

## 第 10 讲 评价方法

司守奎

烟台市, 海军航空大学

Email: sishoukui@163.com

评价方法大体上可分为两类, 其主要区别在确定权重的方法上。一类是主观赋权法, 多数采取综合咨询评分确定权重, 如综合指数法、模糊综合评判法、层次分析法、功效系数法等。另一类是客观赋权, 根据各指标间相关关系或各指标值变异程度来确定权数, 如主成分分析法、因子分析法、理想解法 (也称 TOPSIS 法) 等。目前国内外综合评价方法有数十种之多, 其中主要使用的评价方法有主成分分析法、因子分析、TOPSIS、秩和比法、灰色关联、熵权法、层次分析法、模糊评价法、灰色理论法、物元分析法、价值工程法、神经网络法等。

### 10.1 一个简单的评价问题

利用指标变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  进行评价, 一般地, 就是构造一个线性评价函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n,$$

其中  $w_i$  是指标变量  $x_i$  的权重, 通常把权重  $w_i$  进行归一化处理, 即满足  $0 < w_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

假如我们研究如下的评奖学金问题。

**例 10.1** 请根据表 10.1 给出的 10 个学生 8 门课的成绩, 给出这 10 个学生评奖学金的评分排序。

表 10.1 学生成绩表

学生编号	语文	数学	物理	化学	英语	政治	生物	历史
1	93	66	86	88	77	71	90	94
2	97	99	61	61	75	87	70	70
3	65	99	94	71	91	86	80	93
4	97	79	98	61	92	66	88	69
5	85	92	87	63	67	64	96	98
6	63	65	91	93	80	80	99	74
7	71	77	90	88	78	99	82	68
8	82	97	76	73	86	73	65	70
9	99	92	86	98	89	83	66	85
10	99	99	67	61	90	69	70	79

首先把指标变量和数据描述出来, 供下面建模使用。

指标变量  $x_1, x_2, \dots, x_8$  分别表示学生的语文、数学、物理、化学、英语、政治、生物、历史成绩。用  $a_{ij}$  表示第  $i$  个学生关于指标变量  $x_j$  的取值, 构造数据矩阵  $A = (a_{ij})_{10 \times 8}$ 。

建模时有时需要对数据标准化处理, 当然对于上述评奖学金的问题, 由于所有指标变量取值的量纲是一样的, 数据的量级也一样, 就不需要标准化了。这里我们还是给出数据  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, 10, j = 1, 2, \dots, 8$ ) 的标准化处理。

将各指标值  $a_{ij}$  转换成标准化指标值  $b_{ij}$ ,

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \mu_j}{s_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, 10, j = 1, 2, \dots, 8), \quad (1)$$

其中  $\mu_j = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} a_{ij}$ ,  $s_j = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (a_{ij} - \mu_j)^2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ , 即  $\mu_j, s_j$  为第  $j$  个指标的样本均值

和样本标准差，记  $B = (b_{ij})_{10 \times 8}$ 。对应地，称

$$y_j = \frac{x_j - \mu_j}{s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad (2)$$

为标准化指标变量。

下面我们用例 10.1 的数据使用多种方法进行评价。

## 10.2 层次分析法

**例 10.2**（续例 10.1）利用层次分析法对 10 个学生进行评价排序。

用层次分析法进行评价，实际上就是求指标变量  $x_1, x_2, \dots, x_8$  的权重向量  $w_1, w_2, \dots, w_8$ 。

我们首先给出指标  $x_1, x_2, \dots, x_8$  重要性的两两比较判断矩阵

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 1/2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

计算得到矩阵  $C$  的最大特征值为  $\lambda_{\max} = 8.0615$ ，归一化特征向量为

$$v = [0.3619, 0.1810, 0.0914, 0.0914, 0.0914, 0.0839, 0.0494, 0.0494]^T.$$

判断矩阵的一致性指标

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{8.0615 - 8}{7} = 0.0062$$

对  $n = 1, \dots, 9$ ，Saaty 给出的平均随机一致性指标  $RI$  的值如表 10.2 所示。

计算一致性比例  $CR = CI / RI = 0.0062 < 0.10$ ，认为判断矩阵的一致性是可以接受的。

表 10.2 平均随机一致性指标  $RI$  的值

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$RI$	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

取评价的权重  $w = [w_1, w_2, \dots, w_8]^T = v$ ，则评价函数为  $f = \sum_{j=1}^8 w_j x_j$ ，第  $i$  个评价对象的评价

值为  $f_i = \sum_{j=1}^8 w_j a_{ij}$ 。

计算各个学生的评价得分值，并按照从大到小排序，得到的排序结果为

9 10 4 2 1 5 8 3 7 6.

用MATLAB计算时，首先把表10-1中的数据保存在纯文本文件data101.txt中，计算的MATLAB程序如下：

```
clc, clear
a=load('data101.txt');
c=[1 2 4 4 4 6 6 6;1/2 1 2 2 2 3 3 3
    1/4 1/2 1 1 1 1 2 2;1/4 1/2 1 1 1 1 2 2
    1/4 1/2 1 1 1 1 2 2;1/6 1/3 1 1 1 1 2 2
    1/6 1/3 1/2 1/2 1/2 1/2 1 1;1/6 1/3 1/2 1/2 1/2 1/2 1 1];
[w,lamda]=eigs(c,1) %求最大特征值及对应的特征向量
CI=(lamda-8)/7 %计算一致性指标
```

```

CR=CI/1.41 %计算一致性比例
w=w/sum(w) %特征向量归一化
f=a*w %计算每个人的评分
[sf,ind1]=sort(f,'descend') %把评分按照从大到小排序

```

### 10.3 灰色关联度

例 10.3（续例 10.1）利用灰色关联度对 10 个学生进行评价排序。

灰色关联度分析具体步骤如下：

（1）确定比较对象（评价对象）和参考数列（评价标准）

这里评价对象的个数  $m=10$ ，评价指标变量有 8 个，比较数列为

$$a_i = \{a_i(k) | k=1, 2, \dots, 8\}, \quad i=1, 2, \dots, 10,$$

这里  $a_i(k)$  是第  $i$  个评价对象关于第  $j$  个指标变量  $x_j$  的取值。

参考数列为  $a_0 = \{a_0(k) | k=1, 2, \dots, 8\}$ ，这里  $a_0(k)=100$ ， $k=1, 2, \dots, 8$ 。即参考数列相当于一个虚拟的最好评价对象的各指标值。

（2）计算灰色关联系数

$$\xi_i(k) = \frac{\min_s \min_t |a_0(t) - a_s(t)| + \rho \max_s \max_t |a_0(t) - a_s(t)|}{|a_0(k) - a_i(k)| + \rho \max_s \max_t |a_0(t) - a_s(t)|}, \quad i=1, 2, \dots, 10, \quad k=1, 2, \dots, 8.$$

为比较数列  $a_i$  对参考数列  $a_0$  在第  $k$  个指标上的关联系数，其中  $\rho \in [0, 1]$  为分辨系数。称式中  $\min_s \min_t |a_0(t) - a_s(t)|$ 、 $\max_s \max_t |a_0(t) - a_s(t)|$  分别为两级最小差及两级最大差。

一般来讲，分辨系数  $\rho$  越大，分辨率越大； $\rho$  越小，分辨率越小。

（3）计算灰色关联度

灰色关联度的计算公式为

$$r_i = \sum_{k=1}^8 w_k \xi_i(k), \quad i=1, 2, \dots, 10.$$

其中  $w_k$  为第  $k$  个指标变量  $x_k$  的权重，这里取为等权重，即  $w_k = 1/8$ ， $r_i$  为第  $i$  个评价对象对理想对象的灰色关联度。

（4）评价分析

根据灰色关联度的大小，对各评价对象进行排序，可建立评价对象的关联序，关联度越大其评价结果越好。

计算结果见表 10-3。通过表 10.3 可以看出，各个学生的评价价值从高到低的次序依次为：

9      3      5      4      1      10      6      7      2      8.

表 10.3 各个学生的灰色关联度计算数据

学生编号	语文	数学	物理	化学	英语	政治	生物	历史	$r_i$
1	0.7736	0.3832	0.6119	0.6508	0.4824	0.4227	0.6949	0.8039	0.6029
2	0.9111	1.0000	0.3504	0.3504	0.4607	0.6308	0.4141	0.4141	0.5665
3	0.3761	1.0000	0.8039	0.4227	0.7193	0.6119	0.5190	0.7736	0.6533
4	0.9111	0.5062	0.9535	0.3504	0.7455	0.3832	0.6508	0.4059	0.6133
5	0.5942	0.7455	0.6308	0.3628	0.3905	0.3694	0.8723	0.9535	0.6149
6	0.3628	0.3761	0.7193	0.7736	0.5190	0.5190	1.0000	0.4505	0.5900
7	0.4227	0.4824	0.6949	0.6508	0.4940	1.0000	0.5467	0.3981	0.5862
8	0.5467	0.9111	0.4713	0.4409	0.6119	0.4409	0.3761	0.4141	0.5266
9	1.0000	0.7455	0.6119	0.9535	0.6721	0.5616	0.3832	0.5942	0.6903
10	1.0000	1.0000	0.3905	0.3504	0.6949	0.4059	0.4141	0.5062	0.5953

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear
```

```

a=textread('data101.txt');
t=ones(size(a))*100-a; %计算参考序列与每个序列的差
mmin=min(min(t)); %计算最小差
mmax=max(max(t)); %计算最大差
rho=0.5; %分辨系数
xs=(mmin+rho*mmax)./(t+rho*mmax) %计算灰色关联系数
gd=mean(xs,2) %取等权重，计算关联度
[sgd,ind2]=sort(gd,'descend') %对关联度按照从大到小排序
xlswrite('data103.xls',[xs,gd]) %把关联系数和关联度写到 Excel 文件中，便于做表

```

#### 10.4 TOPSIS 法

例 10.4（续例 10.1）用 TOPSIS 法进行评价。

TOPSIS 法的具体算法如下：

（1）数据标准化

可以使用（1）式进行数据标准化，这里使用向量规划化的方法求得规范决策矩阵。

在 TOPSIS 方法中，数据矩阵  $A=(a_{ij})_{10 \times 8}$  也称为决策矩阵，构造规范化决策矩阵

$\tilde{B}=(\tilde{b}_{ij})_{10 \times 8}$ ，其中

$$\tilde{b}_{ij} = a_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^{10} a_{ij}^2}, \quad i=1,2,\dots,10, \quad j=1,2,\dots,8.$$

（2）确定正理想解  $C^*$  和负理想解  $C^0$

设正理想解  $C^*$  的第  $j$  个属性值为  $c_j^*$ ，负理想解  $C^0$  第  $j$  个属性值为  $c_j^0$ ，则

$$\begin{aligned} \text{正理想解 } c_j^* &= \begin{cases} \max_i \tilde{b}_{ij}, & x_j \text{ 为效益型属性,} \\ \min_i \tilde{b}_{ij}, & x_j \text{ 为成本型属性,} \end{cases} \quad j=1,2,\dots,8. \\ \text{负理想解 } c_j^0 &= \begin{cases} \min_i \tilde{b}_{ij}, & x_j \text{ 为效益型属性,} \\ \max_i \tilde{b}_{ij}, & x_j \text{ 为成本型属性,} \end{cases} \quad j=1,2,\dots,8. \end{aligned}$$

（3）计算各评价对象到正理想解与负理想解的距离

各评价对象到正理想解的距离为

$$s_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^8 (\tilde{b}_{ij} - c_j^*)^2}, \quad i=1,2,\dots,10.$$

各评价对象到负理想解的距离为

$$s_i^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^8 (\tilde{b}_{ij} - c_j^0)^2}, \quad i=1,2,\dots,10.$$

（4）计算各评价对象的排队指标值（即综合评价指数）

$$f_i^* = s_i^0 / (s_i^0 + s_i^*), \quad i=1,2,\dots,10.$$

（5）按  $f_i^*$  由大到小排列方案的优劣次序。

利用 MATLAB 程序，求得各个学生的评价价值从高到低的次序依次为：

9      3      1      7      6      5      4      10      2      8.

计算的 MATLAB 程序如下：

```

clc, clear
a=textread('data101.txt');
[m,n]=size(a);
for j=1:n
    b(:,j)=a(:,j)/norm(a(:,j)); %向量规划化
end
cstar=max(b); %求正理想解
c0=min(b); %求负理想解
for i=1:m

```

```

sstar(i)=norm(b(i,:)-cstar); %求到正理想解的距离
s0(i)=norm(b(i,:)-c0); %求到负理想解的距离
end
f=s0./(s0+sstar); %求评价的指标值
[sf,ind3]=sort(f,'descend') %按从大到小对指标值进行排列

```

## 10.5 主成分分析法

例 10.5（续例 10.1）用主成分分析法进行评价。

主成分分析法的评价步骤如下：

（1）对原始数据进行标准化处理

按（1）式对数据  $a_{ij}$ （ $i=1,2,\dots,10$ ， $j=1,2,\dots,8$ ）进行标准化，标准化后得到数据矩阵

$B=(b_{ij})_{10 \times 8}$ ，按（2）式定义标准化指标变量  $y_j$ （ $j=1,2,\dots,8$ ）。

（2）计算相关系数矩阵  $R$

相关系数矩阵  $R=(r_{ij})_{8 \times 8}$

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{10} b_{ki} b_{kj}}{10-1}, \quad (i, j=1, 2, \dots, 8),$$

式中  $r_{ii}=1$ ， $r_{ij}=r_{ji}$ ， $r_{ij}$  是第  $i$  个指标与第  $j$  个指标的相关系数。

（3）计算特征值和特征向量

计算相关系数矩阵  $R$  的特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_8$ ，及对应的标准化特征向量  $u_1, u_2, \dots, u_8$ ，

其中  $u_j=[u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{8j}]^T$ ，由特征向量组成 8 个新的指标变量

$$z_1 = u_{11}y_1 + u_{21}y_2 + \dots + u_{81}y_8,$$

$$z_2 = u_{12}y_1 + u_{22}y_2 + \dots + u_{82}y_8,$$

.....

$$z_8 = u_{18}y_1 + u_{28}y_2 + \dots + u_{88}y_8,$$

式中  $z_1$  是第 1 主成分， $z_2$  是第 2 主成分， $\dots$ ， $z_8$  是第 8 主成分。

（4）选择  $p$ （ $p \leq 5$ ）个主成分，计算综合评价

i) 计算特征值  $\lambda_j$ （ $j=1,2,3,4$ ）的信息贡献率和累积贡献率。称

$$b_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^8 \lambda_k} \quad (j=1,2,3,4)$$

为主成分  $z_j$  的信息贡献率；

$$\alpha_p = \frac{\sum_{k=1}^p \lambda_k}{\sum_{k=1}^8 \lambda_k}$$

为主成分  $z_1, z_2, \dots, z_p$  的累积贡献率，当  $\alpha_p$  接近于 1（ $\alpha_p=0.85, 0.90, 0.95$ ）时，则选择前  $p$  个新指标变量  $z_1, z_2, \dots, z_p$  作为  $p$  个主成分，代替原来 8 个指标变量，从而可对  $p$  个主成分进行综合分析。

ii) 计算综合得分

$$f = \sum_{j=1}^p b_j z_j,$$

其中  $b_j$  为第  $j$  个主成分的信息贡献率，根据综合得分值就可进行评价。

利用 MATLAB 软件求得相关系数矩阵的 8 个特征根及其贡献率如表 10.4 所示。

表 10.4 特征根、贡献率及累积贡献率

序号	特征根	贡献率	累计贡献率
----	-----	-----	-------

1	2.903917	36.29897	36.29897
2	1.79989	22.49863	58.79759
3	1.140507	14.25634	73.05393
4	0.916023	11.45029	84.50422
5	0.825704	10.3213	94.82551
6	0.251191	3.139889	97.9654
7	0.13505	1.688124	99.65352
8	0.027718	0.346476	100

可以看出，前四个特征根的累计贡献率达到 84.5%，主成分分析效果较好。下面选取前四个主成分进行综合评价。前四个特征根对应的特征向量见表 10.5。

表 10.5 标准化变量的前 4 个主成分对应的特征向量

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$
第 1 特征向量	0.3775	0.4859	-0.4546	-0.3506	0.1763	-0.0849	-0.4848	-0.1362
第 2 特征向量	-0.2642	-0.0001	-0.0125	0.3649	0.2803	0.6330	-0.3407	-0.4490
第 3 特征向量	0.1209	-0.0441	0.4804	0.0104	0.7990	-0.3327	-0.0588	-0.0017
第 4 特征向量	-0.3973	0.5281	0.1563	0.0134	0.0733	0.2088	-0.1389	0.6858

由此可得前四个主成分分别为

$$z_1 = 0.3775y_1 + 0.4859y_2 - 0.4546y_3 - \cdots - 0.1362y_8,$$

$$z_2 = -0.2642y_1 - 0.0001y_2 - 0.0125y_3 + \cdots - 0.4490y_8,$$

$$z_3 = 0.1209y_1 - 0.0441y_2 + 0.4804y_3 + \cdots - 0.0017y_8,$$

$$z_4 = -0.3973y_1 + 0.5281y_2 + 0.1563y_3 + \cdots + 0.6858y_8.$$

分别以四个主成分的贡献率为权重，构建主成分综合评价模型

$$f = 0.3630z_1 + 0.2250z_2 + 0.1426z_3 + 0.1145z_4.$$

先计算出各个评价对象的四个主成分值，再把得到的四个主成分值代入上式，可以得到各个评价对象的综合评价值以及排序结果如表 10.6 所示，主成分分析的排序结果与其他方法的排序结果差异很大。

表 10.6 排名和综合评价结果

学生编号	1	2	3	4	5
评价值	2.8444	22.0034	16.7900	11.8573	4.3557
排名次序	9	2	5	6	8
学生编号	6	7	8	9	10
评价值	1.0083	10.7768	21.9700	20.0578	23.1191
排名次序	10	7	3	4	1

计算的 MATLAB 程序如下

```

clc, clear
a=textread('data101.txt');
b=zscore(a); %数据标准化
r=corrcoef(b); %计算相关系数矩阵
%下面利用相关系数矩阵进行主成分分析，x 的列为 r 的特征向量，即主成分的系数
[x,y,z]=pcacov(r) %y 为 r 的特征值，z 为各个主成分的贡献率
%s=repmat(sign(sum(x)),size(x,1),1); %构造与 x 同维数的元素为±1 的矩阵

```

```

%x=x.*s %修改特征向量的正负号，每个特征向量乘以所有分量和的符号函数值
num=4; %num 为选取的主成分的个数
df=a*x(:,[1:num]); %计算各个主成分的分
f=df*z(1:num)/100 %计算综合得分
[sf,ind4]=sort(f,'descend') %把得分按照从高到低的次序排列
xlswrite('data105.xls',[y,z,cumsum(z)],1) %把数据写到 Excel 文件便于做表
xlswrite('data105.xls',x',2) %把数据写到 Excel 文件便于做表
ind42(ind4)=1:10
xlswrite('data105.xls',[f';ind42],3) %把数据写到 Excel 文件便于做表

```

**注：应用主成分分析法做评价，我们一直觉得没有把握，原因在于主成分系数的正负选择上，由于一个特征向量乘以-1 后还是特征向量。**

## 10.6 秩和比综合评价法

秩和比综合评价法基本原理是在一个  $m$  行  $n$  列矩阵中，通过秩转换，获得无量纲统计量 RSR；在此基础上，运用参数统计分析的概念与方法，研究 RSR 的分布；以 RSR 值对评价对象的优劣直接排序或分档排序，从而对评价对象做出综合评价。

先介绍一下样本秩的概念。

**定义 10.1 样本秩**

设  $x_1, x_2, \dots, x_m$  是从一元总体抽取的容量为  $m$  的样本，其从小到大的顺序统计量是  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}$ 。若  $x_i = x_{(k)}$ ，则称  $k$  是  $x_i$  在样本中的秩，记作  $R_i$ ，对每一个  $i=1, 2, \dots, m$ ，称  $R_i$  是第  $i$  个秩统计量。 $R_1, R_2, \dots, R_m$  总称为秩统计量。

例如，对样本数据

-0.8, -3.1, 1.1, -5.2, 4.2,

顺序统计量是

-5.2, -3.1, -0.8, 1.1, 4.2,

而秩统计量是

3, 2, 4, 1, 5.

**例 10.6**（续例 10.1）用秩和比综合评价法进行评价。

秩和比综合评价法的步骤如下：

（1）编秩

对数据矩阵  $A = (a_{ij})_{10 \times 8}$  逐列编秩，即分别编出每个指标值的秩，其中效益型指标从小到大编秩，成本型指标从大到小编秩，指标值相同时编平均秩。得到的秩矩阵记为  $R = (R_{ij})_{10 \times 8}$ ，具体值见表 10.7。

（2）计算秩和比（RSR）

根据公式

$$RSR_i = \frac{1}{10 \times 8} \sum_{j=1}^8 R_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, 10.$$

计算秩和比。当各评价指标的权重不同时，计算加权秩和比（WRSR），其计算公式为

$$WRSR_i = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^8 w_j R_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, 10.$$

其中  $w_j$  为第  $j$  个评价指标的权重， $\sum_{j=1}^8 w_j = 1$ 。

这里我们取各评价指标的权重相同，秩和比的计算结果见表 10.7 的最后一列。

**表 10.7 编秩和秩和比的计算结果**

学生 编号	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$RSR_i$
1	6	2	4.5	7.5	3	4	8	9	0.5500
2	7.5	9	1	2	2	9	3.5	3.5	0.4688
3	2	9	9	5	9	8	5	8	0.6875

4	7.5	4	10	2	10	2	7	2	0.5563
5	5	5.5	6	4	1	1	9	10	0.5188
6	1	1	8	9	5	6	10	5	0.5625
7	3	3	7	7.5	4	10	6	1	0.5188
8	4	7	3	6	6	5	1	3.5	0.4438
9	9.5	5.5	4.5	10	7	7	2	7	0.6563
10	9.5	9	2	2	8	3	3.5	6	0.5375

### (3) 计算概率单位

将秩和比  $RSR$  值由小到大排列起来，列出各组频数  $f_i$ ，计算各组累积频数  $cf_i$ ，计算累积频率  $p_i = cf_i / 10$ ，最后一个累积频率（0.9875，见表10-8）按  $1 - 1/(10 \times 8)$  估计。将  $p_i$  转换为概率单位  $Probit_i$ ， $Probit_i$  为标准正态分布的  $p_i$  分位数加5，计算结果见表10.8。

表 10.8 累积频率、概率单位及秩和比估计值

学生编号	$RSR_i$	$f_i$	$cf_i$	$p_i$	$Probit_i$	$RSR\hat{f}it_i$	排序
6	0.4438	1	1	0.1	3.7184	0.4455	10
2	0.4688	1	2	0.2	4.1584	0.4761	9
10	0.5188	1	3	0.3	4.4756	0.4981	8
7	0.5188	1	4	0.4	4.7467	0.5169	7
3	0.5375	1	5	0.5	5.0000	0.5344	6
8	0.5500	1	6	0.6	5.2533	0.5520	5
4	0.5563	1	7	0.7	5.5244	0.5708	4
1	0.5625	1	8	0.8	5.8416	0.5928	3
9	0.6563	1	9	0.9	6.2816	0.6234	2
5	0.6875	1	10	0.9875	7.2414	0.6900	1

### (4) 计算直线回归方程

以累积频率所对应的概率单位  $Probit_i$  为自变量，以  $RSR_i$ （或  $WRSR_i$ ）值为因变量，计算得到直线回归方程  $RSR = 0.1875 + 0.0694Probit$ 。利用得到的回归方程，计算  $RSR$  的估计值见表10.8的倒数第二列  $RSR\hat{f}it_i$ 。

### (5) 分档排序

按照回归方程推算所对应的  $RSR$  估计值  $RSR\hat{f}it_i$  对评价对象进行分档排序，各个学生的综合评价的排序结果见表10-8的最后一列。各个学生的评价从高到低的次序依次为：

5      9      1      4      8      3      7      10      2      6.

计算的 MATLAB 程序如下：

```

clc, clear
a=textread('data101.txt');
ra=tiedrank(a) %对每个指标值分别编秩，即对 a 的每一列分别编秩
[m,n]=size(ra); %计算矩阵 sa 的维数
RSR=mean(ra,2)/m %计算秩和比
[sRSR,ind]=sort(RSR) %对秩和比按照从小到大排序
ind2(ind,1)=1:m %表 10-8 的第一列
f=ones(m,1) %表 10-8 的第三列
cf=cumsum(f) %表 10-8 的第四列
p=[1:m]/m; p(end)=1-1/(m*n) %修正最后一个数据为 1-1/(m*n)
Probit=norminv(p,0,1)+5 %计算标准正态分布的 p 分位数+5

```



```

X=[ones(m,1),Probit]; %构造一元线性回归分析的数据矩阵
[ab,abint,r,rint,stats]=regress(sRSR,X) %一元线性回归分析
RSRfit=X*ab %计算 RNR 的估计值
xlswrite('data106.xls',[ra,RSR],1) %把表 10-7 的计算结果写入第 1 个表单中
xlswrite('data106.xls',[ind2,sRSR,f,cf,p,Probit,RSRfit,[m:-1:1]],2) %把表 10.8 的计算结果
写入第 2 个表单中

```

### 10.7 基于熵权法的评价方法

熵本源于热力学，后由申农 C. E. Shannon 引入信息论，根据熵的定义与原理，当系统可能处于几种不同状态，每种状态出现的概率为  $p_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ )，则该系统的熵就可定义

$$e = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i .$$

熵权法是一种客观赋权方法。在具体使用过程中，熵权法根据各指标的变异程度，利用信息熵计算出各指标的熵权，再通过熵权对各指标的权重进行修正，从而得出较为客观的指标权重。

例 10.7（续例 10.1）用熵权法进行评价。

基于熵权法的评价方法步骤如下：

（1）利用原始数据矩阵  $A=(a_{ij})_{10 \times 8}$  计算  $p_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,10$ ,  $j=1,2,\dots,8$ )，即第  $i$  个评价对象关于第  $j$  个指标值的比重

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{10} a_{ij}}, \quad i=1,2,\dots,10, \quad j=1,2,\dots,8.$$

（2）计算第  $j$  项指标的熵值

$$e_j = -\frac{1}{\ln 10} \sum_{i=1}^{10} p_{ij} \ln p_{ij}, \quad j=1,2,\dots,8.$$

（3）计算第  $j$  项指标的变异系数  $g_j$

对于第  $j$  项指标， $e_j$  越大，指标值的变异程度就越小。变异系数

$$g_j = 1 - e_j, \quad j=1,2,\dots,8.$$

（4）计算第  $j$  项指标的权重

$$w_j = \frac{g_j}{\sum_{j=1}^8 g_j}, \quad j=1,2,\dots,8.$$

（5）计算第  $i$  个评价对象的综合评价价值

$$s_i = \sum_{j=1}^8 w_j p_{ij} .$$

评价价值越大越好。

利用 MATLAB 程序，求得的各指标变量的权重值见表 10.9，各个学生的综合评价价值及排名次序见表 10.10。各个学生评价价值从高到低的次序为

9      1      3      7      6      5      4      10      8      2.

表 10.9 各指标的评价权重

指标	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
权重	0.1544	0.1363	0.1127	0.1972	0.0552	0.1064	0.1273	0.1104

表 10.10 学生的综合评价价值及排名次序

学生编号	1	2	3	4	5
评价价值 $s_i$	0.1091	0.1039	0.1019	0.1012	0.1003

排名	2	10	3	7	6
学生编号	6	7	8	9	10
评价值 $s_i$	0.1000	0.0978	0.0959	0.0951	0.0950
排名	5	4	9	1	8

计算的 MATLAB 程序如下：

```

clc, clear
a=textread('data101.txt');
[m,n]=size(a);
for j=1:n
    p(:,j)=a(:,j)/sum(a(:,j));
    e(j)=-sum(p(:,j).*log(p(:,j)))/log(m);
end
g=1-e; w=g/sum(g) %计算权重
s=w*p' %计算各个评价对象的综合评价
[ss,ind1]=sort(s,'descend') %对评价值从大到小排序
ind2(ind1)=1:m
xlswrite('data107.xls',w,1) %把表 10-9 的数据写到 Excel 文件的表单 1 中
xlswrite('data107.xls',[1:m; ss;ind2],2)%把表 10-10 的数据写到 Excel 文件表单 2 中

```

## 10.8 数据包络分析法

数据包络分析（data envelopment analysis, DEA）是著名运筹学家A. Charnes 和 W. W. Copper 等学者以“相对效率”概念为基础，根据多指标投入和多指标产出对相同类型的单位（部门）进行相对有效性或效益评价的一种系统分析方法。它是处理多目标决策问题的方法。它应用数学规划模型计算比较评价对象之间的相对效率，对评价对象做出评价。

DEA 是以相对效率概念为基础，以凸分析和线性规划为工具的一种评价方法。这种方法结构简单，使用比较方便。自从 1978 年提出第一个 DEA 模型— $C^2R$  模型并用于评价部门间的相对有效性以来，DEA 方法不断得到完善并在实际中被广泛应用。

设有  $m$  个评价对象，每个评价对象都有  $n$  种投入和  $s$  种产出，设  $a_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$ ) 表示第  $i$  个评价对象的第  $j$  种投入量， $b_{ik}$  ( $i=1, \dots, m$ ,  $k=1, \dots, s$ ) 表示第  $i$  个评价对象的第  $k$  种产出量， $u_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) 表示第  $j$  种投入的权值， $v_k$  ( $k=1, \dots, s$ ) 表示第  $k$  种产出的权值。

向量  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) 分别表示评价对象  $i$  的输入和输出向量， $u$  和  $v$  分别表示输入、输出权值向量，则  $\alpha_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]^T$ ,  $\beta_i = [b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{is}]^T$ ,  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ ,  $v = [v_1, v_2, \dots, v_s]^T$ 。

定义评价对象  $i$  的效率评价指数为

$$h_i = (\beta_i^T v) / (\alpha_i^T u), \quad (i=1, \dots, m).$$

评价对象  $i_0$  效率的数学模型为

$$\begin{aligned}
 & \max \frac{\beta_{i_0}^T v}{\alpha_{i_0}^T u}, \\
 & \text{s.t.} \quad \begin{cases} \frac{\beta_i^T v}{\alpha_i^T u} \leq 1, & i=1, 2, \dots, m, \\ u \geq 0, v \geq 0, u \neq 0, v \neq 0. \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

通过Charnes-Cooper变换： $\omega = tu$ ,  $\mu = tv$ ,  $t = \frac{1}{\alpha_{i_0}^T u}$ ，可以将模型(3)变化为等价的线性

规划问题

$$\max V_{i_0} = \beta_{i_0}^T \mu,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \alpha_i^T \omega - \beta_i^T \mu \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \alpha_{i_0}^T \omega = 1, \\ \omega \geq 0, \mu \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

可以证明，模型(3)与模型(4)是等价的。

对于C<sup>2</sup>R模型(4)，有如下定义

**定义 10.2** 若线性规划问题(4)的最优目标值  $V_{i_0} = 1$ ，则称评价对象  $i_0$  是弱 DEA 有效的。

**定义 10.3** 若线性规划问题(4)存在最优解  $\omega^* > 0$ ， $\mu^* > 0$ ，并且其最优目标值  $V_{j_0} = 1$ ，则称评价对象  $j_0$  是 DEA 有效的。

从上述定义可以看出，所谓 DEA 有效，就是指那些评价对象，它们的投入产出比达到最大。因此，可以用 DEA 来对评价对象进行评价。

**例 10.8** 利用 DEA 方法对天津市的可持续发展进行评价。在这里选取较具代表性的指标，作为输入变量和输出变量，见表 10.11。

表 10.11 各决策单元输入、输出指标值

序号	决策单元	政府财政收入占 GDP 的比重 (%)	环保投资占 GDP 的比重 (%)	每千人科技人员数 (人)	人均 GDP (元)	城市环境质量指数
1	1990	14.40	0.65	31.30	3621.00	0.00
2	1991	16.90	0.72	32.20	3943.00	0.09
3	1992	15.53	0.72	31.87	4086.67	0.07
4	1993	15.40	0.76	32.23	4904.67	0.13
5	1994	14.17	0.76	32.40	6311.67	0.37
6	1995	13.33	0.69	30.77	8173.33	0.59
7	1996	12.83	0.61	29.23	10236.00	0.51
8	1997	13.00	0.63	28.20	12094.33	0.44
9	1998	13.40	0.75	28.80	13603.33	0.58
10	1999	14.00	0.84	29.10	14841.00	1.00

输入变量：政府财政收入占 GDP 的比重、环保投资占 GDP 的比重、每千人科技人员数；输出变量：经济发展（用人均 GDP 表示）、环境发展（用城市环境质量指数表示）。

计算的 Lingo 程序如下。

**model:**

**sets:**

dmu/1..10/:s,t,p;     !决策单元;

inw/1..3/:omega;     !输入权重;

outw/1..2/:mu;     !输出权重;

inv(inw,dmu):x;     !输入变量;

outv(outw,dmu):y;

**endsets**

**data:**

x=14.4 16.9 15.53 15.4 14.17 13.33 12.83 13 13.4 14

0.65 0.72 0.72 0.76 0.76 0.69 0.61 0.63 0.75 0.84

31.3 32.2 31.87 32.23 32.4 30.77 29.23 28.2 28.8 29.1;

y=3621 3943 4086.67 4904.67 6311.67 8173.33 10236 12094.33 13603.33

```

14841    0    0.09 0.07    0.13 0.37    0.59    0.51 0.44    0.58 1;
enddata
submodel subopt:
max=@sum(dmu:p*t);
p(flag)=1;
@for(dmu(i)|i#ne#flag:p(i)=0);
@for(dmu(j):s(j)=@sum(inw(i):omega(i)*x(i,j)));
t(j)=@sum(outw(i):mu(i)*y(i,j));s(j)>t(j));
@sum(dmu:p*s)=1;
endsubmodel
calc:
@for(dmu(k): flag=k; @solve(subopt));
endcalc
end

```

计算结果见表10.12，最优目标值用  $\theta$  表示。显而易见，该市在20世纪90年代的发展是朝着可持续方向前进的。

表 10.12 用 DEA 方法对天津市可持续发展的相对评价结果

年份	$\theta$	结论
1990	0.2901843	非DEA有效
1991	0.2853571	非DEA有效，规模收益递减
1992	0.2968261	非DEA有效，规模收益递增
1993	0.3425151	非DEA有效，规模收益递增
1994	0.4594712	非DEA有效，规模收益递增
1995	0.7182609	非DEA有效，规模收益递增
1996	0.9069108	非DEA有效，规模收益递增
1997	1	DEA有效，规模收益递增
1998	1	DEA有效，规模收益不变
1999	1	DEA有效，规模收益不变

## 习题 10

10.1 在评教过程中，评价的 11 个指标分别为：

- $x_1$ ：教师对教学工作认真负责； $x_2$ ：教师教学表达清楚；  
 $x_3$ ：教师教学辅助手段使用恰当； $x_4$ ：教师教学重点、难点突出；  
 $x_5$ ：教师重视传授方法； $x_6$ ：教师重视与学生交流；  
 $x_7$ ：教师有自己的教学风格和特色； $x_8$ ：教师的品格对你产生了积极的影响；  
 $x_9$ ：教师能调动起你的学习积极性； $x_{10}$ ：通过教师教学，你对本课程的兴趣比以前高；  
 $x_{11}$ ：通过教师教学，你的能力比以前提高。

已知 8 位教师关于 11 个指标的取值见表 10.13，试利用主成分分析法和模糊聚类分析方法对这 8 位教师进行评价。

表 10.13 8 位教师的评教得分数据

序号	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$
1	4.38	4.37	4.23	4.15	4.25	4.16	4.44	4.32	4.28	4.27	4.20
2	4.29	4.37	4.04	4.33	4.12	4.04	4.22	3.89	3.78	3.68	4.07
3	3.89	4.26	3.83	3.66	3.99	3.93	4.41	4.16	3.93	4.00	4.04
4	4.50	4.11	4.28	4.24	4.31	4.35	4.60	4.31	4.21	4.21	4.43

5	3.95	3.32	3.68	3.22	3.38	3.72	3.66	3.12	2.93	2.92	3.24
6	3.93	4.26	4.17	4.04	3.97	3.91	4.09	3.86	4.01	4.08	4.08
7	4.19	3.71	3.93	3.99	3.75	3.72	3.92	3.60	3.49	3.40	3.61
8	4.28	4.33	4.25	3.89	4.19	4.11	4.49	4.21	4.10	4.23	4.09

## 10.2 基于飞行数据的无人机飞行质量评价

在无人机的地面站及飞控系统中，嵌入了一套飞行数据管理记录系统（Flight Data Management & Recorder System，简称 FDMRS）。FDMRS 是能够完成实时采集、记录无人机飞行过程的数据信息，依托 FDMRS，可以建立完整的无人机检测维护、飞行安全及飞行质量管理体系，它是保证无人机飞行安全、提高完好率和训练效果的有力工具。因此，利用无人机的 FDMRS 数据，可以对无人机的飞行质量及对无人机的操控过程进行评估分析。

利用飞行数据对有人驾驶飞机的飞行操作质量进行分析评估，国际上早有研究。1993 年，国际飞行安全基金会与美国联邦航空局联合出版了飞行操作质量保证（Flight Operational Quality Assurance，简称 FOQA）计划的项目研究报告。FOQA 是一个“获取并分析飞机在航行过程中由飞行数据记录器所记录下来的飞行数据”，从而提高飞行安全操作的安全性，改善空中交通管制程序，指导机场与飞机的设计与维护的项目。

对于无人机，飞行质量评价在无人机操控训练中具有非常重要的意义，它可为无人机操控手飞行训练提供反馈，是提高飞行技能的有效途径。可增强训练环节的衔接，提高训练科目、训练内容的针对性、有效性，通过避免“过培养”、“欠培养”现象的发生，优化训练时间，减少资源浪费，提高训练工作的效费比；可对飞行操作能力进行量化评估，提高飞行讲评的针对性。具有极大的军事应用价值和广泛的军事应用前景。因而有必要依据飞行数据对无人机的飞行质量及无人机操控人员的操作状况进行分析研究。

请你们研究如下问题：

1. 在地理坐标系（纬度，经度，高程）和本地直角坐标系中分别画出 2016-09-22 13-05-34.tlog.mat 文件中所给出数据的航迹。在同一个图形界面中分三个子窗口分别画出纬度、经度、高程关于时间的变化曲线，再画出该无人机的速度大小曲线。

2. 研究表明，所有的飞行动作都是以水平直线飞行、转弯、爬升、下滑这四个基本飞行动作为基础的，所有的受控飞行都是由这四种基本动作中的一个或者多个动作组合而成。无人机地面站记录了无人机在空中的飞行状态及操控手对无人机的操作信息。根据数据文件 2016-09-22 13-05-34.tlog.mat 中所给出的飞行数据，进行飞行科目分解与基本飞行动作识别，从其飞行历程中分别提取 4 个基本飞行动作的有代表性的一段数据序列。

3. 如果将一个复杂的飞行动作分解成一个或多个基本飞行动作的组合形式，则任意形式的飞行动作评价就有了相对统一、客观的评价内容，具备了可对比性。评价一个无人机操控

手的飞行质量,首先需要将整个飞行过程划分成上述 4 个基本飞行科目或基本飞行科目的组合,并提取与对应基本飞行动作相关的敏感参数和特征参数。针对每个基本飞行科目分别建立评价指标体系,通过特定算法完成对飞行质量的评价。根据问题 2 中提取的飞行阶段及其数据,评价该无人机操控手在各个阶段的飞行质量,并分析该无人机操控手的飞行习惯及癖动作。

4.评价一个无人机操控手的综合飞行技能,不仅要评估每个基本飞行动作的飞行质量,还需要评估从起飞、空中巡航到着陆的整个飞行状态下所有飞行动作的综合飞行质量。在问题 3 的基础上,建立一个综合评价模型,并评价 2016-09-22 13-05-34.tlog.mat、2016-09-24 09-40-48.tlog.mat、2016-09-24 12-46-11.tlog.mat 对应的 3 个无人机操控手的飞行质量哪个好?

5.在问题 3 和问题 4 讨论结果基础上,建立模型找出影响飞行质量的主要因素。并提出对无人机操控手的考核办法。

#### 附录 1 数据格式说明(详细说明文件见 word 文档“MAVLINK 下的遥测数据解析”):

加载数据文件 2016-09-22 13-05-34.tlog.mat 的 MATLAB 命令为:

```
load('2016-09-22 13-05-34.tlog.mat')
```

文件 2016-09-22 13-05-34.tlog.mat 中包含 305 个矩阵, 2016-09-24 09-40-48.tlog.mat 中包含 297 个矩阵, 2016-09-24 12-46-11.tlog.mat 中包含 298 个矩阵, 其中的一些重要参数说明如下:

alt\_mavlink\_global\_position\_int\_t: 给出的是经过处理的高度信息, 其中的第1列是时间, 这里的时间是以公元0年1月1日0时作为时间起点的时刻, 单位: 天; 第2列数据是高度, 单位:  $\text{米} \times 10^{-3}$  (即把原始数据放大了1000倍)。

alt\_mavlink\_gps\_raw\_int\_t: GPS给出的原始的高度信息, 其中的第1列是时间, 第2列数据是高度。

lat\_mavlink\_global\_position\_int\_t: 给出的是经过处理的纬度信息。

lat\_mavlink\_gps\_raw\_int\_t: GPS给出的原始的纬度信息, 其中的第一列是时间, 单位: 天; 第2列数据是纬度, 单位:  $\text{度} \times 10^{-7}$  (即把原始数据放大了 $10^7$ 倍)。

lon\_mavlink\_global\_position\_int\_t: 给出的是经过处理的经度信息。

lon\_mavlink\_gps\_raw\_int\_t: GPS给出的原始的经度信息, 其中的第1列是时间, 单位: 天; 第2列数据是经度, 单位:  $\text{度} \times 10^{-7}$ 。

pitch\_mavlink\_attitude\_t: 给出俯仰角的信息。

pitchspeed\_mavlink\_attitude\_t: 给出俯仰角速度的信息。

throttle\_mavlink\_vfr\_hud\_t: 给出油门大小的信息。

roll\_mavlink\_attitude\_t: 给出滚转角的信息。

rollspeed\_mavlink\_attitude\_t: 给出滚转角速度的信息。

yaw\_mavlink\_attitude\_t: 给出偏航角的信息。

yawspeed\_mavlink\_attitude\_t: 给出偏航角速度的信息。

airspeed\_mavlink\_vfr\_hud\_t: 空速

heading\_mavlink\_vfr\_hud\_t: 航向（角）  
throttle\_mavlink\_vfr\_hud\_t: 发动机油门（风门）

## 附录 2 四个基本飞行动作要求及相关参数：

### （1）平飞

- 1) 纵向高度和速度保持：高度、高度变化率、空速、油门、俯仰角、俯仰角速率；
- 2) 横侧向航向保持：航向恒定、滚转角为零；经度、纬度

### （2）爬升

- 1) 纵向速度保持：空速、空速变化率、高度、高度变化率、油门，俯仰角、俯仰角速率
- 2) 横侧向航向保持：经度、纬度、航向恒定、滚转角为零；

### （3）转弯

- 1) 纵向高度保持：空速、空速变化率、高度、高度变化率、油门，俯仰角、俯仰角速率
- 2) 横侧向滚转保持：经度、纬度、航向、滚转角；

### （4）下滑

- 1) 纵向速度保持：空速、空速变化率、高度、高度变化率、油门，俯仰角、俯仰角速率
- 2) 横侧向航向保持：经度、纬度、航向恒定、滚转角为零。