VECTORES AUTOREGRESIVOS (VAR)

Luis Ortiz-Cevallos

2022-03-14

Contents

Chapter 1

INTRODUCCIÓN

1.1 El modelo de vectores autoregresivos (VAR)

Un VAR consiste en un conjunto de k variables endógenas $Y_t = \{y_{1t}, \cdots, y_{kt}\}$.

En el caso de un proceso ARMA(2,1): $Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + u_t + \theta_1 u_{t-1}$

Podemos reescribirlo como:

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ u_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior no es otra cosa que un proceso AR(1), matricialmente:

$x_t = Ax_{t-1} + Cw_t$

Este proceso tiene los siguientes supuestos:

1. $E(w_t) = 0$
2. $E(w_t w_t^\tau) = \Sigma_w$ una matriz de covarianza invariante en el tiempo la cual es definida positiva.

1.2 Función Impulso Respuesta

La función impulso respuesta es la senda que sigue una serie cuando enfrenta un shock unitario.

Es interesante por:

1. Caracteriza el comportamiento del modelo.
2. Permite la discusión de quién causa a quién.

Para una proceso AR(1) $y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$ el cual lo expresamos en MA(∞) como $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}$, su impulso respuesta es:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\epsilon_t & : & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_t & : & 0 & 0 & \phi & \phi^2 & \phi^3 & \cdots
\end{array}
$$

¿Por qué es importante definir un proceso como un MA(∞)?

1. La representación MA infinito de todo proceso es *la función impulso respuesta*
2. La función impulso respuesta es equivalente a $E_t(x_{t+h}) - E_{t-1}(x_{t+h})$ que no es otra cosa que el error de pronóstico hacia h pasos adelante.

Noten que los pronósticos para horizontes $h \geq 1$ de un proceso VAR(p) puede ser generado de manera recursiva. $x_{t+h/t} = A_1 x_{t+h-1/t} + \cdots + A_p x_{t+h-p/t}$

1.3 Vectores autoregresivos estructurales

Casi todas las variables en economía podrían considerarse hasta cierto punto endógenas. Sin embargo, prima un criterio de relevancia. Si bien es cierto que un comerciante al fijar el precio de una manzana está afectando la inflación, parece razonable suponer que la inflación es exógena al precio de las manzanas de este comerciante.

Por tanto si la inflación está dado por π y el precio de las manzanas por m tenemos el siguiente VAR

$$\alpha^+_{1,1}\pi_t + \alpha^+_{1,2}m_t = \beta^+_{1,1}\pi_{t-1} + \beta^+_{1,2}m_{t-1} + e_{\pi,t} \tag{1.1}$$
$$\alpha^+_{2,1}\pi_t + \alpha^+_{2,2}m_t = \beta^+_{2,1}\pi_{t-1} + \beta^+_{2,2}m_{t-1} + e_{m,t} \tag{1.2}$$

Sí normalizamos el VAR tenemos lo siguiente:

$$\pi_t + \alpha_{1,2}m_t = \beta_{1,1}\pi_{t-1} + \beta_{1,2}m_{t-1} + e_{\pi,t} \tag{1.3}$$
$$\alpha_{2,1}\pi_t + m_t = \beta_{2,1}\pi_{t-1} + \beta_{2,2}m_{t-1} + e_{m,t} \tag{1.4}$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas, despejamos las variables obtenemos un VAR en su forma reducida; comenzamos con la primera ecuación:

$$\pi_t = \beta_{1,1}\pi_{t-1} + \beta_{1,2}m_{t-1} + e_{\pi,t} \tag{1.5}$$
$$- \alpha_{1,2}(\beta_{2,1}\pi_{t-1} + \beta_{2,2}m_{t-1} - \alpha_{2,1}\pi_t + e_{m,t}) \tag{1.6}$$
$$\pi_t = \frac{(\beta_{1,1} - \alpha_{1,2}\beta_{2,1})}{(1+\alpha_{1,2}\alpha_{2,1})}\pi_{t-1} + \frac{(\beta_{1,2} - \alpha_{1,2}\beta_{2,2})}{(1+\alpha_{1,2}\alpha_{2,1})}m_{t-1} + \frac{1}{(1+\alpha_{1,2}\alpha_{2,1})}e_{\pi,t} - \frac{\alpha_{1,2}}{(1+\alpha_{1,2}\alpha_{2,1})}e_{m,t} \tag{1.7}$$
$$\pi_t = \gamma_\pi \pi_{t-1} + \gamma_m m_{t-1} + \gamma_{e_\pi} e_{\pi,t} + \gamma_{e_m} e_{m,t} \tag{1.8}$$