微分方程模型-----传染病模型

不同类型传染病的传播过程有不同特点，弄清这些特点需要相当多的病理知识，这里不可能从医学的角度分析各种传染病的传播，而只是按照一般的传播模型机理建立几种模型。

模型1 指数传播模型

设时刻 t 的病人数 $x(t)$ 是连续可微函数，

每天每个病人有效接触人数为常数 λ。

考察 t 到 $t+\Delta t$ 病人数的增加，有

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\lambda x(t)\Delta t$$

再设 t=0 时有 x_0 个病人，得微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,\quad x(0)=x_0 \qquad (1)$$

方程（1）的解为 $$x(t)=x_0e^{\lambda t} \qquad (2)$$

结果表明，随着t的增加，病人数x(t)无限增长，显然不符合实际。

模型2 SI模型

假设条件

1. 在疾病传播期内所考察地区总人数 N 不变，即不考虑生死，也不考虑迁移。人群分为**易感染者**（Susceptible）和已感染者（Infective）两类，简称**健康者**和**病人**。时刻 t 这两类人在总人数中所占比例分别记作 s(t)和 i(t)。

2. 每个病人每天有效接触的平均人数是 λ， λ 称为**日接触率**。当病人与健康者接触时，使健康者受感染变为病人。

根据假设，每个病人每天可使 $\lambda s(t)$ 个健康者变为病人，因为病人数为 $Ni(t)$，所以每天共有 $\lambda s(t).Ni(t)$ 个健康者被感染，于是 λNsi 就是病人数 Ni 的增加率，有

$$N\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda Nsi \qquad （3）$$

且 $s(t)+i(t)=1 \qquad （4）$

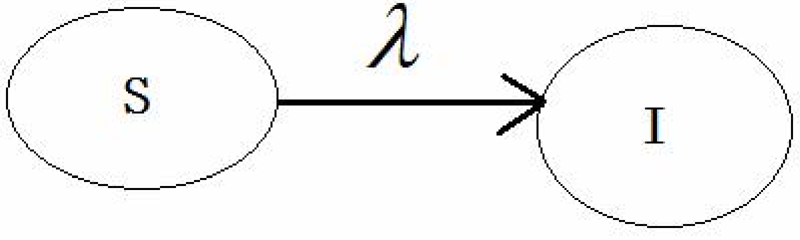


图1 SI模型示意图

记初始时刻（t=0）病人的比例为i_0，则

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda i(1-i),\qquad i(0)=i_0 \quad （5）$$

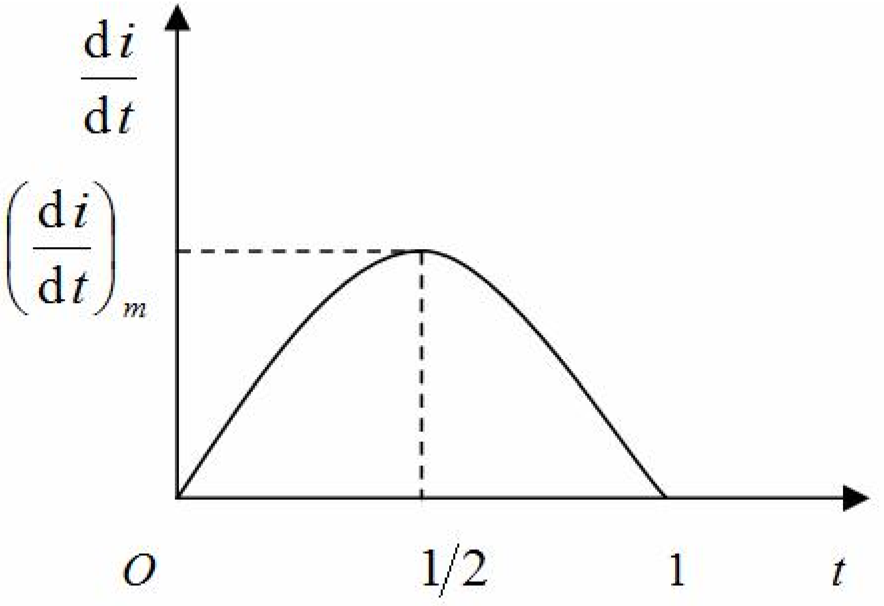


图 2　SI 模型的$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\sim i$曲线

方程（5）是 Logistic 模型。它的解为

$$i(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}} \quad （6）$$

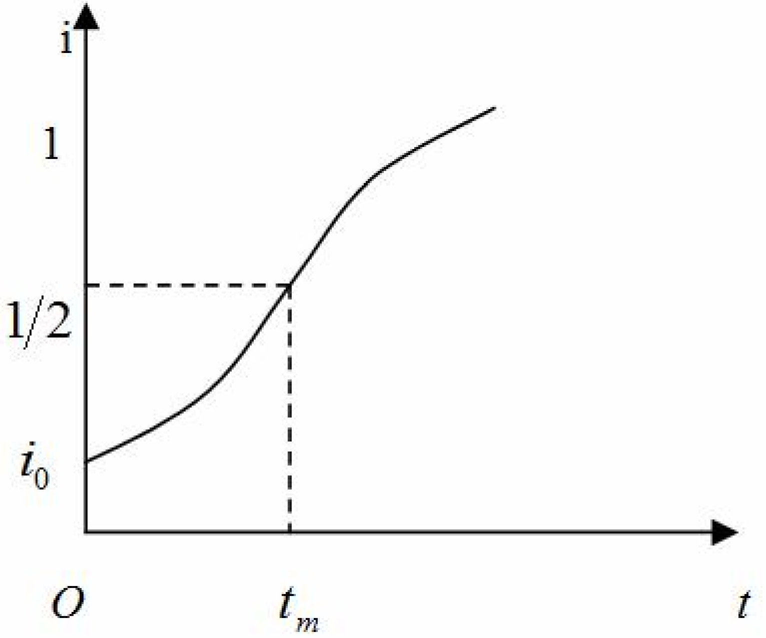


图 3　SI 模型的 i~t 曲线

第一，当$i=1/2$时$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$达到最大值$\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_m$，由(6)解得该时刻为

$$t_m=\lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right) \tag{7}$$

第二，当$t\to\infty$时$i\to1$，即所有人终将被传染，显然不符合实际情况。原因是模型中没有考虑到病人可以治愈，人群中的健康者只能变成病人，病人不会再变成健康者。

模型3 SIS模型

有些传染病如伤风、痢疾等愈后免疫力很低，可以假定无免疫性，于是病人被治愈后变成健康者，健康者还可以被感染再变成病人，所以这个模型称SIS模型。

SIS 模型的假设条件 1，2 与 SI 模型相同，增加的条件为

3．每天被治愈的病人数占病人总数的比例为常数μ，称为**日治愈率**，

病人治愈后成为仍可被感染的健康者。$1/\mu$是这种传染病的**平均传染期**。

微分方程模型为：

$$N\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda Nsi-\mu Ni \qquad (8)$$

且 $s(t)+i(t)=1$

则 $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda i(1-i)-\mu i,\quad i(0)=i_0 \qquad (9)$$

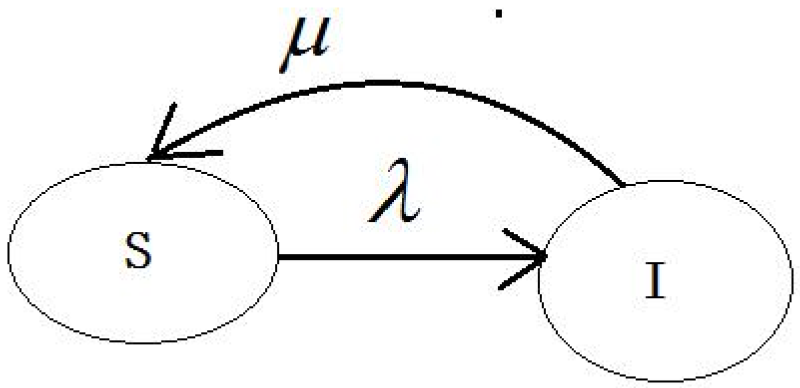


图4 SIS模型示意图

定义 $\sigma=\lambda/\mu$，σ 是整个传染期内每个病人有效接触的平均人数，称为**接触数**。

利用 σ，方程（9）可变形为

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\lambda i\left[i-\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right] \qquad (10)$$

结果的直观展示见后面图形

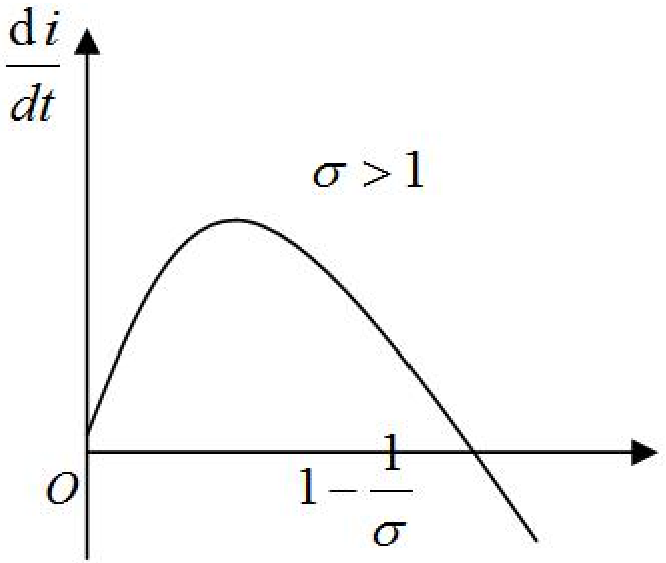


图 5　SIS 模型的 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \sim i$ 曲线（$\sigma > 1$）

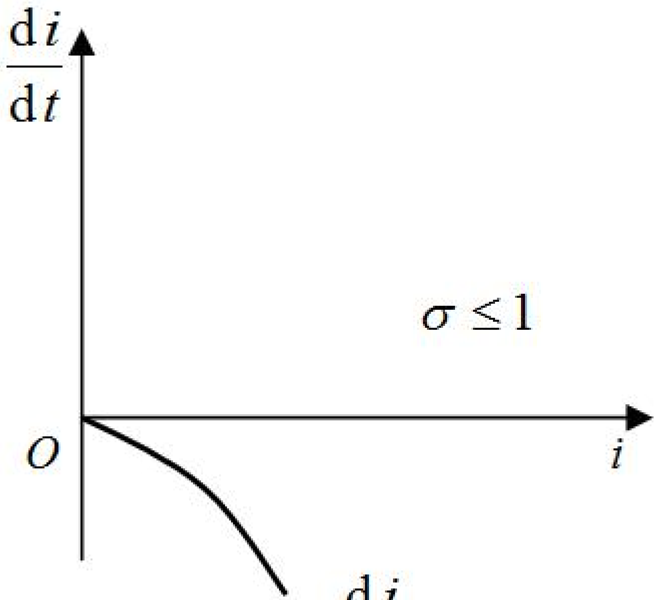


图 6　SIS 模型的 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \sim i$ 曲线（$\sigma \le 1$）

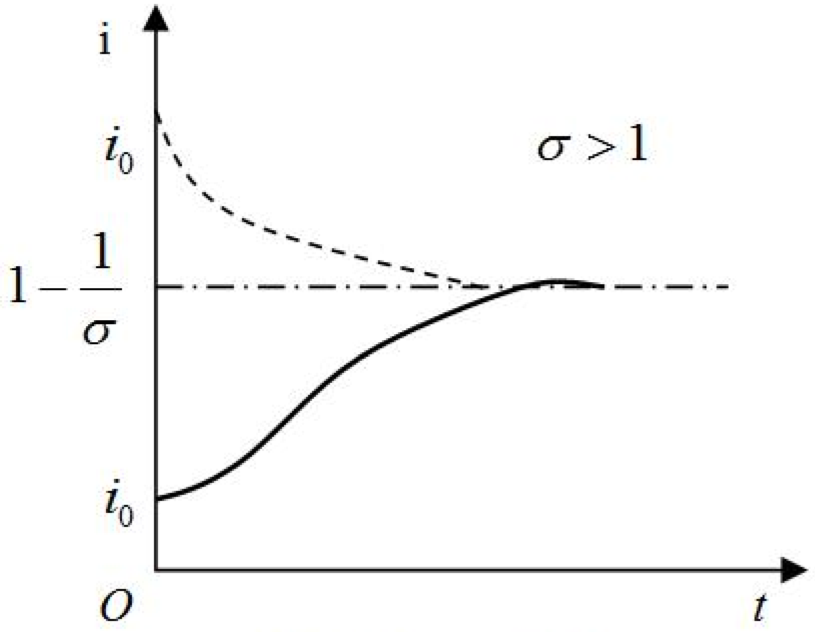


图 7　SIS 模型的 $i \sim t$ 曲线（$\sigma > 1$）

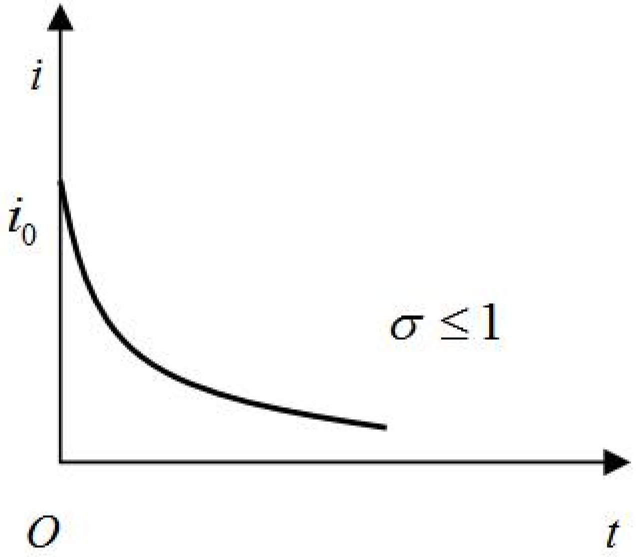


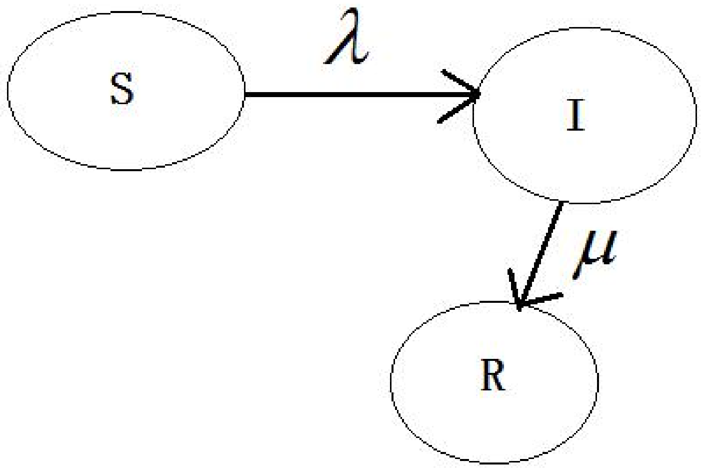
图 8　SIS 模型的 $i \sim t$ 曲线（$\sigma \le 1$）

模型4 SIR模型

大多数传染病如天花、流感、肝炎、麻疹等治愈后均有很强的免疫力，所以病愈的人退出传染系统。这里考虑建模过程。

模型假设

1. 总人数 N 不变。人群分为健康者、病人和病愈免疫的移出者（Removed）三类，称 SIR 模型。三类人在总数 N 中占的比例分别记作 s(t),i(t)和 r(t)。
2. 病人的日接触率为λ，日治愈率为μ（与 SI 模型相同），传染期接触为$\sigma = \lambda/\mu$ 。



模型构成

由假设 1 显然有 $$s(t)+i(t)+r(t)=1 \qquad (11)$$

对于病愈免疫的移出者有 $$N\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\mu N i \qquad （12）$$

再记初始时刻的健康者和病人的比例分别是 s_0 和 i_0，

则 SIR 模型的方程可以写作

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda si - \mu i, & i(0) = i_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\lambda si, & s(0) = s_0 \end{cases} \tag{13}$$

方程（13）无法求出 s(t) 和 i(t)的解析解，可作数值计算。

如取 $\lambda = 11, \mu = 3$，$i_0 = 0.1, s_0 = 0.9$，数值计算结果见右

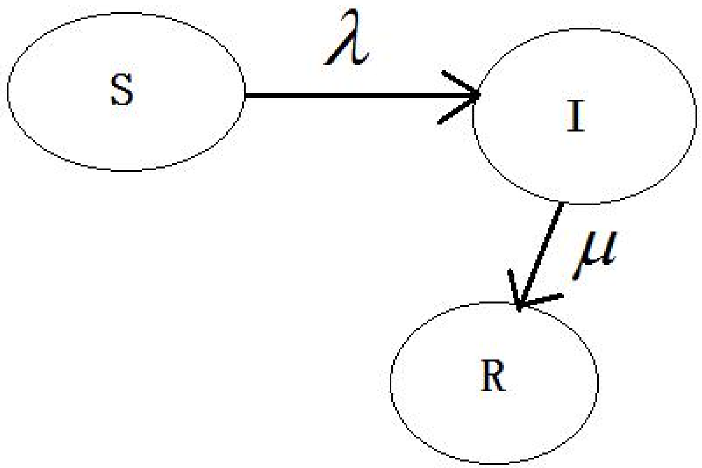
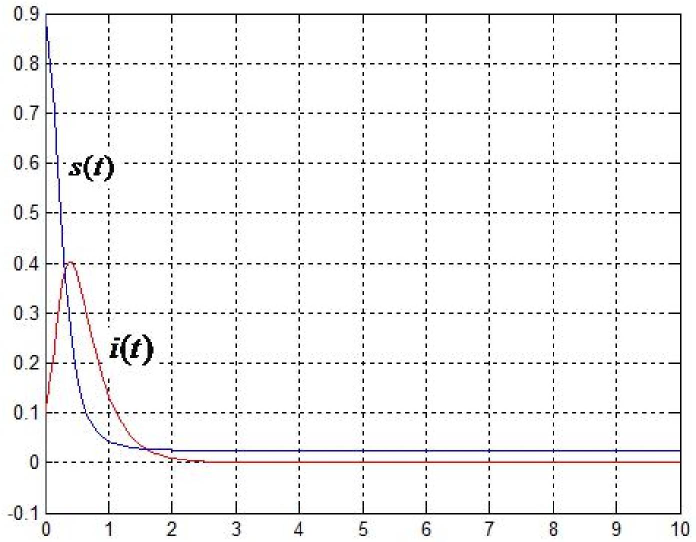


图9 SIR模型示意图



Matlab实现程序：

```
function y=infect(t,x)
lamp=11; %传染率
u=3;  %治愈率
y=[lamp*x(1)*x(2)-u*x(1),-lamp*x(1)*x(2)]';
```

主程序：

```
x0=[0.1,0.9]'; %初始值
[t,x]=ode45('infect',[0,10],x0);
%调用变步长4阶5级Runge-Kutta-Felhberg法计算
plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'b');
grid on
```

谢 谢！