循环循环循

郭晓旭

icpc-camp.org

循环循环循？

Deep Purple

- 字符串 S ($|S| \le 10^5$)
- q 个 (l_i, r_i) 询问 $\mathrm{per}(S[l_i \dots r_i])$ ($q \le 10^5$)
- $\mathrm{Per}(S_1 S_2 \dots S_n) = \{p > 0 : S_1 S_2 \dots S_{n-p} = S_{1+p} \dots S_n\}$
- $\mathrm{per}(S_1 S_2 \dots S_n) = \min_{p \in \mathrm{Per}(S)} p$

???

迷茫
要一直坐着
我要去哪
接下来干什么
我是谁
我在哪
宇宙的边界在哪
这个人是谁
人生的意义是什么
晚上吃什
我为什么会坐在这里

POI 19 A Horrible Poem

- 字符串 S
- q 个 (l_i, r_i) 询问 $\mathrm{per}_F(S[l_i \dots r_i])$
- $\mathrm{Per}_F(S_1 S_2 \dots S_n) = \mathrm{Per}(S_1 S_2 \dots S_n) \cap \{d : d | n\}$

Period and Border

$$\mathrm{Border}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \{b > 0 : S_1 S_2 \ldots S_b = S_{n-b+1} \ldots S_n\}$$

$$p \in \mathrm{Per}(S) \iff (n - p) \in \mathrm{Border}(S)$$

$p \in \mathrm{Per}(S)$?

$\iff (n - p) \in \mathrm{Border}(S)$

- Hashing
- Suffix Array + Range Minimum Query
- Dictionary of Basic Factors $O(n \log n) - O(1)$

POI 19 A Horrible Poem

- $\mathrm{Per}_F(S_1S_2\dots S_n) = \mathrm{Per}(S_1S_2\dots S_n) \cap \{d : d|n\}$

```
p := n
for q in primes:
    if (p div q) in Per:
        p := p div q
```

It doesn't help in general case.

POI 19 A Horrible Poem

- $\mathrm{Per}_F(S_1 S_2 \ldots S_n) = \mathrm{Per}(S_1 S_2 \ldots S_n) \cap \{d : d | n\}$

```
p := n
for q in primes:
    if (p div q) in Per:
        p := p div q
```

It doesn't help in general case.

Deep Purple

$\mathrm{per}(S_1S_2\dots S_n) = \min_{p\in\mathrm{Per}(S)} p = n - \max_{b\in\mathrm{Border}(S)} b$

我想建立 S 的后缀树

等等，后缀自动机和后缀树有什么关系？

Deep Purple

$\mathrm{per}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \min_{p \in \mathrm{Per}(S)} p = n - \max_{b \in \mathrm{Border}(S)} b$

我想建立 S 的后缀树

等等，后缀自动机和后缀树有什么关系？

Deep Purple

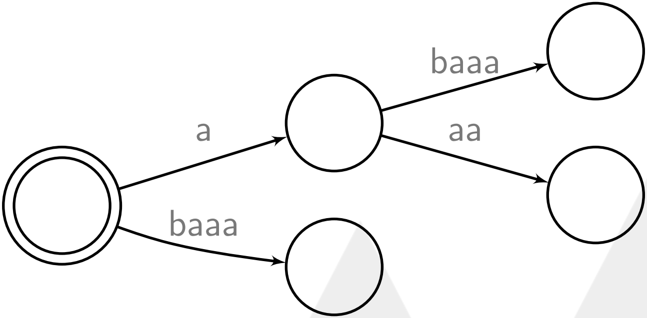
$\mathrm{per}(S_1 S_2 \dots S_n) = \min_{p \in \mathrm{Per}(S)} p = n - \max_{b \in \mathrm{Border}(S)} b$

我想建立 S 的后缀树

等等，后缀自动机和后缀树有什么关系？

Sasha And Swag Strings

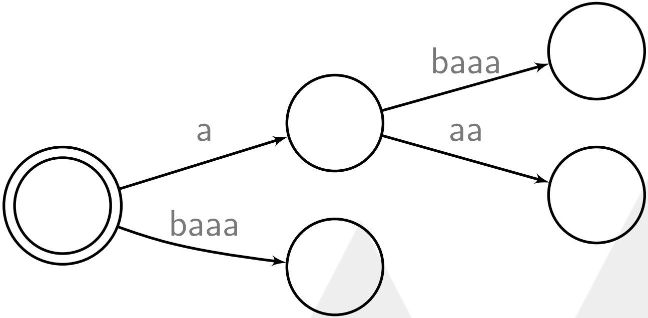
求字符串 S 的后缀树边上字符串不同子串的数量



后缀自动机是逆序的后缀树？

Sasha And Swag Strings

求字符串 S 的后缀树边上字符串不同子串的数量



后缀自动机是逆序的后缀树？

Sasha And Swag Strings

后缀自动机是最小化的后缀树，对后缀自动机 DFS 得到后缀 Trie

如何压缩？

设 $\mathrm{succ}(v)$ 表示后缀自动机中 v 的唯一后继

如果后继不唯一，那么 $\mathrm{succ}(v)$ 没有定义

设 $\mathrm{fastSUCC}(v)$ 表示 v 沿着 succ 走到达的点

沿着 fastSUCC DFS

怎么算答案？

Sasha And Swag Strings

后缀自动机是最小化的后缀树，对后缀自动机 DFS 得到后缀 Trie

如何压缩？

设 $\mathrm{succ}(v)$ 表示后缀自动机中 v 的唯一后继

如果后继不唯一，那么 $\mathrm{succ}(v)$ 没有定义

设 $\mathrm{fastSUCC}(v)$ 表示 v 沿着 succ 走到达的点

沿着 $\mathrm{fastSUCC}$ DFS

怎么算答案？

Sasha And Swag Strings

后缀自动机是最小化的后缀树，对后缀自动机 DFS 得到后缀 Trie

如何压缩？

设 $\mathrm{succ}(v)$ 表示后缀自动机中 v 的唯一后继

如果后继不唯一，那么 $\mathrm{succ}(v)$ 没有定义

设 $\mathrm{fastSUCC}(v)$ 表示 v 沿着 succ 走到达的点

沿着 $\mathrm{fastSUCC}$ DFS

怎么算答案？

Sasha And Swag Strings

终点相同的 fastSUCC 链互为后缀

维护后缀的不同子串数量（经典）

复杂度？

总长度不会超过后缀自动机的边数

Sasha And Swag Strings

终点相同的 fastSUCC 链互为后缀

维护后缀的不同子串数量（经典）

复杂度？

总长度不会超过后缀自动机的边数

Deep Purple

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{border}(S[l..r]) \\
=&\max\{b \le r-l : S[l..l+b-1] = S[r-b+1..r]\} \\
=&r+1-\min\{l < i \le r : i + \mathrm{LCP}(\mathrm{Suf}(l), \mathrm{Suf}(i)) > r\}
\end{aligned}
$$

维护 Q 表示还没确定答案的询问

从小到大考虑 i，所有的

$(j \in \mathrm{Q}) \wedge (j < i) \wedge (i + \mathrm{LCP}(\mathrm{Suf}(l_j), \mathrm{Suf}(i)) > r_j)$ 的答案是 i

如何维护？

Deep Purple

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{border}(S[l..r]) \\
=&\max\{b \le r-l : S[l..l+b-1] = S[r-b+1..r]\} \\
=&r+1-\min\{l < i \le r : i+\mathrm{LCP}(\mathrm{Suf}(l),\mathrm{Suf}(i)) > r\}
\end{aligned}
$$

维护 Q 表示还没确定答案的询问

从小到大考虑 i，所有的

$(j \in \mathrm{Q}) \wedge (j < i) \wedge (i+\mathrm{LCP}(\mathrm{Suf}(l_j),\mathrm{Suf}(i)) > r_j)$ 的答案是 i

如何维护？

Deep Purple

考虑用树链剖分求 $\mathrm{LCA}(i,j)$

设 $\mathrm{head}(u)$ 表示 u 所在重链的顶端

那么 $\mathrm{LCA}(i,j) \in \{\mathrm{head}^k(i) : k \geq 0\} \cup \{\mathrm{head}^k(j) : k \geq 0\}$

Deep Purple

$$i + \mathrm{LCP}(\mathrm{Suf}(l), \mathrm{Suf}(i)) > r$$
$$\iff i + \mathrm{len}(\mathrm{LCA}(l, i)) > r$$

如果 $\mathrm{LCA}(l, i) \in \{\mathrm{head}^k(i) : k > 0\}$

枚举 LCA，树链剖分线段树维护 r 的最小值

Deep Purple

如果 $\mathrm{LCA}(l, i) \in \{\mathrm{head}^k(l) : k > 0\}$

枚举 l 的 LCA u，在 u 处加入 $r - \mathrm{len}(u)$

查询 i 的重链区间上 $r - \mathrm{len}(u)$ 的最小值

$O((n + q)\log^2 n)$

Deep Purple

Deep Purple (Easy)

$\mathrm{Per}_{\mathrm{small}}(S_1S_2\dots S_n) = \{0 < p \le \frac{n}{2} : S_1S_2\dots S_{n-p} = S_{1+p}\dots S_n\}$

查询 $\mathrm{Per}_{\mathrm{small}}(S)$ 中的 k 小值

$\mathrm{Per}_{\mathrm{small}}(S)$ 的结构

显然 $k \times \mathrm{per}(S) \in \mathrm{Per}_{\mathrm{small}}(S)$

为什么 $\mathrm{Per}_{\mathrm{small}}(S) \subseteq \{k \times \mathrm{per}(S) : k \geq 1\}$？

Periodicity Lemma

如果 $p, q \in \mathrm{Per}(S)$ 同时 $p + q - \gcd(p, q) \leq |S|$
那么 $\gcd(p, q) \in |S|$

对于任意 $q \in \mathrm{Per}_{\mathrm{small}}(S)$ 我们有 $\mathrm{per}(S) + q \leq |S|$，故
$\mathrm{per}(S) = \gcd(\mathrm{per}(S), q) \in \mathrm{Per}_{\mathrm{small}}(S)$

Runs

定义 (i, j, p) 是字符串 S 的一个 maximal run，当且仅当

$2p \leq j - i + 1$

对于所有的 $i \leq k \leq j - p + 1$ 有 $S_k = S_{k+p}$

同时 $S_{i-1} \neq S_{i-1+p}, S_{j+1-p} \neq S_{j+1}$

Runs

经典做法

枚举 p，考虑 $0, p, 2p, 3p, \ldots,$ 这些字符

因为 $2p \leq j - i + 1$, 所以至少同时包含了 ip 和 $(i+1)p$

求 ip 和 $(i+1)p$ 的最长公共前缀和后缀

$O(n \log n)$ 个 maximal runs

询问时查询包含区间的最小值 $O(n \log^2 n) - O(\log n)$

Runs

经典做法

枚举 p，考虑 $0, p, 2p, 3p, \ldots,$ 这些字符

因为 $2p \leq j - i + 1$, 所以至少同时包含了 ip 和 $(i+1)p$

求 ip 和 $(i+1)p$ 的最长公共前缀和后缀

$O(n \log n)$ 个 maximal runs

询问时查询包含区间的最小值 $O(n \log^2 n) - O(\log n)$

Runs Theorem

Number of maximal runs $< n$

复杂度是 $O(n \log n) - O(\log n)$

可以变成 $O(n) - O(1)$

思考：对于 OI 有必要吗？

Runs Theorem

Number of maximal runs $< n$

复杂度是 $O(n \log n) - O(\log n)$

可以变成 $O(n) - O(1)$

思考：对于 OI 有必要吗？

Deep Purple (Hard?)

$\mathrm{Per}_{\mathrm{LARGE}}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \{p > \frac{n}{2} : S_1 S_2 \ldots S_{n-p} = S_{1+p} \ldots S_n\}$

等价于求 $\mathrm{Border}_{\mathrm{small}}(S) = \{b \in \mathrm{Border}(S) : s < \frac{n}{2}\}$

Deep Purple (Hard?)

$\mathrm{Per}_{\mathrm{LARGE}}(S_1S_2\dots S_n) = \{p > \frac{n}{2} : S_1S_2\dots S_{n-p} = S_{1+p}\dots S_n\}$

等价于求 $\mathrm{Border}_{\mathrm{small}}(S) = \{b \in \mathrm{Border}(S) : s < \frac{n}{2}\}$

Presuf

定义 $\mathrm{PS}(x_1x_2\dots x_n, y_1y_2\dots y_n) = \{l : x_1x_2\dots x_l = y_{n-l+1}y_{n-l+2}\dots y_n\}$

等价于求 $\mathrm{Border}_{\mathrm{small}}(S) = \mathrm{PS}(S[1..n/2], S[n/2+1..n])$

Presuf

定义 $\mathrm{PS}(x_1x_2\dots x_n, y_1y_2\dots y_n) = \{l : x_1x_2\dots x_l = y_{n-l+1}y_{n-l+2}\dots y_n\}$

等价于求 $\mathrm{Border}_{\mathrm{small}}(S) = \mathrm{PS}(S[1..n/2], S[n/2+1..n])$

Presuf

设 k 是最大的 $2^k \le n$，转而计算

$\mathrm{PS}(S[1..2^k], S[n-2^k+1..n])$

怎么跟 $\mathrm{Per}_{\mathrm{small}}$ 拼起来？

Presuf

类似地，研究

$\mathrm{PS}_{\mathrm{LARGE}}(x, y) = \{l \geq \frac{n}{2} : x_1 x_2 \dots x_l = y_{n-l+1} y_{n-l+2} \dots y_n\}$

PS 也是等差数列

设 $L = \max\{l \geq \frac{n}{2} : x_1 x_2 \dots x_l = y_{n-l+1} y_{n-l+2} \dots y_n\}$

$\mathrm{PS}_{\mathrm{LARGE}}(x, y) \subseteq \mathrm{Border}_{\mathrm{LARGE}}\, x[1..L]$

Presuf

类似地，研究

$\mathrm{PS}_{\mathrm{LARGE}}(x, y) = \{l \geq \frac{n}{2} : x_1 x_2 \ldots x_l = y_{n-l+1} y_{n-l+2} \ldots y_n\}$

PS 也是等差数列

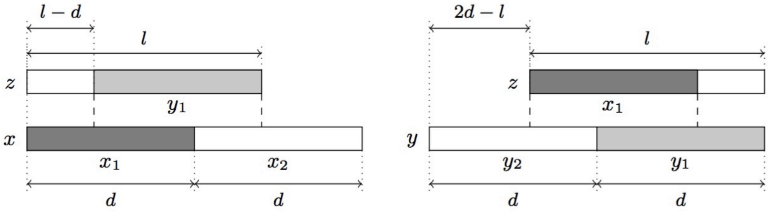
设 $L = \max\{l \geq \frac{n}{2} : x_1 x_2 \ldots x_l = y_{n-l+1} y_{n-l+2} \ldots y_n\}$

$\mathrm{PS}_{\mathrm{LARGE}}(x, y) \subseteq \mathrm{Border}_{\mathrm{LARGE}} x[1..L]$

Presuf

如果 $\mathrm{PS}_{\mathrm{LARGE}}(S[1..2^k], S[n-2^k+1..n])$ 可以算，那么 $\mathrm{Border}(S) = \mathrm{Border}_{\mathrm{LARGE}}(S) \cup \mathrm{PS}_{\mathrm{LARGE}}(S[1..2^k], S[n-2^k+1..n]) \cup \mathrm{PS}_{\mathrm{LARGE}}(S[1..2^{k-1}], S[n-2^{k-1}+1..n]) \ldots$

一图流



设 $\mathrm{Occ}(x, y)$ 表示 x 在 y 中出现的下标位置

则 $l \in (Occ(y_1, x) + d) \cap (2d - Occ(x_1, y))$

这能算？

Occ

如果 $2|x| \geq y$，那么 $\mathrm{Occ}(x, y)$ 是等差数列，公差是 $\mathrm{per}(x)$

证明？

如何合并两个等差数列？

扩展欧几里得算出特解，解出范围，balhbalh

Occ

如果 $2|x| \geq y$，那么 $\mathrm{Occ}(x, y)$ 是等差数列，公差是 $\mathrm{per}(x)$

证明？

如何合并两个等差数列？

扩展欧几里得算出特解，解出范围，balhbalh

Occ

如果 $2|x| \geq y$，那么 $\mathrm{Occ}(x, y)$ 是等差数列，公差是 $\mathrm{per}(x)$

证明？

如何合并两个等差数列？

扩展欧几里得算出特解，解出范围，balhbalh

Occ

Occ

如果 $|\mathrm{Occ}(x_1, y)|, |\mathrm{Occ}(y_1, x)| \geq 3$

那么 $\mathrm{per}(x_1) = \mathrm{per}(y_1)$

如何合并两个公差相同的等差数列？

证明？

Occ

如果 $|\mathrm{Occ}(x_1, y)|, |\mathrm{Occ}(y_1, x)| \geq 3$

那么 $\mathrm{per}(x_1) = \mathrm{per}(y_1)$

如何合并两个公差相同的等差数列？

证明？

计算 Occ

后缀数组区间查询 $O(\log^2 n)$

Dictionary of Basic Factors $O(n \log n) - O(\log n)$

计算 Occ

后缀数组区间查询 $O(\log^2 n)$

Dictionary of Basic Factors $O(n \log n) - O(\log n)$

谢谢！