# 排队论模型-----基本模型与LINGO求解

排队论又称随机服务系统，它应用于一切服务系统，包括生产管理系统、通信系统、交通系统、计算机存储系统。现实生活中如排队买票、病人排队就诊、轮船进港、高速路上汽车排队通过收费站、机器等待修理等等都属于排队论问题。在历年数模竞赛中，排队论模型应用的全国数模竞赛中2009B的眼科病床的合理安排问题，美国数模竞赛中2005B收费站最佳配置问题，2017D机场安检问题。

本部分内容分为三部分：排队论基本构成与指标，排队论的四种重要模型，排队论的计算机模拟。

# 1 排队论基本构成与指标

## 1.排队论的基本构成

1) 输入过程。

输入过程是描述顾客是按照怎样的规律到达排队系统。包括

①顾客总体：顾客的来源是有限的还是无限的。

②到达的类型：顾客到达是单个到达还是成批到达。

③相继顾客到达的时间间隔：通常假定相互独立同分布，有的是等间隔到达，有的是服从负指数分布，有的是服从k阶Erlang分布。

2) 排队规则

排队规则指顾客按怎样的规定的次序接受服务。常见的有等待制，损失制，混合制，闭合制。

3) 服务机构

服务机构主要包括：服务台的数量；服务时间服从的分布。常见的有定长分布、负指数分布、几何分布等。

## 2. 排队系统的数量指标

(1)队长与等待队长

队长（记为$L_s$）是指系统中的平均顾客数（包括正在接受服务的顾客）。

等待队长（记为$L_q$）指系统中处于等待的顾客的数量。

队长等于等待队长加上正在服务的顾客数。

(2)等待时间

等待时间包括顾客的平均逗留时间（记为$W_s$）

平均等待时间（记为$W_q$）。

顾客的平均逗留时间是指顾客进入系统到离开系统这段时间

包括等待时间和接受服务的时间。

(3)忙期

从顾客到达空闲的系统，服务立即开始，直到再次变为空闲，这段时间是系统连续繁忙的时期，称之为系统的忙期。

服务强度=忙期/服务总时间=1–闲期/服务总时间

**3、排队论中的符号表示**

排队论中的记号是20世纪50年代初由D.G.Kendall引入的，由3~5个字母组成，形式为： A/B/C/n

A表示输入过程，B代表服务时间，C代表服务台数量，n表示系统容量。

(1) M/M/S/∞表示输入过程是Poisson流，服务时间服从负指数分布，系统有S个服务台平行服务，系统容量为无穷大的等待制排队系统。

(2) M/G/S/∞表示输入过程是Poisson流，服务时间服从一般概率分布，系统有S个服务台平行服务，系统容量为无穷大的等待制排队系统。

(3)D/M/S/K表示顾客相继到达时间间隔独立、服从定长分布，服务时间服从负指数分布,系统S个服务台平行服务,系统容量K个的混合制系统。

(4) M/M/S/S表示输入过程是Poisson流，服务时间服从负指数分布，系统有S个服务台平行服务，顾客到达后不等待的损失制系统。

(5)M/M/S/K/K表示输入过程是Poisson流，服务时间服从负指数分布，系统S个服务台平行服务,系统容量和顾客容量都为K个的闭合制系统。

# 2 排队论中四种重要模型

## 1. 等待制模型M/M/S/∞

该模型中顾客到达服从参数为$\lambda$的 Poisson 分布，

在$[0,t]$时间内到达的顾客数$X(t)$服从的的分布为：

$$P\{X(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k . e^{-\lambda t}}{k!}$$

其单位时间到达的顾客平均数为$\lambda$，$[0,t]$时间内到达的顾客平均数为$\lambda t$。

顾客接受服务的时间服从负指数分布，
单位时间服务的顾客平均数为$\mu$，服务时间的分布为：

$$f(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t} & t>0 \\ 0 & \end{cases}$$

每个顾客接受服务的平均时间为$\frac{1}{\mu}$。

下面分别给出S=1和S>1的一些主要结果。

## 1.1 只有一个服务台S=1情形

当系设稳定状态下系统有 $i$ 个顾客的概率为 $p_i(i=0,1,2,\cdots)$ 。

$p_0$ 表示系统空闲的概率。则 $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \quad p_i \geq 0, i=1,2,\cdots,K$

平衡方程为：

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} = (\lambda+\mu) P_k \end{cases} \qquad k=1,2,3,\ldots.$$

则系统没有顾客的概率为： $p_0 = 1-\rho = 1-\dfrac{\lambda}{\mu}$

计算出稳定状态下系统有 $n$ 个顾客的概率：

$$p_n = (1-\rho)\rho^n \qquad n = 0,1,2,3\cdots$$

其中 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ 称为系统的服务强度。

系统中顾客平均队长： $L_s=\sum_{n=0}^{\infty} n.p_n=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n.\rho^n=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

系统中顾客平均等待队长：

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1).p_n=(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}(n-1).\rho^n=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

系统中顾客平均逗留时间： $W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}$

系统中顾客平均等待时间： $W_q=\frac{1}{\mu-\lambda}-\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

容易得到： $L_s=\lambda W_s$ ， $L_q=\lambda W_q$

$W_s=\frac{L_s}{\lambda}$ ， $W_q=\frac{L_q}{\lambda}$

该公式称为Little公式。

在其它排队论模型中依然适用。

## 1.2 系统有多个服务台s>1情形

当系设稳定状态下系统有$i$个顾客的概率为$p_i(i=0,1,2,\cdots)$。

$p_0$表示系统空闲的概率。则$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \quad p_i \geq 0, i=1,2,\cdots,K$

平衡方程为:

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 \\ (k+1)\mu P_{k+1} + \lambda P_{k-1} = (\lambda + k\mu)P_k \quad 1 \leq k \leq s-1 \\ s\mu P_{k+1} + \lambda P_{k-1} = (\lambda + s\mu)P_k \quad k \geq s \end{cases}$$

系统中有 s 个服务台，系统服务能力为$s\mu$，服务强度为$\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$。

系统中顾客平均队长：$L_s = s\rho + \frac{(s\rho)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \cdot p_0$

其中 $p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}$，表示服务台都空闲的概率。

系统中顾客的逗留时间为： $W_s = \frac{L_s}{\lambda}$

系统中顾客的平均等待时间为： $W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$

系统中顾客的平均等待队长为： $L_q = \lambda W_q$

## 1.3 LINGO中的相关函数及相关参数计算公式

（1）顾客等待概率的公式：$P_{wait}$=@peb(load,S)

其中 S 为服务台服务台个数，load 为系统到达的载荷，即 $\text{load} = \frac{\lambda}{\mu}$。

（2）顾客的平均等待时间公式： $W_q = P_{wait} \frac{T}{S - \text{load}}$

其中 T 为顾客接受服务的平均时间，有 $T = \frac{1}{\mu}$。

（3）系统中顾客的平均逗留时间 $W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$

(4）系统中顾客的的平均队长 $L_s = \lambda W_s$

(5) 系统中顾客的的平均等待队长 $L_q = \lambda W_q$

问题1 某机关接待室只有1名对外接待人员，每天工作10小时，来访人员和接待时间都是随机的。设来访人员按照Poisson流到达，到达速率为$\lambda=8$人/小时，接待人员的服务速率为$\mu=9$人/小时，接待时间服从负指数分布。

（1）计算来访人员的平均等待时间，等候的平均人数。

（2）若到达速率增大为$\lambda=20$人/小时，每个接待人员的服务速率不变，为使来访问人员平均等待时间不超过半小时，最少应该配置几名接待人员。

解答：

（1）该问题属于M/M/1/∞排队模型

S=1，$\lambda=8$，$\mu=9$

需计算来访人员平均等待时间$W_q$

等候的平均人数$L_q$

LINGO程序为：

```
model:
lp=8;
u=9;
T=1/u;
load=lp/u;
S=1;
Pwait=@PEB(load,S);!等待概率;
W_q=Pwait*T/(S-load);!平均等待时间;
L_q=lp*W_q;!顾客的平均等待队长;
end
```

计算结果：

平均等待时间 $W_q = 0.89$ 小时=53分

等待队长 $L_q = 7.1$ 人

（2）该问题属于M/M/S/∞排队模型的优化问题。

求最小的S使，来访人员的平均等待时间 $W_q \le 0.5$

优化模型为：

$$\min S$$

$$s.t.\begin{cases} \mathrm{P_{wait}} = \mathrm{@peb(load,S)} \\ \mathrm{load} = \lambda / \mu \\ T = 1/\mu \\ \mathrm{W_q} = \mathrm{P_{wait}} \dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{S-load}} \\ L_q = \lambda W_q \\ W_q \le 0.5 \\ S \in N \end{cases}$$

实现的LINGO程序为：

```
model:
min=S;
lp=20;
u=9;  !服务率;
T=1/u;
load=lp/u;
Pwait=@PEB(load,S);!接待人员的等待概率;
W_q=Pwait*T/(S-load);!平均等待时间;
W_q<=0.5;
L_q=lp*W_q;!顾客的平均等待队长;
TT=W_q*60;
!S>=3；
@gin(S);
end
```

计算结果：

最少需要接待人员S=3人

来访人员等待概率为0.55

平均等待时间为$W_q$=4.7分钟

平均等待队长为$L_q=1.58$人

## 2. 损失制模型M/M/S/S

M/M/S/S模型表示顾客到达人数服从Poisson分布，单位时间到达率为$\lambda$，服务台服务时间服从负指数分布，单位时间服务平均人数为$\mu$。当S个服务台被占用后，顾客自动离开，不再等待。

我们给出LINGO中的有关函数及相关参数的计算公式

(1) 系统损失概率　　$P_{lost}$=@pel(load,S)

其中 S 为服务台个数，load 为系统到达的载荷，即 $load = \dfrac{\lambda}{\mu}$。

(2) 单位时间内进入系统平均顾客数　　$\lambda_e = \lambda(1 - P_{lost})$

(3)系统中顾客的平均队长(系统在单位时间内占用服务台比值)　　$L_s = \dfrac{\lambda_e}{\mu}$

(4) 系统中顾客的平均逗留时间(服务时间) $W_s = \frac{1}{\mu} = T$

(5)系统服务台的效率 $\eta = \frac{L_s}{s}$

在损失制排队模型中，顾客平均等待时间 $W_q = 0$，

平均等待队长 $L_q = 0$，因为没有顾客等待。

问题2 某单位电话交换台有一部300门内线电话的总机，已知上班时间有30%的内线分机平均每30分钟要一次外线电话，70%的分机每隔70分钟时要一次外线电话。又知从外单位打来的电话的呼唤率平均30秒一次，设与外线的平均通话时间为3分钟，以上时间都服从负指数分布。如果要求外线电话接通率为95%以上，问电话交换台应设置多少外线？

解： 电话交换台服务分为两部分，

一类是内线打外线，一类是外线打内线。

内线打外线的服务强度（每小时通话平均次数）（到达率）

$$\lambda_1 = (\frac{60}{30} \times 30\% + \frac{60}{70} \times 70\%) \times 300 = 1.2 \times 300 = 360$$

外线打内线的服务强度(到达率) $\lambda_2 = \frac{60}{0.5} = 120$

总强度为$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 360 + 120 = 480$

电话平均服务时间为$T = \frac{3}{60} = 0.05$ 小时，服务率 $\mu = \frac{60}{3} = 20$个

对该问题，目标求最小电话交换台数S，使顾客(外线电话)损失率不超过5%，即

$$P_{lost} \le 5\%$$

建立的优化模型为：

$$\min S$$

$$s.t.\begin{cases} \mathrm{P_{lost}} = \text{@pel(load,S)} \\ \mathrm{load} = \dfrac{\lambda}{\mu} \\ \mathrm{P_{lost}} \le 0.05 \\ \lambda_e = \lambda(1 - \mathrm{P_{lost}}) \\ L_s = \lambda / \mu \\ \eta = L_s / S \\ S \in N \end{cases}$$

LINGO程序为：

```
model:
min=S;
lp=480;!每小时平均到达电话数;
u=20;  !服务率;
load=lp/u;
Plost=@PEL(load,S);!损失率;
Plost<=0.05;
lpe=lp*(1-Plost);
L_s=lpe/u;!顾客的平均队长;
eta=L_s/S; !系统服务台的效率;
@gin(S);
end
```

计算结果为：

最小的电话交换台为S=30

电话损失率为$P_{lost}$=0.04

实际进入系统的电话平均为$\lambda_e = 460.7$

平均队长$L_s = 23.037$

系统服务台的效率$\eta = 0.768$

## 3.混合制模型M/M/S/K

混合制模型M/M/S/K，表示顾客到达人数服从Poisson分布，单位时间到达率为 $\lambda$，服务台服务时间服从负指数分布,单位时间服务平均人数为 $\mu$ ，系统有S个服务台，系统对顾客的容量为K。当K个位置被顾客占用时，新到的顾客自动离去。当系统中有空位置时，新到的顾客进入系统排队等候

对混合制模型，LINGO没有相关函数计算参数。需要自己编程计算。

（1）混合制模型基本公式：

设稳定状态下系统有 $i$ 个顾客的概率为 $p_i(i=0,1,2,\cdots,K)$ 。

$p_0$ 表示系统空闲的概率。因此： $\sum_{i=0}^{K} p_i = 1 \quad p_i \geq 0, i=1,2,\cdots,K$

设 $\lambda_i$ 表示系统中有 $i$ 个顾客时的输入强度, $\mu_i(i=0,1,2,\cdots,K)$ 表示系统中

有 $i$ 个顾客时的服务强度。在稳定状态下，可建立平衡方程：

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \\ \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1 \\ \lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu_{i+1} p_{i+1} = (\lambda_i + \mu_i) p_i \qquad (i = 2, \cdots, K-1) \\ \lambda_{K-1} p_{K-1} = \mu_K . p_K \end{cases}$$

对于混合制系统M/M/S/K，有：

$$\lambda_i = \lambda \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, K)$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & i \le S \\ S\mu & i > S \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, K)$$

(2) 混合制模型基本参数计算

当系统有K个人,到达顾客流失,则系统损失概率：

$$P_{lost} = P_K$$

单位时间进入系统平均顾客数

$$\lambda_e = \lambda(1 - \mathrm{P}_{\mathrm{lost}}) = \lambda(1 - \mathrm{P}_{\mathrm{K}})$$

系统中顾客的平均队长 $L_s = \sum_{i=0}^{K} i.p_i$

系统中顾客的平均等待队长 $L_q = \sum_{i=S}^{K} (i-S).p_i = L_s - \frac{\lambda_e}{\mu}$

系统中顾客的平均逗留时间 $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$

系统中顾客的平均等待时间 $W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = W_s - T$

问题3  某理发店有4名理发师，因场地所限，店里做多容纳12名顾客，假设来理发的顾客按Poisson分布到达，平均到达率为18人/小时，理发时间服从负指数分布，平均每人12分钟。求该系统的各项指标。

解：该模型是M/M/4/12混合制模型。

S=4   K=12   $\lambda = 18$   $\mu = 60/12 = 5$

该程序的编制可采用LINGO实现。程序为：

```
!混合制排队论模型;
model:
sets:
state/1..12/:P;
endsets
lp=18;!顾客到达率;
u=5; !服务率;
S=4; !服务员人数;
K=12; !系统容量;
P0+@sum(state(i):P(i))=1; !概率和;
u*P(1)=lp*P0; !平衡点0;
lp*P0+2*u*P(2)=(lp+u)*P(1); !平衡点1;
@for(state(i)|i#GT#1#and#i#LT#S:lp*P(i-1)+(i+1)*u*P(i+1)=(lp+i*u)*P(i));
 !平衡点i[2,S-1];
```

```
@for(state(i)|i#GE#S#and#i#LT#K:lp*P(i-1)+S*u*P(i+1)=(lp+S*u)*P(i));
!平衡点i[S,K-1];
lp*P(K-1)=S*u*P(K); !平衡点K;
Plost=P(K);  !损失率;
lpe=lp*(1-P(K)); !实际到达率;
L_s=@sum(state(i):i*P(i));!平均队长;
L_q=L_s-lpe/u;  !平均等待队长;
W_s=L_s/lpe; !平均逗留时间;
W_q=L_q/lpe; !平均等待时间;
end
```

结果：

理发师空闲率为 P0=0.16，损失顾客率 0.049。

每小时实际进入理发店人数为 $\lambda_e$=17.12 人，平均队长 $L_s$=5.72 人。

平均等待队长 $L_q$=2.3 人，平均逗留时间 $W_s$=0.334 小时，平均等待时间 $W_q$=0.134 小时。

## 4.闭合制模型M/M/S/K/K

M/M/S/K模型表示系统有S个服务台，顾客到达人数服从Poisson分布，单位时间到达率为$\lambda$，服务台服务时间服从负指数分布，单位时间服务平均人数为 $\mu$ 。系统容量和潜在的顾客数都为K。

基本参数计算：

（1）平均队长(LINGO 计算公式)　$L_s$=@pfs(load,S,K)

其中 S 为服务台服务台个数，load 为系统到达的载荷，这里 $\mathrm{load} = K.\dfrac{\lambda}{\mu}$

(2) 单位时间平均进入系统的顾客数　$\lambda_e = \lambda(K - L_s)$

(3) 顾客处于正常情况的概率　$P = \dfrac{K - L_s}{K}$

(4) 系统中顾客的平均等待队长$L_q$，平均逗留时间$W_s$，平均等待时间$W_q$为：

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_e}{\mu} \qquad W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}$$

（5）每个服务台的工作强度

$$\mathrm{P_{work}} = \frac{\lambda_e}{S\mu}$$

问题4 现有某工厂有30台自动车床，由4名工人负责维修管理。当机床需要加料、发生故障或刀具磨损时就自动停车，等待工人照管。设平均每台机床两次停车时间间隔为1小时，停车时需要工人照管的平均时间为5分钟，并服从负指数分布。求该排队系统的各项指标。

解：该排队系统是闭合制排队模型 M/M/4/30/30。

参数 S=4，K=30，$\lambda=1$，$T=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$，$\mu=12$。

根据上面公式可计算出各项指标。

计算结果：

实际进入系统的机器平均为$\lambda_e=27.5$，平均队长$L_s=2.5$，平均等待队长$L_q=0.24$，平均逗留时间$W_s=0.09$，平均等待时间$W_q=0.087$，机器工作概率$\mathrm{Prob}=0.92$，维修工人的工作强度$\mathrm{P}_{\mathrm{work}}=0.57$。

LINGO程序为：

```
model:
lp=1;!每小时故障到达数;
u=12;  !服务率;
K=30;  !机器数;
S=4;   !维修工人数;
load=K*lp/u;
L_s=@pfs(load,S,K);!等待队长;
lpe=lp*(K-L_s); !进入维修的平均机器数;
Prob=(K-L_s)/K; !机器工作概率;
L_q=L_s-lpe/u;  !平均等待队长;
W_q=L_q/lpe;  !平均等待时间;
W_s=L_s/lpe;  !平均逗留时间;
Pwork=lpe/(S*u); !维修工人的工作强度;
end
```

问题5 某修理厂为设备检修服务。已知检验的设备（顾客）到达服从Poisson分布，每天到达率 $\lambda=42$ 台，当需要等待时，每台造成的损失为400元。服务(检修)时间服从负指数分布,平均每天服务率 $\mu=20$ 台。每设置一个检修人员每天的服务成本为160元。问设立几个检修人员才能使平均总费用最小？

解：该排队系统为 M/M/S/∞系统。

系统参数中 $\lambda=42$，$\mu=20$。

设 $S$ 为维修人员数，$L_s$ 为平均队长。

优化模型为：

$$\min z=160S+400L_s$$

$$s.t.\begin{cases} P_{wait}=\text{@peb(load,S)} \\ \text{load}=\dfrac{\lambda}{\mu} \\ W_q=P_{wait}\dfrac{T}{S-load} \\ L_q=\lambda W_q \\ L_s=L_q+\dfrac{\lambda}{\mu} \\ S\in N \end{cases}$$

实现的LINGO程序为：

```
model:
min=160*S+400*L_s;
lp=42;!每天到达顾客数;
u=20;  !每天服务人数;
load=lp/u;!载荷;
T=1/u;
Pwait=@PEB(load,S);!顾客的等待概率;
W_q=Pwait*T/(S-load);!平均等待时间;
L_q=lp*W_q;!顾客的平均等待队长;
L_s=L_q+lp/u; !平均队长;
s>=2;
@gin(S);
end
```

**注：**

**程序中加上s>=2是为了便于LINGO求解**
**当s=1时，s-load<0,不符合要求.**
**实际中也需要满足s>=2，故加上该条件**

**计算结果为：**

最小平均费用为1568.17元。

最优人员数S=4，平均队长L_s=2.32

谢 谢！