

D.M. de mathématiques

option mathématiques expertes

Oscar Plaisant

Exercice 82p243

a)

On sait que :

$$A = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$$

On commence par chercher le déterminant de P .

$$|P| = (1 \cdot 120) - (1 \cdot -1) = 121$$

Puisque $|P| > 0$, on sait que P est inversible, et on à :

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{|P|} \times \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{121} \times \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{120}{121} & \frac{1}{121} \\ -\frac{1}{121} & \frac{1}{121} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

On a $D = P^{-1}AP$. Avec la calculatrice, on obtient $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$

c)

On utilise une démonstration par récurrence.

On définit la proposition $P_n : A^n = PD^nP^{-1}$. On cherche donc à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$

Initialisation Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} P_n &\Longleftrightarrow P_1 \\ &\Longleftrightarrow A^1 = PD^1P^{-1} \\ &\Longleftrightarrow A = PDP^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Or, on a : } PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

On a donc bien $A = PDP^{-1}$, et P_1 est vraie.

Hérédité On cherche à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \implies P_{n+1}$, soit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PD^nP^{-1} \implies A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Pour cela, on suppose que, pour n fixé, P_n est vraie, soit que $A^n = PD^nP^{-1}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} PD^{n+1}P^{-1} &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1}APP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1}A \\ &= A^nA \\ &= A^{n+1} \end{aligned}$$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \implies P_{n+1}$

Réccurence Puisque P_1 est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \implies P_{n+1}$, on peut dire que P_n est vraie pour tout n entier naturel positif.

On a donc bien, pour tout n entier naturel positif, on a bien $A^n = PD^nP^{-1}$.

d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{6241}{40000} \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{493039}{8000000} \end{pmatrix}$$

On remarque que $\frac{6241}{40000} = \left(\frac{79}{200}\right)^2$ et que $\frac{493039}{8000000} = \left(\frac{79}{200}\right)^3$.

On peut donc conjecturer que :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix}$$

Cette conjecture fonctionne également pour $n = 4$

Pour la démontrer, on utilise une démonstration par réccurence.

On définit $P_n : D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix}$

On cherche donc à montrer que P_n est vraie pour tout n entier naturel positif.

Initialisation On veut montrer que P_1 est vraie.

$$P_1 \iff D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^1 \end{pmatrix} \iff D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$$

Or, on sait que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix}$, on peut donc dire que P_1 est vraie.

Hérédité On cherche à démontrer que $P_n \implies P_{n+1}$, soit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} \implies D^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour cela, on suppose, pour n fixé, que P_n est vraie.

On a donc :

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n D \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{79}{200} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Réccurence Puisque P_1 est vraie, et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \implies P_{n+1}$, on peut dire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$, soit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix}$$

e)

On a vu dans le c) que $A^n = PD^nP^{-1}$. On peut donc dire que :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{120}{121} & \frac{1}{121} \\ -\frac{1}{121} & \frac{1}{121} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 - \left(\frac{79}{200}\right)^n \\ 1 & -1 + 120\left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{121 \times 200^n + 79^n}{121 \times 200^n} & -\frac{79^n}{121 \times 200^n} \\ \frac{121 \times 200^n - 120 \times 79^n}{121 \times 200^n} & \frac{120 \times 79^n}{121 \times 200^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 + \left(\frac{79}{200}\right)^n & 1 - \left(\frac{79}{200}\right)^n \\ 120 \left(1 - \left(\frac{79}{200}\right)^n\right) & 1 + 120 \left(\frac{79}{200}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{120 \times 200^n + 79^n}{121 \times 200^n} & \frac{200^n - 79^n}{121 \times 200^n} \\ \frac{120 \times 200^n - 120 \times 79^n}{121 \times 200^n} & \frac{200^n + 120 \times 79^n}{121 \times 200^n} \end{pmatrix}$$

Exercice 90p245

1.

a)

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,9 \times p_0 + 0,4 \times q_0 \\ &= 0,9 \times 0 + 0,4 \times 1 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= (1 - 0,9) \times p_0 + (1 - 0,4) \times q_0 \\ &= 0,1 \times 0 + 0,6 \times 1 \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

b)

Le programme pourrait etre écrit plus correctement comme suit :

```
def F(n):
    p = 0
    q = 1
    for _ in range(n):
        p = 0.9 * p + 0.4 * q
        q = 1 - p
    p = round(p, 2)
    q = round(q, 2)
    return p, q
```

Si on appelle cette fonction avec $n = 4$, elle retournera le couple p_4, q_4 .

2.

a)

On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec a, b, c et d réels.

On cherche donc maintenant a, b, c et d tels que :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

Or, on peut dire, d'après l'énoncé, que :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,9p_n + 0,4q_n \\ 0,1p_n + 0,6q_n \end{pmatrix}$$

soit que :

$$\begin{pmatrix} 0,9p_n + 0,4q_n \\ 0,1p_n + 0,6q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

On peut conclure que :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$0,5B = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$A + 0,5B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or, } M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}, \text{ on a donc bien } M = A + 0,5B$$

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,8^2 + 0,8 \times 0,2 & 0,8^2 + 0,8 \times 0,2 \\ 0,8 \times 0,2 + 0,2^2 & 0,8 \times 0,2 + 0,2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = A$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,2^2 + 0,2 \times 0,8 & -0,8 \times 0,2 - 0,8^2 \\ -0,2^2 - 0,2 \times 0,8 & 0,2 \times 0,8 + 0,8^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = B$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,8 - 0,2 \times 0,8 & -0,8^2 + 0,8^2 \\ 0,2^2 - 0,2^2 & -0,8 \times 0,2 + 0,8 \times 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,2 - 0,2 \times 0,8 & 0,8 \times 0,2 - 0,2 \times 0,8 \\ -0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,8 & -0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

On utilise une démonstration par récurrence.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n : M^n = A + 0,5^n B$.

$$\textbf{Initialisation} \quad P_1 \iff M^1 = A + 0,5^1 B \iff M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hérédité On cherche à démontrer que pour tout n entier naturel positif, $P_n \implies P_{n+1}$, soit que $M^n = A + 0,5^n B \implies M^{n+1} = A + 0,5^{n+1} B$.

Pour cela, on suppose que P_n pour n fixé.

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &\iff M^{n+1} = A + 0,5^{n+1} B \\ &\iff \end{aligned}$$

e)

On sait que $X_{n+1} = MX_n$. On peut donc dire, par récurrence, que $X_{n+1} = M^n X_0$.

Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut dire que $X_{n+1} = (A + 0,5^n B)X_0 = (())$

f)

On cherche à calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8 - 0,8 \times 0,5^n)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5^n) = 0$

Par produit, puis pas somme, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8 - 0,8 \times 0,5^n) = 0,8$$