1 线性空间与基向量:

1.1 线性空间:

设有空间 V，如果在 V 中的向量 $\vec{x},\vec{y}$，有 $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$, 且满足:

$$\forall k\in R, k\cdot\vec{x}\in V$$

$$\forall\alpha,\beta\in R,\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}\in V$$

我们称空间 V 是线性空间。常见的 R,R^2,R^3 都是线性空间。

下面我们以二维平面 R^2 为例讨论有关线性空间的内容。

1.2 线性空间的基

在二维平面 R^2 中, 建立平面直角坐标系 XOY, 在这个坐标系中, 有两条向量是非常特殊的，记为 $\vec{e}_i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\vec{e}_j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, 通常称这两条向量称为二维平面空间中的一对基向量; XOY 坐标系中任意一条向量 $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 都可以看作 $\vec{e}_i,\vec{e}_j$ 的线性组合:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

相对应的，我们称平面 XOY 是由向量 $\vec{e}_i,\vec{e}_j$ 张成的空间，记 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 为向量 $\vec{u}$ 在这对基向量张成空间下的坐标。

默认状态下，我们认为一个向量的坐标即为它在 XOY 坐标系中的坐标。

1.2.1 线性相关与线性无关:

对于一组向量 (多于一个)$\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$, 如果存在不全为 0 的系数 $k_1,k_2,...,k_n$, 使得 $\sum_{i=1}^{k}k_i\cdot\vec{a}_i=0$, 则称 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ 是一组线性相关的向量;

反之，若当且仅当 $k_1=k_2=...=k_n=0$ 时，才能使 $\sum_{i=1}^{k}k_i\cdot\vec{a}_i=0$ 成立，则称 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ 是一组线性无关的向量。

- 在 XOY 平面内，两个向量线性相关意味着两个向量是共线的。

- 在 XOY 平面内, 超过三个向量一定线性相关。

我们说任意一组线性无关的向量可以张成一个线性空间，向量组中向量的个数称为该线性空间的秩。

1.2.2 线性空间的基与向量坐标的计算:

- 设 XOY 中有向量 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, 显然在以 $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的原坐标系中坐标为 $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

  我们现在以另一组向量 $\vec{e}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为基张成另一个线性空间 V_1, 在这个新的线性空间中，向量 $\vec{u}$ 的坐标就换成了另一对 $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$, 且满足 $u_x \cdot \vec{e}_0 + u_y \cdot \vec{e}_1 = \vec{u}$, 即

$$u_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

  联立得到方程

$$\begin{cases} u_x - u_y = 5 \\ u_x + u_y = 7 \end{cases}$$

  解方程得

$$\begin{cases} u_x = 6 \\ u_y = 1 \end{cases}$$

  于是得到向量 $\vec{u}$ 在线性空间 V_1 中的坐标为 $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 类似的，对于在空间 V_1 中的向量 $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$, 可以计算该向量在 XOY 平面中的坐标:

$$\vec{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是可以计算得出在原坐标系中:

$$\vec{u} = u_x \cdot \vec{e}_0 + u_y \cdot \vec{e}_1$$

即

$$\vec{u} = u_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x - u_y \\ u_x + u_y \end{pmatrix}$$

即为在 XOY 平面中的坐标

2 线性变换: