

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра информатики и вычислительной математики

Численный расчёт разрушения материалов под циклическими динамическими нагрузками

Выполнил:

студент группы Б05-902

Черников Тимофей Антонович

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., доцент

Голубев Василий Иванович

Москва, 2023

Аннотация

В работе описана модель расчета усталостного повреждения материала, использующая критерий усталости SWT и метод спектральных элементов. Проведены расчеты разрушений при разных амплитудах нагружения, сделано сравнение с использованием критерия SWT напрямую. Проведена серия симуляций для тестирования влияния шага обновления повреждений на качество результата. Также проведены тесты на устойчивость метода к нерегулярностям в сетке. Из результатов сделан вывод об оптимальных значениях параметров модели.

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Введение | 5 |
| 1. Постановка задачи | 7 |
| 1.1. Метод спектральных элементов. | 8 |
| 1.2. Расчет напряжений. | 9 |
| 1.3. Расчет повреждений. | 9 |
| 1.4. Предмет исследования | 12 |
| 2. Результаты симуляции | 13 |
| 2.1. Расчет повреждений в высоком разрешении | 13 |
| 2.2. Влияние $\Delta\psi$ на результат симуляции | 16 |
| 2.3. Влияние неровностей в меше на результат симуляции | 19 |
| 2.4. Расчет разных амплитуд нагружения | 22 |
| Заключение | 27 |
| Список использованных источников | 28 |

Обозначения и сокращения

| | |
|--------------------|--|
| u | малое смещение области материала |
| v | скорость среды |
| ρ | плотность |
| E | модуль Юнга |
| ν | коэффициент Пуассона |
| ε | тензор деформации |
| λ, μ | параметры Ламе |
| σ | тензор напряжений |
| $\tilde{\sigma}$ | главное напряжение |
| ψ | параметр повреждений |
| ΔN | число нагружений |
| $\Delta\psi$ | порог повреждений |
| σ_B | статический предел прочности |
| σ_u | классический предел усталости |
| $\tilde{\sigma}_u$ | предел усталости при СВМУ |
| МЦУ | малоцикловая усталость (от $N \sim 10^3$) |
| МНЦУ | многоцикловая усталость (от $N \sim 10^5$) |
| СВМУ | сверхмногоцикловая усталость (от $N \sim 10^8$) |

Введение

Усталостное разрушение - процесс деградации материала, вызванный циклическими нагрузками, действующими в течение продолжительного времени. Разрушение происходит из-за постепенного накопления локальных дефектов. Анализ усталостного разрушения - сопутствующая задача при производстве механических компонентов, подвергающихся воздействию циклических нагрузок и концентрации напряжений. Численное моделирование усталостного разрушения имеет широкое применение для количественной оценки и прогнозирования усталостной долговечности компонента. Для расчета напряжений внутри объекта и моделирования развития усталостных трещин существует несколько методов, такие как метод граничных элементов (BEM) [1], безсеточные методы (meshless) [2,3], конечно-разностный метод (FDM) [4], метод конечных элементов (FEM) [5] и метод спектральных элементов [6]. Для оценки числа циклических нагружений до разрушения объекта используется критерий (stress-based criteria). Большинство критериев основано на S-N кривых, строящихся по результатам испытаний материала. Эти критерии могут использовать как амплитуды цикла нагружения - главные напряжения, октаэдрические напряжения и т.д. [7,8], так и учитывающие касательные и нормальные напряжения на критической плоскости [9]. В данной работе был реализован метод, основанный на [10]. В нем используется метод спектральных элементов для расчета напряжений и критерий усталостного разрушения использующий главные напряжения. Преимущество метода спектральных элементов в том что, как правило с его помощью можно достичь более точных результатов с меньшим временем вычисления, чем используя метод конечных элементов, однако для него сложнее смоделировать сложную геометрию.

Вкратце опишем метод. Расчет выполняется итеративно. Сначала рассчитывается прохождение звуковых волн через материал и возникаю-

щие в нем напряжения. Из напряжений определяется режим усталостного разрушения и скорость разрушения материала. Из этого рассчитывается, сколько должно пройти циклов нагружения, прежде чем разрушения превысят порог разрушений, существенно изменив свойства материала и распределение напряжений в нем. Рассчитывается картина повреждений, и новые свойства материала. На этом итерация завершается и на новом материале запускается следующая.

1. Постановка задачи

Первичная задача - расчёт напряжений в материале. Напряжения возникают результате прохождения пространственной упругой волны через материал. Этот процесс моделируется с помощью системы

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \\
 \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \\
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\
 \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

Параметры Ламе меняются при разрушении материала, достигая околонулевых значений при полном разрушении. Однако процесс разрушения происходит гораздо медленнее, чем процесс распространения волн, поэтому параметры Ламе здесь считаются постоянными. Плотность не меняется.

Коэффициенты λ и μ выражаются через модуль Юнга:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\
 \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}
 \end{aligned} \tag{2}$$

1.1. Метод спектральных элементов.

Программа для расчета напряжений написана на языке C++ с использованием библиотеки MFEM [11]. Для решения уравнения (3) используется метод Ньюмарка [12] с $\beta = 0$ и $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\ddot{u}^{n+1} &= M^{-1} [f^n - Ku] \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t \dot{u}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}^n \\ \dot{u}^{n+1} &= \dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n+1}]\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь M - матрица массы, K - матрица упругости. В меше все элементы - четырехугольники, из-за чего матрица массы имеет диагональный вид и ее обращение тривиально. Используются многочлены Лежандра в качестве базисных функций и квадратура Гаусса-Лобатто. Для расчетов используется метод второго порядка, т.е. элемент аппроксимируется в 9 точках. Для МСЭ характерно использование бóльших порядков [13], но в данной задаче это оказалось нецелесообразно, поскольку параметры материала задаются поэлементно и повышение порядка даст небольшое уточнение амплитуды колебаний, но практически не повлияет на картину повреждений, тогда как уменьшение размера элемента позволит точнее определить рост трещины.

1.2. Расчет напряжений.

Для расчета повреждений используется главное напряжение:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (4)$$

На основе него рассчитывается эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_{\max}(\tilde{\sigma}_{\max} - \tilde{\sigma}_{\min})}{2}} \quad (5)$$

Где $\tilde{\sigma}_{\max}$ и $\tilde{\sigma}_{\min}$ - максимальное и минимальное значения $\tilde{\sigma}$ соответственно в течение цикла нагружения. Для их расчета проводится симуляция нескольких циклов нагружения до установления режима одинаковых колебаний и значения σ_{\min} и σ_{\max} берутся из соответствующих циклов. Используются значения $\tilde{\sigma}_{\min}$ и $\tilde{\sigma}_{\max}$ в центрах элементов. Из получившегося значения σ_{eq} рассчитывается скорость разрушения материала.

1.3. Расчет повреждений.

Для расчета разрушений используется основанный на напряженном состоянии (stress-based) критерий, который описывает усталостное разрушение, связанное с развитием микро трещин нормального отрыва. Этот критерий является модифицированным критерием Smith-Watson-Topper (SWT) [15], в котором повреждения определяются амплитудой максимальных растягивающих напряжений. В зависимости от напряжений внутри материала в процессе нагружения, разрушение происходит в разных режимах. Чем больше напряжение, тем меньше нужно циклов нагружения для разрушения материала. На рисунке (1) изображено схематичное изображение кривой Веллера, описывающей зависимость необходимого напряжения при нагружении от числа нагружений до разрушения материала. При малых N , предел напряжения практически не меняется и близок к σ_B . При N

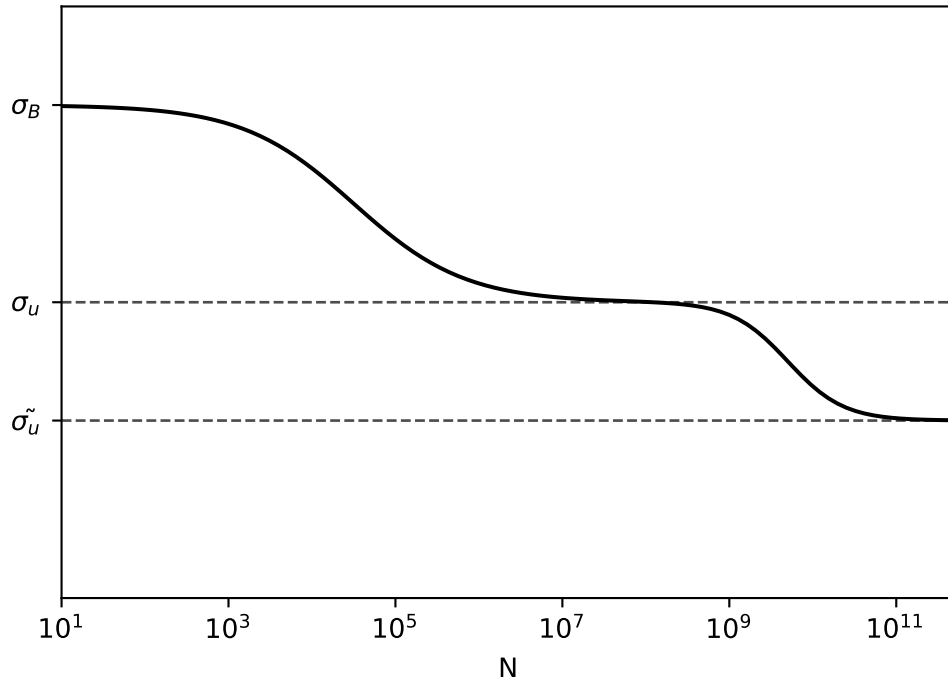


Рисунок 1 – Схематичное изображение кривой Веллера для металлов.
Источник - [14]

порядка 10^3 начинается режим МЦУ. В этом случае B рассчитывается как

$$B_L = 10^{-3} \frac{\left(\frac{\sigma_{eq} - \sigma_u}{\sigma_B - \sigma_u} \right)^{1/\beta_L}}{2(1 - \gamma)} \quad (6)$$

При N больших 10^7 разрушение происходит в режиме СВМУ, при этом B рассчитывается [15] как

$$B_V = 10^{-8} \frac{\left(\frac{\sigma_{eq} - \tilde{\sigma}_u}{\sigma_u - \tilde{\sigma}_u} \right)^{1/\beta_V}}{2(1 - \gamma)} \quad (7)$$

Режим определяется исходя из амплитуды напряжений:

$$B = \max(B_L, B_V) \quad (8)$$

ψ - параметр, характеризующий степень поврежденности материала, принимает значения от 0 до 1. Он описывается уравнением:

$$\frac{d\psi}{dN} = B \frac{\psi^\gamma}{1 - \psi^\alpha} \quad (9)$$

Где α и γ - параметры модели, определяющие скорость процесса развития усталостных повреждений. Взяв $\gamma = 1 - \alpha$ решим это уравнение и получим выражение:

$$\frac{1}{2\alpha} (1 - \psi^\alpha)^2 \Big|_{\psi_{\text{новое}}}^{\psi_{\text{пред}}} = B \Delta N \quad (10)$$

Выразим формулу для $\psi_{\text{новое}}$

$$\psi_{\text{новое}} = \left(1 - \sqrt{\left(1 - \psi_{\text{пред}}^{1-\gamma} \right)^2 - 2(1 - \gamma) \Delta N B} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (11)$$

При этом, ΔN - число нагружений, которые перенес элемент. В предположении, что циклы нагружения не отличались существенно, для расчета ΔN можно воспользоваться формулой (11), подставив $\psi_{\text{новое}}$. В качестве него обычно берется $\psi_{k,\text{пред}} + \Delta\psi$ и $\Delta\psi$ подбирается исходя из нужной точности расчетов.

$$\Delta N_k = \frac{1}{2\alpha B_k} (1 - \psi^\alpha)^2 \Big|_{\psi_{k,\text{новое}}}^{\psi_{k,\text{пред}}} \quad (12)$$

$\Delta\psi$ может быть как константой в течение всей симуляции, так и меняться в зависимости от поврежденности конкретного элемента. Получив для каждого элемента ΔN_k берем

$$\Delta N = \min_k \Delta N_k \quad (13)$$

И подставив полученное ΔN в (11) получаем повреждения. Затем обновляем материал с учетом повреждений. Формула для модуля Юнга с учетом повреждений:

$$E = E_0 (1 - \psi) (\theta(\psi^* - \psi) + 10^{-3}) \quad (14)$$

Получив обновлённый модуль Юнга, рассчитываем λ и μ по (11). Затем вышеописанный расчет проводится на обновленном материале, и т.д.

1.4. Предмет исследования

Моделируемая область представляет собой пластину со стороной 3мм с отверстием в центре 1мм в диаметре. От верхней и нижней границ идут волны, сходящиеся рядом с отверстием, из-за чего по краям отверстия возникают напряжения, большие, чем в остальном меше и от отверстия начинают расти повреждения.

Для симуляции генерируется сетка из четырехугольников, имеющая большее разрешение рядом с отверстием, в области распространения трещин. Поскольку отверстие имеет круглую форму, это приводит к тому, что элементы не могут быть одинакового размера, и как видно на рисунке(2) элементы близко к углам меша вытягиваются. Это не является проблемой, поскольку повреждения не возникают в этой области. Меш, изображенный на рисунке аналогичен используемому в дальнейших расчетах, но с меньшим разрешением (для более ясной видимости).

Заданные граничные условия - боковые границы закреплены по оси X, свободны по оси Y, верхняя и нижняя закреплены по оси X, к оси Y прикладывается сила, граница отверстия свободна.

Поскольку на каждой итерации необходимо провести несколько циклов нагружения материала и получить картину напряжений, каждая итерация требует существенных вычислительных затрат. Для ускорения симуляции итерация нагружений начинается не с ненагруженной пластины, а с предыдущего поля напряжений, но уже с новым материалом, что позволяет быстрее достичь одинаковых циклов нагружения.

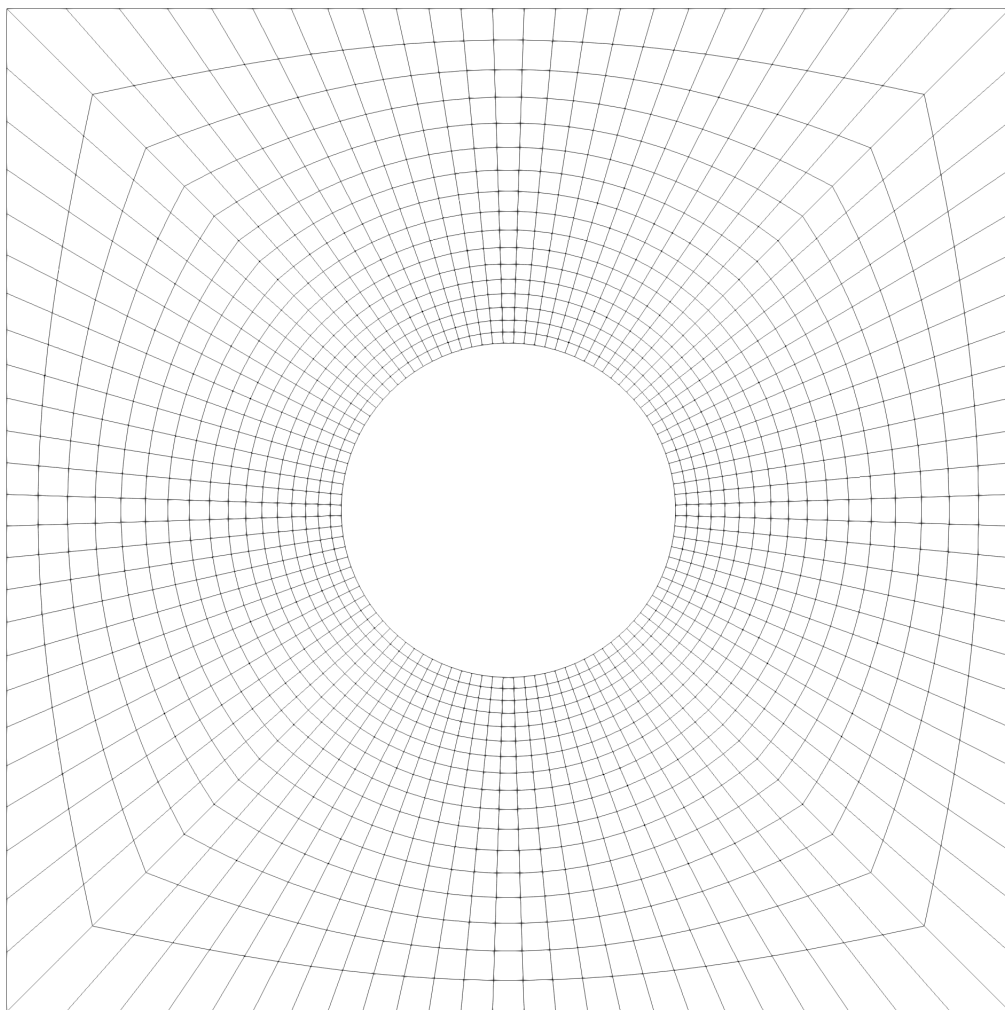


Рисунок 2 – Меш, с уменьшенным разрешением

2. Результаты симуляции

Были проведены расчеты циклического нагружения пластины с отверстием, с возникновением и развитием трещиноподобных зон поврежденности. Нагружение проводилось с коэффициентом асимметрии $K=-1$ (реверсивный цикл). Расчеты проводились для материала взятого из [10]. В таблице (1) представлены параметры материала

2.1. Расчет повреждений в высоком разрешении

Для этого расчета использовалась $\Delta\psi = 0.1$.

На рисунке изображен меш размером 600x105 элементов (600 элемен-

| | |
|--------------------|-----------------------|
| E_0 | 116ГПа |
| ν | 0.32 |
| λ | 78ГПа |
| μ | 44ГПа |
| ρ | 4500кг/м ³ |
| β_L | 0.31 |
| β_V | 0.27 |
| α | 0.5 |
| γ | 0.5 |
| ψ^* | 0.98 |
| σ_u | 337МПа |
| $\tilde{\sigma}_u$ | 250МПа |
| σ_B | 1160МПа |

Таблица 1 – Параметры материала и симуляции

тов в окружности, 105 элементов от края отверстия до внешней границы). Максимальное напряжение составило 550 МПа. До изображенного момента на рисунке 4 к пластине было приложено $2.6 \cdot 10^6$ циклов нагружений.

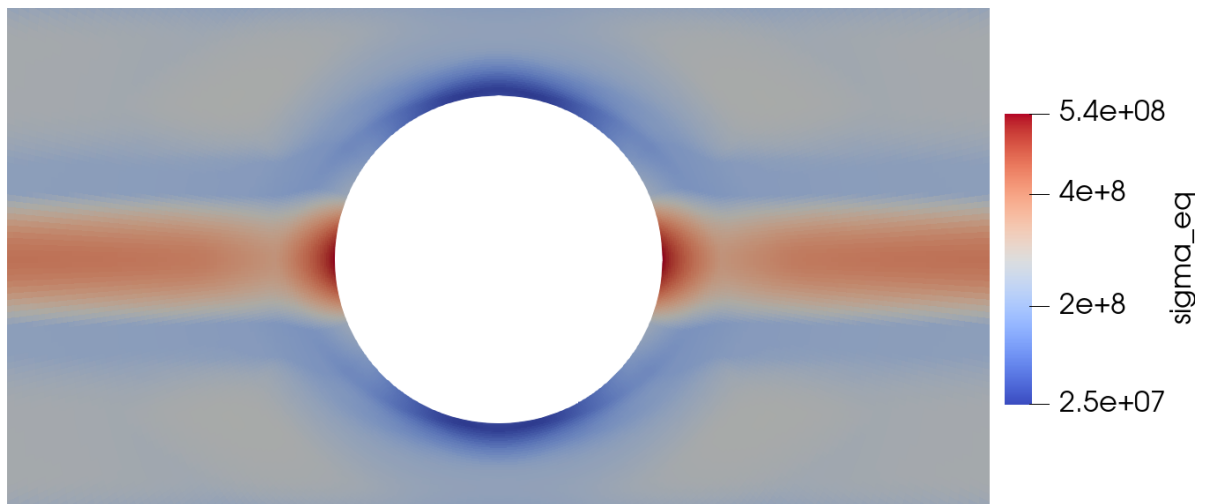


Рисунок 3 – Напряжения - σ_{eq} , Па

Как видно, трещина распространяется по горизонтальной линии, проходящей через центр пластины. Назовем эту линию главной осью. В дальнейших расчетах будем рассматривать повреждения именно на главной оси.

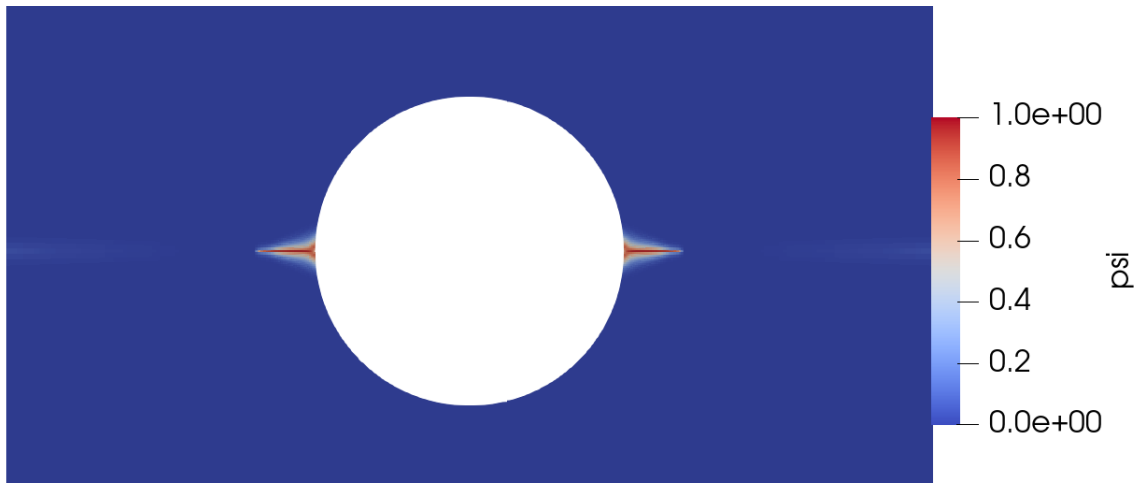


Рисунок 4 – Частичные повреждения.

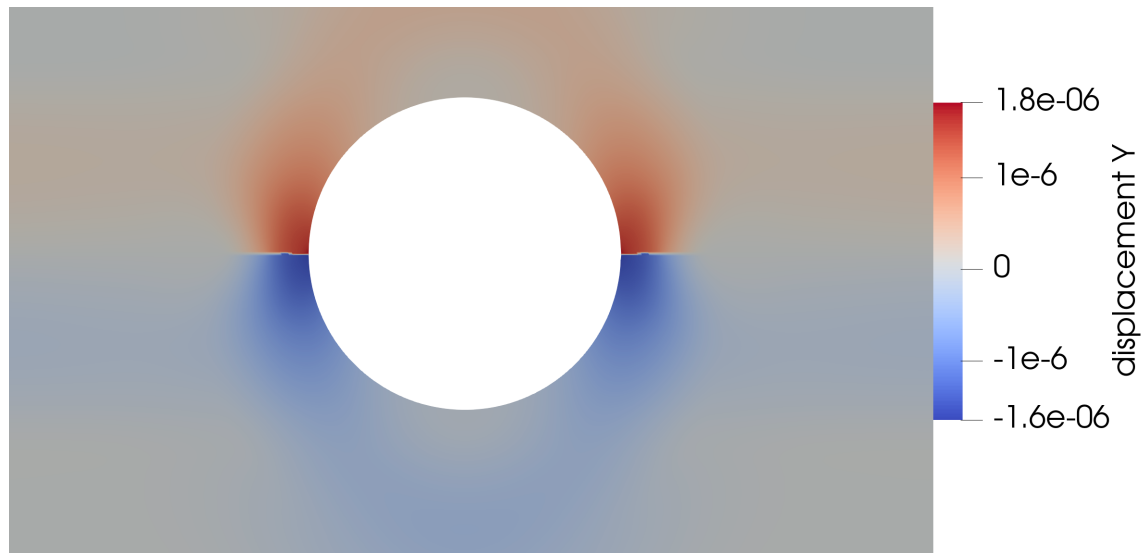


Рисунок 5 – Смещение по оси Y, м

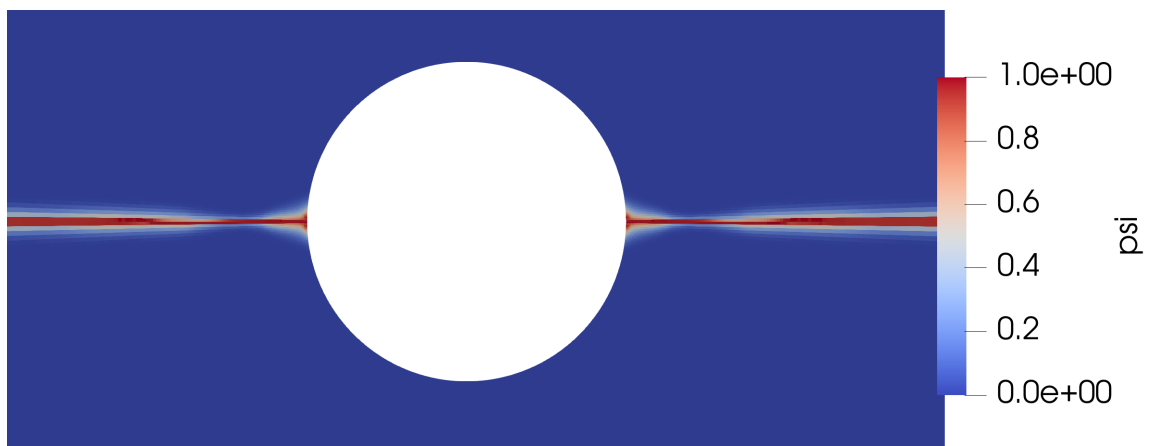


Рисунок 6 – Разрушенная пластина

2.2. Влияние $\Delta\psi$ на результат симуляции

Выбор $\Delta\psi$ обусловлен компромиссом между желаемой скоростью и точностью расчетов. Для симуляций в этой статье в-основном использовалось постоянное значение $\Delta\psi = 0.1$, его также возможно задать через функцию от ψ . Например в [10] $\Delta\psi$ не использовалась напрямую, но формула для расчёта ΔN получалась подстановкой в (12) $\psi_{\text{новое}} = 1$ и делением на 2, что в итоге дает такую формулу.

$$\Delta N_k = \frac{1}{4\alpha B_k} (1 - \psi_{k,\text{пред}}^\alpha)^2 \quad (15)$$

Посмотрим как выбор $\Delta\psi$ повлияет на результат симуляции. Для расчетов был взят меш размером 200x35 элементов с материалом, аналогичным использованному в предыдущем расчете, при этом были взяты $\Delta\psi$ равные 0.2, 0.1, 0.05 и 0.02, и также был проведен расчет с использованием (15). Для сравнения результатов был построен график зависимости $\Delta\psi$ от расстояния до центра пластины, на горизонтальной прямой, проходящей через центр (назовем это главной осью пластины). По этой прямой и проходит область повреждений.

Ожидаемо, при малых $\Delta\psi$ результаты мало отличаются друг от друга, метод из [10] оказался между $\Delta\psi = 0.1$ и $\Delta\psi = 0.2$. В таком же порядке расположены и затраты на симуляцию, как видно в таблице. Время на расчет итерации не зависит от метода, т.е. кол-во итераций прямо пропорционально времени на расчет. В качестве ε_ψ взято среднее отличие ψ в рассмотренной области, от результата расчета с $\Delta\psi = 0.02$, поскольку при дальнейшем уменьшении $\Delta\psi$ происходят изменения меньших порядков и для оценки ошибки можно считать данный расчет сошедшимся по $\Delta\psi$ для этого сценария нагружения.

Помимо точности картины разрушений для одного и того же числа

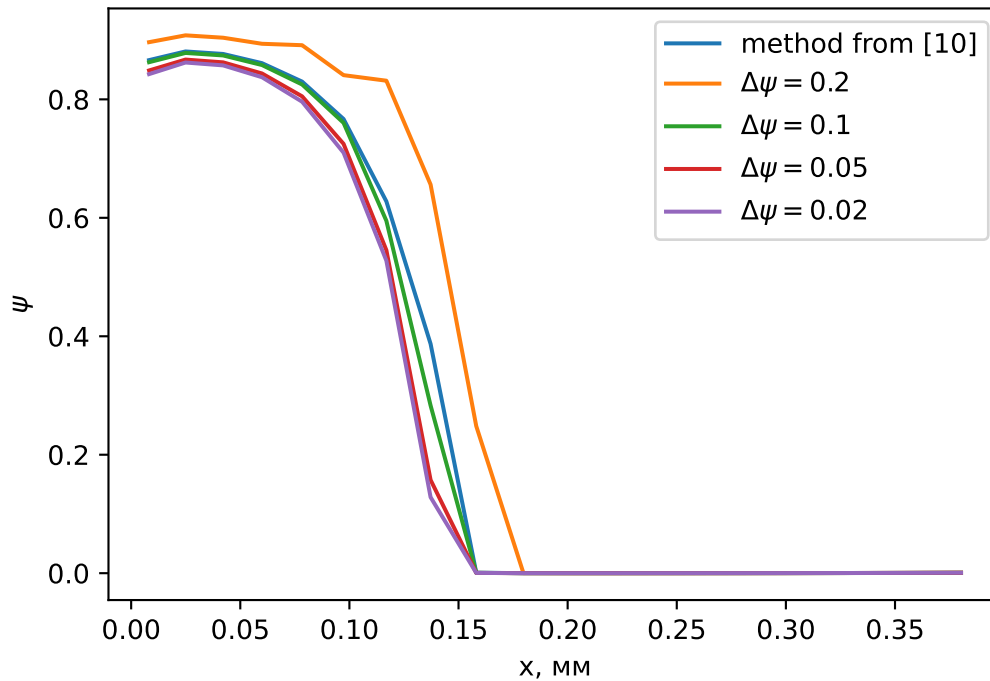


Рисунок 7 – Повреждения при разных методах расчета ΔN

| Метод | Число итераций | ε_ψ |
|---------------------|----------------|---------------------|
| $\Delta\psi = 0.2$ | 16 | $4.4 \cdot 10^{-2}$ |
| метод из [10] | 17 | $1.5 \cdot 10^{-2}$ |
| $\Delta\psi = 0.1$ | 22 | $1.1 \cdot 10^{-2}$ |
| $\Delta\psi = 0.05$ | 38 | $2.7 \cdot 10^{-3}$ |
| $\Delta\psi = 0.02$ | 89 | - |

Таблица 2 – Ошибка расчета разрушения

нагружений, рассмотрим скорость распространения трещин для этих методов. Для каждого метода было выбрано число нагружений, при котором повреждение распространилось на 0.147 мм (8 элементов). На рисунках (8) и (9) показана картина повреждений.

Картина повреждений для метода с $\Delta\psi = 0.2$ имеет небольшие отклонения из-за погрешности вызванной большим шагом $\Delta\psi$, в остальном картина повреждений для метода практически идентична, но методы по-разному оценивают необходимое число нагружений для достижения этого повреждения, что видно в таблице (3).



Рисунок 8 – Картина повреждений пластины

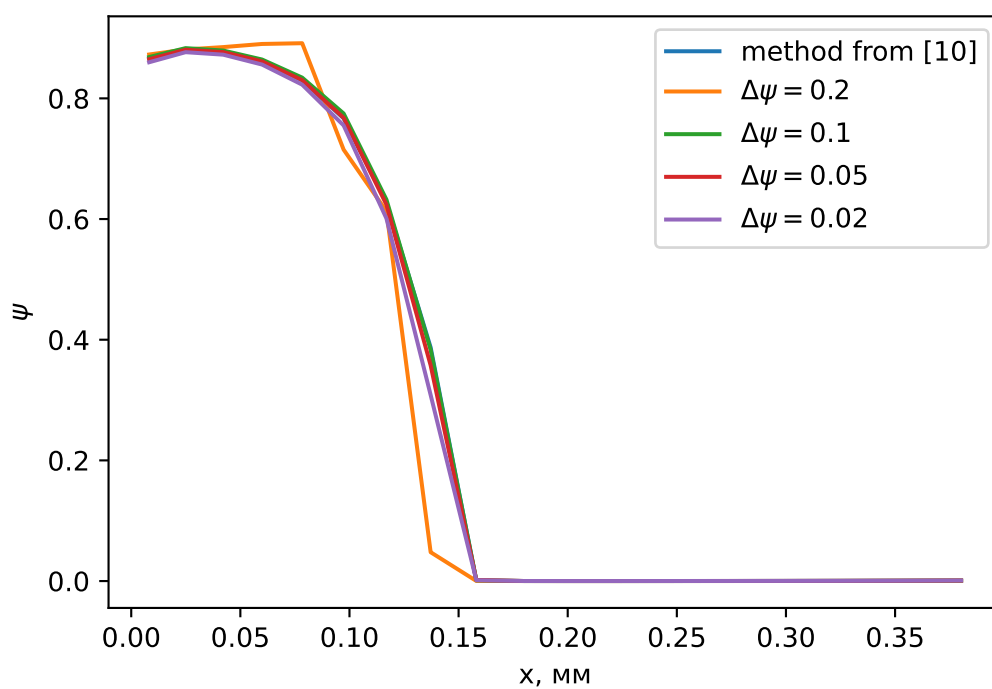


Рисунок 9 – Картина повреждений на главной оси для разных методов

Из результатов этой симуляции можно сделать вывод что при расчетах стоит использовать $\Delta\psi=0.1$ либо 0.05 , дальнейшее уменьшение $\Delta\psi$ слабо влияет на точность, при этом необходимое число итераций метода прямо пропорционально $\Delta\psi^{-1}$.

| Метод | Число итераций | N |
|---------------------|----------------|------------------|
| $\Delta\psi = 0.2$ | 11 | $4.3 \cdot 10^6$ |
| метод из [10] | 16 | $6 \cdot 10^6$ |
| $\Delta\psi = 0.1$ | 22 | $6.8 \cdot 10^6$ |
| $\Delta\psi = 0.05$ | 41 | $7.4 \cdot 10^6$ |
| $\Delta\psi = 0.02$ | 97 | $7.8 \cdot 10^6$ |

Таблица 3 – Число нагружений для распространения трещины

2.3. Влияние неровностей в меше на результат симуляции

Все предыдущие симуляции были проведены на меше, аналогичном изображенному на рисунке (2). Поскольку сетка образована концентрическими окружностями и перпендикулярными им лучами, трещины распространяются по стыкам элементов, не наискосок. При этом в случае моделирования реальной детали это свойство вполне может не выполняться. Для проверки устойчивости меша к случайным изменениям была проведена серия симуляций с неровным мешом.

Подобные тестирования проводились для уравнения теплопроводности [16]. Неровный меш был получен из обычного меша размером 200x35 случайным независимым смещением узлов сетки. Связность элементов и их количество осталось прежним, также перед проведением симуляции было проверено, что каждый элемент остался выпуклым - это необходимое свойство.

На рисунках виден процесс разрастания трещины в материале. Несмотря на неровные элементы, направление трещины не изменилось, однако рост замедлился. Было проведено несколько симуляций с разными неровными мешами, для того, чтобы понять насколько в-среднем такие неровности повлияют на оценку времени разрушения пластины.

Как видно из таблицы (4) неровности замедлили рост трещины в-

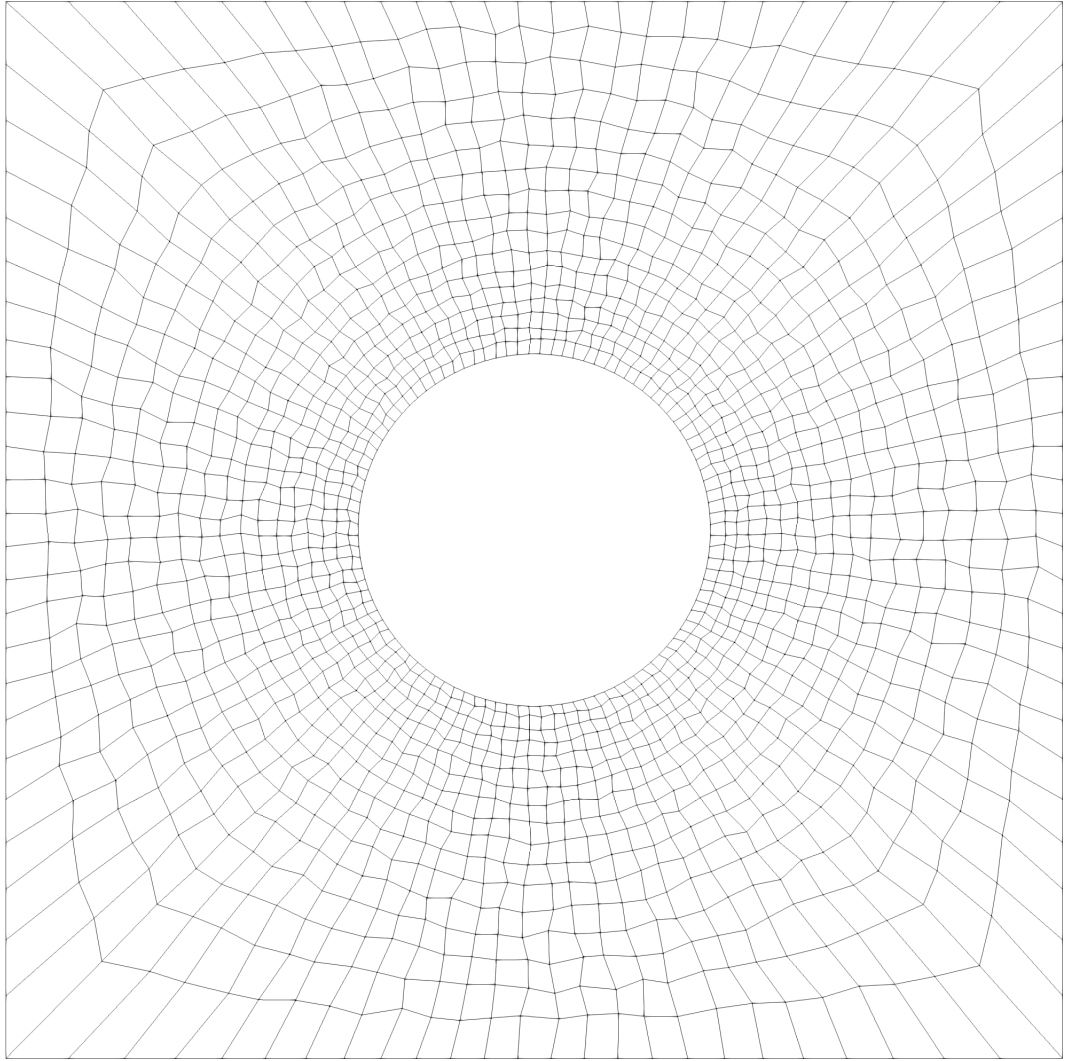


Рисунок 10 – Неровный меш



Рисунок 11 – Частичные повреждения

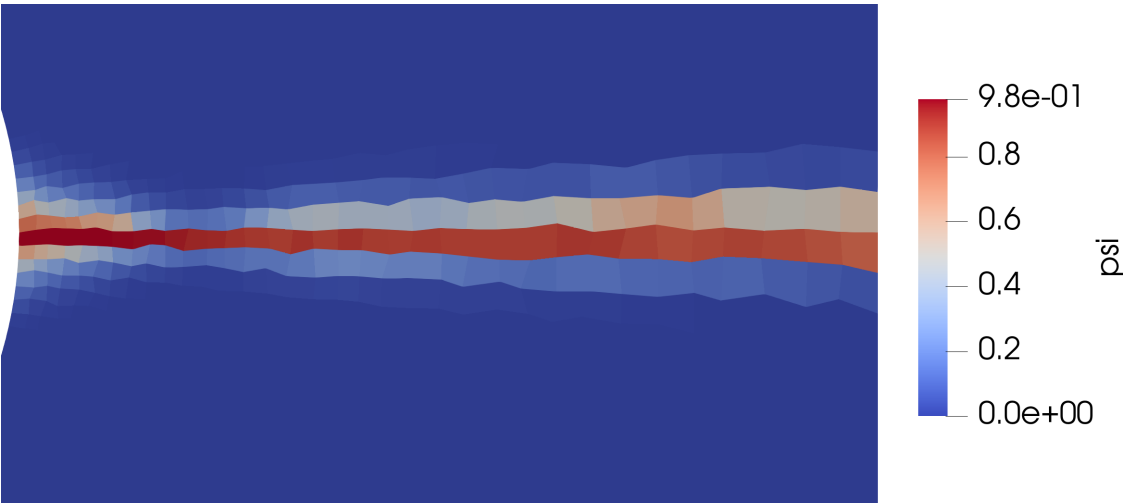


Рисунок 12 – Разрушенная пластина



Рисунок 13 – Смещение по оси Y, м

среднем примерно на 1%-11%, в среднем 5%, при этом картина повреждений существенно не изменилась (помимо границ элементов). Разброс скорости больше, чем разница у среднего смещенного меша и оригинального, несмотря на то, что у всех мешей смещения имели одинаковые распределения. В таблице (3) можно видеть, что отклонение скорости распространения трещины между методами $\Delta\psi = 0.02$ и $\Delta\psi = 0.05$ составило 5% и между $\Delta\psi = 0.02$ и $\Delta\psi = 0.1$ - 13%, таким образом уменьшение $\Delta\psi$ не имеет практического смысла после 0.05 в реальных задачах, поскольку из-за несовпадения направления трещины и границ элементов следует ожидать

| Метод | Число итераций | Число нагружений до разрушения пластины |
|-------------|----------------|--|
| обычный меш | 44 | $3.78 \cdot 10^6$ |
| неровный №1 | 49 | $3.92 \cdot 10^6$ |
| неровный №2 | 52 | $3.93 \cdot 10^6$ |
| неровный №3 | 52 | $4.01 \cdot 10^6$ |
| неровный №4 | 50 | $4.04 \cdot 10^6$ |
| неровный №5 | 48 | $4.21 \cdot 10^6$ |
| неровный №6 | 45 | $3.89 \cdot 10^6$ |
| неровный №7 | 48 | $3.81 \cdot 10^6$ |
| среднее | 49 | $3.97 \cdot 10^6$ |

Таблица 4 – Время, затраченное на разрушение

погрешность скорости распространения трещин как минимум около 5%. При этом в различных экспериментах по определению усталостной прочности материалов неопределенность жизни образца превышает это значение [17–19].

2.4. Расчет разных амплитуд нагружения

Рассмотрим процесс разрушения при различных режимах повреждения. Режим повреждения определяется из амплитуды напряжений. Сначала получим зависимость необходимого количества циклов нагружения в зависимости от амплитуды волн. Запишем наиболее простой случай - плоская волна, движущаяся по оси X.

$$\begin{aligned}
 u_x &= A \sin(kx - \omega t) \\
 v_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t) \\
 u_y &= v_y = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Воспользовавшись (1), получим напряжения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu)Ak\omega \sin(kx - \omega t) \\
\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \lambda Ak\omega \sin(kx - \omega t) \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Проинтегрировав по времени и подставив в (4) получим

$$\tilde{\sigma} = -(\lambda + 2\mu)Ak \cos(kx - \omega t) \tag{18}$$

Получив σ_{\min}^{\sim} и σ_{\max}^{\sim} , подставим в (5) и получим эквивалентное напряжение

$$\sigma_{eq} = (\lambda + 2\mu)kA \tag{19}$$

Запустив с обеих сторон волны амплитудой $A = 1.2\text{мкм}$, получим картину напряжений в момент их схождения

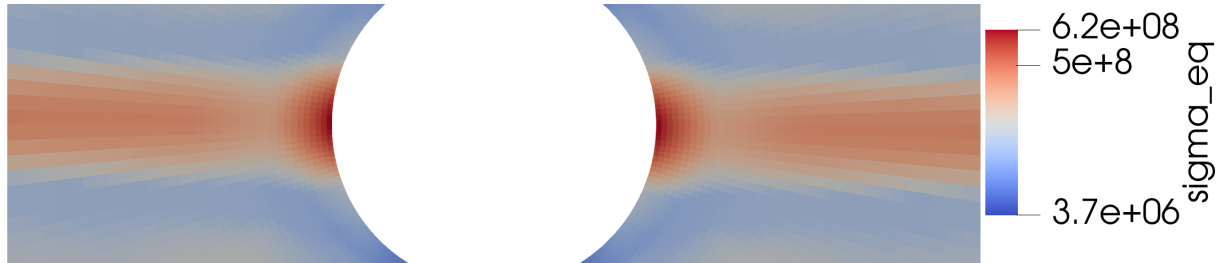


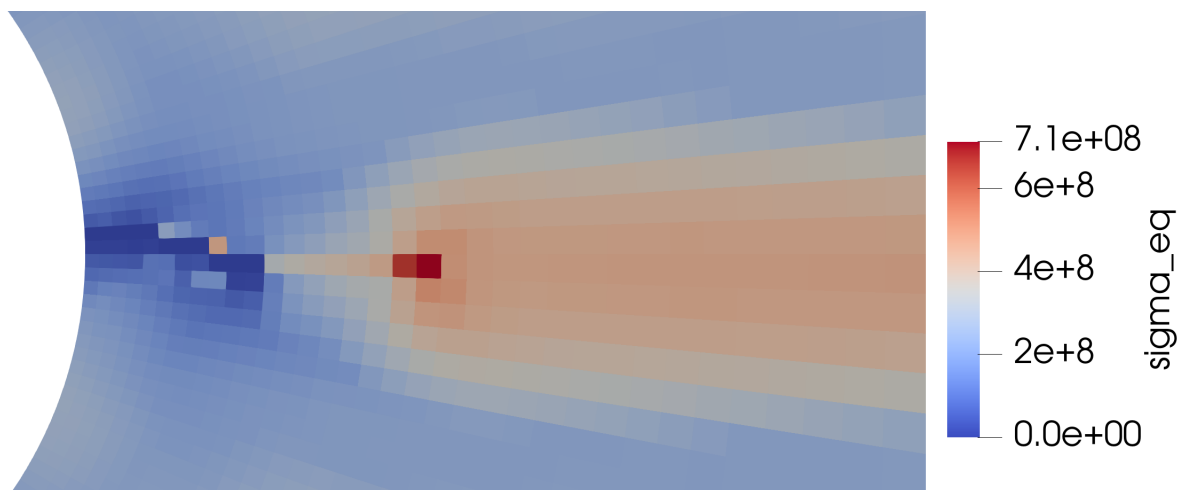
Рисунок 14 – σ_{eq} , Па

В большей части наблюдается ожидаемая $\sigma_{eq} = 462\text{МПа}$, но у отверстия σ_{eq} возрастает до 616МПа , из-за чего в этой области образуются повреждения. Подставив первое значение в (6) мы получим, что пластина должна разрушиться через $436 \cdot 10^3$ циклов нагружений. Однако уже на первой итерации видно что у отверстия напряжения больше и разрушение произойдёт быстрее. Теперь рассмотрим картину напряжений (рис. 16) после частичного разрушения пластины (рис. 15).

У края трещины значение σ_{eq} больше чем у края отверстия в начале



Рисунок 15 – Частичное разрушение

Рисунок 16 – σ_{eq} , Па

симуляции и составляет 720 МПа, т.е. скорость роста трещины больше, чем в начале симуляции. Проведя расчет полностью, получаем что для полного разрушения пластины потребовалось $182 \cdot 10^3$ циклов нагружения. Проведем еще аналогичные расчеты с разными амплитудами и получим результаты расчетов

Из полученных данных видно, что при меньших амплитудах оценка времени разрушения, полученная напрямую из амплитуды нагружения становится более точной. При больших нагружениях становится более замет-

| σ_{eq} в пластине | соответствующее ей число нагружений до разрушения (N_0) | фактическое число нагружений до разрушения (N) | амплитуда |
|--------------------------|---|--|-----------|
| 346МПа | $68.1 \cdot 10^6$ | $48.5 \cdot 10^6$ | 0.9 мкм |
| 375МПа | $19.7 \cdot 10^6$ | $8.72 \cdot 10^6$ | 0.98мкм |
| 404МПа | $3.22 \cdot 10^6$ | $1.52 \cdot 10^6$ | 1.05мкм |
| 433МПа | $1.01 \cdot 10^6$ | $408 \cdot 10^3$ | 1.12мкм |
| 462МПа | $436 \cdot 10^3$ | $181 \cdot 10^3$ | 1.2мкм |

Таблица 5 – Амплитуды нагружений и число циклов до разрушения

ным усиление напряжений у края трещины. Эта зависимость изображена на графике.

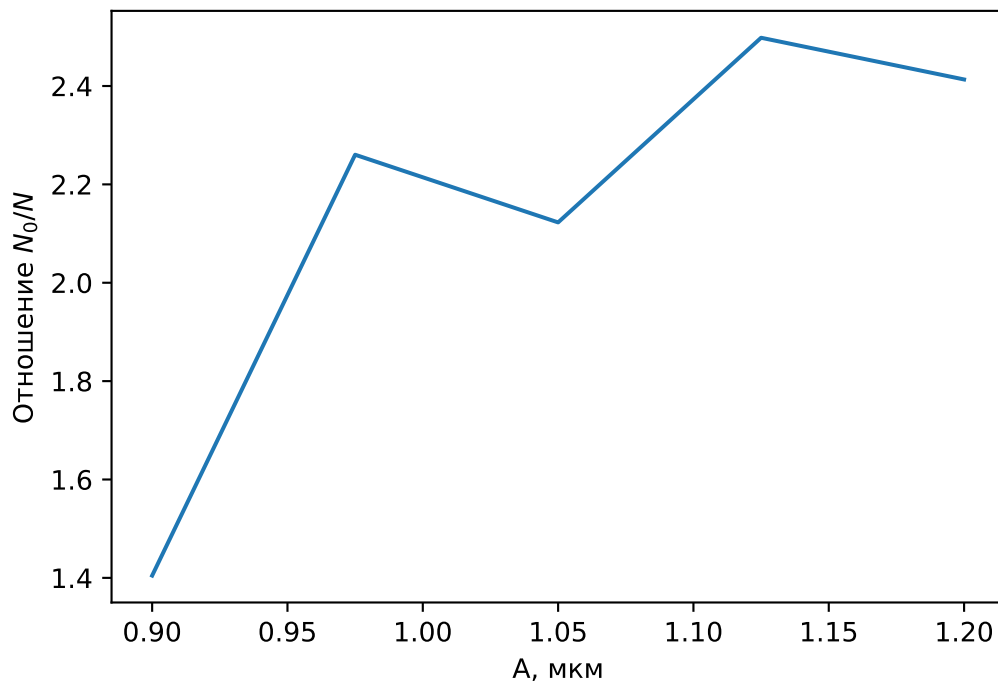


Рисунок 17 – Зависимость N_0/N от амплитуды нагружения

Это расхождение обусловлено увеличением напряжения у края трещины. На графике отображены зависимости среднего напряжения у края трещины в течение симуляции (σ_2) и напряжения у края отверстия в начале симуляции (σ_1) от σ_{eq} внутри пластины.

Поскольку σ_1 не зависит от повреждений, оно линейно зависит от σ_{eq} :

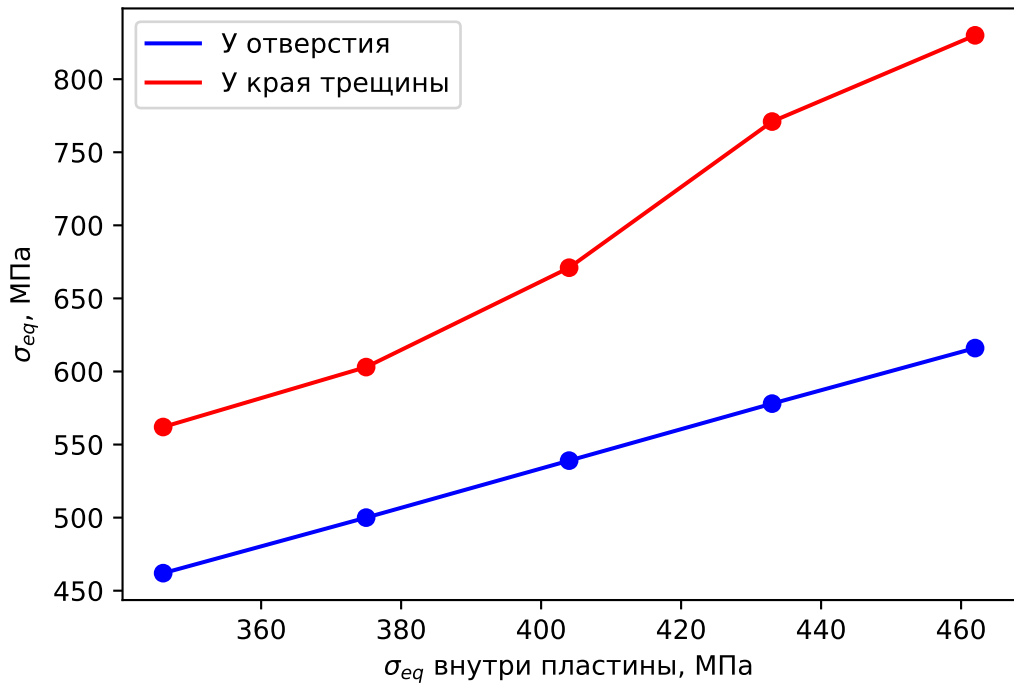


Рисунок 18 – Напряжения у края трещины и у отверстия от напряжения внутри пластины

$\sigma_1 = 1.33 \cdot \sigma_{eq}$. В случае σ_2 зависимость сложнее и притом напряжение у трещины зависит от времени, поэтому для расчета σ_2 было взято среднее по 5 итерациям разрушения.

Эти результаты позволяют объяснить повышение скорости роста трещины со временем и показывают повышение точности этого метода расчета усталостных повреждений по сравнению с критерием, на котором он основан.

Заключение

Были проведены симуляции усталостных повреждений в материале. Произведены расчёты с неровными сетками, чтобы получить представление о том, насколько хорошо будет работать метод в реальных задачах, в которых края элементов не будут совпадать с направлением трещин. Из полученных результатов можно сделать вывод, что метод может работать в таких случаях.

Проведена серия расчетов, в которой изучалось влияние параметра $\Delta\psi$ на точность расчета повреждений и на оценку скорости распространения трещин. Из результатов можно сделать вывод об эффективности выбора параметра $\Delta\psi =$ от 0.05 до 0.1, при котором погрешность, вызванная шагом ψ меньше погрешности от несовпадения направления трещин и краев элементов.

Проведены расчеты с разными амплитудами нагружения, рассмотрено влияние растущей трещины на амплитуду напряжений и ускорение роста трещины. Этот эффект оказался наиболее заметным при больших амплитудах, в режиме малоциклового усталости

Для дальнейшего развития этой работы наиболее перспективными выглядит исследование влияния мелкости сетки на результат. Также было бы полезно проведение экспериментов для более точной настройки параметров и приближения предсказательной силы метода к эксперименту.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Xiangqiao Yan. A boundary element modeling of fatigue crack growth in a plane elastic plate. *Mech. Res. Commun.*, 33(4):470–481, July 2006.
- [2] Marc Duflot and Hung Nguyen-Dang. Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method. *J. Comput. Appl. Math.*, 168(1-2):155–164, July 2004.
- [3] H. HOSSEINI-TOUDESHPY and M. MUSIVAND-ARZANFUDI. Fracture analysis using parametric meshless galerkin method. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 31(1):49–66, jan 2008.
- [4] A Dorogoy. Finite difference method for solving crack problems in a functionally graded material. *SIMULATION*, 95(10):941–953, oct 2018.
- [5] Qian Li, Jian cai Zhao, and Bo Zhao. Fatigue life prediction of a rubber mount based on test of material properties and finite element analysis. *Engineering Failure Analysis*, 16(7):2304–2310, oct 2009.
- [6] Dimitri Komatitsch and Jean-Pierre Vilotte. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(2):368–392, apr 1998.
- [7] C GONCALVES. Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue*, 27(2):177–187, feb 2005.
- [8] Y. Nadot and T. Billaudeau. Multiaxial fatigue limit criterion for defective materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(1):112–133, jan 2006.

- [9] Aleksander Karolczuk and Ewald Macha. A review of critical plane orientations in multiaxial fatigue failure criteria of metallic materials. *International Journal of Fracture*, 134(3-4):267–304, aug 2005.
- [10] I. S. Nikitin, N. G. Burago, and A. D. Nikitin. Damage and fatigue fracture of structural elements in various cyclic loading modes. *Mechanics of Solids*, 57(7):1793–1803, dec 2022.
- [11] R. Anderson, J. Andrej, A. Barker, J. Bramwell, J.-S. Camier, J. Cervený, V. Dobrev, Y. Dudouit, A. Fisher, Tz. Kolev, W. Pazner, M. Stowell, V. Tomov, I. Akkerman, J. Dahm, D. Medina, and S. Zampini. MFEM: A modular finite element methods library. *Computers & Mathematics with Applications*, 81:42–74, 2021.
- [12] Nathan M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3):67–94, jul 1959.
- [13] Dimitri Komatitsch, Seiji Tsuboi, and Jeroen Tromp. The spectral-element method in seismology. In *Seismic Earth: Array Analysis of Broadband Seismograms*, pages 205–227. American Geophysical Union, 2005.
- [14] N. Burago and I. Nikitin. *Multiaxial Fatigue Criteria and Durability of Titanium Compressor Disks in Low- and Very-high-cycle Fatigue Modes*, pages 117–130. 01 2016.
- [15] K.N. Smith, Tim Topper, and P. Watson. A stress–strain function for the fatigue of metals (stress-strain function for metal fatigue including mean stress effect). *J Materials*, 5:767–778, 01 1970.
- [16] Boris Diskin and James Thomas. Effects of mesh regularity on accuracy of finite-volume schemes. In *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, jan 2012.

- [17] Liguang Yang and Yongming Xing. Experimental study on high-cycle fatigue properties of q420c steel at room temperature. *Materials Research*, 25, 2022.
- [18] V. Giannella. Uncertainty quantification in fatigue crack-growth predictions. *International Journal of Fracture*, 235(2):179–195, mar 2022.
- [19] D.S. Paolino, A. Tridello, H.S. Geng, G. Chiandussi, and M. Rossetto. Duplex s-n fatigue curves: statistical distribution of the transition fatigue life. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 8(30):417–423, sep 2014.