

---

# 高压油管的流体动力模型

## 摘要

针对问题一，要使高压油管内的压力稳定在  $100\text{MPa}$ ，影响因素为高压油管内流出的燃油质量与流入的燃油质量。首先，研究喷油嘴单独工作对高压油管内气压的影响，对燃油密度进行微积分，得到燃油密度关于时间的微分方程。对附件三中数据进行拟合，得到弹性模量函数，继而得出压强与密度的关系公式，联立微分方程组，可得仅有喷油器工作时压力随时间的变化曲线。喷油器工作一个周期，单向阀开启一次。应用进入高压油管的流量函数，建立高压油管流体动力模型。求解单向阀最优开启时长。

在时长为  $n$  秒的调整过程中，喷油嘴工作了  $2n$  次，压力从  $100\text{MPa}$  增加到了  $150\text{MPa}$ 。我们将增加的  $50$  平均分配到  $2n$  次的喷油周期中，利用上述高压油管的流体动力模型，分别计算出每个周期内单向阀开启的时长。调整过程中分别求解喷油嘴工作周期，应用高压油管流体动力模型，改变其稳定值及时间范围。

针对问题二，要确定角速度使压力稳定，影响因素为高压油管内流出的燃油质量与流入的燃油质量。使用 **MATLAB** 进行拟合，得到针阀上升距离分段函数。根据喷射器的圆锥结构，可得流量小孔面积函数，继而得到高压油管的流量函数。使用 **MATLAB** 对附件 1 中数据拟合得到极径与时间的变化函数。运用液体流动时的伯努利公式求得液体的密度与压强的关系，得到柱塞腔处的燃油流量函数。基于问题一中的高压油管流体动力模型，建立关于凸轮角速度的最优化模型，对凸轮角速度进行求解，得到的最优的凸轮角速度。

针对问题三，利用问题二中求解的函数关系确立新增喷油嘴工作的时间区间，将含单喷油嘴的高压油轨模型改为含双喷油嘴的高压油轨模型，计算双喷嘴时的最优凸轮角速度。高压油轨安装一个单向减压阀，设定减压阀开启条件。根据减压阀出口直径，计算减压阀出口小孔面积，继而计算减压阀开启时流经减压阀的流量。基于含角速度高压油轨内流体动力模型，加入减压阀开启时流经减压阀的流量，得到含有减压阀的流体动力模型。

关键词：高压油管流体动力模型 燃油流量函数 **MATLAB**

---

## 1. 问题重述

### 1.1 问题背景

燃油进入和喷出高压油管是许多燃油发动机工作的基础，燃油经过高压油泵从进口进入高压油管，再由喷口喷出。燃油的进入和喷出的间歇性工作会使高压油管内压力发生变化，使得喷油量出现偏差，影响发动机效率。随着燃油发动机的应用愈益宽广，使高压油管的压力控制更加精确有效是需要解决的问题。

### 1.2 问题重述

问题 1. 已知某型号高压油管的内腔长度为 500mm，内直径为 10mm，供油入口处小孔的直径为 1.4mm，通过单向阀开关控制时间，单向阀每打开一次后就要关闭 10ms。喷油嘴每秒工作 10 次，每次工作喷油时间为 2.4ms，喷油嘴工作时喷油嘴喷油速率已知。高压油泵在入口处提供的压力恒为 160MPa，油管内的初始压力为 100MPa。若将高压油管的压力尽可能稳定在 100MPa 左右，单向阀的每次开启时长应该怎样设置？若将高压油管内压力从 100MPa 增加到 150MPa，在分别经过 2s、5s 和 10s 的调整使油管内的压力稳定在 150MPa，应怎样调整单向阀的开启时长？

问题 2. 实际工作中，高压油泵的柱塞腔出口处的燃油送达到高压油管的进口处，喷油嘴的针阀控制喷油。高压油泵柱塞的压油过程已知，凸轮驱动柱塞上下运动，凸轮边缘曲线与角度的关系已知。柱塞向上运动时柱塞腔内的燃油压缩，当柱塞腔内的压力大于高压油管内压力时，连接柱塞腔与高压油管的单向阀开启，燃油进入高压油管内。柱塞腔内直径为 5mm，柱塞运动到上止点位置时，柱塞腔残余容积为 20mm<sup>3</sup>。柱塞运动到下止点时，柱塞腔内会充满低压燃油，低压燃油的压力为 0.5MPa。喷油嘴喷嘴结构已知，针阀直径为 2.5mm、密封座是半角为 9° 的圆锥，最下端喷孔的直径为 1.4mm。针阀升程为 0 时，针阀关闭；针阀升程大于 0 时，针阀开启，燃油向喷孔流动，通过喷孔喷出。一个燃油周期内升程与时间的关系已给出。在问题 1 给出的喷油嘴的工作次数、高压油管的尺寸和初始压力下，在此模型下，若要高压油管内的压力尽量稳定在 100MPa 左右，确定凸轮的角速度。

问题 3. 在问题 2 的基础上，再增加一个喷油嘴，每个喷嘴喷油规律相同，应当怎样调整喷油和供油策略？为了更有效的控制油管内的压力，计划安装一个单向减压阀。单向减压阀的出口为直径 1.4mm 的圆，打开后油管内的燃油可以回流到外部低压油路中，使得高压油管内的燃油压力减小。在这样的模型建立下，给出高压油泵和减压阀的控制方案。

## 2. 问题分析

### 2.1 问题一的分析

针对问题一，我们要使高压油管内的压力尽可能的稳定在 100MPa 左右，因此寻找影响到高压油管内气压的因素为流出的燃油质量与流入的燃油质量。根据问题一，我们可以计算出喷油嘴的工作周期以及喷油速率函数。首先，我们求解在单向阀不开启时喷油嘴对高压油管内气压的影响，在一个小时时间段内对燃油密度进行微积分，得到燃油密度关于时间的微分方程。已知燃油的压力变化量与密度变化量成正比，比例系数由弹性

模量确定，所以我们对附件三中数据进行拟合，得到以压强为自变量的弹性模量函数，代入并且积分，可以得出压强与密度的关系公式，联立微分方程组，利用题目中给出的初始条件，得到仅有喷油嘴工作时压力随时间的变化曲线。由于每次喷油嘴的暂停间隔相对于喷油时间间隔较长，因此本模型中我们考虑，喷油嘴工作一个周期，单向阀开启一次。加入进入高压油管的流量函数，建立目标函数为每个开启时长下压力波动峰值最大处的压力差的平方差的和最小，得到高压油管流体动力模型。

在时长为  $n$  秒的调整过程中，喷油嘴工作了  $2n$  次，压力从  $100\text{MPa}$  增加到了  $150\text{MPa}$ 。我们将增加的  $50$  平均分配到  $2n$  次的喷油周期中，利用上述模型，分别计算出每个周期内单向阀开启的时长。调整过程中分别求解喷油嘴工作周期，应用高压油管流体动力模型，改变其稳定值及时间范围。

## 2.2 问题二的分析

针对问题二，需要确定凸轮的角速度，使高压油腔内压力尽量稳定在  $100\text{MPa}$ 。寻找到影响高压油管内气压的因素依然为流出的燃油质量与流入的燃油质量。将数据用 **fourier** 函数进行拟合操作，得到上升距离分段函数。根据喷射器的圆锥结构，可以求得横截面的圆环面积函数。针阀上升，燃油开始喷射，若圆环面积小于喷射器喷口面积，则流量流经的小孔面积为横截面中圆环的面积；如果圆环面积大于喷射器喷口面积，则流量流经的小孔面积为喷口的面积。因此可以计算出流量流经小孔面积函数，代入高压油管的流量公式，得到高压油管的流量函数。使用 **MATLAB** 对附件 1 中的极角、极径数据进行分析，设凸轮逆时针旋转，应用余弦函数拟合得到极径与时间的变化函数。通过柱塞腔的圆柱体结构，可以求柱塞腔的高度变化函数、柱塞腔的体积函数，液体流动时，柱塞腔内的燃油压力变化与柱塞腔内燃油密度的关系可由伯努利公式求解得到，得到柱塞腔处的燃油流量函数。应用问题一中的高压油管流体动力模型，建立关于凸轮角速度的最优化模型，对凸轮角速度进行求解

## 2.3 问题三的分析

在问题二的基础上，增加一个喷油嘴，已知每个喷油嘴的规律相同，为使高压油管内压力的波动达到最小，新增喷油嘴的喷油时间应该设定在每个单向阀启动周期后。由第二问结果得到单向阀的每个开启、关闭时间节点。计算新增喷油嘴工作的时间区间，应用含角速的高压油轨模型计算双喷嘴时的最优凸轮角速度。

高压油轨安装一个单向减压阀，减压阀的作用是打开后高压油管内的燃油可以在压力下回流到外部低压油路中。在减压阀处设定减压阀开启条件，开启条件：当气压小于  $100\text{MPa}$  时，减压阀关闭；当气压大于  $100\text{MPa}$  时，减压阀开启。由减压阀出口的直径，计算减压阀出口小孔面积，继而可以计算减压阀开启时流经减压阀的流量。改进问题二中的含角速度高压油轨内流体动力模型，得到含有减压阀的流体动力模型。

### 3. 符号说明

| 符号       | 说明           |
|----------|--------------|
| $F$      | 压力           |
| $\rho$   | 密度           |
| $E$      | 弹性模量         |
| $Q$      | 单位时间流过小孔的燃油量 |
| $V$      | 体积           |
| $v$      | 流体速率         |
| $\theta$ | 极角           |
| $r$      | 极径           |

### 4. 模型假设

1. 问题一中的喷油嘴时有规律的周期性工作。
2. 忽略燃油流动时高压油管内的摩擦力、温度的变化引起的微小压力变化。
3. 不考虑阀门关闭时产生的水击力。

### 5. 模型一模型的建立与求解

#### 5.1 计算喷油嘴喷油量函数

喷油嘴每秒工作 10 次，每次工作时喷油时间为  $2.4ms$ ，我们假设喷油嘴是有规律的工作。则在  $1s = 1000ms$  内可以计算出喷油嘴的暂停时间，设暂停间隔为  $x$ ，喷油嘴的工作时间为  $a$ ，考虑到每  $1s$  之间需要有等距的空闲时间，因此可以得到喷油嘴的一次计算方程：

$$1000 = 2.4 \times 10 + 10x$$

通过方程计算可以得出  $x = 97.6ms$ ，即喷油嘴每工作一次暂停间隔为  $97.6ms$ ，喷油嘴工作周期为  $100ms$ 。根据题目中已知的喷油速率曲线，我们可以求得喷油速率与时间的关系式：

$$v_k(t) = \begin{cases} 100t & 0 + 100(k-1) \leq t < 0.2 + 100(k-1), \\ 20 & 0.2 + 100(k-1) \leq t \leq 2.2 + 100(k-1), \\ 240 - 100t & 2.2 + 100(k-1) < t < 2.4 + 100(k-1), \\ 0 & 2.4 + 100(k-1) \leq t \leq 100 + 100(k-1). \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

#### 5.2 无燃油注入高压油管流体动力模型

问题一中假设高压油腔内的压力处处相等，不考虑高压油管内的摩擦力、喷油嘴关闭时的水击力等细微变化。

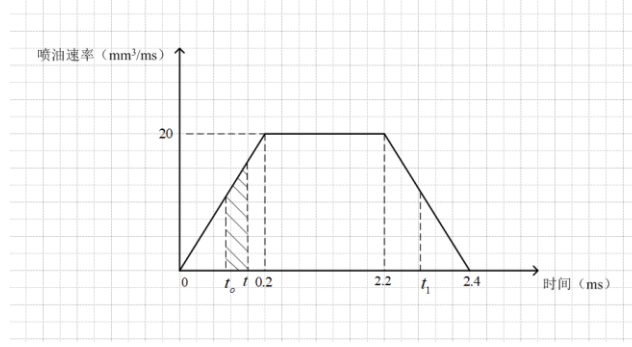


图 1 喷油器喷射速率

首先计算单向阀不开启时高压油桶中的压力值变化。由  $v_k(t)$  的定义可知， $v_k(t)$  是一个连续的分段周期函数。在  $[0, 2.4]$  内任取一个时间节点  $t$ ，取一段时间间隔  $\Delta t$ ，设  $t$  时刻压力为  $F(t)$ ，燃油的密度为  $\rho(t)$ ，在  $\Delta t$  时间段内的出油质量  $m$  为：

$$m(t) = v(t) \rho(t) \Delta t$$

根据燃油的密度、体积、质量之间的关系，我们可以应用  $t$  时刻的各项数值表示  $t + \Delta t$  时刻的燃油密度：

$$\rho(t + \Delta t) = \frac{V_0 \rho(t) - v_1(t) \rho(t) \Delta t}{V_0}$$

将上式进行移项化简得到：

$$\frac{\rho(t + \Delta t) - \rho(t)}{V_0} = -\frac{v_1(t) \rho(t)}{V_0}$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时，有：

$$\rho'(t) = -\frac{v_1(t)}{V_0} \rho(t)$$

燃油的压力变化量与密度变化量成正比，两者关系式为：

$$\Delta F = \frac{E}{\rho} \Delta \rho$$

其中  $\rho$  为燃油的密度、 $E$  为弹性模量。题目中已知弹性模量只与压力有关，将附件 3 中的数据以列矢量的形式导入到 MATLAB 中，应用曲线拟合工具箱，得到关于压力  $F$  的弹性模量方程：

$$E(F) = aF^2 + bF + c$$

其中， $a = 0.02893, b = 3.077, c = 1572$ 。在拟合数据时，发现当  $degree = 2$  时， $R$  值为 0.9991， $R$  越趋近于 1，方程的变量对  $y$  的解释能力越强， $R$  值的计算方法为：

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

将弹性模量方程代入压力变化量公式中，化简得：

$$\frac{\Delta F}{aF^2 + bF + c} = \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

两边同时积分的到压力与密度的关系式：

$$F = \frac{\sqrt{4ac - b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2}(\ln \rho - C)\right) - b}{2a}$$

将初值  $F_0 = 100MPa$ ， $\rho_0 = 0.850mg/mm^3$  代入上述方程，求解得常量  $C = -0.252946$ 。

将  $C$  代入，最终得到压力与密度关系式，联立方程组：

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\frac{v_1(t)}{V_0} \rho(t), \\ F = F = \frac{\sqrt{4ac - b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2}(\ln \rho - C)\right) - b}{2a}. \end{cases}$$

求解方程组得到当高压油管内无燃油进入，仅有喷油嘴工作时的高压油管内压力与时间的关系，如图 2 所示。

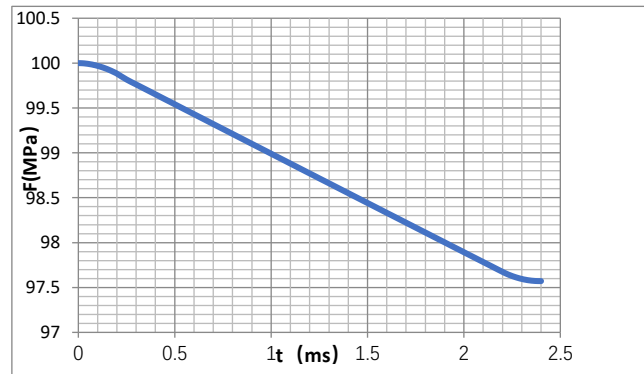


图 2 高压油管内压力与时间的关系

根据压力变化图我们可以得到，在单向阀不开启时，高压油管内的压力总体呈现连续的下降趋势。在  $[0, 0.2]$ ,  $[2.2, 2.4]$  区间内，压力的下降是较为缓慢的；在  $[0.2, 2.2]$  区间内，压力的下降速度较快。下降过程重要时间节点对应压力见表 1。

表 1 下降过程重要时间节点

| 时间节点 | 0ms    | 0.2ms      | 2.2ms      | 2.4ms      |
|------|--------|------------|------------|------------|
| 压力   | 100MPa | 99.8833MPa | 97.6742MPa | 97.5711MPa |

### 5.3 高压油管流体动力模型<sup>1</sup>

由于每次喷油嘴的暂停间隔相对喷油时间间隔较长，因此本模型中我们考虑，喷油嘴工作一次，单向阀才开启一次，并在一个喷油周期内关闭。在保证高压油管内压力稳定在 $100\text{MPa}$ 时，求解单向阀每次开启时长。设 $t_0$ 为单向阀开启时刻， $t_1$ 为单向阀关闭时刻。当单向阀开启的时候，进入高压油管的流量 $Q_i$ 为：

$$Q_i = CA\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

其中， $Q$ 为单位时间流过小孔的燃油量( $\text{mm}^3/\text{ms}$ )， $C = 0.85$ 是流量系数， $A$ 为小孔的面积( $\text{mm}^2$ )， $\Delta p$ 为小孔两边的压力差( $\text{MPa}$ )， $\rho$ 为高压侧燃油的密度( $\text{mg}/\text{mm}^3$ )。将高压油管流量函数加入无燃油注入高压油管流体动力模型，得到：

$$\rho(t + \Delta t) = \frac{V_0\rho(t) - v_1(t)\rho(t)\Delta t + Q\Delta t\rho_{160}}{V_0}$$

依照无燃油注入时高压油管流体动力模型的化简方式，将上式化简为：

$$\rho'(t) = -\frac{v(t)}{V_0}\rho(t) + \sqrt{\frac{2(160 - F(t))}{\rho_{160}}} \frac{CA\rho_{160}}{V_0}$$

设置单向阀每次开启的时长不同，设单向阀每次开启时长为 $t$ ，高压油管内随时间变化的压力曲线也随之不同，要使高压油管内的压力尽可能稳定在 $100\text{MPa}$ ，我们需要计算每个开启时长 $t$ 下压力的波动峰值最大处的压力差之和的平方和最小，建立高压油管流体动力模型：

$$N = \min \max \sum_{t=0}^{100} (F(t) - 100)^2$$

$$s.t \begin{cases} \rho'(t) = -\frac{v(t)}{V_0}\rho(t) + \sqrt{\frac{2(160 - F(t))}{\rho_{160}}} \frac{CA\rho_{160}}{V_0} \\ \sqrt{4ac - b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2}(\ln \rho - C)\right) - b \\ F = \frac{\sqrt{4ac - b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2}(\ln \rho - C)\right) - b}{2a} \end{cases}$$

### 5.4 经 $2s$ 、 $5s$ 、 $10s$ 调节后稳定在 $150\text{MPa}$

喷油嘴一秒内工作 $10$ 次，在 $n$ 秒内工作 $10n$ 次。在喷油嘴第一个工作周期内，此时高压油管和柱塞腔内的压力差最大，因此高压油管内压力改变最快，但随着时间的推移，工作周期的增多，高压油管与柱塞腔的压力差会逐渐缩小，高压油管内的压力改变速率逐步减缓，因此每次工作时高压油管内的压力增长量不相同。喷油嘴工作 $10n$ 次，单向阀门开启 $10n$ 次。基于高压油管流体动力模型将模型中的稳定值由 $100\text{MPa}$ 改为 $150\text{MPa}$ ，将上一模型的求解时间范围从 $0 \sim 100$ 改为 $0 \sim 1000n$ ，在时长为 $n$ 秒的调整过程中，喷油

嘴工作了  $2n$  次，压力从  $100\text{MPa}$  增加到了  $150\text{MPa}$ 。我们将增加的 50 平均分配到  $2n$  次的喷油周期中，利用上述模型，分别计算出每个周期内单向阀开启的时长。调整过程中分别求解喷油嘴工作周期，应用高压油管流体动力模型，改变其稳定值及时间范围。建立新的高压油管流体动力模型：

$$N_i = \min \max \sum_{t=0}^{1000n} (F(t_i) - 150)^2$$

$$s.t \begin{cases} \rho'(t) = -\frac{v(t)}{V_0} \rho(t) + \sqrt{\frac{2(160 - F(t))}{\rho_{160}}} \frac{CA\rho_{160}}{V_0} \\ F = \frac{\sqrt{4ac - b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2} (\ln \rho - C)\right) - b}{2a} \end{cases}$$

### 5.5 问题一求解过程及结果

根据高压油管流体动力模型，应用 MATLAB 进行求解<sup>2</sup>。首先寻找最优的开阀时间，由于  $0.2\text{ms}$  之前喷油嘴的喷油速率缓慢，燃油液体的流出量较少，因此对压力的改变量较小，故考虑在  $0.2\text{ms}$  的某邻域内搜索，寻找到一个更为合适的开阀时间，新的开阀时间下的压力变化程度相对于  $0.2\text{ms}$  时的压力变化程度是缓和的，寻找多个备选的时间点。然后，对单向阀关闭的时间点进行搜索，得到多个单向阀开启的时长，选择最佳的时间区间使压力与  $100\text{MPa}$  的压力差的变化量的最大值的平方和最小，不断对时间区间进行搜索，直至得到最优单向阀开启时长，并可以得出单向阀开启和关闭的时间点，见表 2。

表 2 最优单向阀开启时长

|        | 开启时长           | 开启时刻            | 关闭时刻           |
|--------|----------------|-----------------|----------------|
| 最佳开启时长 | $2.7\text{ms}$ | $-0.2\text{ms}$ | $2.5\text{ms}$ |

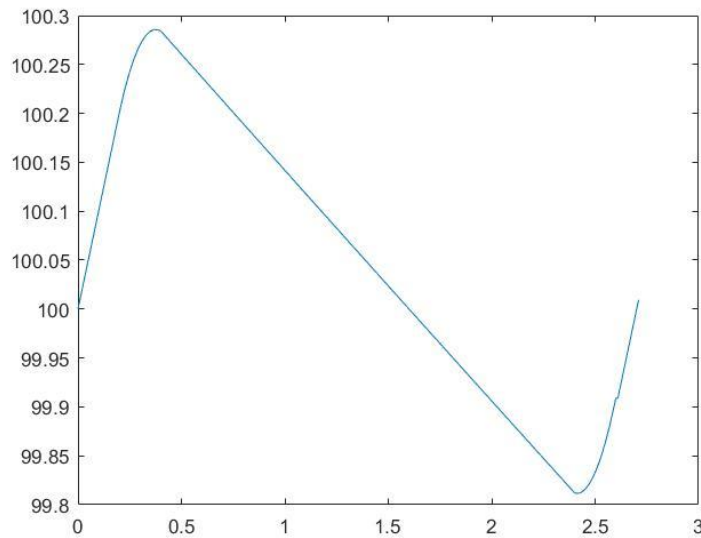


图 3 高压油管内压力的变化趋势

在  $-0.2\text{ms}$  时开启单向阀，一直到  $2.5\text{ms}$  时单向阀关闭，所得到的高压油管内压力的变化趋势如图 3 所示。高压油管内的压力先上升达到极大值  $100.28\text{MPa}$ ，在  $0.4\text{ms}$  后喷



油嘴喷出燃油的量大于进口流入的量，故呈现下降趋势，在 $2.4ms$ 时油管内压力达到极小值 $98.82MPa$ 。随后喷油嘴喷出燃油的量小于进口流入的量，呈现上升趋势，直至 $2.5ms$ 时单向阀关闭，高压油管内的压力值稳定在 $100MPa$ 。

要将高压油管内的压力从 $100MPa$ 增加到 $150MPa$ ，且分别经过约 $2s$ 、 $5s$ 、 $10s$ 的调节过程后稳定在 $150MPa$ ，单向阀开启的时长调整结果：

表 3 单向阀开启的时长调整表

| 2s        |      | 5s      |      | 10s       |      |
|-----------|------|---------|------|-----------|------|
| 压力        | 时间   | 压力      | 时间   | 压力        | 时间   |
| 100-102.5 | 5.2  | 100-101 | 3.7  | 100-100.5 | 3.2  |
| 102.5-105 | 5.27 | 101-102 | 3.73 | 100.5-101 | 3.22 |
| 105-107.5 | 5.34 | 102-103 | 3.74 | 101-101.5 | 3.22 |
| 107.5-110 | 5.42 | 103-104 | 3.77 | 101.5-102 | 3.23 |
| 110-112.5 | 5.5  | 104-105 | 3.8  | 102-102.5 | 3.24 |
| ...       | ...  | ...     | ...  | ...       | ...  |
| 137.5-140 | 6.91 | 145-146 | 5.69 | 107.5-108 | 3.39 |
| 140-142.5 | 7.12 | 146-147 | 5.75 | 108-108.5 | 3.37 |
| 142.5-145 | 7.34 | 147-148 | 5.85 | 108.5-109 | 3.4  |
| 145-147.5 | 7.6  | 148-149 | 5.95 | 109-109.5 | 3.41 |
| 147.5-150 | 7.9  | 149-150 | 6.06 | 109.5-110 | 3.42 |

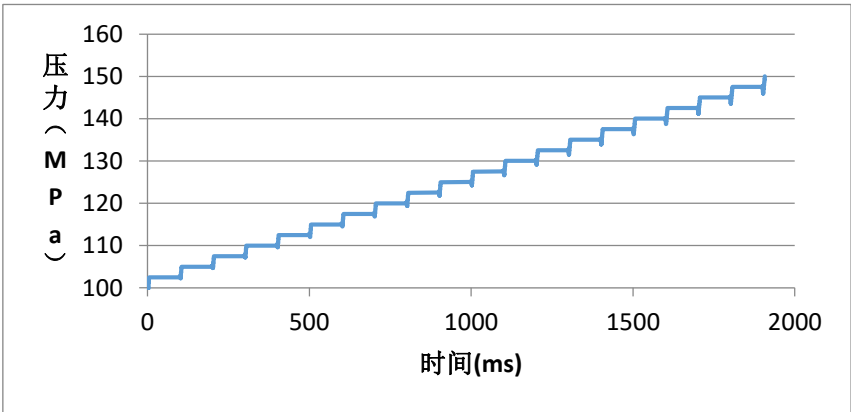
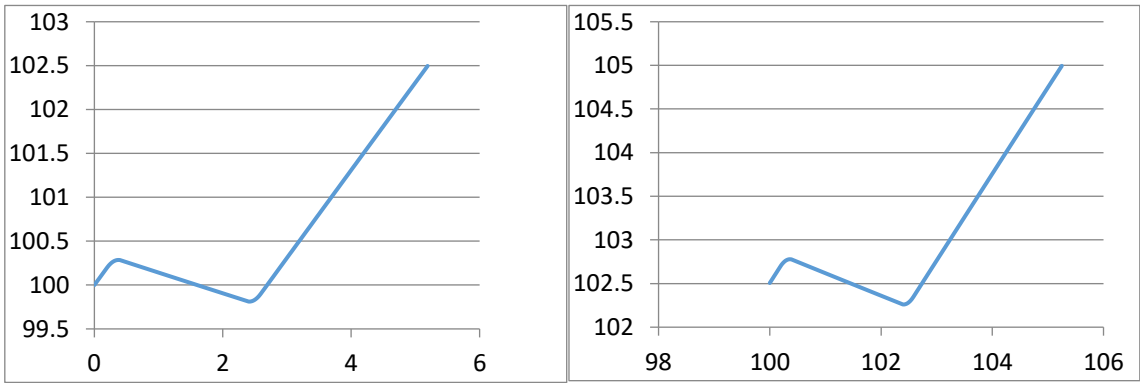


图 4 2s 时变化的总趋势

图 4 表示的是 $2s$ 时变化的总趋势，将 $2$ 秒的时间分为 $20$ 个周期，每个周期时间范围为 $100ms$ ，呈现出阶梯型上升，在 $2$ 秒后会上升到 $150MPa$ 。



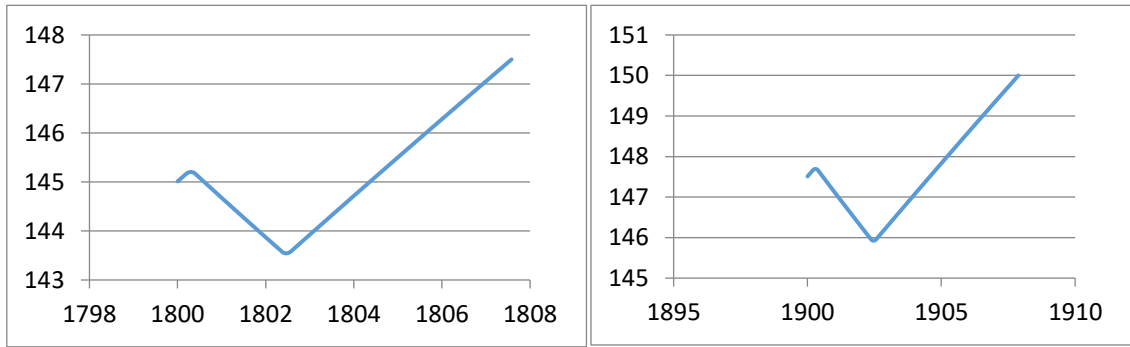


图 5 2s 时分段压力趋势图

## 5.6 高压油管流体动力模型的检验

由高压油管流体动力模型求得单向阀最优开启时间为  $2.7ms$ ，开启时间区间为  $-0.2ms - 2.5ms$ ，我们选取开始时长区间的临近值进行检验，结果如图 6

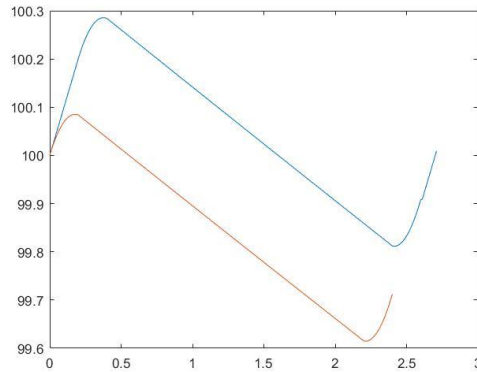


图 6 开启时间区间的检验

蓝色曲线代表单向阀最佳开启时长，红色曲线代表临近值的开启时长，由图可以看出蓝色曲线在  $100MPa$  左右波动幅度最小，偏离程度为  $0.10125$ ；红色曲线比蓝色曲线波动幅度大，偏离程度为  $0.31416$ 。由此可以看得我们所求的最优开启时长是最优的。

## 6. 问题二模型的建立与求解

### 6.1 喷油嘴处燃油流量函数

由题目已知，喷油嘴的形状为圆锥体，喷油嘴喷嘴结构放大图见图 7，计算锥尖与针阀初始时对应的距离  $b_0$ ：

$$b_0 = \frac{a_0}{\tan \alpha}$$

其中，由题目已知针阀直径为  $a_0 = 2.5 / 2 = 1.25mm$ ，密封座半角为  $\alpha = 9^\circ$ 。将附件 2 的数据导入 MATLAB 中，将数据用 *fourier* 函数进行拟合操作，得到  $R$  值为  $0.9934$ ，得到上升距离分段函数：

$$D(t) = \begin{cases} a + b \cos \omega t + c \sin \omega t & 0 \leq t \leq 0.44 \\ 2 & 0.45 \leq t \leq 2 \\ a + b \cos \omega t + c \sin \omega t & 2.01 \leq t \leq 2.45 \\ 0 & 2.46 \leq t \leq 100 \end{cases}$$

其中， $a = 4.844$ ， $b = -4.778$ ， $c = -1.01$ ， $w = 2.735$ 。设横截面圆环中外圆半径为  $a$ ，通过勾股定理，可以得出关于时间的外圆半径变化函数：

$$a(t) = (b_0 + D(t)) \tan \alpha$$

应用圆环的面积计算公式可以得到  $t$  时刻时横截面的圆环面积  $S$ ：

$$S(t) = \pi a^2(t) - \pi a_0^2$$

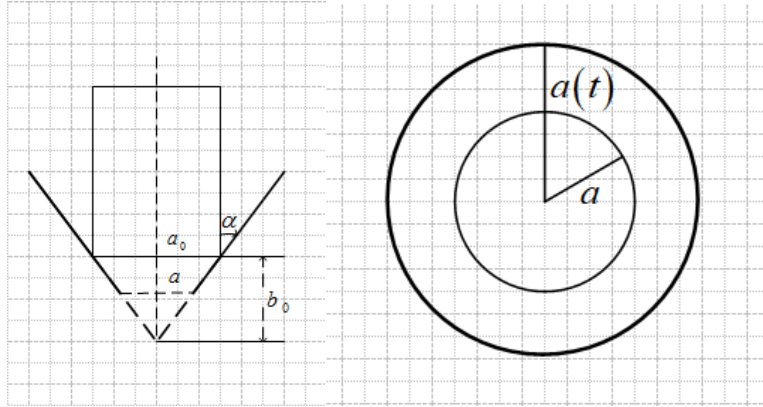


图 7 喷油嘴结构图

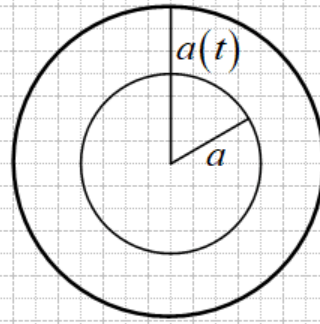


图 8 喷油嘴横切面

一旦针阀上升，燃油便开始喷射，针阀底面离开密封座时的横切面如图 7 所示，不同时刻流体通过横截面的面积为一个圆环面积，如果圆环面积小于喷射器最下端喷口面积，则流量流经的小孔面积  $A$  的值为横截面中圆环的面积；如果圆环面积大于喷射器最下端喷口面积，则流量流经的小孔面积  $A$  的值为最下端喷口的面积。因此可以得到流量流经小孔面积函数式为：

$$A(t) = \begin{cases} \pi a^2(t) - \pi a_0^2 & S(t) \leq \pi a_0^2, \\ \pi a_0^2 & S(t) \geq \pi a_0^2. \end{cases}$$

再次应用高压油管的流量函数， $F_0$  为大气常压，即  $F_0 = 0.1 \text{ MPa}$ ，得到喷油嘴处燃油流量函数：

$$Q_0(t) = CA(t) \sqrt{\frac{2(F(t) - F_0)}{\rho(t)}}$$

## 6.2 单向阀处燃油流量函数

使用 MATLAB 对附件 1 中的极角、极径数据进行分析，通过观测数据散点图。我们发现极角与极径的关系曲线相似于余弦函数<sup>3</sup>，设极径为  $r$ 、极角为  $\theta$ ，设凸轮逆时针旋转，应用余弦函数进行拟合操作，得到  $R = 1$  的极径拟合函数：

$$r(\theta) = a_0 + a_1 \cos k\theta$$

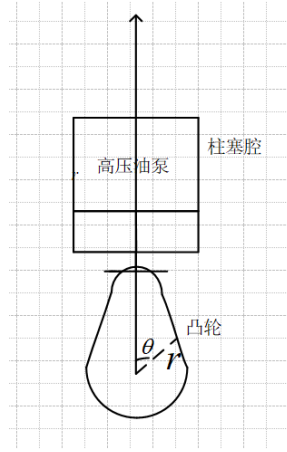


图 9 柱塞腔结构图

其中  $a_0 = 4.826, a_1 = 2.413, k = 1$ 。设角速度为  $\omega$ ，已知角速度公式为： $\theta = \omega t$ ，代入上式得出极径与时间的变化函数：

$$r(\theta) = a_0 + a_1 \cos(k\omega t)$$

题目中已知初始时刻柱塞腔的容积为  $V_0 = 20\text{mm}^3$ ，柱塞腔内半径为  $l_0 = 5/2 = 2.25\text{mm}$ ，应用容积的计算公式可以计算初始时刻的柱塞腔的高度  $h_0$ ：

$$h_0 = \frac{V_0}{\pi l_0^2}$$

设初始时刻柱塞运动到上止点位置，因此初始时刻极径的长度为  $r_0 = 7.239\text{mm}$ ，设柱塞腔高度为  $h$ ，柱塞腔的高度变化函数为：

$$h(t) = h_0 + r_0 - r(\theta)$$

柱塞腔高度的变化决定柱塞腔体积的变化，利用体积公式计算柱塞腔的体积函数为：

$$V(t) = h(t) \pi l^2$$

液体流动时，柱塞腔内的燃油压力变化与柱塞腔内燃油密度的关系遵循伯努利公式：

$$F + \frac{1}{2} P V^2(t) = C$$

将初值  $F_0 = 160\text{MPa}$ ， $V_0 = 20\text{mm}^3$  代入伯努利流动公式中，可以经过求解得到常数值为： $C = 32160$ 。可以得出柱塞腔内的压力函数：

$$F_1(t) = \frac{2C}{2 + V^2(t)}$$

应用无燃油注入高压油管流体动力模型得出的压力与密度关系式，可以计算柱塞腔

内的已知压力时的密度函数：

$$\rho_1(t) = e^{\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2aF_1(t)+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}$$

再次应用高压油管的流量函数， $F_0$ 为大气常压，即 $F_0 = 0.1MPa$ ，得到柱塞腔处的燃油流量函数为：

$$Q_i(t) = CA \sqrt{\frac{2(F_1(t) - F(t))}{\rho_1(t)}} \rho_1(t)$$

### 6.3 含角速度高压油管内流体动力模型

根据高压油管流体动力模型中燃油的密度、体积、质量关系，我们可以依然应用 $t$ 时刻的各项数值表示 $t + \Delta t$ 时刻的燃油密度：

$$\rho(t + \Delta t) = \frac{V_0 \rho(t) - Q_0(t) \rho(t) \Delta t + Q_i(t) \Delta t \rho_1(t)}{V_0}$$

柱塞向上运动时压缩柱塞腔内的燃油，当柱塞腔内的压力大于高压油管内的压力时，柱塞腔与高压油管相连接的单向阀开启，燃油进入高压油管内，因此，需要设立一个判别函数 $e(t)$ ，当柱塞腔内的压力大于高压油管内的压力时 $e(t) = 1$ ；反之， $e(t) = 0$ 、

$$\rho(t + \Delta t) = \frac{V_0 \rho(t) - Q_0(t) \rho(t) \Delta t + e(t) Q_i(t) \Delta t \rho_1(t)}{V_0}$$

$$e(t) = \begin{cases} 1 & F_1(t) \geq F(t), \\ 0 & F_1(t) < F(t). \end{cases}$$

应用问题一中的求解方法化简整理上式，得到 $\rho$ 关于 $t$ 的微分方程：

$$\rho'(t) = -\frac{Q_0(t)}{V_0} \rho(t) + e(t) \frac{Q_i(t)}{V_0} \rho_1(t)$$

设置凸轮的角速度 $\omega$ 不同，柱塞腔处的燃油流量也会随着角速度的变化而变化，控制着高压油管内的压力值。要调节凸轮角速度，使高压油管内的压力尽可能稳定在 $100MPa$ ，我们需计算每个角速度 $\omega$ 下的压力波动峰值与 $100MPa$ 之差的平方和最小，建立关于凸轮角速度 $\omega$ 的最优化模型：

$$N = \min \max \sum_{t=0}^{100} (F(t) - 100)^2$$

$$\begin{cases}
\rho'(t) = -\frac{Q_0(t)}{V_0} \rho(t) + e(t) \frac{Q_i(t)}{V_0} \rho_1(t) \\
F = \frac{\sqrt{4ac-b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2}(\ln \rho - C)\right) - b}{2a} \\
S(t) = \pi a^2(t) - \pi a_0^2 \\
r(\theta) = a_0 + a_1 \cos(k\omega t) \\
s.t. \begin{cases}
Q_0(t) = CA(t) \sqrt{\frac{2(F(t) - F_0)}{\rho(t)}} \\
Q_i(t) = CA \sqrt{\frac{2(F_1(t) - F(t))}{\rho_1(t)}} \rho_1(t) \\
V(t) = h(t) \pi l^2 \\
F_1(t) = \frac{2C}{2 + V^2(t)} \\
\rho_1(t) = e^{\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2aF_1(t)+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}
\end{cases}
\end{cases}$$

求解凸轮角速度  $\omega$  的最优化模型，得出最佳的  $\omega$  值为：  $25rad/s$

## 7. 问题三的模型的建立与求解

### 7.1 双喷油嘴动力模型

在问题二的基础上，增加一个喷油嘴，已知每个喷油嘴的规律相同，为使高压油管压力的波动达到最小，新增喷油嘴的喷油时间应该设定在每个单向阀启动周期后。由第二问结果得到单向阀的每个开启、关闭时间节点。计算新增喷油嘴工作的时间区间为已有喷油嘴工作后的  $50ms$ ，应用含角速的高压油轨模型计算双喷嘴时的最优凸轮角速度。

$$N = \min \max \sum_{t=0}^{100} (F(t) - 100)^2$$

$$\begin{cases}
\rho'(t) = -\frac{Q_0(t)}{V_0} \rho(t) + e(t) \frac{Q_i(t)}{V_0} \rho_1(t) \\
F = \frac{\sqrt{4ac-b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2}(\ln \rho - C)\right) - b}{2a} \\
S(t) = \pi a^2(t) - \pi a_0^2 \\
r(\theta) = a_0 + a_1 \cos(k\omega t) \\
s.t \begin{cases}
Q_0(t) = CA(t) \sqrt{\frac{2(F(t) - F_0)}{\rho(t)}} \\
Q_i(t) = CA \sqrt{\frac{2(F_1(t) - F(t))}{\rho_1(t)}} \rho_1(t) \\
V(t) = h(t) \pi l^2 \\
F_1(t) = \frac{2C}{2 + V^2(t)} \\
\rho_1(t) = e^{\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2aF_1(t)+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}
\end{cases}
\end{cases}$$

## 7.2 增加减压阀的高压油轨动力模型

在高压油轨上安装一个单向减压阀，减压阀的作用是打开后高压油管内的燃油可以在压力下回流到外部低压油路中，经查阅资料，外部低压油路中的气压在  $F = 0.8MPa$ 。在减压阀处设定当气压大于  $150MPa$  时，减压阀开启；当气压小于  $150MPa$  时，减压阀关闭。由减压阀出口的直径  $m = 1.4mm$ ，计算减压阀出口小孔面积  $A_2$ ：

$$A_2 = \pi \frac{m^2}{4}$$

计算当减压阀开启时流经减压阀的流量  $Q_2$ ：

$$Q_2(t) = CA_2 \sqrt{\frac{2(F(t) - F_2)}{\rho(t)}}$$

其中， $F_2 = 0.8MPa$ 。根据高压油管流体动力模型中燃油的密度、体积、质量关系，应用  $t$  时刻的各项数值表示  $t + \Delta t$  时刻的燃油密度：

$$\rho(t + \Delta t) = \frac{V_0 \rho(t) - Q_0(t) \rho(t) \Delta t + e(t) Q_i(t) \Delta t \rho_1(t) - Q_2(t) \Delta t \rho(t)}{V_0}$$

应用问题一中的求解方法化简整理上式，得到  $\rho$  关于  $t$  的微分方程：

$$\rho'(t) = -\frac{Q_0(t)}{V_0} \rho(t) + e(t) \frac{Q_i(t)}{V_0} \rho_1(t) - \frac{Q_2(t)}{V_0} \rho(t)$$

设置凸轮的角速度  $\omega$  不同，柱塞腔处的燃油流量也会随着角速度的变化而变化，控制着高压油管内的压力值。要调节凸轮角速度，使高压油管内的压力尽可能稳定在  $100MPa$ ，我们需计算每个角速度  $\omega$  下的压力波动峰值与  $100MPa$  之差的平方和最小，建立关于凸轮角速度  $\omega$  的最优化模型：

$$N = \min \max \sum_{t=0}^{100} (F(t) - 100)^2$$

$$s.t. \begin{cases} \rho'(t) = -\frac{Q_0(t)}{V_0} \rho(t) + e(t) \frac{Q_i(t)}{V_0} \rho_1(t) \\ F = \frac{\sqrt{4ac-b^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2}(\ln \rho - C)\right) - b}{2a} \\ S(t) = \pi a^2(t) - \pi a_0^2 \\ r(\theta) = a_0 + a_1 \cos(k\omega t) \\ Q_0(t) = CA(t) \sqrt{\frac{2(F(t) - F_0)}{\rho(t)}} \\ Q_i(t) = CA \sqrt{\frac{2(F_1(t) - F(t))}{\rho_1(t)}} \rho_1(t) \\ V(t) = h(t) \pi l^2 \\ F_1(t) = \frac{2C}{2 + V^2(t)} \\ \rho_1(t) = e^{\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2aF_1(t)+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)} \\ Q_2(t) = CA_2 \sqrt{\frac{2(F(t) - F_2)}{\rho(t)}} \end{cases}$$

求解凸轮角速度  $\omega$  的最优化模型，得出最佳的  $\omega$  值为：  $62rad/s$

## 8. 模型的优缺点

### 8.1 模型的优点

1. 模型经过严格的物理推导过程对喷油器建立质量守恒方程求解，对与本题无关的其他作用力不予考虑，不考虑碰撞波、压缩波及摩擦力的工作量，极大的简化了计算量。



---

2. 对附件的数据进行处理，得到了多个变量的关系，使得模型的建立更加完整，使模型具有更高的精确性

3. 数据处理及模型求解时充分运用了 **MATLAB** 等数学软件，较好地解决了问题，得到了较理想的结果。充分用了题目中各种信息，并且较好地结合了对模型的检验

## 8.2 模型的缺点

1. 求解方程组时引入过多的变量和方程，增加编码和维护代码的难度，甚至可能会影响到结果的准确性。

2. 部分假设与现实情况不完全相符，不能完全应用于现实生活中。

---

<sup>[1]</sup>李玉婷，柴油机高压油管密封性能分析，北京理工大学，2015 年 1 月

---

## 附录

```
function dy=Poop1(t,y)
dy=zeros(1,1);
A=(sqrt(4*0.02893*1572-3.077*3.077));
V0=(pi*25*500);
C=(-0.252946);
a=0.02893;
b=3.077;
dy=-(100*t*y/(pi*25*500))+0.85*1.539*sqrt(360*0.871017-(0.871017*A*tan(A*(log(y)
-C)*0.5))/a+b*0.871017/a)/V0;
%0.85*(sqrt(4*0.02893*1572-3.077*3.077))*sqrt(2*
0.871017*(160-(sqrt(4*0.02893*1572-3.077*3.077))*tan(0.5*(sqrt(4*0.02893*1572-3.077*
3.077))*(log(y)+0.252946)-3.077)))/((pi*25*500)*sqrt(2*0.02893));
%0.2ms 时既流入又留出的微分方程的建立
```

```
function dy=Poop2(t,y)
A=(sqrt(4*0.02893*1572-3.077*3.077));
V0=(pi*25*500);
C=(-0.252946);
a=0.02893;
b=3.077;
dy=-(20/(pi*5*5*500))*y+0.85*1.539*sqrt(320*0.871017-(0.871017*A*tan(A*(log(y)-C
)*0.5))/a+b*0.871017/a)/V0;
%+0.85*A*sqrt(2*
0.871017*(160-A*tan(0.5*A*(log(y)-C))-3.077))/(V0*sqrt(2*0.02893));
%0.2ms-2.4ms 时既流入又留出的微分方程的建立
```

```
function dy=Poop3(t,y)
A=(sqrt(4*0.02893*1572-3.077*3.077));
V0=(pi*25*500);
C=(-0.252946);
a=0.02893;
b=3.077;
dy=-((-100*t+240)*y/(pi*25*500))+0.85*1.539*sqrt(360*0.871017-(0.871017*A*tan(A
*(log(y)-C)*0.5))/a+b*0.871017/a)/V0;
%2.2-2.4ms 时既流入又留出的微分方程的建立
```