排队论模型-----计算机模拟

排队论中的问题有的可以通过理论计算解决，但当理论计算难以解决时，则可以考虑采用计算机模拟的方法解决。

问题1 收款台服务问题

考虑一个收款台的排队系统。某商店只有一个收款台，顾客到达收款台的时间间隔服从平均时间为 10 秒钟的负指数分布。负指数分布为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，每个顾客的服务时间服从均值为 6.5 秒，标准差为 1.2 秒的正态分布。利用计算机仿真计算顾客在收款台的平均逗留时间，系统的服务强度。

该问题中顾客服务时间服从正态分布，不再是负指数分布，不能直接采用前面的模型计算，因此我们可以考虑采用计算机模拟计算得到需要的结果。

设第i个人到达时间为a_i，开始接受服务的时间为b_i，离开时间为c_i。总共考虑n个人。程序首先产生服从均值为10秒的负指数分布序列$\{dt(n)\}$，每个人接受服务时间服从正态分布$N(6.5,1.2^2)$的序列$\{st(n)\}$。便于为后面计算方便。

则每个人的到达时刻可以采用下式计算：

$$a_1=0 \quad , \quad a_i=a_{i-1}+dt_{i-1} \qquad i=2,3,\cdots,n$$

第一个人开始接受服务时刻$b_1=0$，第一个人离开时刻$c_1=st_1$

第i个人开始接受服务时刻：$b_i=\begin{cases} a_i & a_i>c_{i-1} \\ c_{i-1} & a_i\le c_{i-1} \end{cases} \quad i=2,3,\cdots,n$

第 i 个人离开时刻为： $c_i = b_i + st_i \quad i = 2, 3, \cdots, n$

根据上面的递推关系式就可以计算出每个人到达时刻、开始接受服务时刻和离开时刻。

每个人在系统都留时间为 $wt_i = c_i - a_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$

第 n 个人离开时刻为 $T = c_n$

系统工作强度（工作时间占总时间比值）为： $p = \sum_{i=1}^{n} st_i / T$

程序见后，某次仿真结果为：

顾客平均逗留时间 13.32秒, 系统工作强度 0.659

Matlab模拟计算程序：

```
  n=10000; %模拟顾客数
dt=exprnd(10,1,n); %到达时间间隔
st=normrnd(6.5,1.2,1,n); %服务台服务时间
%st=exprnd(2.5,1,n); %服务台服务时间
a=zeros(1,n); %每个人到达时间
b=zeros(1,n); %每个人开始接受服务时间
c=zeros(1,n);%每个人离开时间
a(1)=0;
for i=2:n
  a(i)=a(i-1)+dt(i-1);%第i个人到达时间
end
b(1)=0;%第1个人开始服务时间为到达时间
c(1)=b(1)+st(1); %第1个人离开时间为服务时间
```

```
for i=2:n
 if(a(i)<=c(i-1)) b(i)=c(i-1);
   else b(i)=a(i);
 end
 c(i)=b(i)+st(i);  %第i个人离开时间为其开始服务时间+接受服务时间
    end
cost=zeros(1,n); %记录每个人在系统逗留时间
for i=1:n
  cost(i)=c(i)-a(i); %第i个人在系统逗留时间
end
T=c(n);      p=sum(st)/T;  %服务率
avert=sum(cost)/n; %每个人系统平均逗留时间
fprintf('顾客平均逗留时间%6.2f秒\n',avert);
fprintf('系统工作强度%6.3f\n',p);
```

问题2　卸货问题

某码头有一卸货场，轮船一般夜间到达，白天卸货。每天只能卸货 4 艘船，若一天内到达数超过 4 艘，那么推迟到第二天卸货。根据过去经验，码头每天船达到数服从表 1 的概率分布。求每天推迟卸货的平均船数。

表 1　船每天到达数的概率分布

到达船数	0	1	2	3	4	5	6	7	≥8
概率	0.05	0.1	0.1	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0

解答：该问题可以看作单服务台的排队系统。到达时间服从的是给定的离散分布，服务时间也不服从负指数分布。不能直接利用理论公式求解，可采用计算机模拟求解。

1. 随机到达船数的产生

首先我们需要产生每天随机到达的船数，该随机数服从离散分布，可以先产生一个0~1之间的均匀随机数，其落在不同区间则寿命取不同值，具体见表2。

表 2 每天到达船数的机数

到达船数	均匀随机数区间
0	[0,0.05)
1	[0.05,0.15)
2	[0.15,0.25)
3	[0.25,0.5)
4	[0.5,0.7)
5	[0.7,0.85)
6	[0.85,0.95)
7	[0.95,1]

2. 计算机仿真分析

设第i天到达的船数为x_i艘，需要卸货的船数为a_i艘，实际卸货的船数为b_i艘，推迟卸货的船数为d_i艘。

设总共模拟n天，首先模拟n天的到达船数$x_1, x_2, \ldots, x_n$。

根据该问题要求，各个量之间有如下关系：

初始第 1 天，第 1 天需要卸货的船数$a_1 = x_1$，实际卸船数为$b_1 = \begin{cases} 4 & a_1 > 4 \\ a_i & a_1 \le 4 \end{cases}$，推迟卸货的船数为 $d_1 = a_1 - b_1$。

第i天需要卸货的船数a_i满足：$a_i = x_i + d_{i-1} \quad i = 2, 3, \ldots, n$

第i天实际卸货的船数b_i满足：$b_i = \begin{cases} 4 & a_i > 4 \\ a_i & a \le 4 \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

第i天推迟卸货的船数d_i满足：$d_i = a_i - b_i \quad i = 2, \ldots, n$

则总共推迟卸货的船数为： $Total = \sum_{i=1}^{n} d_i$

每天推迟卸货的平均船数 $Aver = Total / n$

某次模拟结果为：

每天推迟卸货的平均船数2.68。

下面是Matlab实现程序

1) 产生随机到达船数的函数BoatNumber.m

```
function X=BoatNumber
  Boat=0:7; %到达船数取值范围
  %到达船数概率分布
Prob=[0.05,0.1,0.1,0.25,0.20,0.15,0.1,0.05];
  n=length(Prob);
  Qu=zeros(1,n+1);
  Qu(1)=0;
```

```
for i=1:n
    Qu(i+1)=Qu(i)+Prob(i); %产生概率区间
  end
   Qu(n+1)=1.01;
%将最后一个数值超过1,便于后面的随机数r取到1
  %产生一次到达船数
  r=rand(1); %产生一个[0,1]随机变量
  for i=1:n
   if(r>=Qu(i)&&r<Qu(i+1)) X=Boat(i); %获得到达船数
   end
  end
return
```

2) 模拟计算的主程序Boat.m

```
n=10000; %模拟总天数
x=zeros(n,1); %存储每天到达船数
a=zeros(n,1); %存储每天需要卸货的船数
b=zeros(n,1); %存储每天实际卸货的船数
d=zeros(n,1); %存储每天推迟卸货的船数
for i=1:n
   x(i)=BoatNumber; %模拟n天到达船数
end
a(1)=x(1);
if a(1)>4 b(1)=4; %计算每天实际卸货船数
 else b(1)=a(1);
end
d(1)=a(1)-b(1);
```

```
for i=2:n
    a(i)=x(i)+d(i-1); %计算每天需要卸货的船数
    if a(i)>4 b(i)=4; %计算每天实际卸货船数
     else b(i)=a(i);   end
   d(i)=a(i)-b(i);
 %计算每天推迟卸货的船数
end
Total=sum(d); %计算总共推迟卸货船数
Aver=Total/n; %计算每天推迟卸货的平均船数
fprintf('每天推迟卸货的平均船数%6.2f\n',Aver);
```

谢 谢！