层次分析法与应用

决策是我们经常遇到的问题。譬如假期到了，人们打算外出旅游，如何选择旅游的景点；学校评选优秀学生，如何评选和评选谁；中学毕业上大学，如何选择志愿等等。例如要选择升学志愿，需要考虑兴趣爱好、专业前途以及收费标准等。总之，人们的决策活动无论是简单还是复杂，它都是在系统观点下的一个综合判断的过程。

层次分析法（Analytic Hierchy process 简记为AHP）是美国运筹家T.L.Saaty在70年代初提出来的，它是将半定性、半定量的问题转化为定量计算的一种行之有效的方法。在资源分配、选优排序、政策分析、冲突求解以及决策预报等领域得到广泛的应用。

1． 成对比较矩阵和正互反矩阵

设要比较 n 个因素 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 对目标 O 的影响，从而确定它们在 O 中所占的比重，每次取两个因素 C_i 和 C_j，用 a_{ij} 表示 C_i 与 C_j 对 O 的影响程度之比，按 1 到 9 的比例标度来度量 a_{ij}。n 个元素彼此两两比较，全部结果可用如下的**成对比较矩阵表示：**

$$A = (a_{ij})_{n\times n}，\quad a_{ij} > 0, a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \quad a_{ii} = 1(i, j = 1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

我们称满足上述性质的矩阵 A 为正互反矩阵。

下面用一个具体的例子老说明。

现要进行假期旅游，有 P_1,P_2,P_3 共 3 个旅游胜地供你选择，你会根据诸如景色，费用，住宿，饮食，交通等一些准则去反复比较 3 个候选地点。其层次结构图见图 1。

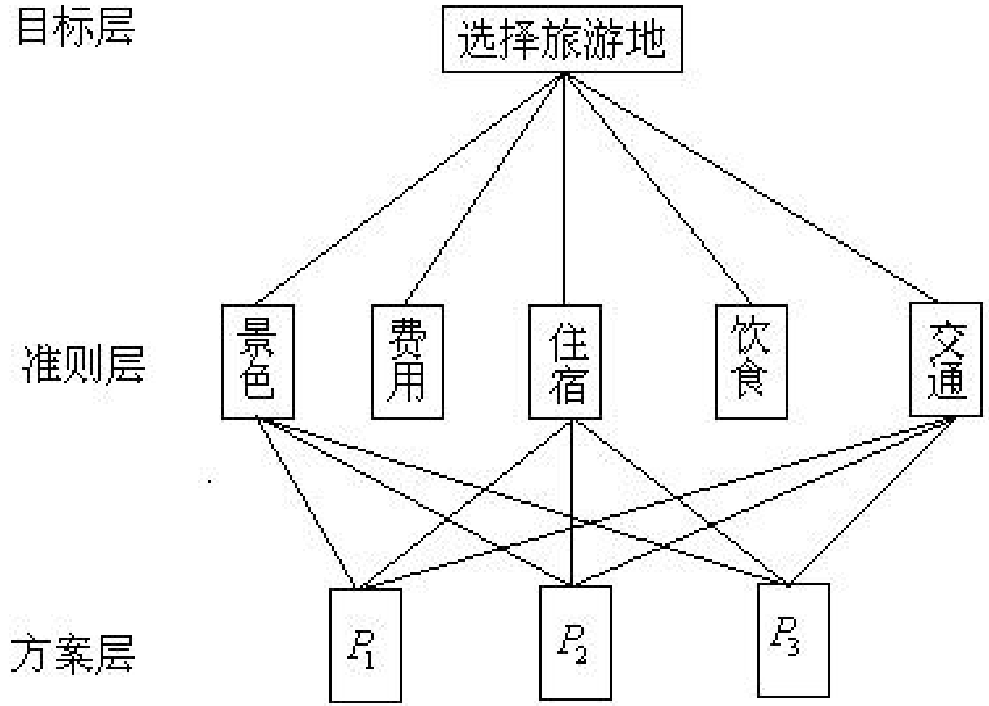


图1 选择旅游地的层次结构图

设旅游问题中的这 5 个因素为：景色 C_1，费用 C_2，住宿 C_3，饮食 C_4，交通 C_5。某人考虑该旅游问题所用成对比较法的成对比较阵（正互反矩阵）是

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

比较(2)式，我们会发现 $a_{21}=2$，$a_{13}=4$，这表明 C_2 的重要性是 C_1 的 2 倍，C_1 的重要性是 C_3 的 4 倍，那么 C_2 的重要性是 C_3 的 8 倍，即 $a_{23}=8$，而实际上 $a_{23}=7$。说明 C_2 与 C_3 重要性的直接比较与间接比较有一些差异但差异又不大。

对 n 个因素总共要作 $n(n-1)/2$ 次比较，要使所有的比较做到直接比较与间接比较完全一致是不太可能的。因此我们容许这种比较在一定范围内不一致，但又不能差异太大。

给出一致阵的定义：

如果一个正互反矩阵 A 满足

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}(i,j,k=1,2,\cdots,n), \qquad （3）$$

则称 A 为一致性矩阵，简称一致阵。

关于 a_{ij} 的确定 T.L.Saaty 引用了数字 1~9 及其倒数作为标度。

表 1　成队矩阵标度及其含义

标度	含　　　　义
1	表示两个因素相比，具有同样的重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2,4,6,8	上述两相邻判断的中值
1,1/2,…,1/9	相应两因素交换次序比较的重要性

二、权向量和一致性指标

设想一下，我们现在把一块单位重量的大石头 O 分成 n 块小石头 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，各小块石的重量为 $w_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 在 O 中占的比重可用其重量排序，即为 $(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$，$C_i$与$C_j$的相对重量为 $a_{ij} = w_i / w_j$.这样就得到判断矩阵 A:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

显然 A 是满足一致性条件的正互反阵。

容易证明，n阶一致阵有下列性质：

1．A 的秩为 1，A 的唯一特征根为n。

2．A 的任一列向量都是对应于特征根n的特征向量。

如果得到的成对阵是一致阵，象(4)式的 A，取对应于特征根n的归一化的特征向量表示诸因素$C_1, C_2, \cdots, C_n$的权重，这个向量称为权向量。

如果成对阵 A 不是一致的，Satty 等人建议采用 A 的最大特征根$\lambda_{\max}$对应的特征向量 $\vec{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 作为权向量。即w满足：

$$A.\lambda_{\max} = \lambda_{\max}.\bar{w} \qquad （5）$$

且$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$。

当 λ_{max} 比 n 大得越多，A 的不一致程度就越大，用特征向量作为权向量引起的误差就会越大。因而可以用 $\lambda_{max}-n$ 的大小来衡量 A 的不一致程度。Satty 将下式作为一致性指标：

$$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \qquad (6)$$

对一致性正互反阵来说，一致性指标 CI 等于零。

由于 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=n$，实际上 CI 相当于 n-1 个特征根 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(最大特征根 λ_{max} 除外) 的平均值。

依靠CI值来作为判断矩阵A是否具有一致性的标准不够，Saaty又提出了平均随机一致性指标RI。

平均随机一致性指标 RI 是这样得到的：对于固定的 n，随机构造正互反矩阵 A' 中其中 a'_{ij} 是从 1，2，…，9，1/2，1/3，…，1/9 中随机抽取的，这样的 A' 是最不一致的，取充分大的子样（500 个样本）得到 A' 的最大特征根的平均值 $\lambda_{\max}$，定义

$$RI = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n-1}. \tag{7}$$

对于 1~9 阶的判断矩阵，Satty 给出 RI 值，见表 2。

表 2　平均随机一致性指标 RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

表中 n=1,2 时 RI=0，是因为 1，2 阶的正互反阵总是一致阵。

计算平均一致性指标的Matlab程序为：

```
n=11;
P=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6,1/7,1/8,1/9];
%可供选取的成对比值
L=length(P);
A=ones(n,n);
number=1500;%模拟次数
R=0;
for kp=1:number  %获得一个成对比较阵
for i=1:n-1
  for j=i+1:n
     k=floor(1+L*rand(1,1));
      A(i,j)=P(k); %得到一个随机的成对值
     A(j,i)=1/P(k);
  end
end
lam=max(eig(A));
%求最大特征值
CI=(lam-n)/(n-1);
R=R+CI;
end  %end for kp
RI=R/number;
fprintf('n=%2d,随机一致性指标
%6.3f\n',n,RI);
```

对于 $n \ge 3$ 的成对比较阵 A，将它的一致性指标 CI 与同阶随机一致性指标 RI 之比称为一致性比率 CR。当

$$CR = \frac{CI}{RI} < 0.1$$

认为成对判别 A 的不一致程度在容许范围内，可以用其特征向量作为权向量。
否则就需要调整成对判别矩阵，使之具有满意的一致性。

对(2)式的矩阵 A，容易求得最大特征值 $\lambda_{\max} = 5.072$。

对应的归一化特征向量为：$w = (0.2636, 0.4758, 0.0538, 0.0981, 0.1087)$。

一致性指标　$CI = \dfrac{5.072 - 5}{5 - 1} = 0.018$

当 $n = 5$ 时，随机一致性指标 RI=0.12，则一致性比率

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.018}{1.12} = 0.0161 < 0.1$$

一致性比率通过，前面的特征向量 w 可以作为 5 个因素的权重。

三、组合权向量与组合一致性检验

在旅游决策问题中，我们已经得到准则层对目标层的权向量，获得旅游问题中5个因素的权重。用同样的方法可以构造第3层方案层对第2层（准则层）的每一个成对比较阵。假设为：

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 1/3 & 1 & 2\\ 1/5 & 1/2 & 1\end{bmatrix}，B_2=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/8\\ 3 & 1 & 1/3\\ 8 & 3 & 1\end{bmatrix}，B_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1/2 & 1 & 3\\ 1/4 & 1/3 & 1\end{bmatrix}$$

$$B_4=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 1/3 & 1 & 2\\ 1/5 & 1/2 & 1\end{bmatrix}，B_5=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1/4\\ 1/2 & 1 & 1/6\\ 4 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

由成对矩阵 $B_k(k=1,2,\cdots,5)$ 计算出权向量 w_k，最大特征根 λ_k，一致性指标 CI_k

表 3　w_k，λ_k 和 CI_k 结果

k	1	2	3	4	5
w_k	0.6483 0.2297 0.1220	0.0819 0.2363 0.6817	0.5584 0.3196 0.1220	0.6483 0.2297 0.1220	0.1929 0.1061 0.7010
λ_k	3.0037	3.0015	3.0183	3.0037	3.0092
CI_k	0.0018	0.00077	0.0091	0.0018	0.0046
CR_k	0.0032	0.0013	0.0158	0.0032	0.0079

所有一致性指标 $CR_k < 0.1$，因此 5 组权值都通过一致性检验，可作为权值。

方案 P_1 相对目标层的权值：

$$y_1 = 0.6483\times0.2636+0.0819\times0.4758+0.5584\times0.0538+0.6483\times0.0981$$
$$+0.1929\times0.1087 = 0.3245$$

方案 P_2 相对目标层的权值：

$$y_2 = 0.2297\times0.2636+0.2363\times0.4758+0.3196\times0.0538+0.2297\times0.0981$$
$$+0.1061\times0.1087 = 0.2242$$

方案 P_3 相对目标层的权值：

$$y_3 = 0.1220\times0.2636+0.6817\times0.4758+0.1220\times0.0538+0.1220\times0.0981$$
$$+0.7010\times0.1087 = 0.4513$$

因此方案层相对目标层的权向量为： $y=(0.3245, 0.2242, 0.4513)$。

从结果来看，方案 P_3 的权重达到最大，因此可选取方案 P_3 作为旅游的最佳方案。

再对整个系统的一致性进行检验。该检验称为组合一致性检验。包括准则层，方案层的一致性及整个系统的一致性。

准则层的一致性比率为 $CR_1 = 0.0161$

方案层所有方案的的一致性比率为：

$$CR_2 = \frac{\sum_{j=1}^{5} w_j.CI_j}{\sum_{j=1}^{5} w_j.RI_j} = 0.0032$$

其中 $w_1,\cdots,w_5$ 为准则层权重。$CI_1,\cdots,CI_5$ 为方案层 5 个一致性指标, $RI_j = 0.58$。

整个系统组合一直性比率为：$CR = CR_1 + CR_2 = 0.0161 + 0.0032 = 0.0193 < 0.1$。

因此组合一致性检验通过检验，前面表 3 得到的权向量可以作为最终决策的依据。

四、层次分析法的基本步骤

可将层次分析法的基本步骤归纳如下：

1．分析系统中各因素之间的关系建立系统的递阶层次结构，这些层次大体上可以分为三类：

（1） 最高层：它是分析问题的预定目标或理想结果。

（2） 中间层：它包括为实现目标所涉及的中间环节，它也可以由若干个层次组成。

（3） 最低层：它是为实现目标而供选择的各种措施、决策方案。但是，每层包含的因素个数不要超过 9 个，过多的话，可考虑再分出层次来。

2．构造两两成对比的判断矩阵。

判断矩阵元素的值反映了人们对因素关于目标的相对重要性的认识，在相邻的两个层次中，高层次为目标，低层次为因素。

3．层次单排序及其一致性检验。

判断矩阵 A 的特征根 $A\vec{w}=\lambda_{\max}\vec{w}$ 将 $\vec{w}$ 归一化，即为诸因素对于目标的相对重要性的排序数值，计算出 CI 值，当 CR<0.1 时，则认为层次单排序的结果有满意的一致性，否则需要调整判断矩阵的元素取值。

表 4　层次总排序数值

层次 A / 层次 B	A_1 A_2 A_m a_1 a_2 a_m	B 层次总排序数值
B_1	b_{11} b_{12} $\cdots$ b_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{1j}$
B_2	b_{21} b_{22} $\cdots$ b_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{2j}$
	… …	
B_n	b_{n1} b_{n2} $\cdots$ b_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{nj}$

如果 B 层次因素对于 A_j 单排序的一致性指标为 CI_j，

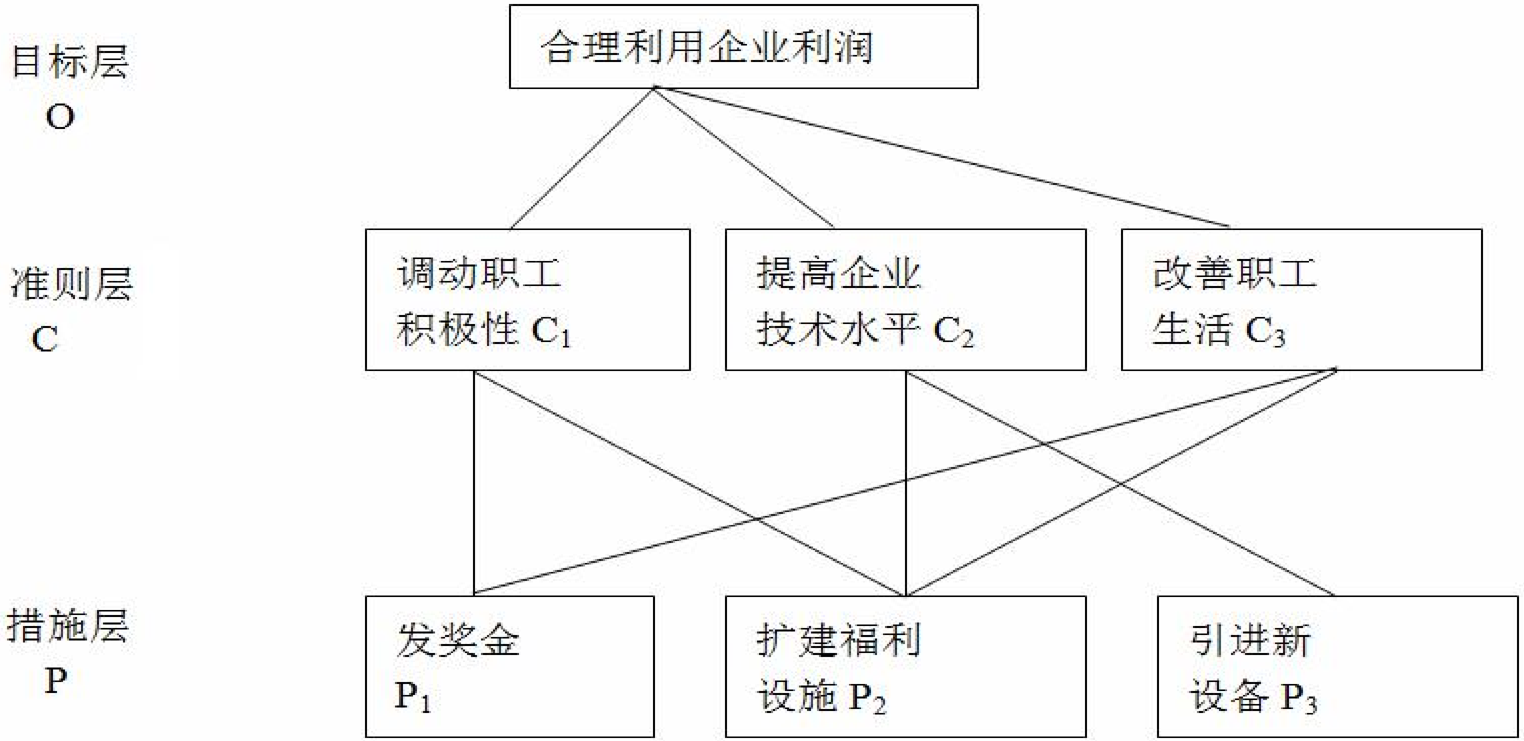
相应地平均随机一致性指标为 RI_j，则 B 层次总排序

一致性比率为 $$CR_2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j CI_j}{\sum_{j=1}^{m} a_j RI_j}. \qquad (8)$$

当 $CR = CR_1 + CR_2 < 0.1$ 时，层次排序结果具有满意的一致性，否则就需要重新调整判断矩阵的元素取值。

五、应用举例

例 1 某工厂有一笔企业留成利润，要由厂领导和职代会决定如何利用，可供选择的方案有：发奖金、扩建福利设施、引用新设备，为进一步促进企业发展，如何合理使用这笔利润？



成对矩阵 A:

A	C_1	C_2	C_3	W
C_1	1	1/5	1/3	0.105
C_2	5	1	3	0.637
C_3	3	1/3	1	0.258

计算得 $\lambda_{max} = 3.0385$，CI=0.019

一致性比率 CR=0.033<0.1，因此通过一致性检验，该权重可作为 C_1, C_2, C_3 权值。

成对矩阵 C_1—P：

C_1	P_1	P_2	W
P_1	1	3	0．75
P_2	1/3	1	0．25

$\lambda_{max} = 2$ CI=0

成对矩阵 C_2—P:

C_2	P_2	P_3	W
P_2	1	1/5	0．167
P_3	5	1	0．863

$\lambda_{max} = 2$ CI=0

成对矩阵 C_3—P

C_3	P_1	P_2	W
P_1	1	2	0.667
P_2	1/2	1	0.333

$\lambda_{max} = 2$ CI=0

3）各方案对总目标 O 的层次总排序见表 5。.

表 5　P 层对目标的总排序

C \ P	C_1 0.105	C_2 0.637	C_3 0.258	y
P_1	0.75	0	0.667	0.2508
P_2	0.25	0.167	0.333	0.2185
P_3	0	0.863	0	0.5497

从计算结果来看，措施3的总权重最大，为0.5497。

因此采用新设备P3，才更能合理利用企业利润。

组合一致性比率 $CR = CR_1 + CR_2 = 0.033 < 0.1$ 通过一致性检验。

谢 谢！