# 微分方程模型-----战争模型

## 一般战争模型

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示交战双方甲和乙在时刻 $t$ 时的兵力,可设为双方的士兵人数。

假设:

1. 每方战斗减员率取决双方兵力和战斗力，甲乙方战斗减员率分别为 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$
2. 每方的非战斗减员率(如疾病、逃跑)只与本方兵力成正比。
3. 甲乙方的增援率是给定的函数，分别用 $u(t)$ 和 $v(t)$ 表示。

得到微分方程:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -f(x,y) - \alpha . x + u(t), & \alpha > 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -g(x,y) - \beta . y + v(t), & \beta > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

## 1．.正规战模型

考虑甲方战斗减员率与乙方兵力成正比，即 $f = a.y$ 。

$a$ 表示乙方平均每个士兵对甲方的杀伤率(单位时间内的杀伤数)。

$a$ 可表示为 $a = r_y.p_y$，其中 $r_y$ 为乙方的射击率， $p_y$ 为乙每次的命中率。

乙方战斗减员率与甲方兵力成正比，即 $g = b.x$ 。

$b$ 表示甲方平均每个士兵对乙方的杀伤率(单位时间内的杀伤数)。

$b$ 可表示为 $b = r_x.p_x$，其中 $r_x$ 为甲方的射击率， $p_x$ 为甲每次的命中率。

不考虑非战斗减员和兵力增加，

初始时双方兵力分别为 $x_0, y_0$，

一般微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a.y \\ \dfrac{dy}{dt} = -b.x \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

方程可化为：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b.x}{a.y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 　　则：$a.y^2 - b.x^2 = k$

由初始条件有：　$k = a.y_0^2 - b.x_0^2$

当 $k > 0$ 时，曲线与 $y$ 轴相交，表示乙方最终获胜，获胜时剩余兵力为 $y = \sqrt{\dfrac{k}{a}}$ 。

当 $k < 0$ 时，曲线与 $x$ 轴相交，表示甲方最终获胜，获胜时剩余兵力为 $x = \sqrt{-\dfrac{k}{b}}$ 。

当 $k = 0$ 时，双方打成平局，最终同归于尽，剩余兵力都为 0。

乙方获胜条件 $\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2 > \dfrac{b}{a} = \dfrac{r_x \cdot p_x}{r_y \cdot p_y}$ 　当甲方战斗力增加 4 倍，则乙方只需将兵力增加 2 倍。该模型也称为平方模型。

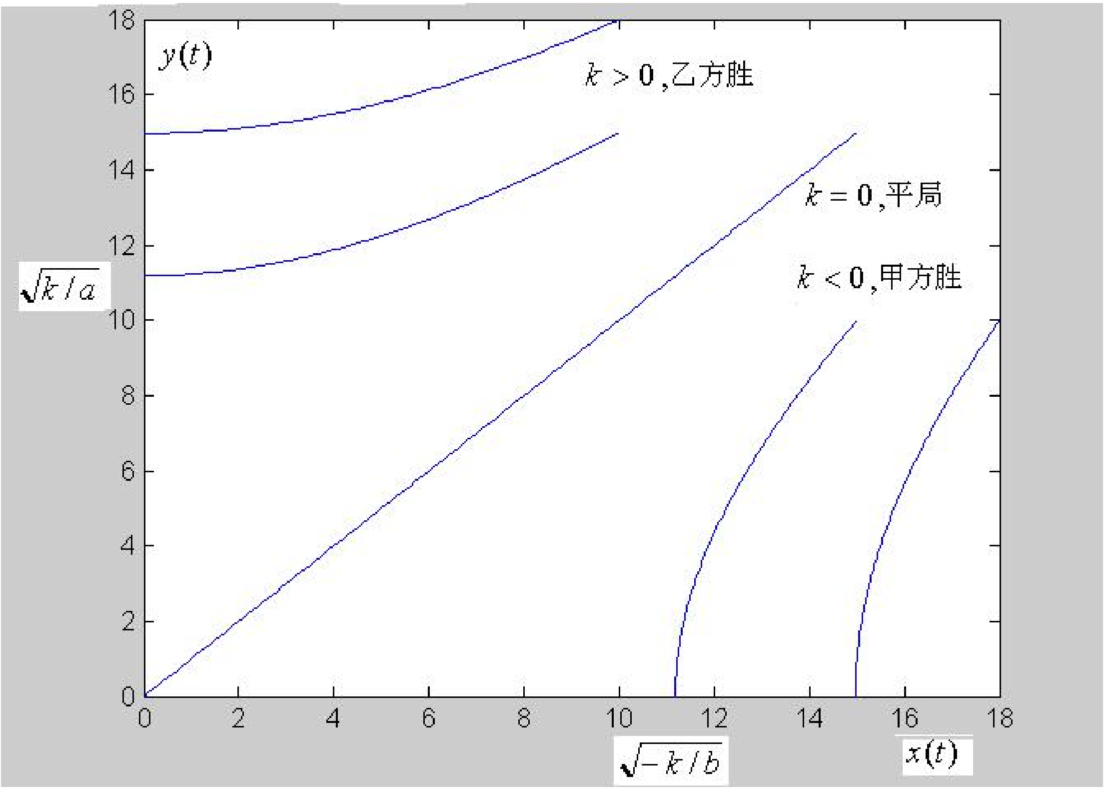


图1 正规战模型的相轨线

## 二、游击战模型

当甲乙双方都使用游击战时，任一方兵力的减少不但与对方兵力有关，而且与己方的兵力有关。对方和己方兵力越多，己方战斗减员率越大。

设乙方杀伤率为$c$，$c = r_y . p_y = r_y . \frac{s_{ry}}{s_x}$，其中$r_y$为乙方的射击率，

$p_y$为乙每次的命中率；$s_x$为甲方活动面积，$s_{ry}$为乙方有效射击面积。

设甲方杀伤率为$d$，$d = r_x . p_x = r_x . \frac{s_{rx}}{s_y}$，其中$r_x$为甲方的射击率，

$p_x$为甲每次的命中率；$s_y$为乙方活动面积，$s_{rx}$为甲方有效射击面积。

一般微分方程化为：
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -c.x.y \\ \frac{dy}{dt} = -d.x.y \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

方程可化为：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{c} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 则：$c.y - d.x = k$

由初始条件有： $k = c.y_0 - d.x_0$

当$k > 0$时，曲线与$y$轴相交，表示乙方最终获胜，获胜时剩余兵力为$y = \dfrac{k}{c}$。

当$k < 0$时，曲线与$x$轴相交，表示甲方最终获胜，获胜时剩余兵力为$x = -\dfrac{k}{d}$。

当$k = 0$时，双方打成平局，最终同归于尽，剩余兵力都为0。

乙方获胜条件$\dfrac{y_0}{x_0} > \dfrac{d}{c} = \dfrac{r_x.s_{rx}.s_x}{r_y.s_{ry}.s_y}$

当甲方活动面积增加一倍时，则乙方需将兵力增加一倍。

该模型也称为线性律模型。

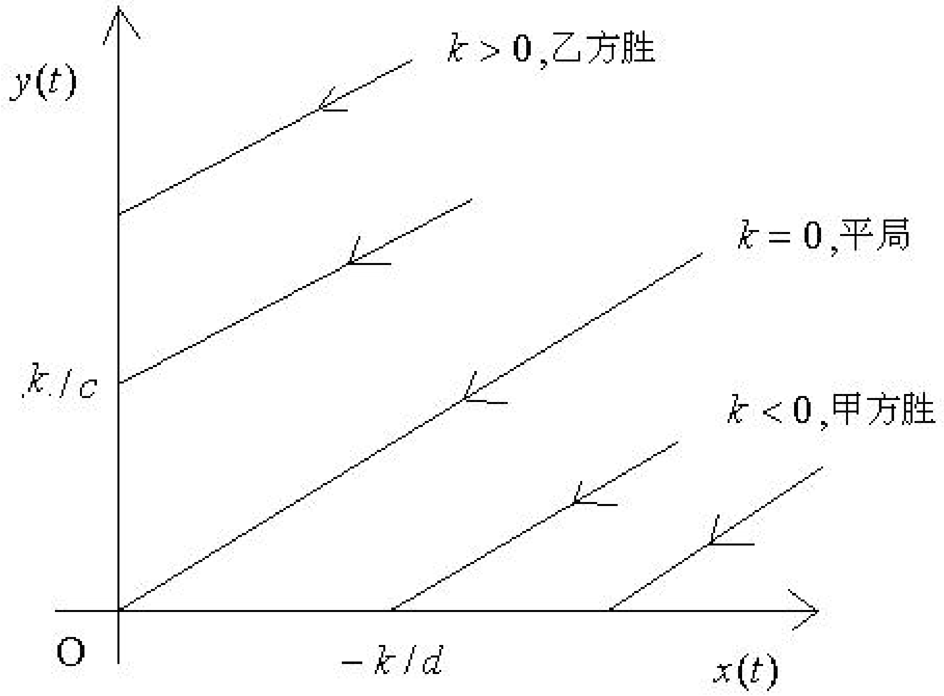


图2 游击战模型的相轨迹线

## 三、混合战争模型

假设甲方为游击战争，乙方为正规战争。

方程为：
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -c.x.y \\ \dfrac{dy}{dt} = -b.x \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

解为 $c.y^2 - 2.b.x = n$

其中 $n = c.y_0^2 - 2.b.x_0$

相轨线是抛物线。$n < 0$, 甲方胜；$n = 0$, 平局；$n > 0$, 乙方胜。

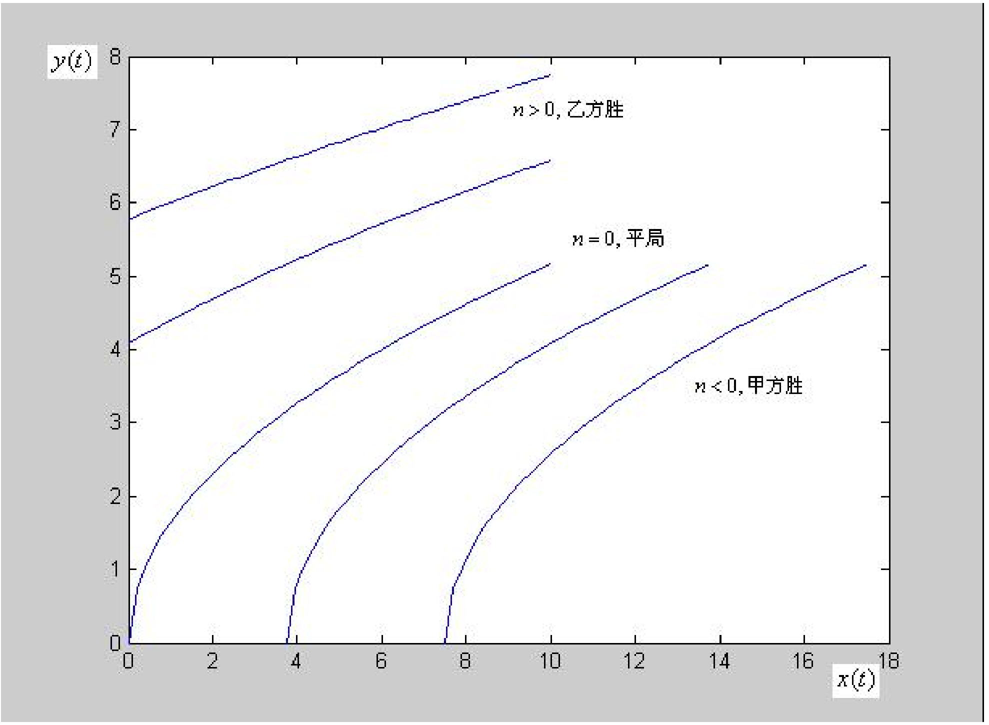


图3  混合战争模型的相轨线

乙方获胜条件 $\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^2 > \dfrac{2.b}{c.x_0}$

而 $b = r_x.p_x$，$c = r_y.p_y = r_y.\dfrac{s_{ry}}{s_x}$，代入有：

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2.r_x.p_x.s_x}{r_y.s_{ry}x_0}$$

设乙方正规部队火力强，甲方则隐蔽范围大。

设甲方兵力 $x_0 = 100$，命中率 $p_x = 0.1$，火力 $r_x = \dfrac{1}{2}.r_y$，活动面积 $s_x = 0.1\text{km}^2$，

乙方每次射击的有效面积为 $s_{ry} = 1\text{m}^2$，则

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2.r_x.p_x.s_x}{r_y.s_{ry}x_0} = \frac{2\times 0.1\times 0.1\times 10^6}{2\times 1\times 100} = 100$$

即 $\dfrac{y_0}{x_0} = 10$，乙方必须以 10 倍于甲方的兵力才能获胜。

谢 谢！