易拉罐下料问题

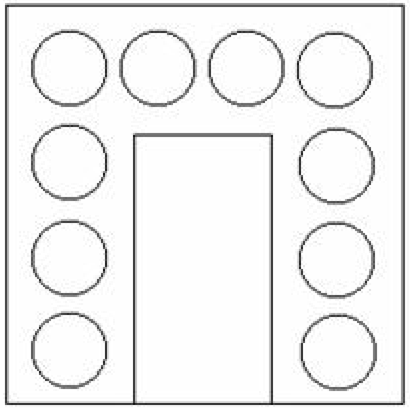
某公司采用一套冲压设备生产一种罐装饮料的易拉罐，这种易拉罐是用镀锡板冲压制成的。易拉罐为圆柱形，包括罐身、上盖和下底，罐身高10cm，上盖和下底的直径均为5cm。该公司使用两种不同规格的镀锡板原料：规格1的镀锡板为正方形，边长24cm;规格2的镀锡板为长方形，长、宽分别为32cm和28cm。

由于生产设备和生产工艺的限制，对于规格1的镀锡板原料，只可以按照图1中的模式1、模式2或模式3进行冲压；

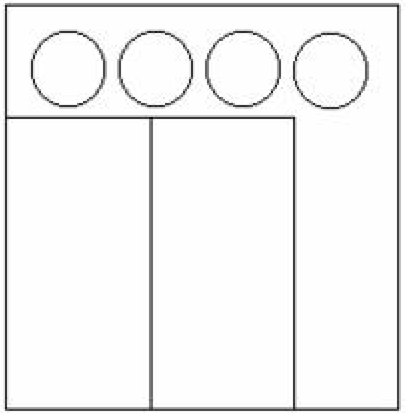
对于规格2的镀锡板原料只能按照模式4进行冲压.使用模式1、模式2、模式3、模式4进行每次冲压所需要的时间分别为1.5s、2s、1s、3s。

该工厂每周工作40小时，每周可供使用的规格1、规格2的镀锡板原料分别为5万张和2万张。目前每只易拉罐的利润为0.10元，原料余料损失为0.001元/平方厘米（如果周末有罐身、上盖或下底不能配套组装成易拉罐出售，也看作是原料余料损失）。

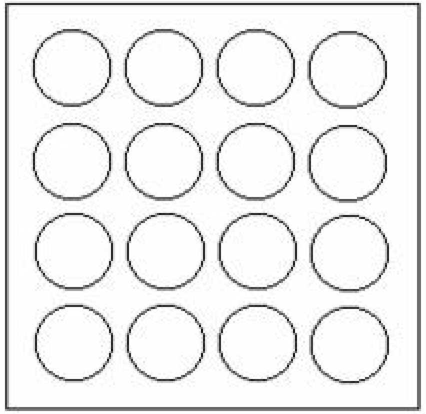
问工厂应如何安排每周的生产？



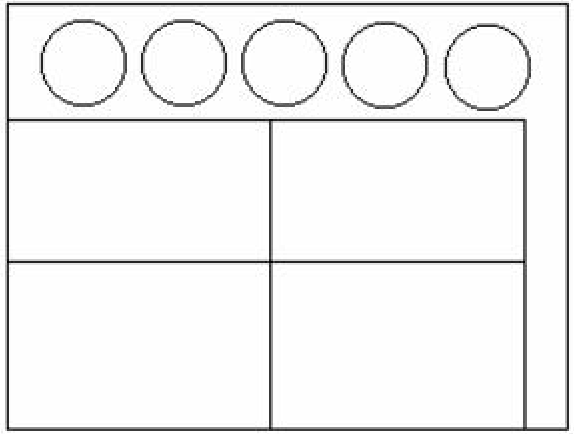
模式 1



模式 2



模式 3



模式 4

分析与解答：

可计算出每种模式下的余料，罐身面积，罐底或盖面积。

罐身面积 $s_1 = \pi \times 5 \times 10 = 157.08\text{cm}^2$

罐底或盖面积 $s_2 = \pi \times 5^2 / 4 = 19.64\text{cm}^2$

模式 1 的余料：$r_1 = 24 \times 24 - s_1 - 10 \times s_2 = 222.57\text{cm}^2$

模式 2 的余料：$r_2 = 24 \times 24 - 2 \times s_1 - 4 \times s_2 = 183.3\text{cm}^2$

模式 3 的余料：$r_3 = 24 \times 24 - 16 \times s_2 = 261.84\text{cm}^2$

模式 4 的余料：$r_4 = 32 \times 28 - 4 \times s_1 - 5 \times s_2 = 169.5\text{cm}^2$

将4种冲压模式的特点列于表1中。

表 1　4 种模式

	罐身个数	罐底、罐盖个数	余料损失（cm^2）	冲压时间(s)	变量
模式 1	1	10	222.57	1.5	x_1
模式 2	2	4	183.3	2	x_2
模式 3	0	16	261.84	1	x_3
模式 4	4	5	169.5	3	x_4

模型建立：

决策变量 用 x_i 表示按照第 i 种模式的冲压次数（i=1,2,3,4）, k 表示一周生产的易拉罐个数。为计算不能配套组装的罐身和底、盖造成的原料损失，用 L_1 表示不配套的罐身个数，L_2 表示不配套的底、盖个数。x_i 和 k ，L_1, L_2 是整数。

决策目标

假设每周生产的易拉罐能够全部售出，公司每周的销售利润是 $0.1\times k$ 。

原料余料损失包括两部分：

(1) 4 种冲压模式下的余料损失

(2)不配套的罐身和底、盖造成的原料损失。

则总的余料损失为：

$$0.001\times(\sum_{i=1}^{4} r_i.x_i+157.08L_1+19.64L_2).$$

目标函数为收益最大，即：

$$\max z=0.1\times k-0.001\times(\sum_{i=1}^{4} r_i.x_i+157.08L_1+19.64L_2).$$

约束条件

时间约束：每周工作时间不超过 40 小时=144000s，则有

$$1.5x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 144000$$

原料约束：每周可使用的规格 1 的镀锡板原料为 50000 张，则

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50000$$

规格 2 的镀锡板原料 20000 张，则 $x_4 \leq 20000$

配套约束：

由模式可知一周生产的罐身个数与易拉罐个数满足：

$$k \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4$$

一周生产的罐底、盖个数与易拉罐个数满足：

$$2k \leq 10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4$$

则不配套的罐身个数 L_1 满足： $L_1 = x_1 + 2x_2 + 4x_4 - k$

不配套的底、盖个数 L_2 满足： $L_2 = 10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4 - 2k$

则总的整数线性规划模型为：

$$\max z = 0.1\times k - 0.001\times(\sum_{i=1}^{4} r_i.x_i + 157.08L_1 + 19.64L_2).$$

$$s.t.\begin{cases} 1.5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 144000 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 50000 \\ x_4 \le 20000 \\ k \le x_1 + 2x_2 + 4x_4 \\ 2k \le 10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4 \\ L_1 = x_1 + 2x_2 + 4x_4 - k \\ L_2 = 10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4 - 2k \\ x_1, x_2, x_3, x_4\text{取整} \\ k, L_1, L_2\text{取整} \end{cases}$$

其中 $r_1 = 222.57, r_2 = 183.3, r_3 = 261.84, r_4 = 169.5$

利用 LINGO 解得：

目标值Z=4298.188元

$x_1 = 7500, x_2 = 36375, x_3 = 0, x_4 = 20000$。

$k = 160250, L_1 = 0, L_2 = 0$

说明冲压第 1 种模式的锡板 7500 张，第 2 种模式的锡板 36375 张，

第 3 种模式的锡板 0 张。第 4 种模式的锡板 200000 张。

则规格 1 的锡板剩余 $50000-(7500+36375)=6125$ 张，

规格 2 的锡板无剩余。

生产易拉罐160250个，罐身、罐底和罐盖都无剩余。

总收益为4298.188元。

LINGO程序：

```
model:
sets:
model/1..4/:r,x;
endsets
data:
r=222.57,183.3,261.84,169.5;
enddata
max=0.1*k-0.001*(@sum(model(i):x(i)*r(i))+157.08*L1+19.64*L2);
1.5*x(1)+2*x(2)+x(3)+3*x(4)<=144000; !时间约束;
x(1)+x(2)+x(3)<=50000; !规格1的锡板张数约束;
x(4)<=20000;!规格2的锡板张数约束;
k<=x(1)+2*x(2)+4*x(4); !罐身个数满足条件;
2*k<=10*x(1)+4*x(2)+16*x(3)+5*x(4); !罐底、盖个数满足约束;
L1=x(1)+2*x(2)+4*x(4)-k; !不配套的罐身个数;
L2=10*x(1)+4*x(2)+16*x(3)+5*x(4)-2*k; !不配套的罐底、盖个数;
@for(model(i):@gin(x(i)));
@gin(k);@gin(L1);@gin(L2);
end
```

谢 谢！