天然肠衣问题

天然肠衣制作加工是我国的一个传统产业。肠衣经过清洗整理后被分割成长度不等的小段(原料)，进入组装工序。传统的生产方式依靠人工，边丈量原料长度边心算，将原材料按指定根数和总长度组装出成品(捆)。原料按长度分档，通常以0.5米为一档，如：14-14.4米按14米计算，14.5米-14.9米按14.5米计算，其余的依此类推。

表1　原料描述表

长度	14-14.4	14.5-14.9	15-15.4	15.5-15.9	16-16.4	16.5-16.9	17-17.4
根数	35	29	30	42	28	42	45
长度	17.5-17.9	18-18.4	18.5-18.9	19-19.4	19.5-19.9	20-20.4	20.5-20.9
根数	49	50	64	52	63	49	35
长度	21-21.4	21.5-21.9	22-22.4	22.5-22.9	23.5-23.9	25.5-25.9	
根数	27	16	12	2	6	1	

为了提高生产效率，公司计划改变组装工艺，先丈量所有原料，建立一个原料表。表1为某批次原料描述。

根据以上成品和原料描述，设计一个原料搭配方案，工人根据这个方案“照方抓药”进行生产。每捆标准长度为89米，根数为5根。

公司对搭配方案有以下具体要求：

(1) 对于给定的一批原料，装出的成品捆数越多越好；

(2) 对于成品捆数相同的方案，最短长度最长的成品越多，方案越好；

(3) 为提高原料使用率，总长度允许有± 0.5米的误差，总根数允许比标准少1根；

(4）为减少组装的复杂性，要求组装的模式尽可能少。这里一种模式表示各种长度的肠衣构成情况相同。

请建立上述问题的数学模型，给出求解方法，并对表1给出的实际数据进行求解，给出搭配方案。(该题根据全国数模竞赛2011D改编)

问题求解：

一、模型建立

首先求出20种肠衣根据原料可搭配成捆的所有模式，然后建立线性规划模型求解。

每捆成品可以有不同的构成模式，每种模式由一个向量

$(c_1, c_2, \dots, c_{20})$ 构成。c_i 代表第 i 种材料的根数。

每捆数量作决策变量

长度	14	14.5	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22	22.5	23.5	25.5
根数	a_1	a_2	a_3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	1
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
x_{n-2}	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{n-1}	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
x_n	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

设共有n种模式(这里$n=2783$)，每种模式为一个20维的列向量，代表一种符合条件的模式。即根数满足4或5根，长度为88.5米、或89米、或89.5米的一捆。

所有些模式用矩阵$B_{2783\times 20}$表示。b_{ij}表示第i种模式中第j种长度的肠衣的根数。$i=1,2,\dots,2783$; $j=1,2,\dots,20$。

决策变量为第i种模式x_i捆，则成品捆数最多的目标函数为：

$$\max Z_1=\sum_{i=1}^{2783}x_i$$

每捆最短长度最长的有3种模式，第一种是模式1，为2根22米和2根22.5米构成；第二种是模式2，为3根22米和1根22.5米构成；第三种是模式3，为3根22米和1根23.5米构成。

则第二目标要求最短长度最长的捆数最大，有：

$$\max Z_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

满足的约束为各种长度的原料的数量，则有：

$$\sum_{i=1}^{2783} x_i b_{ij} \le a_j \qquad j = 1, 2, \ldots, 20$$

考虑使搭配模式最少的方案。建立决策变量

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{第}i\text{种模式选中} \\ 0 & \text{第}i\text{种模式未选中} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2783)$$

建立第三目标为总模式数最小，即 $\min Z_3=\sum_{i=1}^{2783} y_i$

需要满足的约束有：

当第 i 种模式未被选中时，则不能选取该种模式，

且选中时不影响 x_i 的取值，

则： $x_i \le M.y_i \quad (i=1,2,\ldots,2783)$

其中 M 为一个足够大整数，如可取 $M=200$

当第 i 种模式被选中时，该种模式下一定有成品，则：

$$x_i \ge y_i \quad (i=1,2,\ldots,2783)$$

则总的模型为：

$$\max Z_1 = \sum_{i=1}^{2783} x_i$$

$$\max Z_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\min Z_3 = \sum_{i=1}^{2783} y_i$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{2783} x_i b_{ij} \le a_j \qquad j = 1, 2, \ldots, 20 \\ x_{\ i} \le M . y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 2783 \\ x_i \ge y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 2783 \\ x_i 为整数, y_i = 0 或 1; \quad i = 1, 2, \ldots, 2783 \end{cases}$$

其中 a=35,29,30,42,28,42,45,49,50,64,52,63,49,35,27,16,12,2,6,1

二、模式分析及计算

1） 最大捆数分析：

将材料根数为 0 的去掉，这样总共有 20 种原材料。

设第 i 种原材料的长度为 l_i，根数为 a_i， $i=1,2,...,20$。

其中 $l=14,14.5,15,15.5,16,16.5,17,17.5,18,18.5,19,19.5,$
$20,20.5,21,21.5,22,22.5,23.5,25.5$

$a=35,29,30,42,28,42,45,49,50,64,52,63,49,35,27,16,12,2,6,1$。

20 种原材料中长度为 $L=\sum_{i=1}^{20} a_i.l_i$ =12159.5 米

每捆长度最少为 88.5 米，因此捆数最多为：

$K \le [12195.5/88.5]=[137.4]=137$　其中[.]表示取整。

20 种原材料的总根数为$T=\sum_{i=1}^{20}a_i$=677 根

每捆最少为 4 根，因此捆数最多为$K\le[677/4]=[169.25]=169$捆。

二者取最小值，因此$K\le 137$。

2） 每捆成品的组成模式分析

每捆成品可以有不同的构成模式，每种模式由一个向量

$(c_1,c_2,...,c_{20})$构成。c_i代表第i种材料的根数。

则各c_i取值的最大整数值为：

$$M_i=\min\left\{a_i,\left\lceil\frac{89.5}{l_i}\right\rceil,5\right\}\quad i=1,2,...,20$$

计算得到各$c_i\ (i=1,2,\ldots,20)$的最大取值M_i为：

5,5, 5,5,5,5,5,5,4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2,3,1。

如果直接对各c_i从0到M_i完全枚举所有模式，计算量为：

$$T=\prod_{i=1}^{20}(M_i+1)=(5+1)^8(4+1)^9(2+1)(3+1)(1+1)\approx 7.87\times 10^{13}$$

如此巨大的计算量很难进行枚举。

我们通过剪枝计算，可大大减少计算量。

采用Matlab编程，可在不到1秒钟内计算出所有模式。

总数为2783种。

实现的Matlab程序见程序changyi.m

三、计算结果

令第一目标Z1最大化，利用LINGO得到Z1=137，最短长度为22米有2捆，其模式为3根22米和1根23.5米构成。

将Z1=137变为约束，令Z2最大，利用LINGO求解。得到Z2=3的最优解。使用模式有32种。

再将Z1=137,Z2=3作为约束，对目标Z3最小，得到总模式为Z3=16种的搭配方案。

表 2　最优搭配方案表 (粗体为最短长度最长的方案)

序号	模式	长度 (米)	根数	捆数
1	**22.0 米 2 根, 22.5 米 2 根**	89	4	**1**
2	**22.0 米 3 根, 23.5 米 1 根**	89.5	4	**2**
3	21.5 米 2 根, 22.0 米 1 根, 23.5 米 1 根	88.5	4	4
4	21.0 米 1 根, 21.5 米 2 根, 25.5 米 1 根	89. 5	4	1
5	16.5 米 1 根, 17.0 米 1 根, 18.0 米 1 根, 18.5 米 1 根, 19.5 米 1 根	89. 5	5	5
6	16.5 米 1 根, 17.0 米 1 根, 17.5 米 1 根, 18.5 米 1 根, 19.5 米 1 根	89	5	15
7	16.5 米 2 根, 17.0 米 2 根, 21.5 米 1 根	88. 5	5	1
8	15.5 米 1 根, 17.5 米 1 根, 18.0 米 1 根, 18.5 米 1 根, 19.0 米 1 根	88. 5	5	34
9	15.5 米 1 根, 16.5 米 1 根, 18.0 米 1 根, 19.0 米 1 根, 19.5 米 1 根	88. 5	5	8
10	15.0 米 1 根, 16.0 米 1 根, 16.5 米 1 根, 19.5 米 1 根, 21.5 米 1 根	88. 5	5	2
11	14.5 米 1 根, 18.0 米 1 根, 18.5 米 1 根, 19.0 米 1 根, 19.5 米 1 根	89. 5	5	3
12	14.5 米 1 根, 16.0 米 1 根, 17.0 米 1 根, 20.0 米 1 根, 21.0 米 1 根	88. 5	5	23
13	14.5 米 1 根, 16.0 米 1 根, 16.5 米 1 根, 21.0 米 1 根, 21.5 米 1 根	89. 5	5	3
14	14.0 米 1 根, 16.5 米 1 根, 18.5 米 1 根, 19.0 米 1 根, 20.5 米 1 根	88. 5	5	7
15	14.0 米 1 根, 15.0 米 1 根, 19.5 米 1 根, 20.0 米 1 根, 20.5 米 1 根	89	5	26
16	14.0 米 1 根, 15.0 米 1 根, 19.5 米 2 根, 20.5 米 1 根	88. 5	5	2
总计				137

在该方案中，总捆数137捆，达到最大

总共使用模式16种，达到最小。

最短长度为22米的有3捆. 总共使用原材料677根，总长度为12159.5米，原材料用完。

该搭配方案达到最优。

注意该结果中具体的方案不是唯一的。

Matlab程序： changyi.m

输出所有模式的Matlab程序，该程序采用剪枝法进行枚举所有模式。输出文件为changyi.txt，该文件按行存储所有模式。方便后面的LINGO程序调用该数据文件。

```
%20种长度
l=[14,14.5,15,15.5,16,16.5,17,17.5,18,18.5,19,19.5,20,20.5,21,21.5,22,22.5,
23.5,25.5];
a=[35,29,30,42,28,42,45,49,50,64,52,63,49,35,27,16,12,2,6,1];%20种原料
的根数
L=l*a';  %总长度
 Total=floor(L/88.5); %最多根数
  fprintf('最大捆数:%2d\n',Total);
 n=length(l);
```

```
g=zeros(1,n);
 for i=1:n
    t=min(5,floor(89.5/l(i)));
    g(i)=min(t,a(i)); %获得各种长度的类型肠衣的最多根数
 end
 Model=zeros(1,20);  %记录模式
  L=zeros(1,300); %记录每种模式的最短长度
 Total=0;
fid=fopen('d:\lingo12\dat\changyi.txt','w'); %输出所有模式的文件名
for i1=0:g(1)
      Len=i1*l(1);
      Gen=i1;
  if  Len>89.5 || Gen>5 break; end
```

```
        for i2=0:g(2)
         Len=i1*l(1)+i2*l(2);
         Gen=i1+i2;
         if Len>89.5 ||Gen>5 break; end
%若长度或根数超过限制则跳出该循环，以下同.
…………………………………………………………………………….
 for i20=0:g(20)
 Len=i1*l(1)+i2*l(2)+i3*l(3)+i4*l(4)+i5*l(5)+i6*l(6)+i7*l(7);
Len=Len+i8*l(8)+i9*l(9)+i10*l(10)+i11*l(11)+i12*l(12)+i13*l(13)+i14*l(14);
Len=Len+i15*l(15)+i16*l(16)+i17*l(17)+i18*l(18)+i19*l(19)+i20*l(20);
Gen=i1+i2+i3+i4+i5+i6+i7+i8+i9+i10+i11+i12+i13+i14+i15+i16+i17+i18+i19+i20;
        if Len>=88.5&&Len<=89.5&&Gen>=4&&Gen<=5
    输出该模式(i1,i2,..,i20)到数据文件中
```

程序2程序：changyi.lg4，进行优化计算的LINGO程序。

```
model:
sets:
kind/1..2783/:x,y;
type/1..20/:l,a,R;
assign(kind,type):model;
endsets
data:
l=14,14.5,15,15.5,16,16.5,17,17.5,18,18.5,19,19.5,20,20.5,21,21.5,22,22.5,23.5,25.5;
a=35,29,30,42,28,42,45,49,50,64,52,63,49,35,27,16,12,2,6,1;
model=@file('d:\lingo12\dat\changyi.txt');
@text()=@writefor(kind(i)|x(i)#GT#0:'x(',i,')=',x(i),';');
@text()=@writefor(type(j)|R(j)#GT#0:'R(',j,')=',R(j),';');
enddata
```

```
max=z1;
 z1=@sum(kind(i):x(i)); !目标函数1;
 z2=x(1)+x(2)+x(3); !目标函数2;
 z3=@sum(kind(i):y(i)); !目标函数3;
@for(type(j):@sum(kind(i):x(i)*model(i,j))<=a(j)); !原料约束
;
@for(type(j):R(j)=a(j)-@sum(kind(i):x(i)*model(i,j)));
@for(kind(i):x(i)<=200*y(i));
@for(kind(i):x(i)>=y(i));
@for(kind(i):@gin(x(i)));
@for(kind(i):@bin(y(i)));
end
```

谢 谢！