2019 计蒜之道 初赛 第四场 题解

腾讯益智小游戏-矩阵计数

每一种本质不同的情况，都对应着 $N!M!$ 种形态，因为行之间有 $N!$ 种换法，列之间有 $M!$ 种换法，所以答案是 $(NM)!/(N!M!)$

腾讯益智小游戏—矩形面积交（简单）

显然，矩形 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ 和 $[x'_1, x'_2] \times [y'_1, y'_2]$ 相交面积不为零的条件是 $\max\{x_1, x'_1\} < \min\{x_2, x'_2\}$ 且 $\max\{y_1, y'_1\} < \min\{y_2, y'_2\}$，相应的面积为 $(\min\{x_2, x'_2\} - \max\{x_1, x'_1\})\,(\min\{y_2, y'_2\} - \max\{y_1, y'_1\})$。枚举两个矩形判断即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$。

腾讯益智小游戏—矩形面积交（中等）

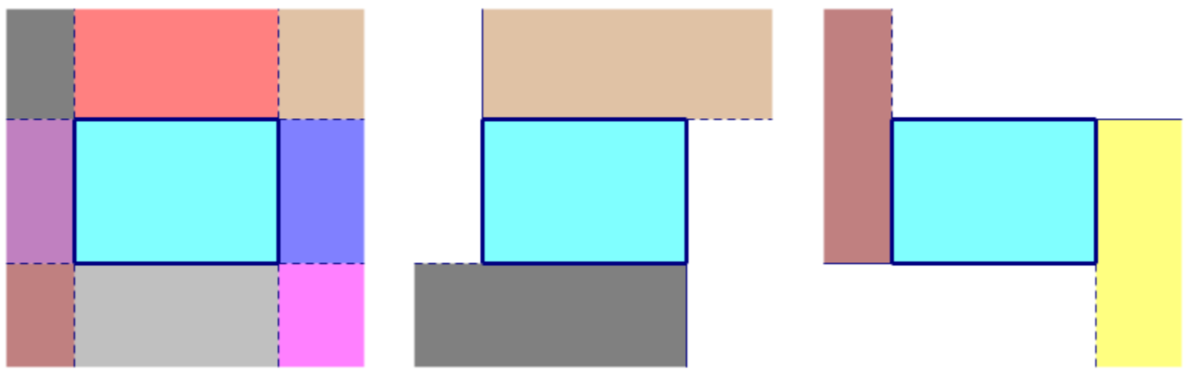
考虑面积的统计，注意到矩阵的不同坐标很少，可以将二维平面划分为若干 1×1 的方块，则问题转化为：初始有一个元素均为零的矩阵，首先依次将 n 个子矩形区域的元素加一，然后询问 n 给子矩形区域的元素之和。由于修改和查询不是交替进行的，可以将修改操作二维差分，随后计算两次二维前缀和，再处理查询即可，时间复杂度 $\mathcal{O}(n + m^2)$，其中 m 是不同坐标的数量。

直接考虑数量的统计很容易陷入 $\mathcal{O}(n^2)$ 枚举的思路，但若能转化为面积的统计，则可套用上述做法。注意到两个矩形相交面积不为零时，它们的交集也是一个矩形，不妨考虑在交集左上角的方块进行统计，换句话说，两个整数坐标的矩形的交集左下角若为 (x, y)，则满足它们同时包含 (x, y) 但不同时包含 $(x-1, y)$ 和 $(x, y-1)$，那么统计数量时，只需要统计每个矩形里有多少个方块 (x, y) 满足上述条件即可。具体来说，对于每个整点 (x, y) 若能统计出有多少个矩形包含它、有多少个矩形既包含它也包含 $(x-1, y)$、有多少个矩形既包含它也包含 $(x, y-1)$、有多少个矩形既包含它也包含 $(x-1, y)$ 和 $(x, y-1)$，那么即可在询问时利用容斥原理算出每个矩形与其相交的矩形数量。

腾讯益智小游戏—矩形面积交（困难）

对于数量的统计，一个简单的想法是枚举判定条件的最大、最小值取在哪个符号上，转化成一个四维偏序的统计问题，或是增加与矩形出现时间相关的信息转化成三维偏序问题，时间复杂度至少是 $\mathcal{O}(n \log^2 n)$，比较难通过此题。

不难注意到，统计相交面积为零的矩形是比较简单的，对于每一个矩形，若利用其边界所在直线将二维平面划分成九个部分，则与其相交面积为零的矩形只能坐落于其中八个区域中，而这八个区域可以分成如图所示的四个部分，每个部分只需要判断矩形的一个角是否在这个部分中即可，这样可以将问题转化为二维偏序问题，可以用类似归并排序的分治过程，或是排序后用树状数组或其他数据结构进行计算，这一部分的时间复杂度是 $\mathcal{O}(n\log n)$。



对于面积的统计，只需要将修改的矩形关于 $(0,0)$ 差分，将询问的矩形关于 $(5\times10^6,5\times10^6)$ 差分即可转化为二维偏序问题，将面积的表达式展开计算贡献即可，时间复杂度也是 $\mathcal{O}(n\log n)$。具体来说，将修改的矩形表示成至多四个满足左下角为 $(0,0)$ 的矩形的线性表示，将询问的矩形表示成至多四个满足右上角为 $(5\times10^6,5\times10^6)$ 的矩形的线性表示，即可将矩形的四个参数简化为两个，然后求解二维偏序问题即可。