

插值与拟合模型(二)-----水塔流量问题

(MCM91A) 美国某洲的各用水管理机构要求各社区提供以每小时多少加仑计的用水率以及每天总的用水量,但许多社区并没有测量水流入或流出水塔水量的设备,他们只能每小时测量水塔中的水位,精度在0.5%以内,更为重要的是,无论什么时候,只要水塔中的水位下降到某一最低水位 L 时,水泵就启动向水塔重新充水至某一最高水位 H ,但也无法得到水泵的供水量的测量数据。水泵每天向水塔充水一次或两次,每次约两小时。

水塔是一个垂直圆形柱体, 高为40英尺, 直径57英尺。

当水塔的水位降至27.00英尺时开始向水塔充水,

当水位升至35.50英尺时停止充水。

试估计在任何时刻，甚至包括水泵正在工作期间内，水从水塔流出的流量 $f(t)$ ，并估计一天的总用水量，表 1 中给出了某个真实小镇某一天的真实数据。

表 1 某小镇某天的水塔水位(0.01 英尺)

时间(秒)	0	3316	6635	10619	13937	17921	21240	25223	28543
水位	3175	3110	3054	2994	2947	2892	2850	2797	2752
时间(秒)	32284	35935	39332	39435	43318	46636	49953	53936	57254
水位	2697	充水	充水	3550	3445	3350	3260	3167	3087
时间	60574	64554	68535	71854	75021	79154	82649	85968	89953
水位	3012	2927	2842	2767	2697	充水	充水	3475	3397
时间	93270								
水位	3340								

解答:

1. 水塔充水时间的确定

(1) 第一次充水时间: $t=32284$ 到 $t=39435$ 秒, 间隔 $dt=1.9864$ 小时

(2) 第二次充水时间: $t=75021$ 到 $t=82649$ 秒, 间隔 $dt=2.1189$ 小时

2. 计算各时刻塔内水的体积

单位转换为1英尺=0.3048米, 1升=1/3.785411加仑

体积计算公式为 $v = \pi \cdot d^2 h / 4$

表 2 不同时刻水体积表

时间(小时)	水体积(加仑)	时间(小时)	水体积(加仑)	时间(小时)	水体积(加仑)
0 (1)	606125	10.9542 (2)	677715	20.8392	514872
0.9211	593716	12.0328	657670	22.9581 (3)	677715
1.8431	583026	12.9544	639534	23.8800	663397
2.9497	571571	13.8758	622352	24.9869	648506
3.8714	562599	14.9822	604598	25.9083	637625
4.9781	552099	15.9039	589325		
5.9000	544081	16.8261	575008		
7.0064	533963	17.9317	558781		
7.9286	525372	19.0375	542554		
8.9678	514872	19.9594	528236		

其中(1)表示第一段开始, (2) 表示第二段开始, (3) 表示第三段开始

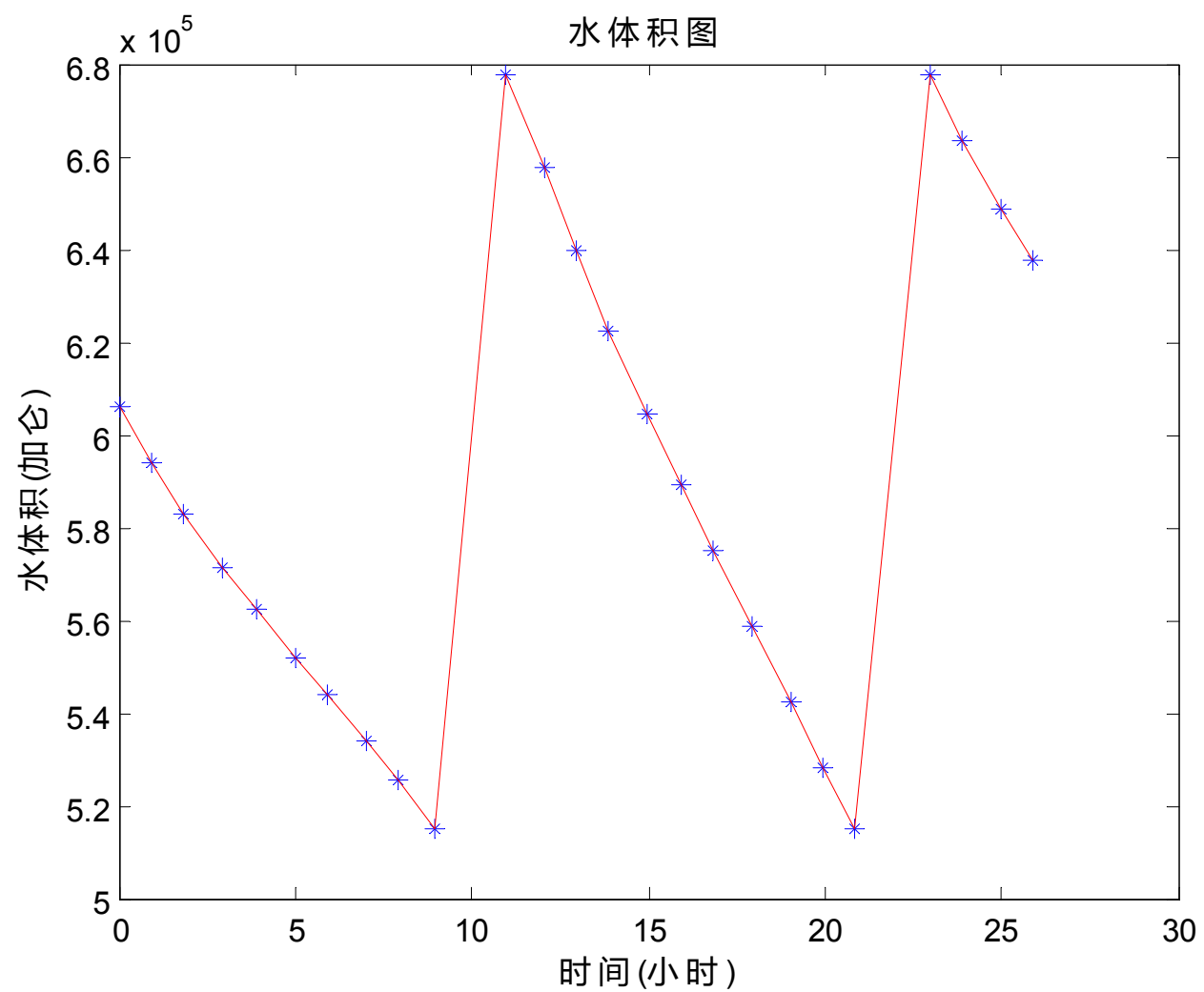


图1 水体积图 (*表示数据点)

3.计算各时刻点的水流量(加仑/小时)

水流量公式为: $f(t) = \left| \frac{dv(t)}{dt} \right|$

25 个时刻处的水流量采用差分的方法得到, 共分三段分别处理
差分公式为:

(1) 对每段前两点采用向前三点差分公式

$$f(t_i) = \left| \frac{-3V_i + 4V_{i+1} - V_{i+2}}{2(t_{i+1} - t_i)} \right|$$

(3) 对每段中间点采用中心差分公式

$$f(t_i) = \left| \frac{-V_{i+2} + 8V_{i+1} - 8V_{i-1} + V_{i-2}}{12(t_{i+1} - t_i)} \right|$$

(2) 对每段最后两点采用向后三点差分公式

$$f(t_i) = \left| \frac{3V_i - 4V_{i-1} + V_{i-2}}{2(t_i - t_{i-1})} \right|$$

计算各点水流量见表3.

表3 不同时刻水流量表

时间(小时)	水流量 (加仑/小时)	时间(小时)	水流量 (加仑/小时)	时间(小时)	水流量 (加仑/小时)
0 (1)	14404	10.9542 (2)	19469	20.8392	14648
0.9211	11182	12.0328	20195	22.9581 (3)	15220
1.8431	10063	12.9544	18941	23.8800	15263
2.9497	11012	13.8758	15903	24.9869	13711
3.8714	8798	14.9822	18055	25.9083	9634
4.9781	9991	15.9039	15646		
5.9000	8124	16.8261	13742		
7.0064	10161	17.9317	14962		
7.9286	8487	19.0375	16652		
8.9678	11023	19.9594	14495		

其中(1)表示第一段开始, (2) 表示第二段开始, (3) 表示第三段开始

4. 用三次样条拟合流量数据

对表3中25个时刻点流量数据采用三次样条插值见图6

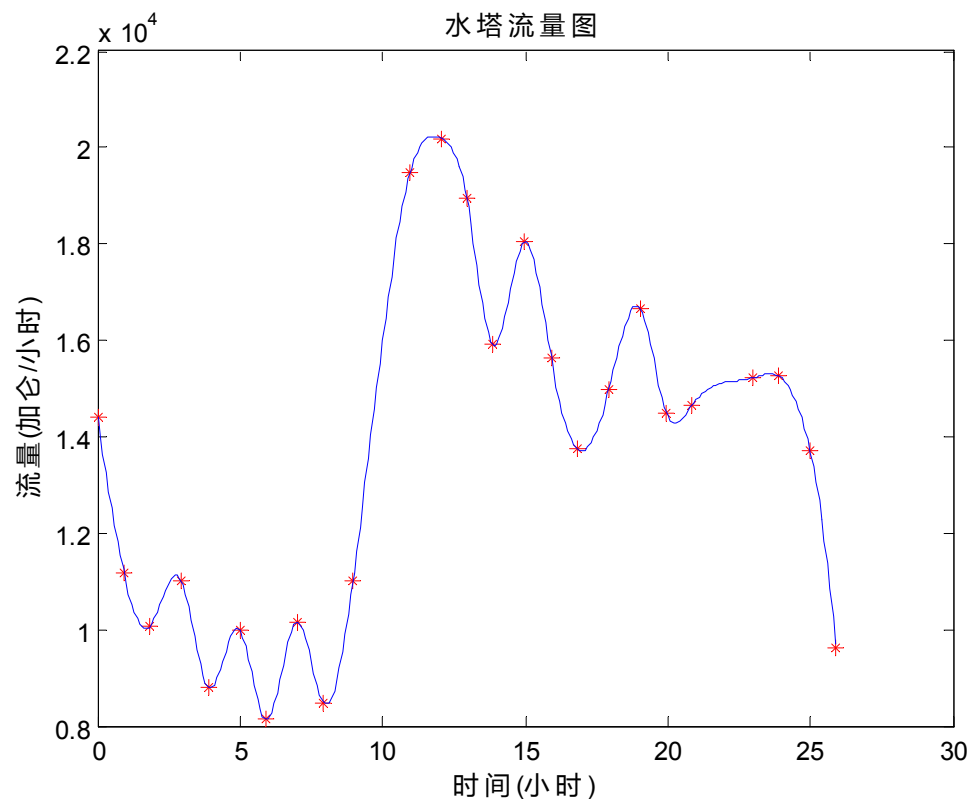


图2 水塔流量图
(*表示数据点, 实线为样条曲线)

5.一天总用水量计算

方法 1:直接积分法:

$$S_1 = \int_0^{24} f(t)dt = 332986(\text{加仑})$$

设样条插值得 n 个点 y_1, y_2, \dots, y_n , 间隔为 h

$$\text{数值积分公式: } S = [y_1 + y_n + 2(y_2 + \dots + y_{n-1})] \cdot \frac{h}{2}$$

方法2: 分段计算

$$\text{第一次充水前用水 } V_1 = 606125 - 514872 = 91253(\text{加仑})$$

$$\text{第二次充水前用水 } V_2 = 677715 - 514872 = 162843(\text{加仑})$$

$$[22.9581, 23.88] \text{ 期间用水 } V_3 = 677715 - 663397 = 14318(\text{加仑})$$

$$\text{第一次充水期间用水: } V_4 = \int_{8.9678}^{10.9542} f(t)dt = 30326(\text{加仑})$$

$$\text{第二次充水期间用水: } V_5 = \int_{20.8392}^{22.9581} f(t)dt = 31605(\text{加仑})$$

$$[23.88, 24] \text{ 期间用水: } V_6 = \int_{23.88}^{24} f(t)dt = 1524(\text{加仑})$$

$$\text{总共用水 } S_2 = \sum_{i=1}^6 V_i = 331869(\text{加仑})$$

$$\text{两种方法误差 } err = \left| \frac{S_1 - S_2}{S_1} \right| = 0.34\%$$

6.水泵流量计算

第一次充水期间水塔体积增加

$$\Delta V_1 = 677715 - 514872 = 162843(\text{加仑})$$

$$\begin{aligned}\text{充水时间: } \Delta t_1 &= 10.9542 - 8.9678 \\ &= 1.9864(\text{小时})\end{aligned}$$

第二次充水期间水塔体积增加

$$\Delta V_2 = 677715 - 514872 = 162843(\text{加仑})$$

$$\begin{aligned}\text{充水时间: } \Delta t_2 &= 22.9581 - 20.8392 \\ &= 2.1189(\text{小时})\end{aligned}$$

第一次充水期间水泵平均流量

$$p_1 = \frac{\Delta V_1 + \int_{8.9678}^{10.9542} f(t)dt}{\Delta t_1} = 97246(\text{加仑/小时})$$

第二次充水期间水泵平均流量

$$p_2 = \frac{\Delta V_2 + \int_{20.8392}^{22.9581} f(t)dt}{\Delta t_2} = 91769(\text{加仑/小时})$$

则整个充水期间水泵平均流量

$$p = (p_1 + p_2) / 2 = 94507(\text{加仑/小时})$$

Matlab程序

```
%AMCM91A
```

```
c=0.3048; %1英尺等于0.3048米
```

```
p=1.0/3.785; %1升=1/3.785411加仑
```

```
d=57*c; %直径
```

```
h=31.75*c;
```

```
v=pi*d*d*h/4*1000*p;
```

```
data=[0,3175;
```

```
3316,3110;
```

```
6635,3054;
```

```
10619,2994;
```

```
13937,2947;
```

```
17921,2892;
```

```
21240,2850;
```

```
25223,2797;
```

```
28543,2752;
```

```
32284,2697;
```

```
39435,3550;
```

```
43318,3445;
```

```
46636,3350;
```

```
49953,3260;
```

```
53936,3167;
```

```
57254,3087;
```

```
60574,3012;
```

```
64554,2927;
```

```
68535,2842;
```

```
71854,2767;
```

```
75021,2697;
```

```
82649,3550;
```

```
85968,3475;
```

```
89953,3397;
```

```
93270,3340];%原始数据
```

```
t=data(:,1)/3600;%计算时间(小时为单位)
v=pi*d*d*data(:,2)/100*c/4*1000*p;%计算体积
%计算差分
n=length(v);
f=zeros(n,1); %存储差分值
%计算第一段
n1=10;
for i=1:n1
    if i<=2 %前两点采用向前三点差分
        f(i)=abs(-3*v(i)+4*v(i+1)-v(i+2))/(2*(t(i+1)-t(i)));
    elseif i<=n1-2
        %采用中心差分公式
        f(i)=abs(-v(i+2)+8*v(i+1)-8*v(i-1)+v(i-2))/(12*(t(i+1)-t(i)));
    elseif i>=n1-1 %后两点采用向后三点差分
        f(i)=abs(3*v(i)-4*v(i-1)+v(i-2))/(2*(t(i)-t(i-1)));
    end
end
end
```

```
n2=21; %计算第二段
for i=n1+1:n2
    if i<=n1+2 %前两点采用向前差分
        
$$f(i)=\frac{\text{abs}(-3*v(i)+4*v(i+1)-v(i+2))}{2*(t(i+1)-t(i))};$$

    elseif i<=n2-2
        
$$f(i)=\frac{\text{abs}(-v(i+2)+8*v(i+1)-8*v(i-1)+v(i-2))}{12*(t(i+1)-t(i))};$$

    elseif i>=n2-1
        
$$f(i)=\frac{\text{abs}(3*v(i)-4*v(i-1)+v(i-2))}{2*(t(i)-t(i-1))};$$

    end
end
n3=25; %计算第三段
for i=n2+1:n3
    if i<=n2+2 %前两点采用向前差分
        
$$f(i)=\frac{\text{abs}(-3*v(i)+4*v(i+1)-v(i+2))}{2*(t(i+1)-t(i))};$$

    elseif i<=n3-2
        
$$f(i)=\frac{\text{abs}(-v(i+2)+8*v(i+1)-8*v(i-1)+v(i-2))}{12*(t(i+1)-t(i))};$$

    elseif i>=n3-1
        
$$f(i)=\frac{\text{abs}(3*v(i)-4*v(i-1)+v(i-2))}{2*(t(i)-t(i-1))};$$

    end
end
```

```
plot(t,f,'r*'); %画原始点图
tmin=min(t); tmax=max(t);
tt=tmin:0.1:tmax; %获得离散的时间点,用于作样条曲线
ff=spline(t,f,tt); %计算三次样条插值
hold on
plot(tt,ff,'b'); %画样条曲线
xlabel('时间(小时)');
ylabel('流量(加仑/小时)');
title('水塔流量图');
hold off
dt=0.05;
t2=0.5:dt:24.5; %获得离散的时间点,用于积分
nn=length(t2);
f2=spline(t,f,t2);
%计算24小时用水量,采用复化梯形公式
s=(f2(1)+f2(nn)+2*sum(f2(2:nn-1)))*dt/2 ;
fprintf('(全部积分法)1天总水流量s= %8.2f\n',s);
```

%第一次水塔增加的水

v10=v(11)-v(10);

dt1=t(11)-t(10);

%第一次充水其间流出的水

tp=t(10):dt:t(11);

nn=length(tp);

yp=spline(t,f,tp); %计算三次样条插值

v11=(yp(1)+yp(nn)+2*sum(yp(2:nn-1)))*dt/2;

v1=v10+v11;%第一次充水总量

p1=v1/dt1; %第一次充水的平均水流量

%第二次水塔增加的水

v20=v(22)-v(21);

dt2=t(22)-t(21);

%第二次充水其间流出的水

tp1=t(21):dt:t(22);

nn=length(tp1);

yp1=spline(t,f,tp1); %计算三次样条插值

v21=(yp1(1)+yp1(nn)+2*sum(yp1(2:nn-1)))*dt/2;

v2=v20+v21;%第二次充水总量

p2=v2/dt2; %第二次充水的平均水流量

p=(p1+p2)/2; %两次充水平均水流量

fprintf('两次充水平均水流量p= %8.2f\n',p);

%第一次充水前总流量

vv1=v(1)-v(10);

%两次充水间总流量

vv2=v(11)-v(21);

% t=83649到85968其间流量

vv3=v(22)-v(23);

%第一次充水期间流量

ta=t(10):dt:t(11);

%获得离散的时间点,用于积分

nn=length(ta);

fa=spline(t,f,ta);

s1=(fa(1)+fa(nn)+2*sum(fa(2:nn-1)))*dt/2;

%第二次充水期间流量

tb=t(21):dt:t(22); %获得离散的时间点,用于积分

nn=length(tb);

fb=spline(t,f,tb);

s2=(fb(1)+fb(nn)+2*sum(fb(2:nn-1)))*dt/2;

%t=85968到86400流量

tc=t(23):dt:24; %获得离散的时间点,用于积分

nn=length(tc);

fc=spline(t,f,tc);

s3=(fc(1)+fc(nn)+2*sum(fc(2:nn-1)))*dt/2 ;

ss=vv1+vv2+vv3+s1+s2+s3;

fprintf('(部分积分法)1天总水流量ss= %8.2f\n',ss);

err=abs((s-ss)/s);

fprintf('两种算法总量相对误差%6.2f%%\n',err*100);

程序计算结果为:

(全部积分法)1天总水流量 $s = 332986.22$
两次充水平均水流量 $p = 94507.48$

(部分积分法)1天总水流量 $ss = 331869.29$
两种算法总量相对误差 0.34%

谢 谢！