博弈

博弈问题一般情况是两个人玩游戏,他们都十分聪明,总是能做出最优决策.

因此,游戏的胜负和选手的操作无关(总是最优决策),关键在于开始的局面.

1. 巴什博弈 (Bash Game)

一堆n个物品,两个人轮流从这堆物品中取物,规定每次至少取一个,最多取m个.

最后取光着获胜：

当n=m+1,无论先手取几个,后手总能全取走,后手胜.

当n=2\*(m+1),无论先手取几个,后手总能使剩下的物品为m+1个,后手胜.

当n=k\*(m+1),后手总能使剩下的物品为(k-1)\*(m+1)个,后手胜.

当n=k\*(m+1)+x (0<x<=m),先手取x个,后手面对k\*(m+1)个物品必败.

=> if (n % (m+1) != 0) 先手胜

最后取光者败：

当n=m+1+1,无论先手取几个,后手总能取的剩下一个,后手胜.

当n=k\*(m+1)+1个……

=> if (n % (m+1) != 1) 先手胜

1. 威佐夫博弈 (Wythoff Game)

有两堆若干个物品,两个人轮流从一堆或从两堆取同样多的物品,规定每次至少取一个,多者不限,最后取光者获胜.

我们用(ak,bk) (ak≦bk,k=0,1,2,……,n)表示两堆物品的数量并称其为**局势**.

如果先手面对(0,0),那么甲已经输了,这种局势称为**奇异局势**(必败局势).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0 | Q | q | q | q | q | q | q | q | q | q | q | q | q | q | q | q |
| 1 |  | q | W | w | w | w | w | w | w | w | w | w | w | w | w | w |
| 2 |  |  | q | w | w | w | w | w | w | w | w | w | w | w | w | w |
| 3 |  |  |  | q | w | E | e | e | e | e | e | e | e | e | e | e |
| 4 |  |  |  |  | q | w | e | R | r | r | r | r | r | r | r | r |
| 5 |  |  |  |  |  | q | w | e | e | e | e | e | e | e | e | e |
| 6 |  |  |  |  |  |  | q | w | e | r | T | t | t | t | t | t |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  | q | w | e | r | r | r | r | r | r |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  | q | w | e | r | t | Y | y | y |
| 9 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | q | w | e | r | t | y | U |
| 10 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | q | w | e | r | t | t |
| 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | q | w | e | r | t |
| 12 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | q | w | e | r |
| 13 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | q | w | e |
| 14 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | q | w |
| 15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | q |

例如：面对局势(1,2),有4种策略：

①取走第一堆 => (0,1)

②取走第二堆一个 => (1,1)

③取走第二堆两个 => (0,1)

④从两堆各取一个 => (0,1)

这四种策略形成两种状态,都能取光,自己必败.

右表中大写字母为奇异局势,它的小写代表能通过取一次变成这种局势.

前几个奇异局势:(0,0)、(1,2)、(3,5)、(4,7)、(6,10)、(8,13)、(9,15)、(11,18).

可以看出:bn = an + n 是奇异局势,an是前面未出现过的最小自然数.

性质: ①任何自然数到都包含且仅包含在一个奇异局势中.

②任何操作都可将奇异局势变成非奇异局势.

③至少有一种操作,使非奇异局势变成奇异局势.

假设先手面对非奇异局势,把它变成奇异局势. 后手面对奇异局势只能再把它变成非奇异局势.这么循环下去,最终后手面对的奇异局势一定是(0,0),就输了.

那么问题的关键在于判断先手面对的局势是不是奇异局势。

先说结论:

=> ak= ⎣k\*(1+√5)/2⎦=1.618……, bk=ak+k (k=0,1,2,……)

=> if (a<b) { int tmp=a; a=b; b=tmp; }

If (a != int( (b-a)\*(1+sqrt(5))/2) ) 先手胜

证明:

Beatty定理:设α,β是正无理数且1/α+1/β=1.记P={ ⎣kα⎦ | k为正整数},Q={ ⎣kβ⎦ | k为正整数},则P与Q是Z+的一个划分,即P∩Q=Ø,P∪Q=Z+.

Beatty定理证明:

①因为1/α+1/β=1,则α、β>1,所以对于不同的整数k，⎣kα⎦ 各不相同， 类似的,⎣kβ⎦ 各不相同.

②P∩Q=Ø:

假设k为P∩Q的一个整数,则存在正整数m、n

使得 ⎣mα⎦ = ⎣nβ⎦ = k. 即k<mα、nβ<k+1.

等价改写为 m/k<1/α<m/(k+1)、n/k<1/β<n/(k+1)

即k<m+n<k+1. 这与m,n为整数矛盾.

③P∪Q=Z+:

P∪Q一定是Z+的子集,现在只需要证明Z+是P∪Q的子集.

假设正整数k不属于Z+,则存在m、n

使得 ⎣mα⎦ <k< ⎣(m+1)α⎦, ⎣nβ⎦ <k< ⎣(n+1)β⎦

即 mα <k≦(m+1)α-1,nβ <k≦ (n+1)β-1

等价改写为 m/k <1/α< (m+1)/(k+1)、n/k <1/β< (n+1)/(k+1)

两式相加 (m+n)/k <1< (m+n+2)/(k+1)

即m+n <k<k+1< m+n+2. 这与m,n,k皆为整数矛盾.

根据Beatty定理,设ak=⎣αk⎦,bk=⎣βk⎦, 有bk=ak+k=⎣(α+1)k⎦=⎣βk⎦

解方程1/(α+1)+1/α=1,α=(1+√5)/2

1. 尼姆游戏 (Nimm Game)

有三堆各若干个物品,两个人轮流从某一堆中取任意多的物品,规定每次至少取一个,多者不限,最后取光者获胜.

我们用(a,b,c)表示局势,a^b^c!=0,先手胜.

假设a^b^c=x,一定有一堆大于x个,从这堆中取x个,变成奇异局势.

=> if (a^b^c!=0) 先手胜 可扩展到多堆.

1. 用反证法的博弈 白书P134

①Chomp!游戏

有一个m\*n的棋盘,每次可以取走一个方格并拿掉它右面和上面的所有方格.拿到左下角的格子者输.

假设先手拿走右上角的格子,如果此时后手存在必胜决策,让先手执行这个决策,因为无论拿走哪个方格,一定会拿走最右上角的,这样先手就能必胜.

n=m=1是特例.

②有1～n个数字,两个人轮流选择一个数,把它和它的约数擦去.擦去最后一个数的人赢.

同理：假设先手擦去1,如果此时后手存在必胜决策,让先手执行这个决策.

1. \*SG函数SG定理