第 12 讲　Monte Carlo 模拟

计算机科学技术的迅猛发展，给许多学科带来了巨大的影响. 计算机不但使问题的求解变得更加方便、快捷和精确，而且使得解决实际问题的领域更加广泛。计算机适合于解决那些规模大、难以解析化以及不确定的数学模型。例如对于一些带随机因素的复杂系统，用分析方法建模常常需要作许多简化假设，与面临的实际问题可能相差甚远，以致解答根本无法应用，这时模拟几乎成为人们的唯一选择。在历届的美国和中国大学生的数学建模竞赛（MCM）中，学生们经常用到计算机模拟方法去求解、检验等。计算机模拟(computer simulation)是建模过程中较为重要的一类方法.

蒙特卡洛方法也称为计算机随机模拟方法，它源于世界著名的赌城—摩纳哥的 Monte Carlo（蒙特卡洛）。它是基于对大量事件的统计结果来实现一些确定性问题的计算。

在计算机上模拟某过程时，需要产生具有各种概率分布的随机变量。最简单和最基本的随机变量就是 $[0,1]$ 区间上均匀分布的随机变量。这些随机变量的抽样值就称为随机数，其它各种分布的随机数都可借助于 $[0,1]$ 区间上均匀分布的随机数得到。

12.1　一些简单随机模拟

例 12.1　已知在一次随机试验中，事件 A,B,C 发生的概率分别为 0.4，0.5，0.1，试模拟 1000 次随机试验中，事件 A,B,C 发生的次数。

在一次随机试验中，事件发生的概率分布见表 12.1。

表 12.1　事件发生的概率分布

事件	A	B	C
概率	0.4	0.5	0.1
累积概率	0.4	0.9	1

我们用产生[0,1]区间上均匀分布的随机数，来模拟事件 A,B,C 的发生。由表 12.1 的数据和几何概率的知识，可以认为如果产生的随机数在区间 $[0,0.4)$ 上，事件 A 发生了；产生的随机数在区间 $[0.4,0.9)$ 上，事件 B 发生了；产生的随机数在区间 $[0.9,1]$ 上，事件 C 发生了。产生 1000 个 $[0,1]$ 区间上均匀分布的随机数，统计随机数落在相应区间上的次数，就是在这 1000 次模拟中事件 A,B,C 发生的次数。

模拟的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear, n=1000;
a=rand(1,n);   %产生 n 个[0,1]区间上的随机数
n1=sum(a<0.4), n2=sum(a>=0.4 & a<0.9), n3=sum(a>=0.9)
f=[n1,n2,n3]/n   %计算各事件发生的频率
```

例 12.2　设计随机实验求 π 的近似值。

在单位正方形中取 1000000 个随机点 (x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,1000000$，统计点落在 $x^2+y^2\le 1$ 内的频数 n。则由几何概率知，任取单位正方形内一点，落在单位圆内部（第一象限部分）的概率为 $p=\frac{\pi}{4}$，由于实验次数充分多，频率近似于概率，有 $\frac{n}{1000000}\approx\frac{\pi}{4}$，所以 $\pi\approx\frac{4n}{1000000}$。

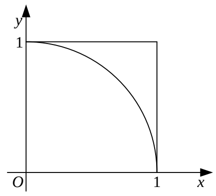

图 12.1　求 π 的近似值的实验示意图

```
clc, clear, N=10^6;
x=rand(1,N); y=rand(1,N); %生成随机点的 x,y 坐标
```

n=sum(x.^2+y.^2<=1); %统计落在单位圆内部的点数
s=4*n/N　%计算 pi 的近似值

例 12.3　蒲丰投针问题

蒲丰（Buffon）是法国著名学者，于 1977 年提出了用随机投针试验求圆周率 π 的方法。在平面上画有等距离为 a 的一些平行直线，向平面上随机投掷一长为 l（ $l<a$ ）的针。设投针次数为 n，针与平行线相交次数为 m。试求针与一平行线相交的概率 p，并利用计算机模拟求 π 的近似值。

（1）问题分析与数学模型：

令 M 表示针的中点，针投在平面上时，x 表示点 M 与最近一条平行线的距离，ϕ 表示针与平行线的交角，如图 12.2 所示。显然 $0\le x\le a/2$，$0\le\phi\le\pi$。

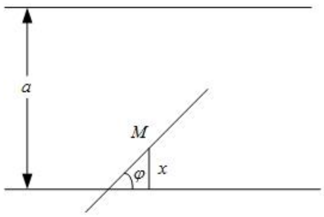

图 12.2　投针问题

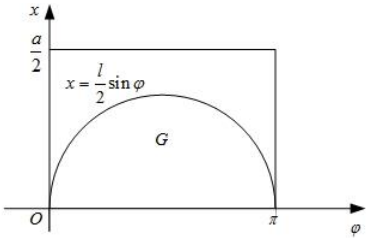

图 12.3　样本空间及事件的几何表示

随机投针的概率含义是：针的中点 M 与平行线的距离 x 均匀地分布于区间 $[0,a/2]$ 内，针与平行线交角 ϕ 均匀分布于区间 $[0,\pi]$ 内，x 与 ϕ 是相互独立的。而针与平行线相交的充分必要条件是 $x\le\frac{l}{2}\sin\phi$。

将针投掷到平面上理解为向样本空间 $\Omega=\{(x,\phi)\,|\,0\le x\le\frac{a}{2},0\le\phi\le\pi\}$ 内均匀分布地投掷点，求针与一平行线相交的概率 p，即求点 (x,ϕ) 落在

$$G=\{(x,\phi)\,|\,0\le x\le\frac{l}{2}\sin\phi,0\le\phi\le\pi\}$$

中的概率，显然，这一概率为

$$p=\frac{\int_0^\pi\frac{l}{2}\sin\phi d\phi}{\frac{a}{2}\pi}=\frac{2l}{a\pi}.$$

这表明，可以利用投针试验计算 π 值。当投针次数 n 充分大且针与平行线相交 m 次，可用频率 m/n 作为概率 p 的估计值，因此可求得 π 的估计值为

$$\pi\approx\frac{2nl}{am}.$$

历史上曾经有一些学者做了随机投针试验，并得到了 π 的估计值。表 12.2 列出了两个最详细的试验情况。

表 12.2　历史上蒲丰投针试验

试验者	a	l	投针次数 n	相交次数 m	π 的近似值
Wolf（1853）	45	36	5000	2532	3.1596
Lazzarini（1911）	3	2.5	3408	1808	3.1415929

（2）蒲丰随机投针试验的计算机模拟

真正使用随机投针试验方法来计算 π 值，需要作大量的试验才能完成。可以把蒲丰随机投针试验交给计算机来模拟实现，具体做法如下：

i）产生互相独立的随机变量 Φ 和 X 的抽样序列 $\{(\phi_i,x_i)\,|\,i=1,\cdots,n\}$，其中 $\Phi\sim U(0,\pi)$，$X\sim U(0,a/2)$。

ii）检验条件 $x_i \le \frac{l}{2}\sin\phi_i$（$i=1,\cdots,n$）是否成立，若上述条件成立，则表示第 i 次实验成功，即针与平行线相交（$(\phi_i, x_i)\in G$），如果在 n 次实验中成功次数为 m，则 π 的估计值为 $\frac{2nl}{am}$。

下面是蒲丰投针的 MATLAB 程序，其中的 a、l、n 的取值与 Wolf 实验相同。

```
clc, clear
a=45; L=36; n=5000;
x=unifrnd(0,a/2,1,n); %产生 n 个[0,a/2]区间上均匀分布的随机数
phi=unifrnd(0,pi,1,n); %产生 n 个[0,pi]区间上均匀分布的随机数
m=sum(x<=L*sin(phi)/2); %统计满足 x<=L*sin(phi)/2 的次数
pis=2*n*L/(a*m)    %计算 pi 的近似值
```

其中的一次运行结果，求得 π 的近似值为 3.1583。

（3）说明

随机模拟方法是一种具有独特风格的数值计算方法。这一方法是以概率统计理论为主要基础，以随机抽样为主要手段的广义的数值计算方法。它用随机数进行统计实验，把得到的统计特征（均值和概率等）作为所求问题的数值解。

12.2 MATLAB 产生随机数的相关命令

12.2.1 MATLAB 常用的产生随机数的函数

随机模拟需要产生各种分布的随机数，MATLAB 统计工具箱提供了 30 多种生成随机数的函数，一些常用生成随机数的函数见表 12.3。

表 12.3 常用的随机数生成函数

函数名称	函数说明	调用格式
betarnd	β 分布的随机数	R=betarnd(A,B,m,n)
binornd	二项分布随机数	R=binornd(N,P,m,n)
chi2rnd	χ^2 分布随机数	R=chi2rnd(V,m,n)
exprnd	指数分布随机数	R=exprnd(MU,m,n)
frnd	F 分布随机数	R=frnd(V1,V2,m,n)
gamrnd	γ 分布随机数	R=gamrnd(A,B,m,n)
geornd	几何分布随机数	R=geornd(P,m,n)
hygernd	超几何分布随机数	R=hygernd(M,K,N,m,n)
normrnd	正态分布随机数	R=normrnd(MU,SIGMA,m,n)
lognrnd	对数正态分布随机数	R=lognrnd(MU,SIGMA,m,n)
nbinrnd	负二项分布随机数	R=nbinrnd(R,P,m,n)
ncfrnd	非中心 F 分布随机数	R=ncfrnd(NU1,NU2,DELTA,m,n)
nctrnd	非中心 t 分布	R=nctrnd(V,DELTA,m,n)
ncx2rnd	非中心 χ^2 分布随机数	R=ncx2rnd(V,DELTA,m,n)
poissrnd	泊松分布随机数	R=poissrnd(LAMBDA,m,n)
raylrnd	Rayleigh 分布随机数	R=raylrnd(B,m,n)
trnd	t 分布随机数	R=trnd(V,m,n)
unidrnd	离散均匀分布随机数	R=unidrnd(N,m,n)
unifrnd	连续均匀分布随机数	R=unifrnd(A,B,m,n)
wblrnd	Weibull 分布随机数	R=weibrnd(A,B,m,n)
mvnrnd	服从 n 维正态分布的随机数	R = mvnrnd(MU,SIGMA,n)

12.2.2 随机数应用举例

例 12.4 炮弹射击的目标为一椭圆 $\frac{x^2}{120^2}+\frac{y^2}{80^2}=1$ 所围成的区域的中心，当瞄准目标的中

心发射时，受到各种因素的影响，炮弹着地点与目标中心有随机偏差。设炮弹着地点围绕目标中心呈二维正态分布，且偏差的标准差在 x 和 y 方向均为 100 米，并相互独立，用 Monte Carlo 法计算炮弹落在椭圆形区域内的概率，并与数值积分计算的概率进行比较。

我们可以模拟发射 N 发炮弹，统计炮弹落在椭圆 $\frac{x^2}{120^2}+\frac{y^2}{80^2}=1$ 内部的次数 n，用炮弹落在椭圆内的频率近似所求的概率。

```
clc, clear
mu=[0,0]; sigma=100^2*eye(2); %均值向量和协方差矩阵
N=10^7;
r=mvnrnd(mu,sigma,N); %产生 N 对服从二维正态分布的随机数
n=sum(r(:,1).^2/120^2+r(:,2).^2/80^2<=1)   %统计落在椭圆内的次数
p1=n/N   %计算概率的近似值
fxy=@(x,y)1/(20000*pi)*exp(-(x.^2+y.^2)/20000);
ymax=@(x)80*sqrt(1-x.^2/120^2); ymin=@(x)-ymax(x);
p2=integral2(fxy,-120,120,ymin,ymax)
```

12.3　蒙特卡罗法的数学基础及步骤

13.3.1　蒙特卡罗方法基础—大数定律和中心极限定理

作为蒙特卡罗方法的基础是概率论中的大数定理和中心极限定理，分别叙述如下。

大数定理　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 为一随机变量序列，独立同分布，数学期望值 $E\xi_i=a$ 存在，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-a\right|<\varepsilon\right\}=1\,. \tag{1}$$

大数定理指出，当 $n\to\infty$ 时，随机变量的算术平均值依概率收敛到数学期望 a。至于要进一步研究收敛的程度，作出种种误差估计，则要用到下面的中心极限定理。

中心极限定理　设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 为一随机变量序列，独立同分布，数学期望为 $E\xi_i=a$，方差 $D\xi_i=\sigma^2$，则当 $n\to\infty$ 时，

$$P\left\{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<x_\alpha\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,, \tag{2}$$

利用中心极限定理，当 $n\to\infty$ 时，还可得到

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-a\right|<\frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\to\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,, \tag{3}$$

若记

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\alpha\,, \tag{4}$$

那就是说，当 n 很大时，不等式

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-a\right|<\frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

成立的概率为 $1-\alpha$。通常将 α 称为显著性水平，$1-\alpha$ 就是置信水平。x_α 为标准正态分布的上 α 分位数，α 和 x_α 的关系可以在正态分布表中查到。

从(5)式可以看到，随机变量的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 依概率收敛到 a 的阶为 $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$。当 $\alpha=0.05$ 时，误差 $\varepsilon=0.6745\sigma/\sqrt{n}$ 称为概率误差。从这里可以看出，蒙特卡罗方法收敛的阶很低，收敛速度很慢，误差 ε 由 σ 和 $\sqrt{n}$ 决定。在固定 σ 的情况下，要提高 1 位精度，就要增加 100 倍试验次数。相反，若 σ 减少 10 倍，就可以减少 100 倍工作量。因此，控制方差是应用蒙特卡罗方法中很重要的一点。

12.3.2 蒙特卡罗方法基本步骤和基本思想

用蒙特卡罗方法处理的问题可以分为两类。

一类是随机性问题。对于这一类实际问题，通常采用直接模拟方法。首先，必须根据实际问题的规律，建立一个概率模型（随机向量或随机过程），然后用计算机进行抽样试验，从而得出对应于这一实际问题的随机变量$Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_m)$的分布。假定随机变量$Y$是我们的研究对象，它是$m$个相互独立的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_m$的函数，如果$X_1, X_2, \cdots, X_m$的概率密度函数分别为$f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_m(x_m)$，则用蒙特卡罗方法计算的基本步骤是：在计算机上用随机抽样的方法从$f_1(x_1)$中抽样，产生随机变量X_1的一个值x_1'，从$f_2(x_2)$中抽样得x_2'，…，从$f_m(x_m)$中抽样得x_m'，由$x_1', x_2', \cdots, x_m'$计算得到Y的一个值$y_1 = g(x_1', x_2', \cdots, x_m')$，显然$y_1$是从$Y$分布中抽样得到的一个数值，重复上述步骤$N$次，可得随机变量$Y$的$N$个样本值$(y_1, y_2, \cdots, y_N)$，用这样的样本分布来近似$Y$的分布，由此可计算出这些量的统计值。

另一类是确定性问题。在解决确定性问题时，首先要建立一个有关的概率统计模型，使所求的解就是这个模型的概率分布或数学期望，然后对这个模型作随机抽样，最后用其算术平均值作为所求解的近似值。根据前面对误差的讨论可以看出，必须尽量改进模型，以便减少方差和降低费用，以提高计算销量。

12.4 定积分的计算

12.4.1 单重积分

例 12.5 求定积分的数值解。

设区间(a,b)上的随机变量ξ的概率密度函数由$f_\xi(x)$给出。$g(x)$是区间(a,b)上的连续函数，数学期望

$$E[g(\xi)] = \int_a^b g(x) f_\xi(x) dx \tag{6}$$

存在，则积分(6)式可用如下方法计算近似值。

设随机变量ξ的一系列可取值为$x_1, x_2, \cdots, x_n$，由$y_i = g(x_i)$形成的随机变量$\eta = g(\xi)$的可能取值的数列为$y_1, y_2, \cdots, y_n$。则根据大数定理，当n充分大时，积分(6)式有近似值

$$\bar{M} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i). \tag{7}$$

以(7)式作为积分(6)式近似值的误差，可以用以前同样的方法来估计。

现在来讨论用上述方法来计算积分

$$J = \int_a^b h(x) dx \tag{8}$$

的值。

为此，选择某种概率密度函数$f(x)$满足

$$\int_a^b f(x) dx = 1,$$

且能很方便地生成具有概率密度函数为$f(x)$的随机抽样。同时将积分J写成如下形式

$$J = \int_a^b \frac{h(x)}{f(x)} \cdot f(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx.$$

于是归结为积分(6)式的形式，即可用上述方法计算。

在很多情况下，往往取$f(x)$为区间(a,b)上均匀分布的概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

这样

$$J = (b-a)\int_a^b h(x) \frac{1}{b-a} dx.$$

现在在区间(a,b)上均匀分布的随机数总体中选取x_i，对每个x_i计算$h(x_i)$的值，然后计算平均值

$$\bar{M}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(x_i),$$

于是积分(8)式的值可近似地取为

$$J\approx(b-a)\bar{M}=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}h(x_i).$$

例 12.6　计算积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$$

解　随机模拟时随机数取为区间 $(-1,1)$ 上均匀分布的抽样，其概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in(-1,1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所求积分的近似值为被积函数 $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{5-4x}}$ 取值的均值，乘以区间长度 2。

随机模拟的 MATLAB 程序如下

```
clc, clear
y=@(x) x./sqrt(5-4*x); %定义被积函数的匿名函数
I=quadl(y,-1,1)   %计算积分的数值解，与随机模拟解进行比照
n=1000000; %生成随机数的个数
x=unifrnd(-1,1,[1,n]); %生成 n 个区间（-1,1）上均匀分布的随机数
h=y(x); %计算被积函数的一系列取值
junzhi=mean(h); %计算取值的平均值
jifen=2*junzhi %计算积分的近似值
```

例 12.7　计算积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

解　$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}E[\cos(X)]$，

其中 $X\sim N(0,1)$，所以 $I\approx\sqrt{2\pi}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos(X_j)$，这里 X_j 为服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机数。

```
clc, clear, n=10^7;
I1=sqrt(2*pi)*mean(cos(randn(1,n)))   %Monte Carlo 法的积分值
syms x
fx=cos(x)*exp(-x^2/2); %定义符号被积函数
I2=int(fx,-inf,inf)   %数值积分无法求无界区间的积分，这里必须是符号积分
I2=double(I2)   %符号积分值化成双精度格式
```

12.4.2　多重积分计算

假设要求多重积分

$$J=\int_{\Omega}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n \tag{9}$$

的值。积分区域 Ω 是有界区域，被积函数 f 在区域 Ω 中是有界的。

设 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 为区域 Ω 上的概率密度函数，且当 $f(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ 时 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 亦不为零。令

$$h(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{f(x_1,\cdots,x_n)}{g(x_1,\cdots,x_n)}, & \text{当}g(x_1,\cdots,x_n)\neq 0\text{时},\\ 0, & \text{当}g(x_1,\cdots,x_n)=0\text{时}.\end{cases}$$

则积分(9)可改写为

$$J=\int_{\Omega}\cdots\int h(x_1,\cdots,x_n)g(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n\ .$$

若（$X_1,\cdots,X_n$）是 n 维空间区域 Ω 中的随机变量，概率密度函数为 $g(x_1,\cdots,x_n)$，则随机变量 $h(X_1,\cdots,X_n)$ 的数学期望为

$$E[h(X_1,\cdots,X_n)]=\int_{\Omega}\cdots\int h(x_1,\cdots,x_n)g(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n=J\ .$$

即积分 J 是随机变量 $h(X_1,\cdots,X_n)$ 的数学期望。如果选取 N 个点 $P_i(x_1^i,\cdots,x_n^i)\in\Omega$（$i=1,\cdots,N$）服从分布 $g(x_1,\cdots,x_n)$，则根据大数定理，其算术平均值

$$\bar{J}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}h(x_1^i,\cdots,x_n^i)$$

即为积分 J 的近似值。通常可选取 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 为 Ω 上的均匀分布

$$g(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{V}, & (x_1,\cdots,x_n)\in\Omega,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

其中 V 表示区域 Ω 的体积，则

$$h(x_1,\cdots,x_n)=V\cdot f(x_1,\cdots,x_n)$$

积分(9)的近似值可取为

$$\bar{J}=\frac{V}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_1^i,\cdots,x_n^i) \tag{10}$$

例 12.8　分别用 Monte Carlo 法和数值积分计算 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$，其中 Ω 为 $z\ge x^2+y^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 2$ 所围成的区域。

解　随机模拟时首先要计算 Ω 的体积，设 Ω 的体积为 V，区域 Ω 上均匀分布的密度函数为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{V}, & (x,y,z)\in\Omega,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 的交线在 xoy 面的投影为 $x^2+y^2=1$。求 Ω 的体积 V 时，在立体区域 $[-1,1]\times[-1,1]\times[0,\sqrt{2}]$ 上产生服从均匀分布的 10^6 个随机点，统计随机点落在 Ω 的频数，则 Ω 的体积 V 近似为上述立体的体积乘以频率。

模拟的 MATLAB 程序如下

```
clc, clear
h=@(x,y,z) (x+y+z).^2; %定义被积函数
n=1000000; %生成随机数的个数
x=unifrnd(-1,1,[1,n]); %生成 n 个区间（-1,1）上均匀分布的随机数
y=unifrnd(-1,1,[1,n]);
z=unifrnd(0,sqrt(2),[1,n]);
f=sum(z>=x.^2+y.^2 & x.^2+y.^2+z.^2<=2); %计算落在区域上的频数
V=f/n*4*sqrt(2) %计算体积
hh=h(x,y,z); %计算被积函数一系列的取值
meanh= sum(hh.*(z>=x.^2+y.^2 & x.^2+y.^2+z.^2<=2))/f; %求在区域上的矩阵
I1=V*meanh   %计算 Monte Carlo 法的积分值
fxyz=@(x,y,z)h(x,y,z).* (z>=x.^2+y.^2 & x.^2+y.^2+z.^2<=2);%定义 MATLAB 被积函数
I2=triplequad(fxyz,-1,1,-1,1,0,sqrt(2))   %计算数值积分
```

12.5　几何概率的随机模拟

例 12.9　$y=x^2$，$y=12-x$ 与 x 轴在第一象限围成一个曲边三角形。设计一个随机实验，

求该图形面积的近似值。

解　首先求出 $y=x^2$ 与 $y=12-x$ 在第一象限的交点为 $(3,9)$ 。

设计的随机试验的思想如下，在矩形区域 $[0,12]\times[0,9]$ 上产生服从均匀分布的 10^7 个随机点，统计随机点落在曲边三角形的频数。由于点落在曲边三角形的概率近似于落在该区域的频率，所以曲边三角形的面积近似为上述矩形的面积乘以频率。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear
x=unifrnd(0,12,[1,10000000]);
y=unifrnd(0,9,[1,10000000]);
pinshu=sum(y<x.^2 & x<=3)+sum(y<12-x & x>=3);
area_appr=12*9*pinshu/10^7
```

运行结果在 49.5 附近，由于是随机模拟，每次的结果都是不一样的。

例 12.10　在线段[0，1]上任意取三个点，问由 0 至三点的三线段，能构成三角形与不能构成三角形这两个事件中哪一个事件的概率大。

解　设 0 到三点的三线段长分别为 x,y,z ，即相应的右端点坐标为 x,y,z ，显然

$$0\le x,y,z\le 1.$$

这三条线段构成三角形的充要条件是

$$x+y>z,\quad x+z>y,\quad y+z>x.$$

在线段[0,1]上任意取三点 x,y,z ，与立方体 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，$0\le z\le 1$ 中的点 (x,y,z) 一一对应，可见所求“构成三角形”的概率，等价于在边长为 1 的立方体 Ω 中均匀地取点，而点落在 $x+y>z$ ，$x+z>y$ ，$y+z>x$ 区域中的概率，这也就是落在图 12-4 中由 ΔADC ，ΔADB ，ΔBDC ， ΔAOC ， ΔAOB ， ΔBOC 所围成的区域 G 中的概率。由于 Ω 的体积 $V(\Omega)=1$，$V(G)=1^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1^3=\frac{1}{2}$，所以

$$p=V(G)/V(\Omega)=\frac{1}{2},$$

因而得到，能与不能构成三角形两事件的概率一样大。

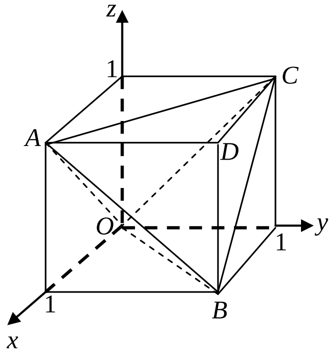

图 12.4　单位立方体示意图

使用计算机生成随机数来模拟求生成三角形的概率，MATLAB 程序如下

```
clc, clear
n=100000;
x=unifrnd(0,1,[1,n]); y=unifrnd(0,1,[1,n]);
z=unifrnd(0,1,[1,n]);
f=sum(x+y>z & x+z>y & y+z>x);
p=f/n    %求生成三角形的近似概率
```

12.6　排队模型的计算机模拟

当排队系统的到达间隔时间和服务时间的概率分布很复杂时，或不能用公式给出时，那

么就不能用解析法求解。这就需用随机模拟法求解，现举例说明。

例 12.11 设某仓库前有一卸货场，货车一般是夜间到达，白天卸货，每天只能卸货 2 车，若一天内到达数超过 2 车，那么就推迟到次日卸货。根据**表** 12.4 所示的数据，货车到达数的概率分布（相对频率）平均为 1.5 车/天，求每天推迟卸货的平均车数。

表 12.4 到达车数的概率

到达车数	0	1	2	3	4	5	≥6
概　率	0.23	0.30	0.30	0.1	0.05	0.02	0.00

解　这是单服务台的排队系统，可验证到达车数不服从泊松分布，服务时间也不服从指数分布（这是定长服务时间）。

随机模拟法首先要求事件能按历史的概率分布规律出现。模拟时产生的随机数与事件的对应关系如表 12.5。

表 12.5 到达车数的概率及其对应的随机数

到达车数	概　率	累积概率	对应的随机数
0	0.23	0.23	$0 \le x < 0.23$
1	0.30	0.53	$0.23 \le x < 0.53$
2	0.30	0.83	$0.53 \le x < 0.83$
3	0.1	0.93	$0.83 \le x < 0.93$
4	0.05	0.98	$0.93 \le x < 0.98$
5	0.02	1.00	$0.98 \le x \le 1.00$

我们用 a1 表示产生的随机数，a2 表示到达的车数，a3 表示需要卸货车数，a4 表示实际卸货车数，a5 表示推迟卸货车数。模拟的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear,n=50000;   %模拟的次数
m=2;            %每天卸货的车数
a1=unifrnd(0,1,[n,1]);
a2=a1; %a2 初始化
a2(a1<0.23)=0;
a2(0.23<=a1&a1<0.53)=1;
a2(0.53<=a1&a1<0.83)=2;
a2(0.83<=a1&a1<0.93)=3;
a2(0.93<=a1&a1<0.98)=4;
a2(a1>=0.98)=5;
a3=zeros(n,1);a4=zeros(n,1);a5=zeros(n,1); %a3,a4,a5 初始化
a3(1)=a2(1);
if a3(1)<=m
    a4(1)=a3(1);a5(1)=0;
else
    a4(1)=m;a5(1)=a2(1)-m;
end
for i=2:n
    a3(i)=a2(i)+a5(i-1);
    if a3(i)<=m
        a4(i)=a3(i);a5(i)=0;
    else
        a4(i)=m;a5(i)=a3(i)-m;
    end
end
a=[a1,a2,a3,a4,a5];
s=mean(a)   %n 天内的平均值
```

由模拟结果知，每天推迟卸货的平均车数为 1 车。

例 12.12 银行计划安置自动取款机，已知 A 型机的价格是 B 型机的 2 倍，而 A 型机的性能—平均服务率也是 B 型机的 2 倍，问应该购置 1 台 A 型机还是 2 台 B 型机。

解 为了通过模拟回答这类问题，作如下具体假设，顾客平均每分钟到达 1 位，A 型机的平均服务时间为 0.9 分钟，B 型机为 1.8 分钟，顾客到达间隔和服务时间都服从指数分布，2 台 B 型机采取 $M/M/2$ 模型（排一队），用前 100 名顾客（第 1 位顾客到达时取款机前为空）的平均等待时间为指标，对 A 型机和 B 型机分别作 1000 次模拟，取平均值进行比较。

理论上已经得到，A 型机和 B 型机前 100 名顾客的平均等待时间分别为 $\mu_1(100)=4.13$，$\mu_2(100)=3.70$，即 B 型机优。

对于 $M/M/1$ 模型，记第 k 位顾客的到达时刻为 c_k，离开时刻为 g_k，等待时间为 w_k，它们很容易根据已有的到达间隔 t_k 和服务时间 s_k 按照以下的递推关系得到：

$$c_k = c_{k-1} + t_k，\quad g_k = \max(c_k, g_{k-1}) + s_k$$

$$w_k = \max(0, g_{k-1} - c_k)，\quad k = 2,3,\cdots$$

下面模拟时，我们用t表示到达间隔时间，s表示服务时间，c表示到达时间，g表示离开时间，w表示等待时间。

在模拟 A 型机时，MATLAB程序如下：

```
clc, clear, tic   %计时开始
rand('state',sum(100*clock));   %初始化计算机随机数发生器
n=100; %顾客数量
m=1000; %模拟次数
mu1=1;mu2=0.9;
for j=1:m
    t=exprnd(mu1,1,n); %生成到达时间间隔随机数
    s=exprnd(mu2,1,n); %生成服务时间随机数
    c(1)=t(1);   %第一个顾客到达时间
    g(1)=c(1)+s(1); %第一个顾客离开时间
    w(1)=0;   %第一个顾客的等待时间
    for i=2:n
        c(i)=c(i-1)+t(i);   %第i个顾客到达时间
        g(i)=max(c(i),g(i-1))+s(i);   %第i个顾客离开时间
        w(i)=max(0,g(i-1)-c(i));   %第i个顾客等待时间
    end
    tt1(j)=mean(w); %第j次模拟的平均等待时间
end
tt2=mean(tt1)   %m次模拟的平均等待时间
toc   %计时结束
```

类似地，模拟 B 型机的程序如下：

```
clc,clear,tic
rand('state',sum(100*clock));
n=100;m=1000;mu1=1;mu2=1.8;
for j=1:m
    t=exprnd(mu1,1,n);s=exprnd(mu2,1,n);
    c(1)=t(1);c(2)=c(1)+t(2);
    g(1:2)=c(1:2)+s(1:2);
    wtime(1:2)=0; flag=g(1:2);
    for i=3:n
        c(i)=c(i-1)+t(i);
        g(i)=max(c(i),min(flag))+s(i);
        w(i)=max(0,min(flag)-c(i));
        flag=[max(flag),g(i)];
    end
    tt1(j)=mean(w);
```

```
end
tt2=mean(tt1)
toc
```

12.7 存储问题

例 12.13 某小贩每天以 $a=10$ 元/束的价格购进一种鲜花，卖出价为 $b=15$ 元/束，当天卖不出去的花全部损失。顾客一天内对花的需求量 X 是随机变量，X 服从泊松分布

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中参数 $\lambda=15$。问小贩每天应购进多少束鲜花才能得到好收益？

解 这是一个随机决策问题，要确定每天应购进的鲜花数量以使收入最高。

设小贩每天购进 u 束鲜花。如果这天需求量 $X\le u$，则其收入为 $bX-au$，如果需求量 $X>u$，则其收入为 $bu-au$，因此小贩一天的期望收入为

$$J(u)=-au+\sum_{k=0}^{u}bk\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=u+1}^{\infty}bu\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!},$$

问题归结为在 a,b,λ 已知时，求 u 使得 $J(u)$ 最大。因而最佳购进量 u^* 满足

$$J(u^*)\ge J(u^*+1), \quad J(u^*)\ge J(u^*-1),$$

由于

$$J(u+1)-J(u)=-a+be^{-\lambda}\sum_{k=u+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=-a+b\left(1-\sum_{k=0}^{u}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right),$$

最佳购进量 u^* 满足

$$1-\sum_{k=0}^{u^*}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\le\frac{a}{b},$$

$$1-\sum_{k=0}^{u^*-1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ge\frac{a}{b},$$

记泊松分布的分布函数为 $F(i)=P\{X\le i\}=\sum_{k=0}^{i}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$，则最佳购进量 u^* 满足

$$F(u^*-1)\le 1-\frac{a}{b}\le F(u^*)$$

查 Poisson 分布表，或利用 MATLAB 软件，求得最佳购进量 $u^*=13$。

计算的 MATLAB 程序如下

```
clc, clear
lamda=15; a=10; b=15;
p=1-a/b
u=poissinv(1-a/b,lamda) %求最佳购进量
p1=poisscdf(u-1,lamda)   %p1 和 p2 是为验证最佳购进量
p2=poisscdf(u,lamda)
```

下面用计算机模拟进行检验。

对不同的 a,b,λ，用计算机模拟求最优决策 u 的算法如下：

步骤 1 给定 a,b,λ，记进货量为 u 时，收益为 M_u，当 $u=0$ 时，$M_0=0$；令 $u=1$，继续下一步。

步骤 2 对随机变量 X 做模拟，求出收入，共做 n 次模拟，求出收入的平均值 M_u。

步骤 3 若 $M_u\ge M_{u-1}$，令 $u=u+1$，转步骤 2；若 $M_u<M_{u-1}$，输出 $u^*=u-1$，停止。

我们用 MATLAB 软件进行了模拟，发现其与理论推导符合得很好。模拟的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear
a=10; b=15; lamda=15; M1=0;
u=1; n=10000;
for i=1:2*lamda
```

```
        d=poissrnd(lamda,[1,n]); %产生 n 个服从 Poiss(lamda)的需求量数据
        M2=mean((b-a)*u*(u<=d)+((b-a)*d-a*(u-d)).*(u>d)); %求平均利润
        if M2>M1
            M1=M2; u=u+1;
        else
            fprintf('最佳购进量为%d\n',u-1);
            break
        end
    end
```

例 12.14　某企业生产易变质的产品．当天生产的产品必须当天售出，否则就会变质。该产品单位成本为$a=2$元，单位产品售价为$b=3$元。假定市场对该产品的每天需求量是一个随机变量，但从以往的统计分析得知它服从正态分布$N(135,20^2)$。

（1）求最佳库存方案及对应的最大收益。

（2）用 Monte Carlo 法确定如下的两个方案哪个优？

方案甲：按前一天的销售量作为当天的存货量;

方案乙：按前二天的平均销售量作为当天的存货量;

解　（1）设当天的存货量为s，当天产品的需求量为随机变量X，$X \sim N(135,20^2)$，则当天的收益

$$Y=\begin{cases}(b-a)s, & s\le X,\\ bX-as, & s>X.\end{cases}$$

记正态分布$N(135,22.4^2)$的概率密度函数为$f(x)$，当天收益的数学期望

$$Q(s)=EY=\int_0^s (bx-as)f(x)dx+\int_s^{+\infty}(b-a)sf(x)dx$$
$$=b\int_0^s xf(x)dx-as+asF(0)+bs-bsF(s).$$

要求$Q(s)$的最大值，令

$$\frac{dQ(s)}{ds}=0,$$

得到

$$F(s)=1+\frac{aF(0)-a}{b},$$

其中$F(s)$为X的分布函数，由于$Q(s)$只有唯一的驻点，则当$s=F^{-1}\left(1+\frac{aF(0)-a}{b}\right)$，达到最优收益。

本题利用 MATLAB 软件，求得最佳存货量$s^*=126.3855$，对应的收益$Q(s^*)=113.1840$。

计算的 MATLAB 程序如下

```
clc, clear
a=2; b=3; mu=135; sigma=20;
s=norminv(1+(a*normcdf(0,mu,sigma)-a)/b,mu,sigma) %求最佳库存
Qs=b*quadl(@(x)x.*normpdf(x,mu,sigma),0,s)-a*s+a*s*normcdf(0,mu,sigma)+b*s-b*s*normcdf(s,mu,sigma) %求最佳库存对应的收益
```

（2）下面我们模拟一下方案甲和方案乙。

模拟时，方案甲第一天存货量的初始值取为服从正态分布$N(135,22.4^2)$的随机数，方案乙前两天存货量的初始值也是服从正态分布$N(135,22.4^2)$的随机数。

模拟时取天数$n=10000$，计算 10000 天收益的平均值，模拟结果显示方案乙较优。

模拟的 MATLAB 程序如下:

```
clc, clear
mu=135; sigma=20; a=2; b=3; n=10000;
d=normrnd(mu,sigma,1,n);    %产生 n 天需求的 n 个随机数
```

```
s1(1)=normrnd(mu,sigma); %方案甲的第一天存货量
for i=2:n
    s1(i)=min(s1(i-1),d(i-1)); %方案甲的第 i 天存货量
end
Y1=mean((b-a)*s1.*(s1<=d)+(b*d-a*s1).*(s1>d))   %计算方案甲的平均收益
s2(1:2)=normrnd(mu,sigma,[1,2]); %方案乙的前两天存货量
for i=3:n
    s2(i)=mean(min([d(1,2);s2(1,2)]));
end
Y2=mean((b-a)*s2.*(s2<=d)+(b*d-a*s2).*(s2>d))   %计算方案乙的平均收益
```

12.8　整数数学规划

整数规划由于限制变量为整数而增加了难度；然而又由于整数解是有限个，于是为枚举法提供了方便。当然，当自变量维数很大和取值范围很宽情况下，企图用显枚举法（即穷举法）计算出最优值是不现实的，但是应用概率理论可以证明，在一定计算量的情况下，用蒙特卡洛法完全可以得出一个满意解。

例 12.15　已知非线性整数规划为

$$\max\ z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5,$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 0 \le x_i \le 99, \quad (i = 1, \cdots, 5), \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 400, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \le 800, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 200, \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \le 200. \end{cases}$$

如果用显枚举法试探，共需计算 $(100)^5 = 10^{10}$ 个点，其计算量非常之大。然而应用蒙特卡洛去随机计算 10^6 个点，便可找到满意解，那么这种方法的可信度究竟怎样呢？

下面就分析随机取样采集 10^6 个点计算时，应用概率理论来估计一下可信度。

不失一般性，假定一个整数规划的最优点不是孤立的奇点。

假设目标函数落在高值区的概率分别为 0.01，0.00001，则当计算 10^6 个点后，有任一个点能落在高值区的概率分别为

$$1 - 0.99^{1000000} \approx 0.99\cdots99(100\text{多位}),$$

$$1 - 0.99999^{1000000} \approx 0.999954602.$$

解　（1）首先编写 M 文件 mengte.m 定义目标函数 f 和约束向量函数 g，程序如下

```
function [f,g]=mengte(x);
f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)-8*x(1)-2*x(2)-3*x(3)-...
x(4)-2*x(5);
g=[sum(x)-400
x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800
2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200
x(3)+x(4)+5*x(5)-200];
```

（2）应用Monte Carlo法求解的MATLAB程序如下：

```
rand('state',sum(clock));    %初始化随机数发生器
p0=0;
tic      %计时开始
for i=1:10^6
   x=randi([0,99],1,5); %产生一行五列的区间[0,99]上的随机整数
   [f,g]=mengte(x);
   if all(g<=0)
       if p0<f
           x0=x; p0=f; %记录下当前较好的解
       end
   end
```

```
end
x0,p0
toc        %计时结束
```

由于是随机模拟，每次的运行结果都是不一样的。

习题

12.1　利用 Monte Carlo 方法，模拟掷骰子各面出现的概率。

12.2　利用 Monte Carlo 方法，计算定积分 $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ 的近似值，并分别就不同个数的随机点数比较积分值的精度。

12.3　利用 Monte Carlo 方法，求积分 $\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$，并与数值解的结果进行比较。

12.4　利用 Monte Carlo 方法，计算二重积分 $\int_1^2 \int_2^6 e^{-x} \sin(x+2y) dxdy$，并分别就不同个数的随机点数比较积分值的精度。

12.5　使用 Monte Carlo 方法，求椭球面 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{8}=1$ 所围立体的体积。