Exercice 98 p 148

Devoir Maison

Oscar Plaisant

Partie A

1. **a)** Le déterminant de M est $\det(M) = 3a - 5b$.

b) Si $3a - 5b \neq 0$, alors $\det(M) \neq 0$, et M est inversible. On a : $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -a \\ -3 & b \end{pmatrix}$

2. $(E) : \det(M) = 3$

a) $3(6) - 5(3) = 18 - 15 = 3$, donc $(6; 3)$ est bien une solution de (E).

b)

$$\begin{aligned} (E) &\iff 3a - 5b = 3 \\ &\iff 3a = 5b \end{aligned}$$

c) D'après le théorème de Gauss, puisque 3 et 5 dont premiers entre eux, $3|b$, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif k tel que $b = 3k$. En remplaçant b dans $3a = 5b$ on obtient $a = 5k$. On peut donc dire que les solution de (E) sont de la forme $(5k, 3k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

1. $\det(Q) = 3 \times 6 - 5 \times 3 = 3 > 0$, donc Q est inversible.

On a donc : $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det(Q)} \cdot Q = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\dfrac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}$

2. On commence par créer la matrice X. Pour le mot `DO` on à $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$

Ensuite, on calcule Y telle que $Y = QX$. $Y = QX = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix}$.

On calcule R en utilisant le reste de la division euclidienne par 26 : $R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

On obtient le digraphe `IF`.

3. **a)** On sait que $Y = QX$, on à donc $3Q^{-1}Y = 3Q^{-1}QX = 3X$

On sait que $r_1 \equiv 6x_1 + 3x_2[26]$ et que $r_2 \equiv 5x_1 + 3x_2[26]$. Par soustraction on obtient $r_1 - r_2 \equiv x_1[26]$, puis en multipliant par trois, on a $3r_1 - 3r_2 \equiv 3x_1[26]$. Par combinaison linéaire, on obtient $-5r_1 + 6r_2 \equiv -30x_1 - 15x_2 + 30x_1 + 18x_2 \equiv 3x_2[26]$

b) On à vu dans le b) que $r_1 - r_2 \equiv x_1[26]$. Encore une fois, par combinaison linéaire de $r_1 \equiv 6x_1 + 3x_2[26]$ et de $r_2 \equiv 5x_1 + 3x_2[26]$, on obtient $7r_1 + 2r_2 \equiv x_2[26]$

c) Pour décoder `SG`, on commence par créer la matrice R : $R = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$

On à donc $r_1 = 18$ et $r_2 = 6$

On cherche maintenant à retrouver y_1 et y_2 à partir de r_1 et r_2

On sait avec le a) que $x_1 \equiv r_1 - r_2[26]$ et que $x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2[26]$. On peut donc dire que $x_1 \equiv 18 - 6 \equiv 12[26]$, et que $x_2 \equiv 7 \times 18 + 2 \times 6 \equiv 138 \equiv 8[26]$.

On à donc $X = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

En décodant les lettres, on obtient le digraphe `MI`

Autre méthode On peut également utiliser le langage `python` pour réaliser les calculs :

```
>>> import numpy as np  # module pour les calculs matriciels
>>> Q = np.array([[6, 3], [5, 3]])  # matrice Q
>>> Q_ = np.linalg.inv(Q)  # matrice inverse de Q
>>> R = np.array([[18], [6]])  # matrice R
>>> Y = Q_ @ R  # le @ est la multiplication matricielle
>>> Y %= 26 # on calcule de reste de la division euclidienne par 26 de chaque élément
array([[12.],
       [ 8.]])
>>> # on obtient bien les mêmes résultats. On décode ensuite en lettres :
>>> alphabet = list("ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ")
>>> alphabet[int(Y[0,0])] + alphabet[int(Y[1,0])]
'MI'
```