1　集合初步

1.1　集合的基本概念:

集合：指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇总而成的集体。我们将构成集合的这些对象称为该集合的元素。

1.1.1　Example I:

$S = \{1, 2, 3\}$ 表示 S 是由 1，2，3 三个数字构成的集合

全体自然数构成的集合 $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

全体整数构成的集合 $Z = \{-\infty ... -1, 0, 1, ... +\infty\}$

全体有理数构成的集合 Q

全体实数构成的集合 R

通常使用大写字母 S, A, B 等表示一个集合，使用小写字母表示集合中的元素。若 x 是集合 S 中的元素，称 x 属于 S，记作 $x \in S$。若 y 不是集合 S 中的元素，称 y 不属于 S，记作 $y \notin S$。

在集合中，任意两个元素都不相同，即每个元素只能出现一次。

1.2　集合间的关系:

1.2.1　子集:

设 S,T 是两个集合，如果集合 S 中的所有元素都属于集合 $T(\forall x \in S, x \in T)$，称 S 是 T 的子集，记作 $S \subseteq T$; 特别的，如果存在集合 T 中的元素 x，且 x 不属于 $S(\exists x \in T, x \notin S)$，我们称 S 是 T 的真子集，记作 $S \subset T$。

1.2.2　空集:

空集是一类特殊的集合，空集内不包含任何元素，例如 $\{x | x^2 + 1 = 0, x \in N\}$ 就是一个空集。我们认为空集是任何一个集合的子集，同时也是

任意非空集合的真子集。

1.2.3 集合的交与并:

对于集合 A 与集合 B

定义 A 与 B 的交集为：$A \cap B = \{x|x \in A \quad and \quad x \in B\}$

定义 A 与 B 的并集为：$A \cup B = \{x|x \in A \quad or \quad x \in B\}$

1.2.4 全集与补集:

一般的，如果一个集合中包含我们研究问题中涉及的所有元素，我们称这个集合为全集，通常记作 U。

对于集合 U 的子集 A，定义集合 A 相对于全集 U 的补集：$A' = \{x|x \in U \quad and \quad x \notin A\}$。

1.3 集合运算定律:

1.3.1 交换律:

$$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$$

1.3.2 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

1.3.3 分配对偶律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1.4 容斥原理:

对于一个集合 A, 我们称其中的元素个数为集合的基数, 记作 $card(A)$。

显然，有如下的等式:

$$card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$$
$$card(A\cup B\cup C)=card(A)+card(B)+card(C)$$
$$-card(A\cap B)-card(B\cap C)-card(C\cap A)+card(A\cap B\cap C)$$

1.4.1 例题: 试求 1∼600 中能被 2 或 3 整除的数字个数

定义集合 $A=\{x|x\%2=0,1<=x<=600\},B=\{x|x\%3=0,1<=x<=600\}$, 显然 $card(A)=300,card(B)=200$

又有 $A\cap B=\{x|x\%6=0,1<=x<=600\},card(A\cap B)=100$

于是 $card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)=400$，即为题目所求

1.5 思考题:

1.5.1 $Question_1$:

给定一个包含 5 个元素的集合 $S=\{x_1,x_2,...,x_5\}$，求集合 S 的真子集有多少个?

1.5.2 $Question_2$:

试验证 $De\cdot Morgan$ 定律:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

2 函数与映射:

2.1 映射的定义:

两个非空集合 X,Y 中存在对应关系 f，而且对于集合 X 中的每一个元素 x，Y 中总有唯一的一个元素 y 与其对应，我们称这种对应关系为集

合 X 到集合 Y 的映射，记作 $f: X \mapsto Y$，其中 y 称作 x 在映射 f 下的像，记作：$y = f(x)$。x 称为 y 关于映射 f 的原像。集合 X 中所有元素在 f 作用下的像的集合称为 f 的值域，记作 $f(X)$

对于从集合 X 到集合 Y 的映射 $f: X \mapsto Y$，我们有：

2.1.1 满射:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, s.t. f(x) = y$$

2.1.2 单射:

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2), f(x_1) \neq f(x_2)$$

2.1.3 双射 (一一映射):

映射 f 既是满射，又是单射时，称映射 f 是一个双射。

2.1.4 一些例子:

令集合 X 为全体自然数的集合，$Y = \{0, 1\}$，定义映射

$$f: X \mapsto Y, f(x) = x\%2$$

我们称映射 f 是 $X \to Y$ 的一个满射。

令集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 Y 是全体有理数的集合，定义映射

$$f: X \mapsto Y, f(x) = \frac{x}{6}$$

我们称映射 f 是 $X \to Y$ 的一个单射。

令集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $Y = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, 定义映射

$$f: X \mapsto Y, f(x) = 2x + 1$$

我们称映射 f 是 $X \to Y$ 的一个双射。

2.2 函数:

假设 X, Y 是非空的数集,如果按照某种确定的对应关系 f,使得对于集合 X 中的任意一个数 x,在集合 Y 中都有唯一确定的数与之对应,那么就称映射 $f: X \mapsto Y$ 是从集合 X 到集合 Y 的一个函数,记作 $y = f(x), x \in X$.

在函数 x 称作自变量,y 称作 x 的函数;集合 X 称作函数的定义域,与 x 对应的 y 叫做函数值 (因变量),所有函数值构成的集合 $\{f(x)|x \in X\}$ 称作函数的值域,f 叫做对应法则。定义域,值域以及对应法则称为函数的三要素。

2.2.1 函数图像:

设函数 $y = f(x), x \in D$, 在平面直角坐标系中,我们将有序数对 $(x, f(x))$ 视作一个平面上的点,那么点集 $\{(x, f(x))|x \in D\}$ 所构成的图形便称为函数 $y = f(x), x \in D$ 的函数图像。

2.2.2 基本的函数性质:

对于函数 $y = f(x), x \in D$, 有如下几种基本特性:

单调性:对于 D 上的一个子集 I, 当且仅当:

$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$, 我们称函数 f 在 I 上单调递增;

$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$, 我们称函数 f 在 I 上单调递减。

奇偶性:对于 $\forall x \in D, f(x) = f(-x)$,称函数 $y = f(x)$ 为偶函数;对于 $\forall x \in D, -f(x) = f(-x)$,称函数 $y = f(x)$ 为奇函数。

周期性:如果 $\exists T, T > 0, s.t. \forall x \in D, f(x) = f(x + T)$,则称函数 f 是一个周期函数,T 称作函数 f 的周期 (通常指最小正周期)

2.2.3 一些常见的初等函数:

试求出下列初等函数的值域并绘出函数图像, 分析其函数特性:

一次函数：$f(x): y = kx + b, k, b \in Z^+, x \in R$

反比例函数：$f(x): y = \frac{k}{x}, k \in R, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

二次函数：$f(x): y = ax^2 + bx + c, x \in R$

指数函数：$f(x): y = a^x, a > 0, x \in R$

对数函数：$f(x): y = log_a x, a > 0, x \in R^+$

正弦函数：$f(x): y = sin(x), x \in R$

余弦函数：$f(x): y = cos(x), x \in R$