Wannafly挑战赛23 题解

Philipsweng

2018 年 9 月 1 日

1 字符串

对于每个位置j，维护$l[j]$表示最近的左端点，使得$S[l[j]]..S[j]$包含26个字符。$l[j]$显然有单调性。维护一个指针，当j变大时跟着变大。另外维护一个cnt数组表示每种字符出现次数。判断合法可以$O(1)$判断。总复杂度$O(n)$。

2 游戏

类比经典的取石子游戏，使用SG函数。对于一堆数量为x的石子，设$g[x]$为对应sg函数。那么有

$$g[x] = \mathrm{mex}_{d|x} g[x-d].$$

可以先预处理出每个数的约数。直接根据这条式子算g。复杂度是$O(m\log m)$，m是数字最大值。

现在有多堆石子。先手第一步的策略，是使得取了石子后，剩下的石子堆的g的异或为0。对于每堆石子，可以暴力枚举取多少石子，其他堆的异或可以预处理，让sg值和这个数相同即可。

3 收益

设$f[x]$和$g[x]$表示，用户给x元的概率以及期望的分红。那么答案就是

$$\sum_{x\geq L} f[x]\times M - g[x].$$

算$f[x]$和$g[x]$可以用背包DP。设$f[i][x], g[i][x]$表示考虑前i个人，用户给了x元，对应的概率与期望分红。那么

$$f[i][x] = f[i-1][x-m_i] \times p_i + f[i-1][x] \times (1-p_i).$$

对于$g[i][x]$的递推式也可以类似推出。

4 漂亮的公园

对于一棵树，有这样一个结论：给定一个点集S，设其最远的两个点为x, y。其他点u到这个点集S的最远距离，必然是u到x或者是u到y。具体的证明可以用反证法（假设不是x或y，那么x, y就不会是最远的两个点。可以画图看看）。

那么可以对每种颜色，维护其对应集合的最远的两个点（直径）。每次询问就只用考虑4个点的距离即可。对于直径的维护，同样利用这个结论，只需要与原直径两个端点进行比较更新即可。

5 Sort

奇数与奇数位置没有逆序对。偶数位置与偶数位置，每一对位置产生逆序对的期望为$\frac{1}{2}$。现在考虑奇数位置与偶数位置的贡献。

对于一个偶数位置i，假设最终的数比奇数位置中前j个位置大，且比第$j+1$个小。那么这里会贡献$|i-j|$个逆序对。考虑这种情况的概率，是：

$$\frac{1}{2n}\sum_{v=1}^{2n}\binom{v-1}{j}\binom{2n-v}{n-j},$$

其中v是这个位置的值。后面两个二项式是选择奇数位置前j个，和后$n-j$个数的值。考虑这样一个组合问题，从$2n$个数中选出$n+1$个数的方案数。上面的求和式相当于枚举第$j+1$个位置的值是哪个。那么上面的概率就是

$$\frac{\binom{2n}{n+1}}{2n}.$$

所以对于偶数位置i，所有的这个j的概率都是相同的。因此由期望的线性性，有这部分的贡献就是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|i-j|.$$

这个式子显然可以化简。大家自行推导。但最终的答案是一个关于n的低次多项式。理论上在考场上可以打表用高斯消元算出来系数。

6 Counting

设g为p的一个原根。设$G = g^{\frac{p-1}{k}}$。考虑$u = 0 \to k-1$。对于一条边e，假如长度为w,把它权值变成$G^{u\times w}$。那么对于一棵包含$w_1, \cdots, w_{n-1}$的生成树，其权值乘积就是$G^{u\times(w_1+\cdots w_{n-1})}$。利用基尔霍夫矩阵或生成树定理，可以算出所有生成树的权值乘积总和。

考虑对于一棵长度总和为w的生成树，其权值乘积为$G^{u\times w}$。那么把所有的u求出来的值都加起来，有

$$\sum_{u=0}^{k-1} G^{u\times w}$$
$$=\frac{G^{kw}-1}{G^{w}-1}.$$

若w不是k的倍数，则G^w-1有定义。考虑G^{kw}，永远是1。因此此式值恒为0。

若w是k的倍数，则此式值为k。因此最后总答案除以k就是权值和为k倍数的生成树个数了。总复杂度$O(k\times n^3)$。