D.M. de mathématiques

option mathématiques expertes

Oscar Plaisant

Exercice 82p243

a)

On sait que :

$$A = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$$

On commence par chercher le déterminant de P.

$|P| = (1 \cdot 120) - (1 \cdot -1) = 121$

Puisque $|P| > 0$, on sait que P est inversible, et on à :

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{|P|} \times \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{121} \times \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{120}{121} & \frac{1}{121} \\ -\frac{1}{121} & \frac{1}{121} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

On a $D = P^{-1}AP$. Avec la calculatrice, on obtient $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$

c)

On utilise une démonstration par réccurence.

On définit la proposition $P_n : A^n = PD^nP^{-1}$. On cherche donc à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$

Initialisation Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{array}{rcl} P_n & \iff & P_1 \\ & \iff & A^1 = PD^1P^{-1} \\ & \iff & A = PDP^{-1} \end{array}$$

Or, on a : $PDP^{-1} = \begin{matrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{matrix}$

On a donc bien $A = PDP^{-1}$, et P_1 est vraie.

Hérédité On cherche a montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \implies P_{n+1}$, soit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PD^nP^{n-1} \implies A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Pour cela, on suppose que, pour n fixé, P_n est vraie, soit que $A^n = PD^nP^{-1}$.

On a donc:

$$\begin{array}{rcl} PD^{n+1}P^{-1} & = & PD^nDP^{-1} \\ & = & PD^nP^{-1}APP^{-1} \\ & = & PD^nP^{-1}A \\ & = & A^nA \\ & = & A^{n+1} \end{array}$$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}*, P_n \implies P_{n+1}$

Réccurence Puisque P_1 est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \implies P_{n+1}$, on peut dire que P_n est vraie pour tout n entier naturel positif.

On a donc bien, pour tout n entier naturel positif, on a bien $A^n = PD^nP^{-1}$.

d)

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$

$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{6241}{40000} \end{pmatrix}$

$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{493039}{8000000} \end{pmatrix}$

On remarque que $\dfrac{6241}{40000} = \left(\dfrac{79}{200}\right)^2$ et que $\dfrac{493039}{8000000} = \left(\dfrac{79}{200}\right)^3$.

On peut donc conjectuer que :

$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix}$

Cette conjecture fonctionne également pour $n = 4$

Pour la démontrer, on utilise une démonstration par réccurence.

On définit $P_n : D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix}$

On cherche donc à montrer que P_n est vraie pour tout n entier naturel positif.

Initialisation On veut montrer que P_1 est vraie.

$P_1 \iff D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^1 \end{pmatrix} \iff D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$

Or, on sait que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$, on peut donc dire que P_1 est vraie.

Hérédité On cherche à démontrer que $P_n \implies P_{n+1}$, soit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} \implies D^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour cela, on suppose, pour n fixé, que P_n est vraie.

On a donc :

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n D \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Réccurence Puisque P_1 est vraie, et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \implies P_{n+1}$, on peut dire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$, soit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix}$$

e)

On a vu dans le c) que $A^n = PD^nP^{-1}$. On peut donc dire que :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{120}{121} & \frac{1}{121} \\ -\frac{1}{121} & \frac{1}{121} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 - \left(\frac{79}{200}\right)^n \\ 1 & -1 + 120\left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{121\times200^n+79^n}{121\times200^n} & -\frac{79^n}{121\times200^n} \\ \frac{121\times200^n-120\times79^n}{121\times200^n} & \frac{120\times79^n}{121\times200^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120+\left(\frac{79}{200}\right)^n & 1-\left(\frac{79}{200}\right)^n \\ 120\left(1-\left(\frac{79}{200}\right)^n\right) & 1+120\left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{120\times 200^n+79^n}{121\times 200^n} & \frac{200^n-79^n}{121\times 200^n} \\ \frac{120\times 200^n-120\times 79^n}{121\times 200^n} & \frac{200^n+120\times 79^n}{121\times 200^n} \end{pmatrix}$$

Exercice 90p245

1.

a)

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,9\times p_0+0,4\times q_0 \\ &= 0,9\times 0+0,4\times 1 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= (1-0,9)\times p_0+(1-0,4)\times q_0 \\ &= 0,1\times 0+0,6\times 1 \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

b)

Le programme pourrait etre écrit plus correctement comme suit :

```
def F(n):
    p = 0
    q = 1
    for _ in range(n):
        p = 0.9 * p + 0.4 * q
        q = 1 - p
    p = round(p, 2)
    q = round(q, 2)
    return p, q
```

Si on appelle cette fonction avec `n = 4`, elle retournera le couple p_4, q_4.

2.

a)

On pose $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec a, b, c et d réels.

On cherche donc maintenant a, b, c et d tels que :

$X_{n+1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$

Or, on peut dire, d'après l'énoncé, que :

$X_{n+1}=\begin{pmatrix} 0,9p_n+0,4q_n \\ 0,1p_n+0,6q_n \end{pmatrix}$

soit que :

$$\begin{pmatrix} 0,9p_n + 0,4q_n \\ 0,1p_n + 0,6q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

On peut conclure que :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$0,5B = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$A + 0,5B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Or, $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$, on a donc bien $M = A + 0,5B$

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,8^2 + 0,8 \times 0,2 & 0,8^2 + 0,8 \times 0,2 \\ 0,8 \times 0,2 + 0,2^2 & 0,8 \times 0,2 + 0,2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = A$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,2^2 + 0,2 \times 0,8 & -0,8 \times 0,2 - 0,8^2 \\ -0,2^2 - 0,2 \times 0,8 & 0,2 \times 0,8 + 0,8^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = B$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,8 - 0,2 \times 0,8 & -0,8^2 + 0,8^2 \\ 0,2^2 - 0,2^2 & -0,8 \times 0,2 + 0,8 \times 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,2 - 0,2 \times 0,8 & 0,8 \times 0,2 - 0,2 \times 0,8 \\ -0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,8 & -0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

On utilise une démonstration par réccurence.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : $M^n = A + 0,5^n B$.

Initialisation $P_1 \iff M^1 = A + 0,5^1 B \iff M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hérédité On cherche à démontrer que pour tout n entier naturel positif, $P_n \implies P_{n+1}$, soit que $M^n = A + 0,5^n B \implies M^{n+1} = A + 0,5^{n+1} B$.

Pour cela, on suppose que P_n pour n fixé.

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &\iff M^{n+1} = A + 0,5^{n+1} B \\ &\iff \end{aligned}$$

e)

On sait que $X_{n+1} = MX_n$. On peut donc dire, par réccurence, que $X_{n+1} = M^n X_0$.

Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut dire que $X_{n+1} = (A + 0,5^n B)X_0 = (())$

f)

On cherche à calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,8 - 0,8 \times 0,5^n)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5^n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n) = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5^n) = 0$

Par produit, puis pas somme, on obtient :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (0,8 - 0,8 \times 0,5^n)$