第 4 讲　MATLAB 在线性代数和高等数学中的应用

司守奎
烟台市，海军航空大学
Email：sishoukui@163.com

4.1　线性代数的有关命令

前面已经讲过 MATLAB 求解线性方程组的命令。这里简要介绍一下 MATLAB 在线性代数中的一些其他应用。

1.求方阵 A 的行列式命令：det(A)

2.求矩阵 A 的秩命令：rank(A)

3.求矩阵 A 的逆阵命令：inv(A)

4.求矩阵 A 的行最简行命令：rref(A)

5.求特征值和特征向量的命令

[V,D]=eig(A)

V 返回的是特征向量列向量组成的矩阵，D 为对角矩阵，对角线元素为特征值。

6.求模最大的特征值和特征向量命令

[V，D]=eigs(A,1)

D 返回的是一个模最大的特征值，V 是对应的特征向量。

例 4.1　考虑下列方程组，其中 s 是一个未定的参数，确定 s 的值，使得这个方程组有唯一解，并求出这个唯一解。

$$\begin{cases} 3sx_1 - 2x_2 = 4, \\ -6x_1 + sx_2 = 1. \end{cases}$$

解　把方程组写成 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的形式，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}，\quad b=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

其中 $|A|=3s^2-12$，当且仅当 $s\neq\pm2$ 时，方程组有唯一解。对于这样的 s，方程组的唯一解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{4s+2}{3(s^2-4)} \\ \dfrac{s+8}{s^2-4} \end{bmatrix}.$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear, syms s
a=[3*s,-2;-6,s]; b=[4;1];
c=det(a)    %计算系数矩阵的行列式
s0=solve(c) %求行列式等于零的点
x=inv(a)*b    %当 a 可逆时，求方程组的唯一解
x=simplify(x)    %对符号解进行化简
```

层次分析法（The analytic hierarchy process），简称 AHP，在 20 世纪 70 年代中期由美国运筹学家托马斯.塞蒂（T.L.Saaty）正式提出。它是一种定性和定量相结合、系统化、层次化的分析方法。层次分析法是将决策问题按总目标、各层子目标、评价准则直至具体备选方案的顺序分解为不同的层次结构，然后用求解判断矩阵归一化特征向量的办法，求得每一层次的各元素对上一层次某元素的优先权重，最后加权递归各备选方案对总目标的最终权重，

权重最大的即为最优方案。层次分析法比较适合于具有分层交错评价指标的目标系统，而且目标值又难于定量描述的决策问题。我们将通过一个具体的案例介绍层次分析法的应用和求解。

例 4.2　某单位拟从 3 名干部中选拔 1 人担任领导职务，选拔的标准有健康状况、业务知识、写作能力、口才、政策水平和工作作风. 把这 6 个标准进行成对比较后，得到判断矩阵 A 如下：

$$A=\begin{array}{c} \text{健康状况} \\ \text{业务知识} \\ \text{写作能力} \\ \text{口才} \\ \text{政策水平} \\ \text{工作作风} \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 & 5 & 3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/5 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1/3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

矩阵 A 表明，这个单位选拔干部时最重视工作作风，而最不重视口才. A 的最大特征值为 6.4203，相应的特征向量为

$$B_1=\begin{bmatrix}0.1584 & 0.1892 & 0.1980 & 0.0483 & 0.1502 & 0.2558\end{bmatrix}^T.$$

用 I、II、III 表示 3 个干部，假设成对比较的结果为：

健康情况
$$\begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline \text{I} & 1 & 1/4 & 1/2 \\ \text{II} & 4 & 1 & 3 \\ \text{III} & 2 & 1/3 & 1 \end{array}$$

业务知识
$$\begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline \text{I} & 1 & 1/4 & 1/5 \\ \text{II} & 4 & 1 & 1/2 \\ \text{III} & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

写作能力
$$\begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline \text{I} & 1 & 3 & 1/3 \\ \text{II} & 1/3 & 1 & 1 \\ \text{III} & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

口才
$$\begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline \text{I} & 1 & 1/4 & 1/2 \\ \text{II} & 4 & 1 & 3 \\ \text{III} & 2 & 1/3 & 1 \end{array}$$

政策水平
$$\begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline \text{I} & 1 & 1/4 & 1/5 \\ \text{II} & 4 & 1 & 1/2 \\ \text{III} & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

工作水平
$$\begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline \text{I} & 1 & 3 & 1/3 \\ \text{II} & 1/3 & 1 & 1 \\ \text{III} & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

由此可求得各属性的最大特征值见表 4.1。把对应的特征向量，按列组成矩阵 B_2.

表 4.1　各属性的最大特征值

属性	健康水平	业务知识	写作能力	口才	政策水平	工作作风
最大特征值	3.0183	3.0246	3.5608	3.0649	3.0000	3.2085

$$B_2=\begin{bmatrix} 0.1365 & 0.0974 & 0.3189 & 0.2790 & 0.4667 & 0.7720 \\ 0.6250 & 0.3331 & 0.2211 & 0.6491 & 0.4667 & 0.1734 \\ 0.2385 & 0.5695 & 0.4600 & 0.0719 & 0.0667 & 0.0545 \end{bmatrix}.$$

从而，得各对象的评价值

$$B_3=B_2B_1=\begin{bmatrix}0.3843 & 0.3517 & 0.2641\end{bmatrix}^T.$$

即在 3 人中应选拔 I 担任领导职务.

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear
a=[1 1 1 4 1 1/2; 1 1 2 4 1 1/2; 1 1/2 1 5 3 1/2;
   1/4 1/4 1/5 1 1/3 1/3; 1 1 1/3 3 1 1; 2 2 2 3 1 1];
[v1,d1]=eigs(a,1)   %求矩阵 a 模最大的特征值及对应的特征向量
B1=v1/sum(v1)   %归一化
a1=[1 1/4 1/2; 4 1 3; 2 1/3 1];   %健康情况的判断矩阵
a2=[1 1/4 1/5; 4 1 1/2; 5 2 1];   %业务知识的判断矩阵
a3=[1 3 1/3;1/3 1 1;3 1 1];   %写作能力的判断矩阵
a4=[1 1/3 5;3 1 7; 1/5 1/7 1];   %口才的判断矩阵
a5=[1 1 7; 1 1 7; 1/7 1/7 1];   %政策水平的判断矩阵
```

```
a6=[1 7 9; 1/7 1 5; 1/9 1/5 1];   %工作作风的判断矩阵
lambda=[]; B2=[];   %初始化
for i=1:6
    str=['[v,d]=eigs(a',int2str(i),',',int2str(1),'); v=v/sum(v);'] %构造下面执行语句的字符串
    eval(str)   %执行 str 对应的命令
    lambda=[lambda,d]; B2=[B2,v];
end
lambda, B2   %显示计算结果
B3=B2*B1   %求各对象的评价值
```

4.2 符号微积分

微积分是高等数学的基础，在数学计算中非常重要. 在 MATLAB 的符号计算工具箱中提供了进行微积分运算的函数，主要包括求极限、微分运算、积分运算、级数求和与泰勒级数等.

4.2.1 极限

MATLAB 计算符号函数极限的命令为 limit，其一般格式如下：

limit(f,x,a)   %计算当自变量 x 趋近于常数 a 时，符号函数 f(x)的极限值.

limit(f,x,a,'left')   %计算当 x 从左侧趋近于 a 时，符号函数 f(x)的左极限值.

limit(f,x,a,'right')   %计算当 x 从右侧趋近于 a 时，符号函数 f(x)的右极限值.

例 4.3 分别计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$， $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$.

```
clc, clear, syms x
a=limit(sin(x)/x)   %求 x 趋近于 0 时的极限
b=limit((1+1/(2*x))^x,x,inf)
```

根据运行结果可知： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x=\sqrt{e}$.

4.2.2 微分

在 MATLAB 中，采用函数 diff 进行符号函数求导运算，gradient 求多元函数的梯度，利用函数 jacobian 求 Jacobian 矩阵等.

1.diff 函数

diff 函数的调用格式为：

diff(expr)   %求符号表达式 expr 对第 1 个符号变量（symvar(expr,1)确定）的一阶导数.

diff(expr,n)   %求符号表达式 expr 对第 1 个符号变量的 n 阶导数.

diff(expr,v,n)   %求符号表达式 expr 对符号变量 v 的 n 阶导数.

例 4.4 已知 $f(x,y)=x^3+xy+y^2$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

```
clc, clear, syms x y
f(x,y)=x^3+x*y+y^2;
dx=diff(f)   %求 f 关于 x 的一阶导数
```

```
d2x=diff(f,x,2)   %求 f 关于 x 的二阶导数
d2y=diff(f,y,2)   %求 f 关于 y 的二阶导数
```

例 4.5　求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

解　把方程两边分别对 x 求导，得

$$5y^4\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}-1-21x^6=0.$$

由此得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}.$$

因为当 $x=0$ 时，从原方程得 $y=0$，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

```
clc, clear, syms y(x) dy
eq1=y^5+2*y-x-3*x^7;
eq2=diff(eq1,x)   %求关于 x 的一阶导数
eq3=subs(eq2,diff(y(x), x),dy) %把 diff(y(x),x)替换为 dy,否则无法解代数方程
dy2=solve(eq3,dy) %解代数方程，求 y 关于 x 的导数
dy3=subs(dy2,{x,y(x)},{0,0}) %代入具体的数值
```

2.求多元函数的梯度及 Hessian 阵

多元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的梯度 $\mathrm{grad}f=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$， $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的 Hessian 阵

$$H(f)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}.$$

MATLAB 求多元函数梯度的命令为 gradient，求 Hessian 矩阵的命令为 hessian.

例 4.6　求二元函数 $f(x,y)=e^x\sin y+x^2+x\cos y$ 的梯度向量和 Hessian 阵.

```
clc, clear, syms x y
f(x,y)=exp(x)*sin(y)+x^2+x*cos(y);
gradf=gradient(f)
Hf=hessian(f)
```

3.jacobian 函数

向量函数 $f=[f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)]^T$ 的 Jacobian 矩阵为

$$J=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

MATLAB 中计算 Jacobian 矩阵的函数 jacobian 的调用格式为：

jacobian(F,V)　%计算向量函数 F 关于 V 的 Jacobian 矩阵，当 F 和 V 为标量时，jacobian(F,V) 等价于 diff(F,V).

例 4.7　求二元函数 $f(x,y)=e^x\sin y+x^2+x\cos y$ 的梯度向量的 Jacobian 矩阵，即求 $f(x,y)$ 的 Hessian 阵。

```
clc, clear, syms x y
f(x,y)=exp(x)*sin(y)+x^2+x*cos(y);
gradf=gradient(f)
Hf1=jacobian(gradf)   %求梯度向量的 Jacobian 阵
Hf2=hessian(f)   %求 f 的 Hessian 阵
```

4.2.3　积分

在 MATLAB 中，提供了 int 函数计算符号表达式的不定积分和定积分，函数的调用格式为：

int(expr,v)　%求符号表达式 expr 关于符号变量 v 的不定积分.

int(expr,v,a,b)　%求符号表达式 expr 关于 v 的定积分，积分区间为[a,b].

例 4.8　求如下积分

$$\int\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx,\quad \int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx.$$

```
clc, clear, syms x
I1=int(x*exp(x)/(1+exp(x))^2)   %求符号不定积分
pretty(I1)   %书写习惯的显示方式
I2=int(x^2/(x^4+x^2+1),x,0,inf)   %求符号定积分
pretty(I2)   %书写习惯的显示方式
I2=double(I2)   %把符号数据转换为 double 类型数据
```

例 4.9　计算 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x^2}dy\int_{\sqrt{xy}}^{x^2y}(x^2+y^2+z^2)dz$.

```
clc, clear, syms x y z
f=x^2+y^2+z^2
I1=int(f,z,sqrt(x*y),x^2*y)   %最内层积分
```

I2=int(I1,y,sqrt(x),x^2)　%中间层积分

I3=int(I2,x,1,2)　%最外层积分

I4=double(I3)　%把符号数据转换为 double 类型数据

4.2.4　taylor 级数和序列求和

1.泰勒级数

函数 taylor 用于求符号表达式的 taylor 级数，函数的调用格式为：

taylor(f)　%求 f 关于第一个符号变量在 0 点处的 6 阶 taylor 展开式.

taylor(f,v, 'ExpansionPoint', v0, 'Order', n)　%求 f 关于符号变量 v 在 v0 点的 n 阶 taylor 展开式.

例 4.10　分别计算 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 在 $x=0$ 处的 6 阶 taylor 展开式，和 $x=2$ 处的 4 阶 taylor 展开式。

```
clc, clear, syms x
y1=taylor(1/sqrt(1+x))   %计算在 x=0 处的 6 阶 taylor 展开式
pretty(y1)
y2=taylor(1/sqrt(1+x),'ExpansionPoint', 2, 'Order', 4) %计算在 x=2 处的 4 阶 taylor 展开式
pretty(y2)
```

2.序列求和

MATLAB 中实现级数或序列求和的函数是 symsum，使用格式如下：

symsum(expr,var,a,b)　%求符号表达式 expr 指标变量 var 取值从 a 到 b 的和.

例 4.11　求如下级数的和

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$.

```
clc, clear, syms x n
s1=symsum(1/(2*n-1)^2,1,inf)
s2=symsum(x^n/2^n,n,1,inf)
pretty(s2)
```

由计算结果可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\begin{cases}\frac{x}{2-x}, & |x|<2,\\ \infty, & |x|\ge 2.\end{cases}$

4.3　数值导数和数值积分

4.3.1　数值导数

MATLAB 中求数值导数的命令也为 gradient（求符号函数的梯度命令是 gradient）；可以使用帮助 doc gradient 和 doc sym/gradient 看一下同样命令在不同调用情形下的差异；求

离散 Laplace 算子值的命令是 del2. 下面举例子说明这两个函数的应用.

例 4.12　计算 $y = e^x \cos x$ 的一阶数值导数和二阶数值导数，并在区间 $[0,2]$ 上比较符号导数与数值导数是否有差异。

```
clc, clear, syms y(x)
y=exp(x)*cos(x), dy=diff(y), d2y=diff(y,2)   %计算符号导数
subplot(121), ezplot(dy,[0,2])   %画一阶符号导数的曲线
hold on, x0=0:0.04:2; y0=exp(x0).*cos(x0);
dys=gradient(y0,x0);   %计算一阶导数的数值解
plot(x0,dys,'*'), title('一阶符号导数和数值导数的比较')
subplot(122), ezplot(d2y,[0,2])   %画二阶符号导数的曲线
hold on, d2ys=4*del2(y0,x0);   %计算二阶导数的数值解,注意前面要乘以 4
plot(x0,d2ys,'*'), title('二阶符号导数和数值导数的比较')
```

4.3.2　数值积分

已知一元函数的离散点观测值，求一重数值积分的命令为 trapz(x,y)，其调用格式为

q=trapz(x,y)

其中 x 为自变量的离散点，y 是对应于 x 的函数值。该命令使用梯形法求数值积分。

已知一元被积函数的表达式，求一重数值积分的命令有 quad，quadl（注意最后一个字符是 L 的小写字符），quadgk，integral（最后一个字符是 L 的小写字符）。

integral 的调用格式为

q=integral(fun,xmin,xmax)

其中 fun 是被积函数的函数或匿名函数，xmin 是积分下限，xmax 是积分上限。

已知二元被积函数的表达式，求二重数值积分的命令有 dblquad，integral2，quad2d。

integral2 的调用格式为

q=integral2(fun,xmin,xmax,ymin,ymax)

计算函数 z= fun(x,y)在平面区域 xmin ≤ x ≤ xmax， ymin(x) ≤ y ≤ ymax(x)上的积分。

已知三元被积函数的表达式，求三重数值积分的命令有 triplequad，integral3。

integral3 的调用格式为

q=integral3(fun,xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax)

计算函数 w= fun(x,y,z)在区域 xmin ≤ x ≤ xmax， ymin(x) ≤ y ≤ ymax(x)， zmin(x,y) ≤z ≤zmax(x,y)上的积分。

例 4.13　求积分

$$\int_1^3 (x^3 + \sin x)dx .$$

要求用如下多种方法求积分的值。

（1）用符号积分命令 int.

（2）用数值积分命令 trapz.

（3）用数值积分命令 quad、quadl、quadgk、integral.

```
clc, clear, syms x
I1=int(x^3+sin(x),1,3)    %求符号积分
I1=double(I1) %转换成 double 类型数据
x0=1:0.001:3; y0=x0.^3+sin(x0); %计算一些离散点的函数值
I2=trapz(x0,y0) %求已知离散点的数值积分
fx=@(x)x.^3+sin(x);    %定义被积函数的匿名函数
I3=quad(fx,1,3)      %求数值积分
I4=quadl(fx,1,3)      %求数值积分
I5=quadgk(fx,1,3)    %求数值积分
I6=integral(fx,1,3)    %求数值积分
```

注 4.1　函数 quadgk 采用 Gauss-Kronrod 积分法来计算数值积分，该函数可以用来解决含有无穷区间端点的积分、端点奇异的积分，以及分段函数的积分。

例如，计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x}(\ln x)^2 dx$.

被积函数在 $x=0$ 处是奇异的，而且积分区间是无穷区间，这样的积分利用 quad 和 quadl 函数是无法计算的，而 quadgk 函数可以轻松搞定，其程序为：

```
I=quadgk(@(x)exp(-x.^2).*log(x).^2,0,inf)
```

例 4.14　求如下的二重积分。

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma,$$

其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le x\}$.

```
fxy=@(x,y)sqrt(1-x.^2-y.^2).*(x.^2+y.^2<=x); %定义被积函数的匿名函数
I=dblquad(fxy,0,1,-0.5,0.5)
```

求得积分值为 0.6028。

注 4.2　对于老版本 MATLAB 的多重积分，MATLAB 的被积函数=数学上的被积函数.*积分区域的特征函数。

新版本 MATLAB 的计算程序如下：

```
clc, clear
fxy=@(x,y)sqrt(1-x.^2-y.^2); %定义被积函数的匿名函数
ymax=@(x)sqrt(x-x.^2); %定义 y 的积分上限
I=integral2(fxy,0,1,@(x)-ymax(x),ymax)
```

例 4.15　用符号积分和数值积分计算单位圆域上的积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1} e^{-\frac{x^2}{2}}\sin(x^2+y)dxdy.$$

做符号积分时，先把二重积分转化为累次积分的形式

$$I=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sin(x^2+y)dx.$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear, syms x y
f=exp(-x^2/2)*sin(x^2+y);    %定义被积函数的符号函数
I1=int(int(f,x,-sqrt(1-y^2),sqrt(1-y^2)),-1,1); %先对 x 进行符号积分
I1=double(I1)    %把符号数据转化成 double 类型数据
fxy=matlabFunction(f); %把符号函数转化为匿名函数
ymax=@(x)sqrt(1-x.^2); %定义 y 的积分上限
I2=integral2(fxy,-1,1,@(x)-ymax(x),ymax)    %求二重积分的数值解
```

例 4.16　计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+1}dxdydz$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2-2x=0$ 与 $z=0$ 、 $z=6$ 两平面所围成的空间区域。

老版本的 MATLAB 计算程序为：

```
f=@(x,y,z)z.*sqrt(x.^2+y.^2+1).*(x.^2+y.^2-2*x<=0 & z>=0 & z<=6);
I=triplequad(f,0,2,-1,1,0,6)
```

求得的积分值为 87.4501。

新版本的 MATLAB 计算程序为：

```
ff=@(x,y,z)z.*sqrt(x.^2+y.^2+1);
ym=@(x)sqrt(2*x-x.^2);
I=integral3(ff,0,2,@(x)-ym(x),ym,0,6)
```

求得的积分值为 87.4502。

4.4　函数的极值点

数学上，函数的极值点是通过确定函数导数为零的点，解析求出这些极值点。大多数函数很难求得导数为零的点，因此利用解析法求极值点难度很大，有时甚至是不可行的。MATLAB 提供了求函数极值点数值解的命令.

对于函数的极值点存在极大值和极小值的区别，MATLAB 仅仅提供了求函数极小值的命令，并且这种“极小”是一个“局部极小”，即是在给定范围内的“极小”。计算一个函数的极大值等价于计算该函数相反数的极小值。

1.一元函数的极值点

函数 fminbnd 求一元函数在固定区间上的极小值，其调用格式为：

[x,fval]=fminbnd(fun,x1,x2)　%计算函数 fun 在区间[x1,x2]上的极小值，返回值 x,fval 分别为极小值点和对应的极小值.

例 4.17　求函数 $f(x)=2e^{-x}\sin x$ 在区间 $[0,3]$ 上的极小值点和极大值点。

```
clc, clear
fx=@(x)exp(x).*cos(2*x);    %定义匿名函数
[x1,y1]=fminbnd(fx,0,3)    %求极小值点，及对应的函数值
[x2,y2]=fminbnd(@(x)-fx(x),0,3)    %求极小值点，及对应的函数值
```

```
y2=-y2   %求极大值点对应的函数值
```

求得极小值点为 $x=1.8026$，对应的极小值为-5.4252；求得极大值点为 $x=0.2318$，对应的极大值为 1.1278.

2.多元函数的极值点

在 MATLAB 工具箱中，用于求解多元函数极小值的函数有 fminunc 和 fminsearch，用法介绍如下.

MATLAB 中 fminunc 的一般使用格式为：

[x,fval]=fminunc(fun,x0,options) %其中返回值 x 是所求得的极小值点，返回值 fval 是函数的极小值。fun 一般是一个 M 函数（也可以为匿名函数，匿名函数只能有一个返回值），当 fun 只有一个返回值时，它的返回值是函数 $f(x)$；当 fun 有两个返回值时，它的第二个返回值是 $f(x)$ 的梯度向量；当 fun 有三个返回值时，它的第三个返回值是 $f(x)$ 的二阶导数阵（Hessian 阵）. x0 是向量 x 的初始值，options 是计算过程中的优化参数，需要根据函数 fun 返回值的个数进行相应的设置.

fminsearch 命令的使用格式为：

[x,fval]＝fminsearch(fun,x0,options) %该函数计算过程中不使用导数等信息。

例 4.18 求多元函数 $f(x,y,z)=(2x^2+y^2-48x-40y)\cos(x+z)$ 的一个极小值（初值向量取 $[0,1]$ 区间上均匀分布的随机向量）。

```
clc, clear
f=@(x)(2*x(1)^2+x(2)^2-48*x(1)-40*x(2))*cos(x(1)+x(3)); %定义匿名函数
[x1,val1]=fminunc(f,rand(3,1))   %求极小点及极小值
[x2,val2]=fminsearch(f,rand(3,1))   %求极小点及极小值
```

求得的极小点为 $(12,20,-12)$，极小值为 -688.

例 4.19 求函数 $f(x)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$ 的极小值.

在用 fminunc 求极小值时，可以使用函数的梯度，编写 M 函数 myfun418.m 如下

```
function [f,g]=myfun419(x);
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
g=[-400*x(1)*(x(2)-x(1)^2)-2*(1-x(1));200*(x(2)-x(1)^2)]; %g返回的是梯度向量
```

编写主程序文件如下：

```
options = optimset('GradObj','on');
[x,val]=fminunc('myfun419',rand(2,1),options)
```

```
%为了比较fminunc和fminsearch的计算精度，下面再用fminsearch计算
ff=@(x)100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
[x2,val2]=fminsearch(ff,rand(2,1))
```

求得函数的极小点 $(1,1)$，函数的极小值近似为0，由于极小值的每次运行结果都是不一样的，我们就不给出极小值了。可以看出fminunc在提供梯度信息条件下的计算精度比fminsearch高。

4.5 常微分方程的符号解

MATLAB 函数 dsolve 求符号常微分方程或常微分方程组的解，其使用格式如下：

S=dsolve(eqn)　%求常微分方程 eqn 的通解。

S=dsolve(eqn,cond)　%求常微分方程 eqn 在定解条件 cond 下的特解。

S=dsolve(eqn,cond,Name,Value)　%设置一个或多个属性名及属性值，求常微分方程 eqn 在定解条件 cond 下的解。

[y1,…,yN]= dsolve(eqns,conds,Name,Value)　%设置一个或多个属性名及属性值，求常微分方程组 eqns 在定解条件 conds 下的解。

例 4.20　求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解。

```
clc, clear, syms y(x)
y=dsolve(diff(y,2)-5*diff(y)+6*y==x*exp(2*x))   %求通解
pretty(y)   %以书写习惯的方式显示
```

例 4.21　求边值问题 $y''+y=x\cos 2x$，$y(0)=1$，$y(2)=3$的解。

```
clc, clear, syms y(x)
y=dsolve(diff(y,2)+y==x*cos(2*x),y(0)==1,y(2)==3)   %求边值问题的解
y=simplify(y)   %对符号解进行化简
pretty(y)   %以书写习惯的方式显示
```

例 4.22　求微分方程 $\frac{d^3u}{dx^3}=u$，$u(0)=1$，$u'(0)=-1$，$u''(0)=\pi$ 的解.

```
clc, clear, syms u(x)
du=diff(u)   %为了下面赋初值，定义 u 的 1 阶导数
d2u=diff(u,2)   %为了下面赋初值，定义 u 的 2 阶导数
u=dsolve(diff(u,3)==u,u(0)==1,du(0)==-1,d2u(0)==pi)   %求解
pretty(u)   %以书写习惯的方式显示
```

例 4.23　求如下微分方程组的解。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dy}{dt}-x=0, \quad x|_{t=0}=1, \\ \dfrac{dx}{dt}+y=0, \quad y|_{t=0}=0. \end{cases}$$

```
clc, clear, syms x(t) y(t)
[x,y]=dsolve(diff(x)+2*diff(y)-x==0,diff(x)+y==0,x(0)==1,y(0)==0)
pretty([x;y])
```

例 4.24 设非负函数 $y=y(x)(x\geq 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解 由函数 $y=y(x)$ 满足的微分方程，求得 y 的通解为

$$y=c_2x^2+2x+c_1.$$

由定解条件 $y(0)=0$，$\int_0^1 ydx=2$ 求得 $c_1=0$，$c_2=3$，因而 $y=3x^2+2x(x\geq 0)$。

当 $x=1$ 时，$y(1)=5$。

$y=3x^2+2x(x\geq 0)$ 的反函数为 $x(y)=\dfrac{\sqrt{3y+1}}{3}-\dfrac{1}{3}$。则旋转体的体积为

$$V=\int_0^5(\pi-\pi x^2(y))dy=\frac{17}{6}\pi.$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear, syms y(x) t
y=dsolve(x*diff(y,2)-diff(y)+2) %求通解
v=symvar(y) %提出 y 中的所有符号量
eq1=subs(y,x,0)   %定义定解条件的第一个方程
eq2=int(y,0,1)-2 %定义定解条件的第二个方程
[c10,c20]=solve(eq1,eq2) %解方程，确定通解中的两个常数值
yy=subs(y,{v(1),v(2)},{c10,c20}) %代入常数值，写出微分方程的解
y0=subs(yy,x,1) %求 x=1 对应的 y 值
f=finverse(yy,x) %计算 y=y(x)的反函数 x=x(y)
I=int(pi-pi*f^2,0,y0) %计算旋转体的体积
```

习题 4

4.1 求如下矩阵的特征值和特征向量。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.2 已知不在一平面上的四点：$A(1,2,4)$，$B(2,8,20)$，$C(10,30,50)$，$D(20,80,10)$，求四面体 $ABCD$ 的体积。

4.3 求由 $\int_0^y e^t dt+y\int_0^x \sin tdt=0$ 所确定的隐函数 y 对 x 的导数.

4.4 求积分 $\int_0^1\sqrt{1+2x}dx$ 的符号解和数值解。

4.5　求积分$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin\sqrt{x^2+2}dx$ 。

4.6　计算$\iint\limits_D (x^2+2y^2)dxdy$，其中$D$是由曲线$x=y^2, y=x-2$所围成的平面区域。

4.7　计算三重积分$\iiint\limits_\Omega zdxdydz$，其中$\Omega$是由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围成的闭区域。

4.8　在同一个图形界面上，画出$y=e^{2x}\sin x$的2阶符号导数和2阶数值导数在$[-2,2]$上的图形。

4.9　篮球从距离地面5米的地方以速率$v_0=20\mathrm{m/s}$和投射角$\theta=60^\circ$抛出，计算球落地的时间，落在何处，落地时速度的大小和方向。要求建立适当的坐标系，用Visio软件画出坐标系，并画出篮球运动轨迹的示意图。

4.10　已知

$$\begin{cases}\int_{10}^{20}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}dx=0.6006,\\ \int_0^9\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}dx=0.2661,\end{cases}$$

求μ,σ的值。

4.11　某容器内侧是由曲线$x^2+y^2=4y(1\le y\le 3)$与$x^2+y^2=4(y\le 1)$绕y轴旋转一周而形成的曲面。

（1）求容器的体积；

（2）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？（长度单位为m，重力加速度$g=9.8\mathrm{m/s^2}$，水的密度$\rho=10^3\mathrm{kg/m^3}$）。

要求用Visio软件画出容器内侧曲线的示意图。

4.12　（1）一架重5000kg的飞机以800km/h的航速开始着陆，在减速伞的作用下滑行500米后减速为100km/h。设减速伞的阻力与飞机的速度成正比，并忽略飞机所受的其他外力，试计算减速伞的阻力系数。

（2）将同样的减速伞配备在8000kg的飞机上，现已知机场跑道长度为1200m，若飞机着陆速度为600km/h，问跑道长度能否保障飞机安全着陆。

4.13　在区间$[-\pi,\pi]$上用三角函数组合$g(x)=a+b\cos x+c\sin x$逼近已知函数$f(x)$，如何选取a,b,c可使均方差$\sigma=\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(x)-f(x)\right]^2\mathrm{d}x$达到最小？对于$f(x)=x^3$，求对应的逼近函数$g(x)$。

4.14　个税和基尼系数的计算

（1）工资附件.xlsx是某个企业的100个职工12月份工资单里面数据是税前工资(已经扣除五险一金)，请计算该企业职工需要交纳的税费总额。

工资个税的计算公式为：

应纳税额＝（工资薪金所得 －“五险一金”－扣除数）×适用税率－速算扣除数

2011年 9月1日起执行7级超额累进税率：扣除数为3500元。

7级超额累进税率的计算说明见表4.2。

表4.2　7级超额累进税率数据表

全月应纳税所得额	税率	速算扣除数(元)
全月应纳税额不超过1500元	3%	0
全月应纳税额超过1500元至4500元	10%	105
全月应纳税额超过4500元至9000元	20%	555
全月应纳税额超过9000元至35000元	25%	1005

全月应纳税额超过 35000 元至 55000 元	30%	2755
全月应纳税额超过 55000 元至 80000 元	35%	5505
全月应纳税额超过 80000 元	45%	13505

（2）按照附件 2 的数据计算出按税前工资为标准的**税前基尼系数**，然后按照刚才的税率公式计算出税后工资（扣除所得税实际拿到的钱）为标准的**税后基尼系数**，根据这两个基尼系数，你可以得出怎样的结论？（税收是否降低基尼系数）。

附录：基尼系数的说明及相应算法：

（1）将一定地区（如一个国家、一个省、一个县等）内的全部调查人口按收入由低到高顺序排队，并按人数相等的原则平均分为若干组。一般比较常见的是，将全部调查人口分为 5 组，每组人口占总人口的 20%。

（2）分别计算每一组人口总收入占全部人口总收入的百分比。

（3）按收入由低到高的顺序，计算从第 1 组直到第i组的累计人口总收入占全部人口总收入的百分比。

（4）以各组累计人口百分比为横轴，累计收入百分比为纵轴，作出表示直到每一组的累计人口总收入占全部人口总收入的百分比随累计人口百分比变化而变化的曲线，这就是洛伦茨曲线。通过上述步骤得到的洛伦茨曲线通常是一条向右下方凸出的弯曲的曲线。一般地，洛伦茨曲线弯曲程度越大，表示收入分配不公平程度越大。将洛伦茨曲线的终点与坐标原点连接起来，得到一条直线，表示全部收入完全平均地分配在所有人口中间，没有任何分配差距，被称为“绝对公平线”。从洛伦茨曲线的终点向横轴作一垂线，与横轴相交，然后再沿横轴回到坐标原点，这样得到一条折线，称为“绝对不公平线”，它表示全部收入集中在 1 个人手中，其他人毫无收入。一般实际的洛伦茨曲线总是处于绝对公平线与绝对不公平线之间。

（5）为了能够定量地精确反映社会收入分配不平等程度，意大利统计学家基尼（Corrado Gini，1884-1965）在洛伦茨曲线的基础上，进一步提出了基尼系数（Ginicoefficient）的概念，其含义是指实际洛伦茨曲线与绝对公平线所包围的面积 A 占绝对公平线与绝对不公平线之间的面积 A＋B 的比重。用公式表示：

$$G = A/(A+B)$$

因为实际的洛伦茨曲线总是落在绝对公平线与绝对不公平线之间，因此，基尼系数总是介于 0 和 1 之间，并随洛伦茨曲线弯曲程度的增大而逐渐增大，表示社会收入分配不平等程度加剧。当洛伦茨曲线与绝对公平线重合时，基尼系数为 0，表示社会收入分配绝对平均；当洛伦茨曲线与绝对不公平线重合时，基尼系数为 1，表示社会收入分配绝对不平均。

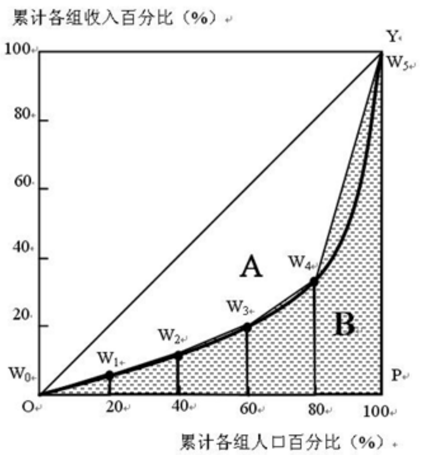

图 4.1