循环比赛排名模型

问题：若干支球队参加单循环比赛，各队两两交锋。假设每场比赛只计胜负，不计比分，在比赛结束后如何排名？

下面对只进行一次比赛的情况进行讨论

1.双向连通竞赛图：对于任何一对顶点，存在两条有向路径，使两顶点可以互相连通，这种有向图称为双向连通竞赛图。

如图1是4个队比赛结果的双向连通竞赛图。其对应的邻接矩阵A见右。

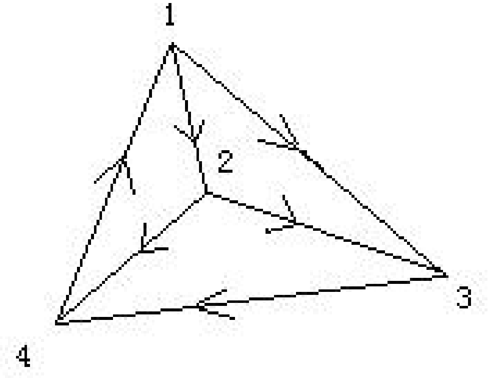

图1

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

设 $s_0=(1,1,1,1)^\tau$，则 $s_1=A.s_0=(2,2,1,1)$。表明每人胜的场次数。

$s_2=As_1=(3,2,1,2)$。表明每人的 2 级得分，其意义是他战胜的各个球队的得分之和。

继续进行下去，得到结果如下：

$s_3=As_2=(3,3,2,3)$，$s_4=As_3=(5,5,3,3)$，$s_5=As_4=(8,6,3,5)$

$s_6=As_5=(9,8,5,8)$ $s_7=As_6=(13,13,8,9)$ $s_8=As_7=(21,17,9,13)$

s_k 各分量代表各人的第 k 级得分，其意义是他战胜的各个球队的前一级得分之和。

得出其排名为：1->2->4->3。

对一般性，记 $s_1=A.s_0$，$s_2=A.s_1,\cdots,s_k=A.s_{k-1}$。则有：

$$s_k=A.s_{k-1}=A^k.s_0\ (k=1,2,\cdots) \tag{1}$$

当迭代次数越多，名次排定顺序越稳定。
可将其较高级的得分作为排名的依据。
对其它双向连通竞赛图也可以采用类似方法迭代计算得到。

问题：是否双向连通竞赛图都一定可以按照(1)式的方法排出确定的名次，另外是否还有更简单的方法？

为了回答这个问题，我们先给出素阵的定义：
素阵：对于$n(n \geq 4)$个顶点的双向连通竞赛图的邻接矩阵A，一定存在正整数r，使得$A^r > 0$，这样的A就称为素阵。

Perron—Frobenius 定理：

素阵A的最大特征根为正单根λ，λ对应正特征向量s，且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k.s_0}{\lambda^k}=s \qquad (2)$$

(2)式说明k级得分向量s_k，当$k\to\infty$时将趋向于A的最大特征根的特征向量s。

因此特征向量s可作为排名次依据的得分向量。

求出前面求矩阵A的最大特征值及特征向量：

$\lambda_{\max}=1.3953$，对应特征向量为$(0.6256,0.5516,0.3213,0.4484)$

2. 非双向连通竞赛图

对于非双向连通竞赛图，则没有此结论，如

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

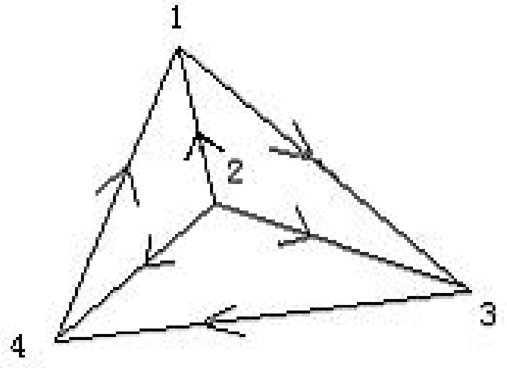

图2

计算得到：

$$s_1 = A.s_0 = (1,3,1,1) \qquad s_2 = A.s_1 = (1,3,1,1) \qquad s_3 = A.s_2 = (1,3,1,1)$$

其最大特征值对应特征向量为(0.2887, 0.8660,0.2887,0.2887)。
从结果看无法对1,3,4进行排名。

3. 实际问题处理：

设 n 支球队比赛，第 i 支球队与第 j 支球队胜率为：

$$a_{ij}=p_{ij},a_{ji}=1-p_{ij},(i=1,2,\cdots,n-1;j=i+1),$$

其中 p_{ij} 表示第 i 支球队胜第 j 支球队的概率。且设 $a_{ii}=0$ 。

则第 i 支球队胜其余 $n-1$ 支球队的能力为：

$$s_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

各球队的排名根据 $\{s_i\}$ 的大小。s_i 越大越靠前，越小越靠后。

但实际中 p_{ij} 根据比赛进行估计。

(1) 当进行 m 次比赛，第 i 支球队胜 l 次，则估计 $p_{ij}=\dfrac{l}{m}$， $p_{ji}=\dfrac{m-l}{m}$

(2) 当只进行一次比赛时，若第 i 支球队胜，则记 $a_{ij}=1$， $a_{ji}=0$；

若第 j 支球队胜，则记 $a_{ij}=0$， $a_{ji}=1$。

实例 乒乓球循环比赛排名问题

2007年5月23到27日，第49届世界乒乓球单项锦标赛在萨格勒布进行。国家乒乓球球队在世乒赛等重大国际比赛前,往往进行队内大循环比赛，然后选出前几名队员直通。其中男单选拔规则如下：

中国乒乓球男队的比赛共16人参加，比赛采用11分制，每场为5局3胜。

根据规定，两次队内选拔赛积分相加获得前三名的运动员将获得参加第49届世乒赛男子单打比赛的资格，获得四至六名的运动员将获得第49届世乒赛的参赛资格.下面的表1和表2分别是两次大循环相互的比赛成绩，表格中1表示横向运动员赢了纵向运动员，反之则为0。请根据该成绩对所有对员进行排名。

表 1　第一阶段循环比赛成绩

第一轮	郝帅	马琳	张超	王励勤	王皓	马龙	陈玘	雷振华	李平	单明杰	张继科	邱贻可	王建军	许昕	李虎	侯英超
郝帅	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
马琳	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
张超	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
王励勤	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
王皓	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
马龙	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
陈玘	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
雷振华	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
李平	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
单明杰	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
张继科	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
邱贻可	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
王建军	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
许昕	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
李虎	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
侯英超	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0

表 2　第二阶段循环比赛成绩

第二轮	郝帅	马琳	张超	王励勤	王皓	马龙	陈玘	雷振华	李平	周斌	张继科	邱贻可	王建军	许昕	李虎	侯英超
郝帅	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
马琳	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
张超	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
王励勤	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
王皓	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
马龙	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
陈玘	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
雷振华	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
李平	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
周斌	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
张继科	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
邱贻可	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
王建军	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
许昕	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
李虎	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
侯英超	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

其中第二轮周斌顶替第一轮因伤不能参加的单明杰，其第一轮的成绩按单明杰的算，因此这两人的成绩当周斌的计算。

求解：

由第一阶段循环比赛成绩可得到邻接矩阵 A_1，其中 $a1_{ij}=1$ 表示 i 胜 j，

$a1_{ij}=0$ 表示 i 输给 j。

第二阶段循环比赛得到邻接矩阵 A_2，其中 $a2_{ij}=1$ 表示 i 胜 j，

$a2_{ij}=0$ 表示 i 输给 j。

两次循环比赛得到综合矩阵 A，其中 $a_{ij}=(a1_{ij}+a2_{ij})/2$。

这样综合矩阵 A 各元素取值为 0 或 0.5 或 1，表示胜率。

是 0-1 邻接矩阵的扩展。

最后得到的综合矩阵 A 见表 3。

表 3　综合矩阵 A

第二轮	郝帅	马琳	张超	王励勤	王皓	马龙	陈玘	雷振华	李平	周斌	张继科	邱贻可	王建军	许昕	李虎	侯英超
郝帅	0	0.5	1	0.5	0.5	1	1	0.5	1	1	0.5	0.5	1	0.5	1	1
马琳	0.5	0	1	1	0.5	0.5	1	1	0	0.5	0.5	0.5	1	1	1	1
张超	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	1	0.5	0.5	0.5	1	1	0.5	1
王励勤	0.5	0	1	0	1	0.5	0.5	1	1	0.5	1	0.5	1	0.5	1	1
王皓	0.5	0.5	1	0	0	0.5	0.5	1	0.5	0.5	0.5	1	1	1	1	1
马龙	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	1	0.5	1	1	1	1	0.5	1	1	1
陈玘	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1	0.5	1	0.5
雷振华	0.5	0	0.5	0	0	0.5	0.5	0	0.5	1	0.5	0	0.5	1	1	1
李平	0	1	0	0	0.5	0	0.5	0.5	0	1	0.5	1	1	0.5	1	1
周斌	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.5	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0.5	0.5
张继科	0.5	0.5	0.5	0	0.5	0	0.5	0.5	0.5	1	0	1	0.5	0	0	0.5
邱贻可	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0.5	1	0	0.5	0	0	1	1	1	0
王建军	0	0	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5
许昕	0.5	0	0	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.5	1	0	0.5	0	0.5	1
李虎	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0	0.5	0.5	0	0.5
侯英超	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0.5	0.5	1	0.5	0	0.5	0

求得矩阵A的最大特征值为6.38，对应的归一化的特征向量为:

w=(0.101322,0.095904,0.060594,0.095582,0.087542,0.093150,0.050794,0.058527,0.067374,0.046691,0.061483,0.059527,0.024322,0.045926,0.025564,0.025698)

计算每人的10级得分,其归一化后向量与特征向量w相同。

因此w可作为排名的依据。得到结果见表4。

表 4　选拔赛两轮比赛综合排名

运动员	归一化特征向量	综合排名	运动员	归一化特征向量	综合排名
郝帅	0.101322	1	邱贻可	0.059527	9
马琳	0.095904	2	雷振华	0.058527	10
王励勤	0.095582	3	陈玘	0.050794	11
马龙	0.093150	4	周斌	0.046691	12
王皓	0.087542	5	许昕	0.045926	13
李平	0.067374	6	侯英超	0.025698	14
张继科	0.061483	7	李虎	0.025564	15
张超	0.060594	8	王建军	0.024322	16

```
A1=[0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1;
1,0,1,1,0,1,1,1,0,1,0,0,1,1,1,1;
0,0,0,0,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1;
1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,1,1,1,0,1,1;
0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,1,1,1;
0,0,0,1,0,0,1,0,1,1,1,1,0,1,1,1;
0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0;
0,0,1,0,0,1,1,0,1,1,0,0,1,1,1,1;
0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,1;
0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1;
0,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,0,1;
0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,0;
0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,1;
0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0;
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0];
```

```
A2=[0,1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,1,0,1,1;
0,0,1,1,1,0,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1;
0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,0,1;
0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1;
1,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1;
0,1,1,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1;
0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0,1,1;
1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,1;
0,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,1,1,1;
0,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0;
1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,0,0,0;
1,0,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1,0;
0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0;
1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1;
0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,1;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0];
```

```
[m,n]=size(A1);
res=sum(A1')+sum(A2');
  fprintf('序号  两轮总积分\n');
for i=1:n
  fprintf('%2d   %4d\n',i,res(i));
end
A=(A1+A2)/2;
res2=sum(A');
num=10;
Y=ones(n,1);
for i=1:num
  Y=A*Y;
end
Y=Y/sum(Y); %归一化计算
```

```
[u,v]=eig(A);
for i=1:n
  z(i)=v(i,i);
end
[p,k]=max(z);
%获得最大特征值及位置
w=u(:,k);
%获得最大特征值对应特征向量
w=w/sum(w);
fprintf('序号     得分   特征向量\n');
for k=1:n
fprintf('%2d    %-8.6f   %-8.6f\n',k,Y(k),w(k));
end
```

输出结果

序号	两轮总积分
1	23
2	22
3	16
4	22
5	21
6	22
7	13
8	15
9	17
10	11
11	13
12	14
13	6
14	11
15	7
16	7

序号	得分	特征向量
1	0.101322	0.101322
2	0.095904	0.095904
3	0.060594	0.060594
4	0.095582	0.095582
5	0.087542	0.087542
6	0.093150	0.093150
7	0.050794	0.050794
8	0.058527	0.058527
9	0.067374	0.067374
10	0.046691	0.046691
11	0.061483	0.061483
12	0.059527	0.059527
13	0.024322	0.024322
14	0.045926	0.045926
15	0.025564	0.025564
16	0.025698	0.025698

谢 谢！