第 8 讲　常微分方程模型

司守奎
烟台市，海军航空大学
Email：sishoukui@163.com

8.1 求解常微分方程(组)的符号解（解析解）

在 MATLAB 中，符号运算工具箱提供了功能强大的求常微分方程符号解命令 dsolve。

8.1.1　老版本 MATLAB 中 dsolve 函数的使用

在老版本 MATLAB 中，用符号 D 表示对变量的求导，如 Dy 表示对变量 y 求一阶导数，当需要求变量的 n 阶导数时，用 Dn 表示，D4y 表示对变量 y 求 4 阶导数。

例 8.1　求解二阶线性微分方程 $y''-2y'+y=e^x$，$y(0)=1$，$y'(0)=-1$。

```
clc,clear
y=dsolve('D2y-2*Dy+y=exp(x)','y(0)=1,Dy(0)=-1','x')
pretty(y) %书写习惯的显示方式
```

得到二阶微分方程解析解 $y=e^x+\dfrac{x^2e^x}{2}-2xe^x$。

注：dsolve 命令中默认的函数自变量为 t，如果函数的自变量为 x，必须指明。

例 8.2　求常微分方程组 $\begin{cases} y'=3y+4z, \\ z'=-4y+3z. \end{cases}$ 的通解。

解：MATLAB 程序如下

```
clc, clear
[y,z]=dsolve('Dy=3*y+4*z','Dz=-4*y+3*z');
pretty(y), pretty(z)
```

得到方程组的通解如下

$$\begin{cases} y=C_1\cos(4\,\mathrm{t})\,\mathrm{e}^{3t}+C_2\sin(4t)e^{3t}, \\ z=C_2\cos(4t)\,\mathrm{e}^{3t}-C_1\sin(4t)e^{3t}. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 是常数。

例 8.3　求解微分方程 $y'=-2y+2x^2+2x$，$y(0)=1$。

```
clc, clear
y=dsolve('Dy=-2*y+2*x^2+2*x','y(0)=1','x')
```

求得的符号解为 $y=e^{-2x}+x^2$.

8.1.2　新版本 MATLAB 中 dsolve 函数的使用

新版本 MATLAB 中使用函数 diff 求符号导数。

例 8.4（续例 8.1）求解二阶线性微分方程 $y''-2y'+y=e^x$，$y(0)=1$，$y'(0)=-1$。

```
clc, clear, syms y(x)    %定义符号函数 y，自变量为 x
dy=diff(y);   %定义 y 的一阶导数，目的是下面赋初值
y=dsolve(diff(y,2)-2*diff(y)+y==exp(x),y(0)==1,dy(0)==-1)
```

例 8.5（续例 8.2）求常微分方程组 $\begin{cases} y'=3y+4z, \\ z'=-4y+3z. \end{cases}$ 的通解。

```
clc, clear, syms y(x) z(x)
s=dsolve(diff(y)==3*y+4*z,diff(z)==-4*y+3*z)
y=s.y, z=s.z
```

例 8.6（续例 8.3） 求解微分方程 $y' = -2y + 2x^2 + 2x$， $y(0) = 1$。

```
clc, clear, syms y(x)
y=dsolve(diff(y)==-2*y+2*x^2+2*x,y(0)==1)
```

例 8.7 已知输入信号为 $u(t) = e^{-t}\cos(t)$，试求下面微分方程的解。

$$y^{(4)}(t) + 10y^{(3)}(t) + 35y''(t) + 50y'(t) + 24y(t) = u''(t).$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 1.$$

```
clc, clear, syms y(t)
dy=diff(y); d2y=diff(y,2); d3y=diff(y,3); %定义 y 的前 3 阶导数，是为了赋初值
u=exp(-t)*cos(t);
y=dsolve(diff(y,4)+10*diff(y,3)+35*diff(y,2)+50*diff(y)+24*y==diff(u,2),y(0)==0,dy(0)==-1,d2y(0)==1,d3y(0)==1)
y=simplify(y)
fprintf('以书写习惯显示的解为：\n'), pretty(y)
```

求得的解为 $y = \dfrac{70e^{-t} - 135e^{-2t} + 84e^{-3t} + 6e^{-t}\sin t - 19e^{-4t}}{30}$.

8.1.3 求线性微分方程组的符号解

例 8.8 试求解下列 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = [1,1,1]^T. \end{cases}$$

的解，其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$， $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

```
clc, clear, syms x1(t) x2(t) x3(t)
x=[x1;x2;x3]; A=[3 -1 1;2 0 -1;1 -1 2];
x0=ones(3,1); %初值条件
x=dsolve(diff(x)==A*x,x(0)==x0)
s=[x.x1; x.x2; x.x3]   %以向量的形式显示解
pretty(s)
```

求得的解为 $x(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

8.2 拉氏变换求常微分方程（组）的符号解

例 8.9 利用拉氏变换解初值问题

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 4te^t;$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0.$$

解 设 $L(y(t)) = Y(s)$，利用初值条件，对微分方程两边取拉氏变换变换得

$$s^4Y(s)+2s^2Y(s)+Y(s)=\frac{4}{(s-1)^2},$$

解之得

$$Y(s)=\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{2}{s-1}+\frac{2s}{(s^2+1)^2}+\frac{2s+1}{s^2+1}.$$

两边取拉氏逆变换，得

$$y(t)=(t-2)e^t+(t-1)\sin t+2\cos t.$$

计算的MATLAB程序如下

```
clc, clear
syms y(t) s YS
d4y=diff(y,4); d3y=diff(y,3); d2y=diff(y,2); dy=diff(y);
eq=d4y+2*d2y+y-4*t*exp(t); %定义微分方程
LY=laplace(eq,t,s) %做拉氏变换
LY=subs(LY,{y(0),dy(0),d2y(0),d3y(0)},{0,0,0,0}) %代入初值条件
LY=subs(LY,laplace(y(t), t, s),YS) %把laplace(y(t), t, s)替换成YS
YS=solve(LY,YS) %求拉氏变换的像函数
y=ilaplace(YS) %求拉氏逆变换
```

例 8.10 解方程组

$$\begin{cases}2x''=-6x+2y,\\ y''=2x-2y+40\sin 3t.\end{cases}$$

初值条件为

$$x(0)=x'(0)=y(0)=y'(0)=0.$$

并画出解曲线 $x(t),y(t)$。

解 记 $X(s)=L(x(t))$，$Y(s)=L(y(t))$，利用初值条件，对微分方程组两边取拉氏变换得

$$\begin{cases}2s^2X(s)=-6X(s)+2Y(s),\\ s^2Y(s)=2X(s)-2Y(s)+\dfrac{120}{s^2+9}.\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}X(s)=\dfrac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}=\dfrac{5}{s^2+1}+\dfrac{8}{s^2+4}+\dfrac{3}{s^2+9},\\ Y(s)=\dfrac{120(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}=\dfrac{10}{s^2+1}+\dfrac{8}{s^2+4}-\dfrac{18}{s^2+9}.\end{cases}$$

取拉氏逆变换得

$$\begin{cases}x(t)=5\sin t-4\sin 2t+\sin 3t,\\ y(t)=10\sin t+4\sin 2t-6\sin 3t.\end{cases}$$

解曲线 $x(t),y(t)$ 的图形见图8.1。

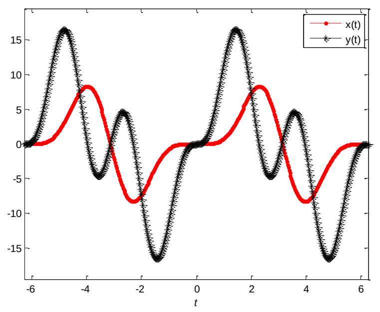

图 8.1　$x(t)$ 和 $y(t)$ 的解曲线

计算及画图的MATLAB程序如下

```
clc, clear
syms x(t) y(t) s XS YS
d2x=diff(x,2); dx=diff(x);
d2y=diff(y,2); dy=diff(y);
eq1=2*d2x+6*x-2*y; eq2=d2y-2*x+2*y-40*sin(3*t);
L1=laplace(eq1,t,s), L2=laplace(eq2,t,s)
L1=subs(L1,{x(0),dx(0)},{0,0})
L1=subs(L1,{laplace(x(t), t, s),laplace(y(t), t, s)},{XS,YS})
L2=subs(L2,{y(0),dy(0)},{0,0})
L2=subs(L2,{laplace(x(t), t, s),laplace(y(t), t, s)},{XS,YS})
[XS,YS]=solve(L1,L2,XS,YS)
x=ilaplace(XS,s,t)
y=ilaplace(YS,s,t)
h1=ezplot(x), hold on, h2=ezplot(y), title(''), xlabel('\itt')
set(h1,'Marker','.','Color','r'), set(h2,'Marker','*','Color','k')
legend('x(t)','y(t)')
```

8.3　求一阶常微分方程（组）数值解

MATLAB 的工具箱提供了几个求常微分方程数值解的功能函数，如 ode45，ode23，ode113，其中 ode45 采用四五阶龙格库塔方法（以下简称 RK 方法），是解非刚性常微分方程的首选方法，ode23 采用二三阶 RK 方法，ode113 采用的是多步法，效率一般比 ode45 高。

对一阶方程（组）的初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其中 y 和 $f(x,y)$ 可以为向量函数。

MATLAB求数值解函数的调用形式是

[t,y]=solver(odefun, tspan，y0)

这里 solver 为 ode45，ode23，ode113，输入参数 odefun 是用 M 文件定义的微分方程 $y' = f(x,y)$ 右端的函数 $f(x,y)$。tspan=[x0,tfinal]是求解区间，y0 是初值。

注意函数 solver(odefun, tspan，y0)也可以返回一个值，返回一个值时，返回的是结构数组，利用 MATLAB 命令 deval 和返回的结构数组，可以计算我们感兴趣的任意点的函数值。

例 8.11（续例 8. 3）　求微分方程

$$\begin{cases} y' = -2y + 2x^2 + 2x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

在 $0 \le x \le 0.5$ 时的数值解。

```
clc, clear
yx=@(x,y)-2*y+2*x^2+2*x; %定义微分方程右端项的匿名函数
```

```
[x,y]=ode45(yx,[0,0.5],1)   %第一种返回格式
sol=ode45(yx,[0,0.5],1)   %第二种返回格式
y2=deval(sol,x)   %计算自变量 x 对应的函数值，这里 y2 为行向量
check=[y,y2']   %比较两种返回值的结果是一样的，但一个是列向量，一个是行向量
```

例 8.12　求下面微分方程组的数值解。

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\sin(y(t)) + x(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = \cos(x(t)) + 2y(t), & y(0) = 2. \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$$

```
clc, clear
dz=@(t,z)[z(1)*sin(z(2))+z(1); cos(z(1))+2*z(2)]; %这里 z(1)=x,z(2)=y
[t,z]=ode45(dz,[0,1],[1,2])
plot(t,z(:,1),'-*'), hold on, plot(t,z(:,2),'-P')
legend('x(t)的数值解','y(t)的数值解','Location','best')
```

例 8.13　Lorenz 模型的混沌效应

Lorenz 模型是由美国气象学家 Lorenz 在研究大气运动时，通过对对流模型简化，只保留 3 个变量提出的一个完全确定性的三阶自治常微分方程组（不显含时间变量），其方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z. \end{cases}$$

其中三个参数σ为 Prandtl 数，ρ为 Rayleigh 数，β为方向比。Lorenz 模型如今已经成为混沌领域的经典模型，第一个混沌吸引子——Lorenz 吸引子也是在这个系统中被发现的。系统中三个参数的选择对系统会不会进入混沌状态起着重要的作用。图 8.2 给出了 Lorenz 模型在$\sigma = 10$，$\rho = 28$，$\beta = 8/3$时系统的三维演化轨迹。由图 8.2 可见，经过长时间运行后，系统只在三维空间的一个有限区域内运动，即在三维相空间里的测度为零。图 8.2 显示出我们经常听到的“蝴蝶效应”。图 8.3 给出了系统从两个靠的很近的初值出发（相差仅 0.00001）后，$x(t)$的偏差演化曲线。随着时间的增大，可以看到原本靠得很近的轨道迅速地分开，最后两条轨道变得毫无关联，这正是动力学系统对初值敏感性的直观表现，由此可断定此系统的这种状态为混沌态。混沌运动是确定性系统中存在随机性，它的运动轨道对初始条件极端敏感。

画图的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear
sigma=10; rho=28; beta=8/3;
g=@(t,f)[sigma*(f(2)-f(1)); rho*f(1)-f(2)-f(1)*f(3); f(1)*f(2)-beta*f(3)]; %定义微分方程组的右端项
xyz0=rand(3,1); %初始值
[t,xyz]=ode45(g,[0,100],xyz0); %求数值解
plot3(xyz(:,1),xyz(:,2),xyz(:,3)) %画图 9-2
xlabel('\it x(t)'), ylabel('\it y(t)'), zlabel('\it z(t)','rotation',0)
box on %加盒子线，以突出立体感
so=ode45(g,[0,100],xyz0+0.00001) %初值变化后，再求数值解
xyz2=deval(so,t); %计算对应的 x,y,z 的值
figure(2), plot(t,xyz(:,1)-xyz2(1,:)','.-') %画图 9-3
xlabel('\it t'), ylabel('\it x_1(t)-x_2(t)','rotation',0)
```

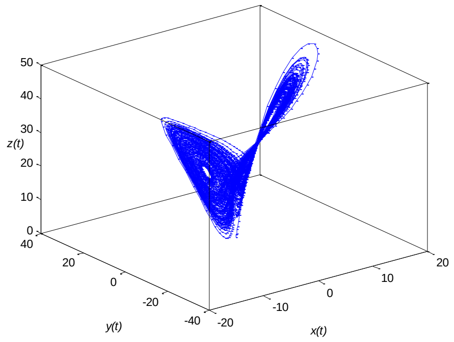

图 8.2　典型的 Lorenz 相轨线

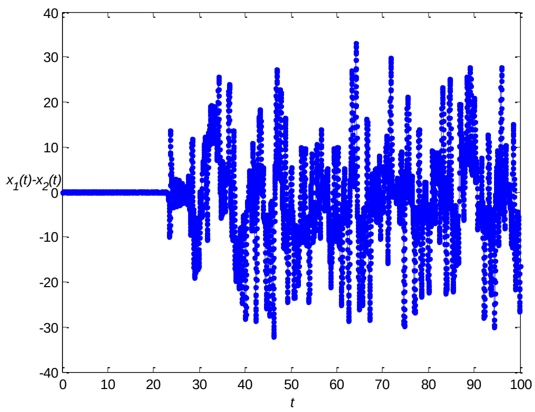

图 8.3　仅差 0.00001 的两个初值的 $x(t)$ 偏差演化曲线

例 8.14　一个慢跑者在平面上按如下规律跑步

$$X = 10 + 20\cos t,\quad Y = 20 + 15\sin t.$$

突然有一只狗攻击他，这只狗从原点出发，以恒定速率 w 跑向慢跑者，狗运动方向始终指向慢跑者。分别求出 $w = 20$， $w = 5$ 时狗的运动轨迹。

解　设时刻 t 人的坐标为 $(X(t), Y(t))$，狗的坐标 $(x(t), y(t))$。狗的速度大小恒为 w，则

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = w^2,$$

由于狗始终对准人，故狗的速度方向平行于狗与人位置的差向量，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X - x \\ Y - y \end{bmatrix},$$

消去 λ 得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{w}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}}(X - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{w}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}}(Y - y). \end{cases}$$

因而建立狗的运动轨迹的如下方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{w}{\sqrt{(10+20\cos t-x)^2+(20+15\sin t-y)^2}}(10+20\cos t-x), \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{w}{\sqrt{(10+20\cos t-x)^2+(20+15\sin t-y)^2}}(20+15\sin t-y), \\ x(0)=0,\ y(0)=0. \end{cases}$$

利用MATLAB软件求得当 $w=20$ 时，在 $t=4.1888$ 时，狗追上人。人和狗之间的距离见图8.4。

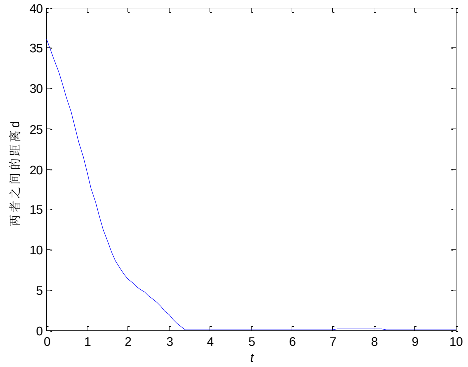

图 8.4　人和狗之间的距离

计算的MATLAB程序如下

```
clc, clear, w=20;
dx=@(t,x)[w/sqrt((10+20*cos(t)-x(1))^2+(20+15*sin(t)-x(2))^2)*(10+20*cos(t)-x(1))
       w/sqrt((10+20*cos(t)-x(1))^2+(20+15*sin(t)-x(2))^2)*(20+15*sin(t)-x(2))];
t0=0;tf=10; %时间的终值是适当估计的
s=ode45(dx,[t0,tf],[0;0]); %求微分方程的数值解
d=@(t)sqrt((deval(s,t,1)-10-20*cos(t)).^2+(deval(s,t,2)-20-15*sin(t)).^2); %t时刻人和狗的距离
[t,fv]=fminsearch(@(t)d(t),0) %求两者距离的最小值及对应的时间
t=0:0.1:tf; plot(t,d(t))    %画出两者之间的距离
xlabel('\it t'), ylabel('两者之间的距离d')
```

当 $w=5$ 时，狗永远追不上人。人和狗之间的距离见图8.5。

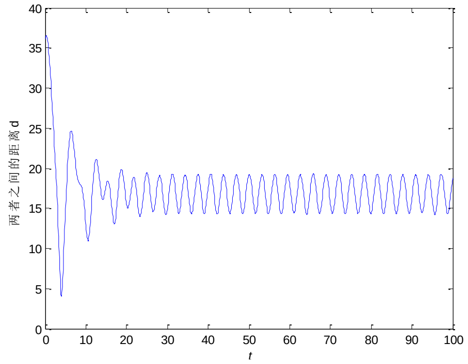

图 8.5　人和狗之间的距离

计算的MATLAB程序如下

```
clc, clear, w=5;
dx=@(t,x)[w/sqrt((10+20*cos(t)-x(1))^2+(20+15*sin(t)-x(2))^2)*(10+20*cos(t)-x(1))
       w/sqrt((10+20*cos(t)-x(1))^2+(20+15*sin(t)-x(2))^2)*(20+15*sin(t)-x(2))];
t0=0;tf=100; %时间的终值是适当估计的
```

```
s=ode45(dx,[t0,tf],[0;0]); %求微分方程的数值解
d=@(t)sqrt((deval(s,t,1)-10-20*cos(t)).^2+(deval(s,t,2)-20-15*sin(t)).^2);
t=0:0.1:tf; plot(t,d(t))   %画出两者之间的距离
xlabel('\it t'), ylabel('两者之间的距离d')
```

8.4 求高阶常微分方程（组）的数值解

MATLAB 工具箱无法直接求解高阶方程（组）的数值解，对于高阶常微分方程(组)，首先要做变量变换化为一阶方程组，然后再用 MATLAB 的相关命令求数值解。

例 8.15（续例 8. 1） 求解二阶线性微分方程 $y''-2y'+y=e^x$， $y(0)=1$， $y'(0)=-1$，在区间 $[-1,1]$ 上的数值解，并与符号解进行比较。

求数值解时，首先做变量替换：设 $y_1=y$， $y_2=y'$，则把二阶微分方程化成如下的两个函数的一阶方程组：

$$\begin{cases} y_1'=y_2, & y_1(0)=1, \\ y_2'=2y_2-y_1+e^x, & y_2(0)=-1. \end{cases}$$

计算和画图的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear
dy=@(x,y)[y(2);2*y(2)-y(1)+exp(x)];
s1=ode45(dy,[0,1],[1;-1]); %求[0,1]区间上的数值解
s2=ode45(dy,[0,-1],[1;-1]); %求[-1,0]区间上的数值解
fplot(@(x)deval(s1,x,1),[0,1],'o') %画第一个分量，即 y 在[0,1]区间上的数值解
hold on
fplot(@(x)deval(s2,x,1),[-1,0],'*') %画第一个分量，即 y 在[-1,0]区间上的数值解
syms y(x)   %定义符号函数 y，自变量为 x
dy=diff(y);   %定义 y 的一阶导数，目的是下面赋初值
y=dsolve(diff(y,2)-2*diff(y)+y==exp(x),y(0)==1,dy(0)==-1)
h=ezplot(y,[-1,1]) %画符号解的曲线
title(''), set(h,'Color','r','LineWidth',2)
legend('[0,1]区间上数值解','[-1,0]区间上数值解','符号解')
```

符号解和数值解的比较见图 8.6。

注：使用求数值解命令 ode45(odefun,[t0,tf],x0)时，**求解区间向量[t0,tf]的第一个分量是初值条件的自变量取值，第二个分量 tf 的取值可以比 t0 小。**

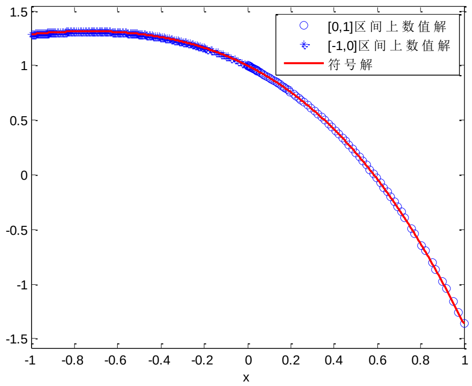

图 8.6 数值解和符号解的比较图

例 8.16 已知阿波罗卫星的运动轨迹 (x, y) 满足下面方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\dfrac{dy}{dt} + x - \dfrac{\lambda(x+\mu)}{r_1^3} - \dfrac{\mu(x-\lambda)}{r_2^3}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\dfrac{dx}{dt} + y - \dfrac{\lambda y}{r_1^3} - \dfrac{\mu y}{r_2^3}. \end{cases}$$

其中 $\mu=1/82.4$， $\lambda=1-\mu$， $r_1=\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}$ ， $r_2=\sqrt{(x+\lambda)^2+y^2}$ ，试在初值 $x(0)=1.2$， $x'(0)=0$， $y(0)=0$， $y'(0)=-1.0494$下求解，并绘制阿波罗卫星轨迹图。

解 做变量替换，令 $z_1=x$， $z_2=\dfrac{dx}{dt}$， $z_3=y$， $z_4=\dfrac{dy}{dt}$，则原二阶微分方程组可以化为如下的一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = z_2, & z_1(0)=1.2, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = 2z_4 + z_1 - \dfrac{\lambda(z_1+\mu)}{((z_1+\mu)^2+z_3^2)^{3/2}} - \dfrac{\mu(z_1-\lambda)}{((z_1+\lambda)^2+z_3^2)^{3/2}}, & z_2(0)=0, \\ \dfrac{dz_3}{dt} = z_4, & z_3(0)=0, \\ \dfrac{dz_4}{dt} = -2z_2 + z_3 - \dfrac{\lambda z_3}{((z_1+\mu)^2+z_3^2)^{3/2}} - \dfrac{\mu z_3}{((z_1+\lambda)^2+z_3^2)^{3/2}}, & z_4(0)=-1.0494. \end{cases}$$

计算及画图的 MATLAB 程序如下

```
clc, clear
mu=1/82.45; lamda=1-mu;
dz=@(t,z)[z(2)
2*z(4)+z(1)-lamda*(z(1)+mu)/((z(1)+mu)^2+z(3)^2)^(3/2)-mu*(z(1)-lamda)/((z(1)+lamda)^
2+z(3)^2)^(3/2)
z(4)
-2*z(2)+z(3)-lamda*z(3)/((z(1)+mu)^2+z(3)^2)^(3/2)-mu*z(3)/((z(1)+lamda)^2+z(3)^2)^(3/
2)];
[t,z]=ode45(dz,[0,100],[1.2 0 0 -1.0494])
plot(z(:,1),z(:,3))    %画轨迹图
```

所绘制的阿波罗卫星轨迹图见图 8.7。

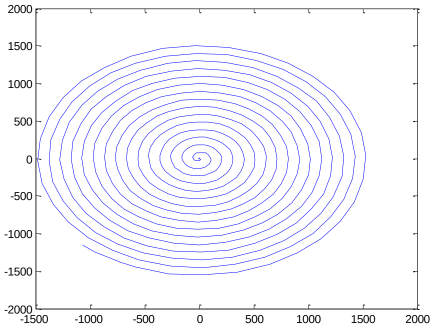

图 8.7 阿波罗卫星轨迹图

8.6 拟合常微分方程（组）中的未知参数

例 8.17 某地区野兔的数量连续十年的统计数量(单位十万)如表 8.1 所示。预测 T=10 时野兔的数量。

表 8.1 野兔数据的观测值

T=0	T=1	T=2	T=3	T=4	T=5	T=6	T=7	T=8	T=9

5	5.9945	7.0932	8.2744	9.5073	10.7555	11.9804	13.1465	14.2247	15.1953

（1）建模与求解

对于生物模型，首先考虑的是 logistic 模型， Logistic 模型也称虫口模型，因为这个模型最初用来描绘昆虫的数量随时间的变化。

记 $x(t)$ 为第 t 时刻的野兔数量，对于 logistic 连续模型，建立如下微分方程模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax(1-bx),\ x(0)=x_0,\ (x_0\neq 0, 1/b, x_0>0)\,. \tag{1}$$

方程(1)的含义如下，当种群数量较少、资源丰富时，种群增长率为 ax，随着种群数量的增多，要增加一个竞争项 $-abx^2$（$b>0$），它的作用是使纯增长率减少。

可以利用 MATLAB 符号求解命令或手工计算，求得其解析解为

$$x(t)=\frac{1}{b+\left(\dfrac{1}{x_0}-b\right)\exp(-at)}\,. \tag{2}$$

（2）参数估计

由于在模型(2)中参数 a 和 b 未知，需要先利用已知数据对参数进行估计，下面将采用多种方法对未知参数进行求解。

1）fit 函数的非线性最小二乘拟合

```
clc, clear
t0=0:9;
tx0=[5 5.9945 7.0932     8.2744 9.5073 10.7555 11.9804 13.1465 14.2247 15.1953];
x0=5;
ft1=@(a,b,t)1./(b+(1/x0-b)*exp(-a*t));    %定义拟合的匿名函数
ft2=fittype(ft1,'independent','t')    %转换为 fit 要求的格式
ft=fit([1:9]',tx0(2:end)',ft2,'Start',rand(1,2))    %参数拟合
x10=ft(10)    %求预测值
```

求得 $a=0.25$，$b=0.05$，第 10 年的野兔数量为 16.0481（十万只）。

2）lsqcurvefit 的非线性最小二乘拟合

```
clc, clear
t0=0:9;
tx0=[5 5.9945 7.0932     8.2744 9.5073 10.7555 11.9804 13.1465 14.2247 15.1953];
x0=5;
ft=@(c,t)1./(c(2)+(1/x0-c(2))*exp(-c(1)*t));    %定义拟合的匿名函数
ab=lsqcurvefit(ft,rand(1,2),[1:9],tx0(2:10))
x10=ft(ab,10)    %求预测值
```

求解结果与 1）相同。

3）后向差分的线性最小二乘拟合

为了利用简单的线性最小二乘法估计模型的参数 a 和 b，把 Logistic 方程表示为

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=a-sx,\ s=ab\,, \tag{3}$$

利用向后差分，得到差分方程

$$\frac{1}{x(k)}\frac{x(k)-x(k-1)}{\Delta t}=a-sx(k),\ k=1,2,\cdots,9\,, \tag{4}$$

其中步长 $\Delta t=1$，下面拟合其中的参数 a 和 s。编写如下的 MATLAB 程序：

```
clc, clear
t0=[0:9]';
tx0=[5 5.9945 7.0932     8.2744 9.5073 10.7555 11.9804 13.1465 14.2247 15.1953]';
mat=[ones(9,1),-tx0(2:10)];    %构造线性方程组（4）的系数矩阵
```

```
b=diff(tx0)./tx0(2:10); %构造线性方程组（4）的常数项列
as=mat\b    %拟合参数 a,s
a=as(1), b=as(2)/a    %提取参数 a,b 的值
ft=@(c,t)1./(c(2)+(1/5-c(2))*exp(-c(1)*t));    %定义匿名函数
x10=ft([a,b],10) %计算预测值
```

求得 $a=0.234$，$b=0.0474$，第 10 年的预测值为 16.1095（十万只）。

4）前向差分的线性最小二乘拟合

也可以利用向前差分，得到差分方程

$$\frac{x(k+1)-x(k)}{\Delta t}\frac{1}{x(k)}=a-sx(k),\ k=0,1,\cdots,8\,, \tag{5}$$

再进行拟合。拟合的 MATLAB 程序如下：

```
clc, clear
t0=[0:9]';
tx0=[5 5.9945 7.0932     8.2744 9.5073 10.7555 11.9804 13.1465 14.2247 15.1953]';
mat=[ones(9,1),-tx0(1:9)];    %构造线性方程组（5）的系数矩阵
b=diff(tx0)./tx0(1:9); %构造线性方程组（5）的常数项列
as=mat\b    %拟合参数 a,s
a=as(1), b=as(2)/a    %提取参数 a,b 的值
ft=@(c,t)1./(c(2)+(1/5-c(2))*exp(-c(1)*t));    %定义匿名函数
x10=ft([a,b],10) %计算预测值
```

求得 $a=0.2675$，$b=0.0529$，第 10 年的预测值为 15.8597。

从上面的四种拟合方法可以看出，拟合同样的参数，方法不同可能结果相差很大。

例 8.18　捕食者-被捕食者方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax-bxy,\ x(0)=60,\\ \dfrac{dy}{dt}=-cy+dxy,\ y(0)=30.\end{cases} \tag{6}$$

其中 $x(t)$ 表示 t 个月之后兔子的总体数量，$y(t)$ 表示狐狸的总体数量，参数 a,b,c,d 未知。利用表8.2的13个观测值，拟合式(6)中的参数 a,b,c,d 。

表 8.2　种群数量的观测值

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18
$x(t)$	60	63	64	63	61	58	53	44	39	38	41	46	53
$y(t)$	30	34	38	44	50	55	58	56	47	38	30	27	26

解　微分方程对应的差分方程为

$$\begin{cases}(x_{k+1}-x_k)/(t_{k+1}-t_k)=ax_k-bx_ky_k,\\ (y_{k+1}-y_k)/(t_{k+1}-t_k)=-cy_k+dx_ky_k,\end{cases}\quad k=0,1,\cdots,11\,, \tag{7}$$

其中 x_k, y_k, t_k 分别为 x,y,t 的第 k 个观测值，$k=0,1,\cdots,12$ 。

可以将(7)式改写成下列格式

$$\begin{bmatrix} x_k & -x_k y_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_k & x_k y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{k+1}-x_k)/(t_{k+1}-t_k) \\ (y_{k+1}-y_k)/(t_{k+1}-t_k) \end{bmatrix}, k=0,1,\cdots,11. \tag{8}$$

上述所有的差分方程可以写成矩阵格式

$$\begin{bmatrix} x_0 & -x_0 y_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{11} & -x_{11}y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_0 & x_0 y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -y_{11} & x_{11}y_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1-x_0)/(t_1-t_0) \\ \vdots \\ (x_{12}-x_{11})/(t_{12}-t_{11}) \\ (y_1-y_0)/(t_1-t_0) \\ \vdots \\ (y_{12}-y_{11})/(t_{12}-t_{11}) \end{bmatrix}.$$

利用线性最小二乘法，求得 $a=0.1907$， $b=0.0048$， $c=0.4829$， $d=0.0095$。

拟合的 MATLAB 程序如下

```
clc, clear
t0=[0   1    2    3    4    5    6    8    10   12   14   16   18]';
x0=[60 63   64   63   61   58   53   44   39   38   41   46   53]';
y0=[30 34   38   44   50   55   58   56   47   38   30   27   26]';
dt=diff(t0); dx=diff(x0); dy=diff(y0);
temp=x0(1:end-1).*y0(1:end-1);
mat=[x0(1:end-1), -temp,zeros(12,2)
     zeros(12,2), -y0(1:end-1), temp]; %构造线性方程组的系数矩阵
const=[dx./dt; dy./dt];   %构造线性方程组的常数项列
abcd=mat\const   %拟合参数a,b,c,d
```

例 8.19　捕食者−被捕食者方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.2x - 0.005xy,\ x(0)=70, \\ \dfrac{dy}{dt} = -0.5y + 0.01xy,\ y(0)=40. \end{cases} \tag{9}$$

其中 $x(t)$ 表示 t 个月之后兔子的总体数量， $y(t)$ 表示狐狸的总体数量。

研究如下问题：

（1） $x(t)$ 和 $y(t)$ 的总体数量变化的周期；

（2） $x(t)$ 的总体数量的最大值和最小值，以及它们第一次出现的时间；

（3） $y(t)$ 的总体数量的最大值和最小值，以及它们第一次出现的时间。

解　令

$$\begin{cases} 0.2x - 0.005xy = 0, \\ -0.5y + 0.01xy = 0, \end{cases}$$

得临界点 $(50,40)$，它是一个稳定的中心，表示50只兔子和40只狐狸的平衡数量。其它的初始点位于绕这个平衡点的闭轨道上。方程组(9)的轨线和方向场见图8.8。方向场说明点 $(x(t),y(t))$ 以逆时针方向沿其轨道运行，并且兔子和狐狸的总体数量分别在它们的最大值和最小值之间周期性振动。相位平面图像的一个不足之处是它没有给出每条轨道变化的速度。

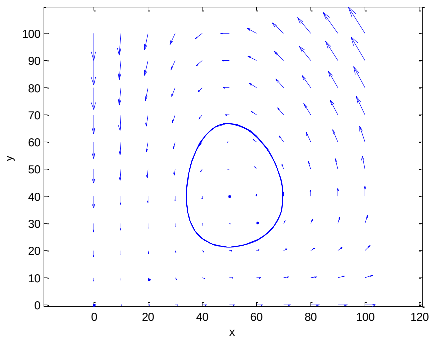

图 8.8　相位图及方向场

通过作每个物种总体数量的（关于时间 t 的）函数的图像，可以弥补这个“缺少时间意义”的不足。在图8.9中，做出了 $x(t)$ 和 $y(t)$ 数值解的图像。通过两个相邻极小点的时间间隔就可以求出每个物种总体数量变化的周期 $T=20.22$，计算得 $x(t)$ 的最大值为70，达到第一最大值的时间为0.00006月； $x(t)$ 的最小值为34，达到第一个最小值的时间为8.915月。 $y(t)$ 的最大值为67，达到第一个最大值的时间为4.1148月； $y(t)$ 的最小值为22，达到第一个最小值的时间为14.9932月。

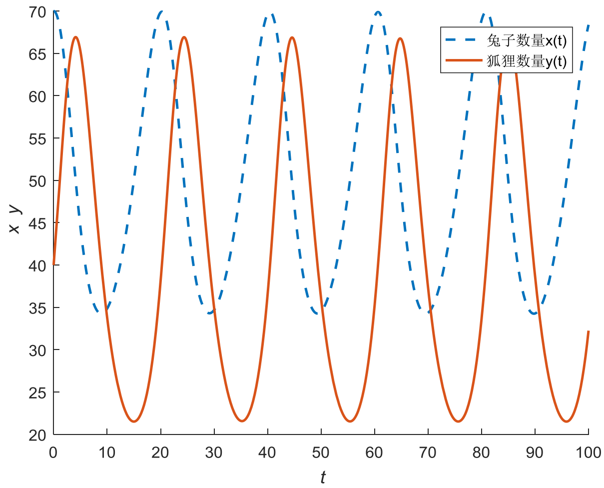

图 8.9　捕食者-被捕食者的周期摆动

计算及画图的MATLAB程序如下

```
clc, clear, close all
x=0:10:100; [x,y]=meshgrid(x);
u=0.2*x-0.005*x.*y; v=-0.5*y+0.01*x.*y;
quiver(x,y,u,v), hold on
xy=@(t,z)[0.2*z(1)-0.005*z(1)*z(2)
              -0.5*z(2)+0.01*z(1)*z(2)]; %定义微分方程组的右端项
sol=ode45(xy,[0,100],[70;40]);
xt=@(t)deval(sol,t,1);
yt=@(t)deval(sol,t,2);
ezplot(xt,yt,[0,100]), title('')   %画轨线
figure(2), hold on
fplot(xt,[0,100],'--','LineWidth',1.5)   %画x(t)的解曲线
[t1,xx]=ginput(2) %用鼠标取x(t)上的前2个极小点
fplot(yt,[0,100],'LineWidth',1.5) %画y(t)的解曲线, hold on
[t2,yy]=ginput(2) %用鼠标取y(t)上的前2个极小点
xlabel('\it t'), ylabel('\it x    y')
legend('兔子数量x(t)','狐狸数量y(t)')
for i=1:2
     [tx(i),xm(i)]=fminsearch(xt,t1(i)); %求x(t)前两个达到最小值的时间
```

```
    [ty(i),ym(i)]=fminsearch(yt,t2(i)); %求y(t)前两个达到最小值的时间
end
tx, xm,T1=diff(tx)    %利用x(t)求周期T
ty, ym,T2=diff(ty)    %利用y(t)求周期T
[txm,xmm]=fminbnd(@(t)-xt(t),0,10) %求x(t)达到第一个最大值的时间及最大值
[tym,ymm]=fminbnd(@(t)-yt(t),0,10) %求y(t)达到第一个最大值的时间及最大值
```

习题8

8.1　求微分方程组的数值解。

$$\begin{cases} x' = -x^3 - y, \ \ x(0) = 1, \\ y' = x - y^3, \ \ y(0) = 0.5, \end{cases} \quad 0 \le t \le 30.$$

要求画出 $x(t), y(t)$ 的解曲线图形，在相平面上画出轨线。

8.2　求微分方程组（竖直加热板的自然对流）的数值解。

$$\begin{cases} \dfrac{d^3 f}{d\eta^3} + 3f\dfrac{d^2 f}{d\eta^2} - 2\left(\dfrac{df}{d\eta}\right)^2 + T = 0, \\ \dfrac{d^2 T}{d\eta^2} + 2.1f\dfrac{dT}{d\eta} = 0. \end{cases}$$

已知当 $\eta = 0$ 时， $f = 0$ ， $\dfrac{df}{d\eta} = 0$ ， $\dfrac{d^2 f}{d\eta^2} = 0.68$ ， $T = 1$ ， $\dfrac{dT}{d\eta} = -0.5$ 。要求在区间 $[0,10]$ 上，画出 $f(\eta), T(\eta)$ 的解曲线。

8.3　一根长为 l 的无弹性细线，一端固定，另一端悬挂质量为 m 的小球。在重力的作用下小球处于平衡状态。若使小球偏离平衡位置一定角度 θ ，放开它，它就会沿圆弧摆动。在不考虑空气阻力的情况下小球会做一定周期的简谐运动。利用牛顿第二定律得到如下的微分方程

$$\begin{cases} ml\theta'' = -mg\sin\theta, \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

若摆处于一个黏性介质中，沿摆的运动方向存在一个与速度 $v = l\theta'$ 成正比的阻力，阻力系数为 λ ，则方程变为

$$\begin{cases} ml\theta'' = -mg\sin\theta - \lambda l\theta', \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

不妨设 $l = 1$ ， $g = 9.8$ ， $\theta_0 = 15/\pi$ ， $m = 1$ ， $\lambda = 0.1$ ，分别求微分方程(10)和(11)的解，并在区间 $[0,30]$ 上画出解 $\theta(t)$ 的图形。

8.4　根据经验当一种新商品投入市场后，随着人们对它的拥有量的增加，其销售量 $s(t)$ 下降的速度与 $s(t)$ 成正比。广告宣传可给销量添加一个增长速度，它与广告费 $a(t)$ 成正比，但广告只能影响这种商品在市场上尚未饱和的部分（设饱和量为 M ）。设 λ（ $\lambda > 0$ 为常数）为销售量衰减因子，则根据上述假设建立如下模型

$$\frac{ds}{dt} = pa(t)\left(1 - \frac{s(t)}{M}\right) - \lambda s(t), \tag{12}$$

其中 p 为响应系数，即 $a(t)$ 对 $s(t)$ 的影响力， p 为常数。

已知第 1 年在广告支持下，各月份的销售量数据见表 8.3，若第 2 年停掉广告，试预测第 2 年前 6 个月的销售量。

表 8.3　第一年各月份的销售量

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
广告费 $a(n)$	469	781	208	208	833	677	938	2500	1865	4843	4167	948
销售量	0	218	510	1385	802	583	1152	1677	3646	2756	4083	4958