segue direttamente:

$$\sigma = \log \Delta\Gamma = \log(\Delta\Gamma_1 \Delta\Gamma_2) = \log \Delta\Gamma_1 + \log \Delta\Gamma_2 = \sigma_1 + \sigma_2 . \quad (3.4.6)$$

3.5 Esempi elementari di distribuzione di probabilità ed entropia

Consideriamo un sistema di N particelle indipendenti, aventi ciascuna un momento magnetico μ che può essere parallelo o antiparallelo rispetto ad un campo magnetico esterno H . L'energia di ogni particella è $E = \pm\mu H$, a seconda dell'orientazione dei momenti magnetici. Calcoliamo la distribuzione di probabilità del momento magnetico totale M del sistema in assenza di campo magnetico esterno. In queste condizioni, la proiezione di ogni momento può essere con uguale probabilità $\pm\mu$. Siamo interessati alle configurazioni che risultano in $\frac{1}{2}(N+n)$ momenti positivi e $\frac{1}{2}(N-n)$ momenti negativi. Osserviamo innanzitutto che la probabilità (normalizzata) di uno specifico microstato è $(1/2)^N$, poiché per ogni singolo momento c'è una probabilità di $1/2$ che abbia l'orientamento richiesto, e ci sono N particelle indipendenti. Inoltre, le N particelle possono essere riordinate fra di loro in $N!$ modi, molti dei quali non risultano in configurazioni distinte nei gruppi di $\frac{1}{2}(N+n)$ e $\frac{1}{2}(N-n)$ particelle. I riordinamenti interni a questi due gruppi, infatti, non sono considerati distinti e sono rispettivamente $[\frac{1}{2}(N+n)]!$ e $[\frac{1}{2}(N-n)]!$. Perciò, il numero totale $W(n)$ di configurazioni indipendenti che risultano in un momento netto $M = n\mu$ è:

$$W(n) = \frac{N!}{[\frac{1}{2}(N+n)]![\frac{1}{2}(N-n)]!} , \quad (3.5.1)$$

e la probabilità $w(M)$ di un momento netto $M = n\mu$ è ottenuta moltiplicando la (3.5.1) per la probabilità $(1/2)^N$ di una specifica configurazione, cioè:

$$w(M) = w(n\mu) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{[\frac{1}{2}(N+n)]![\frac{1}{2}(N-n)]!} . \quad (3.5.2)$$

Per grandi valori dei fattoriali si può usare l'approssimazione di Stirling:

$$\begin{aligned} x! &\simeq \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} , \\ \log x! &\simeq \frac{1}{2} \log(2\pi x) + x \log x - x = \frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x . \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Dunque, prendendo i logaritmi di entrambi i membri e usando la (3.5.3), la (3.5.2) diventa:

$$\begin{aligned} \log w(M) &\simeq -N \log 2 - \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(N + \frac{1}{2}\right) \log N \\ &\quad - \frac{1}{2}(N+n+1) \log \left[\frac{N}{2} \left(1 + \frac{n}{N}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}(N-n+1) \log \left[\frac{N}{2} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \right] . \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Per $n \ll N$, possiamo sviluppare in serie di Taylor:

$$\log \left(1 \pm \frac{n}{N}\right) = \pm \frac{n}{N} - \frac{n^2}{2N^2} + \dots \quad (3.5.5)$$

e dunque:

$$\log w(M) \simeq -\frac{1}{2} \log 2\pi - N \log 2 + \left(N + \frac{1}{2}\right) \log N \quad (3.5.6)$$

$$- \frac{1}{2}(N + n + 1) \left[\log N - \log 2 + \frac{n}{N} - \frac{n^2}{2N^2} \right] \\ - \frac{1}{2}(N - n + 1) \left[\log N - \log 2 - \frac{n}{N} - \frac{n^2}{2N^2} \right]. \quad (3.5.7)$$

$$(3.5.8)$$

Sommando i termini simili, otteniamo:

$$\log w(M) \simeq -\frac{1}{2} \log N + \log 2 - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{n^2}{2N} + \frac{n^2}{2N^2}. \quad (3.5.9)$$

Il termine $n^2/2N^2$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto agli altri termini, e dunque può essere trascurato. Otteniamo perciò:

$$\log w(M) \simeq -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\pi N}{2} \right) - \frac{n^2}{2N}, \quad (3.5.10)$$

e dunque:

$$w(M) \simeq \left(\frac{2}{\pi N} \right)^{1/2} e^{-n^2/2N}. \quad (3.5.11)$$

Osserviamo da questo risultato che la magnetizzazione ha una distribuzione Gaussiana centrata nello zero. Pertanto il valor medio della magnetizzazione in assenza di campo esterno è zero. La distribuzione di probabilità ha il suo unico massimo in questo punto, per cui il valore più probabile coincide con il valor medio. Riprendiamo in considerazione l'espressione della distribuzione di probabilità (3.5.2) e calcoliamo $\sum_{n=-N}^N w(n)$: posto $\frac{1}{2}(N - n) = k$ si ha

$$\sum_{n=-N}^N w(n) = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{(N-k)!k!} \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{N-k} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^N = 1. \quad (3.5.12)$$

Concludiamo che la distribuzione di probabilità risulta già normalizzata. Per calcolarne media e varianza, introduciamo la *funzione generatrice* di una distribuzione di probabilità. Se $p(k)$ è una distribuzione di probabilità normalizzata, si definisce funzione generatrice di $p(k)$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^N p(k) x^k. \quad (3.5.13)$$

Si hanno le seguenti relazioni:

- $F(1) = 1$ (condizione di normalizzazione);
- $F'(1) = \bar{k}$;
- $F''(1) = k(k-1) = k^2 - k$.

Nel caso della $w(k)$ data da (3.5.2) generalizzata a p, q qualunque (purché $q = 1 - p$), si ha:

$$F(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (px)^k (1-p)^{N-k} = (px - p + 1)^N, \quad (3.5.14)$$

e dunque:

$$\bar{k} = F'(1) = Np, \quad (3.5.15)$$

$$\Delta k = \sqrt{Npq}. \quad (3.5.16)$$

Allora l'entropia σ , definita come $\sigma(k) = \log w(k)$ sarà:

$$\sigma(k) = \log N! - \log k! - \log(N-k)! + k \log p + (N-k) \log(1-p). \quad (3.5.17)$$

Lo stato più probabile corrisponde a quello caratterizzato da entropia massima (il che giustifica l'uso del logaritmo, in quanto è iniettivo e dunque il punto di massimo di $w(k)$ coincide col punto di massimo di $\sigma(k)$). Imponiamo pertanto che $\sigma'(k) = 0$, riscrivendo prima l'entropia usando l'approssimazione di Stirling (3.5.3):

$$\sigma(k) = \log N! - \log k! - k + (k-N) \log(N-k) - (N-k) + k \log p + (N-k) \log(1-p). \quad (3.5.18)$$

Dunque:

$$\sigma'(k) = -\log k - 1 - 1 + \log(N-k) + 1 + 1 + \log p - \log(1-p) = \log \frac{p}{1-p} - \log \frac{k}{1-k} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.5.19)$$

da cui:

$$\frac{p}{1-p} = \frac{k}{1-k} \quad \implies \quad k_{\max} = Np = \bar{k}. \quad (3.5.20)$$

Dunque il valore in cui l'entropia è massima coincide con il valor medio della distribuzione $w(k)$. Sviluppiamo adesso l'entropia in serie di Taylor intorno al punto $k = \bar{k}$:

$$\sigma(k) = \sigma(\bar{k}) + \frac{1}{2} \sigma''(\bar{k})(k - \bar{k})^2 + \dots \quad (3.5.21)$$

dove non figura la derivata prima perché abbiamo imposto che \bar{k} sia un massimo di $\sigma(k)$. Allora la probabilità $w(k)$, sarà:

$$w(k) = e^{\sigma(k)} = A \exp \left[\frac{1}{2} \sigma''(\bar{k})(k - \bar{k})^2 \right], \quad (3.5.22)$$

dove:

$$\sigma''(\bar{k}) = -\frac{1}{N-k} - \frac{1}{k} \Big|_{k=\bar{k}} = -\frac{1}{Npq}. \quad (3.5.23)$$

Quindi, in conclusione:

$$w(k) = A e^{-(k-\bar{k})^2/2Npq}. \quad (3.5.24)$$

A è la costante di normalizzazione. Sapendo che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ si trova:

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi Npq}}, \quad (3.5.25)$$

che sostituita in $w(k)$ restituisce:

$$w(k) = \sqrt{\frac{1}{2\pi Npq}} \exp\left(-\frac{(k - Np)^2}{2Npq}\right) . \quad (3.5.26)$$

Nel caso degli spin magnetici, se il campo magnetico esterno H è zero, il valore del momento magnetico totale netto n più probabile è zero, che può essere raggiunto in $w(0)$ modi possibili, cioè:

$$w(0) = \frac{N!}{\left[\left(\frac{N}{2}\right)!\right]^2} . \quad (3.5.27)$$

In questo caso, l'entropia sarà data da:

$$\sigma(0) = \log(w(0)) = N \log 2 . \quad (3.5.28)$$

3.6 Calcolo dell'entropia di un gas perfetto tramite gli ensemble microcanonici

Supponiamo di avere un ensemble microcanonico di N punti materiali non interagenti di massa M confinati nel volume V aventi energia compresa tra $U - \delta U$ e U . Il volume nello spazio delle fasi sarà dato da:

$$\Delta\Gamma = \int dq_1 \cdots dq_{3N} \int dp_1 \cdots dp_{3N} = V^N \int dp_1 \cdots dp_{3N} , \quad (3.6.1)$$

dove l'integrale dei momenti è da calcolare tenendo presente il vincolo:

$$U - \delta U \leq \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{3N} p_i^2 \leq U , \quad (3.6.2)$$

per come l'ensemble è stato costruito. Il volume accessibile nello spazio dei momenti è quello di un guscio di spessore $(\delta U)(M/2U)^{1/2}$ in una ipersfera di raggio $(2MU)^{1/2}$. È possibile provare che per un sistema costituito da un numero abbastanza grande di punti materiali il valore di $\log \Delta\Gamma$ non dipende dal valore di δU (se lo fosse, avremmo il problema di decidere un valore di δU). Dimostriamo questo fatto. Scriviamo:

$$V(R) = CR^\nu , \quad (3.6.3)$$

per indicare il volume di una sfera ν -dimensionale di raggio R . Il volume di un guscio di spessore s alla superficie dell'ipersfera è:

$$V_s = V(R) - V(R - s) = C[R^\nu - (R - s)^\nu] = CR^\nu \left[1 - \left(1 - \frac{s}{R} \right)^\nu \right] , \quad (3.6.4)$$

o, per definizione della funzione esponenziale:

$$V_s \simeq CR^\nu [1 - e^{-s\nu/R}] . \quad (3.6.5)$$

Pertanto se ν è sufficientemente grande, e $s\nu \gg R$, V_s è praticamente il volume $V(R)$ dell'intera ipersfera. Possiamo pertanto sostituire il vincolo (3.6.2) con la condizione di rilassamento:

$$0 \leq \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{3N} p_i^2 \leq U . \quad (3.6.6)$$

In altre parole, vogliamo valutare il volume di una sfera $3N$ -dimensionale di raggio $(2MU)^{1/2}$. Consideriamo l'integrale:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2)} dx_1 dx_2 \cdots dx_\nu \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^\nu = \pi^{\nu/2} . \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Possiamo inoltre scrivere (usando coordinate polari):

$$I = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{\nu-1} \Omega_\nu dr = \frac{\Omega_\nu}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{(\nu-2)/2} dt = \frac{1}{2} \Omega_\nu \left(\frac{\nu}{2} - 1 \right)! , \quad (3.6.8)$$

dove $r^{\nu-1}\Omega_\nu$ denota la superficie della sfera ν -dimensionale (in particolare, Ω_ν denota l'angolo solido ν -dimensionale) e l'ultima eguaglianza sussiste perché si tratta della funzione Γ di Eulero. Uguagliando le due espressioni trovate per I troviamo:

$$\Omega_\nu = \frac{2\pi^{\nu/2}}{(\frac{\nu}{2} - 1)!} , \quad (3.6.9)$$

così che il volume della sfera è:

$$\mathcal{V} = \int_0^R \Omega_\nu dR = \frac{\pi^{\nu/2}}{(\nu/2)!} R^\nu . \quad (3.6.10)$$

Quindi, con sufficiente precisione:

$$\Delta\Gamma = V^N \mathcal{V} = V^{\nu/3} \frac{\pi^{\nu/2}}{(\nu/2)!} R^\nu , \quad (3.6.11)$$

e, usando l'approssimazione di Stirling per il fattoriale:

$$\sigma = \log \Delta\Gamma = N \log[V\pi^{3/2}(2MU)^{3/2}] - \frac{3N}{2} \log \frac{3N}{2} + \frac{3N}{2} , \quad (3.6.12)$$

dove nell'espressione di \mathcal{V} abbiamo posto $\nu = 3N$ e $R = (2MU)^{1/2}$.

Vogliamo adesso porre σ in una forma in cui possiamo esaminare l'additività. Possiamo riscrivere la (3.6.12) nella forma:

$$\sigma = N \log \left[V \left(\frac{4\pi M}{3} \right)^{3/2} \left(\frac{U}{N} \right)^{3/2} \right] + \frac{3N}{2} , \quad (3.6.13)$$

ma questa non è additiva in quanto il volume V appare nell'argomento del logaritmo. In effetti, se gli N punti materiali sono indistinguibili, non dobbiamo considerare differenti gli stati che differiscono solo per uno scambio di particelle identiche fra loro nello spazio delle fasi, cioè abbiamo sovrastimato il volume dello spazio delle fasi di un fattore $N!$ rispetto alle condizioni classiche. Prendendo in considerazione questo fattore si ha:

$$\sigma = \log \frac{\Delta\Gamma}{N!} = N \log \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi M}{3} \right)^{3/2} \left(\frac{U}{N} \right)^{3/2} e \right] + \frac{3}{2}N . \quad (3.6.14)$$

Questa formula è effettivamente additiva, in quanto solo il volume e l'energia per particella compaiono nell'argomento del logaritmo. Per completare la formula resta solo da introdurre h^{3N} come unità di volume dello spazio delle fasi, così che:

$$\sigma = \log \frac{\Delta\Gamma}{N!h^{3N}} = N \log \left[\frac{(2M)^{3/2}\pi^{3/2}e(V/N)(U/N)^{3/2}}{(\frac{3}{2})^{3/2}h^3} \right] + \frac{3}{2}N . \quad (3.6.15)$$

Qui h è la costante di Planck. Dunque l'entropia S sarà:

$$S = k\sigma \simeq kN \log \left[\frac{(2M)^{3/2}\pi^{3/2}e(V/N)(U/N)^{3/2}}{(\frac{3}{2})^{3/2}h^3} \right] + \frac{3}{2}kN , \quad (3.6.16)$$

dove k è la costante di Boltzmann. Osserviamo che:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_{V=\text{cost}} = \frac{3}{2U} kN \stackrel{!}{=} \frac{1}{T} , \quad (3.6.17)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{U=\text{cost}} = \frac{kN}{V} \stackrel{!}{=} \frac{p}{T} . \quad (3.6.18)$$

Dunque la S che abbiamo ricavato è sostanzialmente corretta, infatti ritroviamo $U = 3N_A kT/2$, cioè l'energia cinetica media di un gas perfetto e $(\partial U/\partial T) = 3R/2$, cioè il calore molare.

3.7 Ensemble canonico

Nonostante il ragionamento sugli ensemble microcanonici porti ad una formula sostanzialmente corretta, sorge il problema di fissare l'energia di un certo gas (in generale non sarà proporzionale alla temperatura come nel caso dei gas perfetti). Vogliamo fissare un ensemble a partire dalla temperatura. Sappiamo che, in un sistema t composto da due parti R, S , di cui S è una parte molto ridotta:

$$dw_t = C d\Gamma_t = c d\Gamma_S \times d\Gamma_R . \quad (3.7.1)$$

Questa relazione vale nell'approssimazione $E_S \ll E_t$. Fissato il sistema S in un particolare microstato, esistono più microstati di R che corrispondono a quel dato microstato di S . L'obiettivo è trovare la distribuzione di probabilità:

$$dw_s = C d\Gamma_s \times \Delta\Gamma_R . \quad (3.7.2)$$

Dobbiamo supporre che i due sistemi siano debolmente accoppiati, cioè il termine di interazione fra i due sistemi porti un contributo trascurabile, ossia, in termini di Hamiltoniane $H_t = H_R + H_S$. Per quanto detto prima, $\Delta\Gamma_R = \exp(\sigma_R)$. In termini di energia $E_R = E_t - E_S$ e, per l'additività dell'entropia:

$$\sigma_R(E_R) = \sigma_R(E_t - E_S) \simeq \sigma_R(E_t) + \left. \frac{\partial \sigma_R}{\partial E} \right|_{E=E_t} (-E_S) + \dots , \quad (3.7.3)$$

in quanto $E_S/E_t \ll 1$. Ricordando che $\partial S/\partial E = 1/T$, abbiamo, per l'entropia matematica $\partial \sigma/\partial E = 1/kT$:

$$\sigma_R(E_R) = \sigma_R(E_t) - \frac{E_S}{kT} + \dots \quad (3.7.4)$$

Dunque:

$$dw_s = C e^{\sigma_R(E_t)} e^{-E_S/kT} d\Gamma_S = A e^{-E_S/kT} d\Gamma_S . \quad (3.7.5)$$

In generale:

$$dw = A e^{-E/kT} d\Gamma . \quad (3.7.6)$$

A è una costante di normalizzazione che si ricava imponendo $\int dw = 1$:

$$\frac{1}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-E/kT} d\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-E/kT} \frac{dpdq}{h^{3N} N!} . \quad (3.7.7)$$

Posto $\beta = 1/kT$, definiamo dunque la funzione di partizione di Boltzmann:

$$Z(\beta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta E} d\Gamma . \quad (3.7.8)$$

Dunque la distribuzione di probabilità può essere scritta come:

$$dw = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E} \frac{dpdq}{h^{3N} N!} . \quad (3.7.9)$$

Per la trattazione termodinamica del sistema, non è necessario tenere in considerazione tutte le variabili dello spazio delle fasi, perciò vogliamo arrivare ad un'espressione del tipo:

$$dw = p(E) dE , \quad (3.7.10)$$

dove $p(E)$ è una densità di probabilità. Allora si ha:

$$dw = p(E)dE = Ae^{-E/kT} \frac{d\Gamma}{dE} dE . \quad (3.7.11)$$

La quantità $d\Gamma/dE$ rappresenta il numero di stati la cui energia è compresa tra i valori E e $E+dE$.

¹ Il numero di stati macroscopici si potrà scrivere come:

$$\Delta\Gamma \simeq \left. \frac{d\Gamma}{dE} \right|_{\bar{E}} \delta E . \quad (3.7.12)$$

Insieme alla condizione $p(\bar{E})\delta E \sim 1$, otteniamo la fluttuazione dell'energia del sistema dal valore medio \bar{E} . Ci aspettiamo che valutando la (3.7.11) in $E = \bar{E}$ si ritrovi lo stesso valore:

$$p(\bar{E})\delta E = Ae^{-\bar{E}/kT} \left. \frac{d\Gamma}{dE} \right|_{E=\bar{E}} \delta E . \quad (3.7.13)$$

Sostituendo si ottiene:

$$1 = Ae^{-\bar{E}/kT} \Delta\Gamma = Ae^{-\bar{E}/kT} e^\sigma = \frac{1}{Z} e^{-\bar{E}/kT} e^\sigma , \quad (3.7.14)$$

ricordando che $\log \Delta\Gamma = \sigma$. Da questo ricaviamo $Z(\beta)$:

$$Z(\beta) = e^{-\bar{E}/kT + \sigma} = \exp\left(\frac{-kT\sigma + \bar{E}}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\bar{E} - TS}{kT}\right) = \exp(-\beta F) . \quad (3.7.15)$$

Dove abbiamo introdotto l'*energia libera di Helmotz*:

$$F(T, V) \equiv U(S, V) - TS , \quad (3.7.16)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V = \frac{1}{T} . \quad (3.7.17)$$

Data la funzione di partizione $Z(\beta)$ è possibile calcolare l'energia media come:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta) = \frac{\int d\Gamma H e^{-\beta H}}{\int d\Gamma e^{-\beta H}} . \quad (3.7.18)$$

Dalla termodinamica sappiamo che:

$$F(T, V) = U - TS = U - \tau\sigma \quad \implies \quad \begin{cases} k\sigma = -\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V , \\ P = -\left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T . \end{cases} \quad (3.7.19)$$

Ma $F(T, V) = -kT \log Z(V, T) = \tau \log Z$. Invertendo la seconda relazione, si ha:

$$\sigma = -\frac{F}{\tau} + \frac{U}{\tau} . \quad (3.7.20)$$

¹O equivalentemente, tra 0 ed E .

E quindi:

$$\begin{aligned}
\sigma &= - \left. \frac{\partial F}{\partial \tau} \right|_V = \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau \log Z) = \log Z + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \log Z \\
&= \log Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \\
&= \log Z - \beta \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \\
&= -\frac{F}{\tau} + \frac{1}{\tau} \frac{1}{Z} \int d\Gamma H e^{-\beta H} .
\end{aligned} \tag{3.7.21}$$

Consideriamo la funzione di partizione $Z(\beta)$ e un gas descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \sum_{i=1}^N H_1^{(i)} , \tag{3.7.22}$$

cioè la somma delle Hamiltoniane di singole particelle. Allora la funzione di partizione, se trascuriamo i termini di interazione:

$$Z(\beta) \simeq \int dp_1 dq_1 e^{-\beta H_1^{(1)}} \cdots \int dp_N dq_N e^{-\beta H_1^{(N)}} \simeq Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_N \cdot C , \tag{3.7.23}$$

dove C è una costante moltiplicativa che non dipende dalla temperatura. In particolare, se come in un gas, tutte le particelle sono fra loro identiche:

$$Z(\beta) \simeq C(Z_1)^N . \tag{3.7.24}$$

Per un gas composto da N molecole che non interagiscono fra loro, si ha per una singola molecola:

$$H_1 = \sum_{j=1}^P a_j p_j^2 . \tag{3.7.25}$$

In particolare, se la molecola è monoatomica, $H_1 = p^2/2M$ e $P = 3$ e si ha $U = 3kT/2$. Se invece è biatomica :

$$H_i = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{p_\xi^2}{2I_\xi} + \frac{p_\chi^2}{2I_\chi} . \tag{3.7.26}$$

I_ξ, I_χ rappresentano le componenti del momento di inerzia della molecola. In questo caso, i gradi di libertà sono 5 e quindi $U = 5kT/2$. In generale, si è osservato sperimentalmente che a basse temperature tutti i gas si comportano come monoatomici, cioè caratterizzati da un calore specifico $3R/2$. Aumentando la temperatura, però, per molecole poliatomiche, avviene che il calore specifico passa da $3R/2$ a $5R/2$ e poi a $7R/2$, come se i gradi di libertà della molecola venissero "scongelati" dall'aumento della temperatura. Quindi si pone il problema della non costanza del numero di gradi di libertà.

Riassumendo, data la funzione di partizione di Boltzmann:

$$Z(\beta, v) = \int d\Gamma_N e^{-\beta H(p, q)} , \tag{3.7.27}$$

possiamo ricavare le quantità principali della termodinamica:

$$U(\beta, v) = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} , \quad (3.7.28)$$

$$c_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V . \quad (3.7.29)$$

Esempio 3.7.1. Consideriamo un cristallo unidimensionale costituito da N particelle materiali di massa m nelle posizioni x_1, x_2, \dots, x_N . L'Hamiltoniana del sistema è:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i \neq j} V(r_{ij}) .$$

dove $V(r_{ij})$ è il potenziale di interazione fra le particelle. Possiamo approssimare il sistema affermando che la particella i -esima interagisca solo con le particelle immediatamente adiacenti, cioè:

$$H \simeq \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_i V(|r_i - r_{i+1}|) . \quad (3.7.30)$$

Inoltre, poiché sappiamo che il potenziale ha un certo minimo corrispondente alla posizione di equilibrio, possiamo approssimarla sviluppando in serie di Taylor:

$$V(|r_i - r_{i+1}|) \simeq -V_0 + \frac{1}{2}k(r_i - r_{i+1})^2 . \quad (3.7.31)$$

Alla luce di ciò, l'Hamiltoniana diventa:

$$H \simeq \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_i \frac{1}{2}k(x_i - x_{i+1})^2 . \quad (3.7.32)$$

Otteniamo così una forma quadratica per l'Hamiltoniana. Diagonalizzando la matrice e trovando le autofrequenze, possiamo scindere il sistema in un sistema di N oscillatori armonici disaccoppiati, per cui la Hamiltoniana vale:

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{P_{\alpha}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_{\alpha}^2 X_{\alpha}^2 \right] = \sum_{\alpha=1}^N H_{\alpha} . \quad (3.7.33)$$

Per ogni α , la funzione di partizione è data da:

$$Z_{\alpha} = \int dp_{\alpha} \exp \left(-\beta \frac{P_{\alpha}^2}{2m} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dq_{\alpha} \exp \left(-\beta \frac{m\omega_{\alpha}^2}{2} q_{\alpha}^2 \right) \quad (3.7.34)$$

Allora $H = \sum_{\alpha} H_{\alpha} = \sum_{\alpha} p_{\alpha}^2/2m + H'_{\alpha}$, dove H'_{α} può assumere solo un certo numero discreto di valori. Supponiamo che tale numero sia due; chiamati E_1, E_2 suddetti possibili valori, poniamo $\Delta = E_2 - E_1$. Dato che i punti materiali sono identici, avremo $Z = (Z_1)^N$, dove:

$$Z_1 = \int dp dq \exp \left(-\beta \frac{p^2}{2m} \right) \sum \exp(-\beta H') = Z_1^{cl} \times Z' , \quad (3.7.35)$$

avendo posto $\int dp dq \sum \exp(-\beta \mathcal{H}') \equiv Z'$, in cui la somma è fatta sugli stati discreti possibili, nel nostro caso si ha:

$$Z' = \exp(-\beta E_1) + \exp(-\beta E_2) . \quad (3.7.36)$$

Calcoliamo adesso l'energia media:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = \frac{E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}} = E_1 P_1 + E_2 P_2 . \quad (3.7.37)$$

In generale:

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum e^{-\beta E_i}} \quad \Rightarrow \quad N_i = N \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} ,$$

e dunque:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1}} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} = e^{-\Delta/kT} . \quad (3.7.38)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial T} &= \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{1}{kT^2} \frac{\Delta E_2 e^{-\beta \Delta} (1 + e^{-\beta \Delta}) - \Delta e^{-\beta \Delta} (E_1 + E_2 e^{-\beta \Delta})}{(1 + e^{-\beta \Delta})^2} \\ &= \frac{N_A}{kT^2} \frac{\Delta^2 e^{-\beta \Delta}}{(1 + e^{-\beta \Delta})^2} \\ &= N_A k \left(\frac{\Delta}{kT} \right)^2 \frac{e^{-\beta \Delta}}{(1 + e^{-\beta \Delta})^2} \\ &= R \frac{e^{-\beta \Delta}}{(1 + e^{-\beta \Delta})^2} . \end{aligned}$$