# Devoir Maison n°6

Oscar Plaisant

## Exercice 81 p 235

### 1.

$(E_1) : y' = \frac{y}{4}$

#### a.

$(E_1)$ est une équation du type $y' = ay$, avec $a$ un réel, donc les solutions de $(E_1)$ sont de la forme $f(x) = Ce^{ax}$, avec $C$ une constante réelle, soit, dans le cas de $(E_1)$ :

$$f(x) = Ce^{\frac{x}{4}}$$

, avec $C$ une constante réelle.

On cherche donc une valeur de $C$ pour laquelle $f(0) = 0,5$, soit :

$$\begin{aligned} f(0) = 0,5 \quad &\Longleftrightarrow \quad Ce^{\frac{0}{4}} = 0,5 \\ &\Longleftrightarrow \quad C = \frac{0,5}{e^0} \\ &\Longleftrightarrow \quad C = 0,4 \end{aligned}$$

on a donc : $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{4}}$

#### b.

La fonction $x \longmapsto \frac{x}{4}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et la fonction exponentielle est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{4}}$ est donc aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On sait que $\lim_{t \longmapsto +\infty} \left(\frac{t}{4}\right) = +\infty$. On sait aussi que $\lim_{t \longmapsto +\infty} \left(e^t\right) = +\infty$

Donc, on a : $\lim_{t \longmapsto +\infty} \left(e^{\frac{t}{4}}\right) = +\infty$

On en déduit que $\lim_{t \longmapsto +\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\frac{t}{4}}\right) = +\infty$, soit que :

$$\lim_{t \longmapsto +\infty} (f(t)) = +\infty$$

**c.**

On cherche la plus petite valeur de $t$ telle que $f(t) > 3$.

$$\begin{array}{rcl} f(t) > 3 & \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{4}} > 3 \\ & \Longleftrightarrow & e^{\frac{t}{4}} > 6, \text{ et, puisque } e^{\frac{t}{4}} \text{ et } 6 > 0 : \\ & \Longleftrightarrow & \frac{t}{4} > \ln 6 \\ & \Longleftrightarrow & t > 4\ln 6 \end{array}$$

la population dépasse donc les 300 individus après $4\ln 6$ jours, soit environ 7 ans et 61 jours.

## 2.

$(E) : y' = \dfrac{y}{4} - \dfrac{y^2}{12}$, $g$ est solution de $(E)$, et on a : $g(0) = 20$

**a.**

$(E') : y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}y^2$,

$\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) > 0$

$h$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h = \dfrac{1}{g}$

$g$ est solution de $(E)$ si et seulement si $g' = \dfrac{g}{4} - \dfrac{g^2}{12}$

Puisque $h = \dfrac{1}{g}$ et que $g$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et on sait que $h' = +\dfrac{g'}{g^2}$.

Si $g$ est solution de $(E)$, alors on a $g' = \dfrac{1}{4}g - \dfrac{1}{12}g^2$. Puisque $h = \dfrac{1}{g}$ et que $g$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, on a (toujours sur $\mathbb{R}^+$) :

$$\begin{array}{rcl} h' & = & \dfrac{-g'}{g^2} \\ & = & \dfrac{-\left(\dfrac{1}{4}g - \dfrac{1}{12}g^2\right)}{g^2} \\ & = & \dfrac{-\dfrac{1}{4}g + \dfrac{1}{12}g^2}{g^2} \\ & = & \dfrac{-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}g}{g} \\ & = & -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{g} + \dfrac{1}{12} \\ & = & -\dfrac{1}{4} \cdot h + \dfrac{1}{12} \end{array}$$

Ce qui équivaut a dire que $h$ est solution de $(E')$.

On a donc bien une équivalance : $h$ est solution de ()

**b.**

L'equation $(E')$ est de la forme $y' = ay + b$, on sait donc que ses solutions sont de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $C$ une constante réelle, soit, dans le cas de $h$, $x \longmapsto Ce^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{1}$

On cherche donc la valeur de $C$ telle que $h = \left(x \longmapsto Ce^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12}\right)$. Or, on sait que $h = \frac{1}{g}$. On sait également que $g(0) = 20$, on a donc $h(0) = \frac{1}{20}$, et on cherche $C$ tel que $Ce^{-\frac{1}{4}\cdot 0} - \frac{4}{12} = \frac{1}{20}$ :

$$\begin{aligned} Ce^{-\frac{1}{4}\cdot 0} - \frac{4}{12} = \frac{1}{20} \quad &\Longleftrightarrow \quad Ce^{0} = \frac{1}{20} + \frac{4}{12} \\ &\Longleftrightarrow \quad C = \frac{23}{60} \end{aligned}$$

On a donc $h : x \longmapsto \frac{23}{60}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12}$

Puisque $h = \frac{1}{g}$, on peut dire que $\frac{23}{60}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12} = \frac{1}{g}$, or, on sait que $h$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $g$ l'est et que $h = \frac{1}{g}$), on à donc :

$$\frac{23}{60}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12} = \frac{1}{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\frac{23}{60}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12}} = g$$

On a donc $g = \frac{1}{\frac{23}{60}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12}}$

**c.**

$g = \frac{1}{\frac{23}{60}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12}}$

La fonction $x \longmapsto -\frac{1}{4}x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \longmapsto e^{-\frac{1}{4}}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\frac{23}{60} > 0$, $x \longmapsto \frac{23}{60}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, la fonction inverse est strictement décroissante sur tous les intervalles de $\mathbb{R}^*$, donc la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\frac{23}{60}e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{4}{12}}$ est strictement croissante sur tous les intervalles de $\mathbb{R}^*$.

On peut donc dire que $g$ est strictement croissante sur tous les intervalles de $\mathbb{R}^*$ (donc sur $\mathbb{R}^{+*}$).

# Exercice 70 p 233

$(E) : y' + y^2 = 4$, avec $y(0) = 0$

Avec la méthode d'Euler, pour $h$ proche de 0, on obtient l'approximation suivante :

$$y(x_n + h) \approx f(x_n) + hf'(x_n)$$

soit

$$y(x_n + h) \approx f(x_n) + h\left(4 - (y(x_n))^2\right)$$

Plutôt qu'un tableur, on peut utiliser un outil adapté aux mathématiques : un langage de programmation (ici, de paradigme descriptif, donc très proche de la notation mathématique) :

On commence par régler le "pas" du calcul : $h$, soit :

```
h ← 0.1
```

Ensuite, on définit une fonction qui, a partir de l'approximation de $y(x_n)$ renvoie l'approximation de $y(x_{n+1})$ en utilisant la méthode d'Euler. On appelle cette fonction `nextStep` :

```
nextStep ← { +h×(4- *2)}
```

On définit également une fonction qui, a partir d'un nombre (son argument,  ), renvoie les valeurs de l'approximation de 1 jusqu'a ce nombre :

```
list ← {(nextStep )0}¨
```

Finalement, on définit une dernière fonction qui affiche un graphique a partir d'une liste de nombres. On définit d'abord une variable

```
      h ← 0.1
      nextStep ← { +h×(4- *2)}
      list ← {(nextStep )0}¨
      graphStep ← 0.05
      plot ← { 0:' '  '-', -graphStep}¨

       list 20
0.4
0.784
1.1225344
1.396526052
1.601497551
1.74501811
1.84050929
1.901761845
1.940092034
1.963696324
1.978085999
1.986803577
1.992064732
1.995232542
1.997137252
1.998281532
1.998968624
1.999381068
1.999628602
1.999777148
      plot list 20
 ---------
 ----------------
 -----------------------
 ----------------------------
 ---------------------------------
 -----------------------------------
 -------------------------------------
 ---------------------------------------
 ---------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
 ----------------------------------------
```