EXERCICE 1 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1. ÉTUDE DE LA FONCTION

a) étudier la parité de la fonction f

On sait, par définition qu'une fonction f est paire si et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, et qu'une fonction est impaire si et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Or, on sait que $f(-x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} = -f(x)$, on peut donc dire que la fonction f est impaire.

b) Établir le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On calcule d'abord f' :

On pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v(x) = \dfrac{-x^2}{2}$, $v'(x) = -x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)\left(e^v\right)(x) + u(x)(e^v)'(x) \\
&= 1\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right) + x\left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right) \\
&= e^{\frac{-x^2}{2}} - x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} \\
&= e^{\frac{-x^2}{2}}\left(1 - x^2\right)
\end{aligned}$$

On cherche à déterminer le signe de $1 - x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, or $1 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x^2 < 1 \Longleftrightarrow x < 1$

x	0	1	$+\infty$

signe de $e^{\frac{-x^2}{2}}$	$+$	$+$	$+$
signe de $1-x^2$	$-$	$+$	$-$
signe de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
variations de f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

c) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente est :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a)(x-a)+f(a) \\
&= \left(e^{\frac{-a^2}{2}}\left(1-a^2\right)\right)(x-a)+ae^{\frac{-x^2}{2}}\Big|_{a=0} \\
&= \left(e^{\frac{-(0)^2}{2}}\left(1-(0)^2\right)\right)(x-0)+(0)e^{\frac{-x^2}{2}} \\
&= e^0(x-0) \\
y &= x
\end{aligned}$$

d) Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflextion

Pour étudier la convexité de f, on cherche le signe de $f''(x)$.

On pose :

$$u(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$$
$$u'(x)=-xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$v(x)=1-x^2$$
$$v'(x)=-2x$$

On sait que :

$$f'(x)=u(x)v(x)$$

On en déduit que :

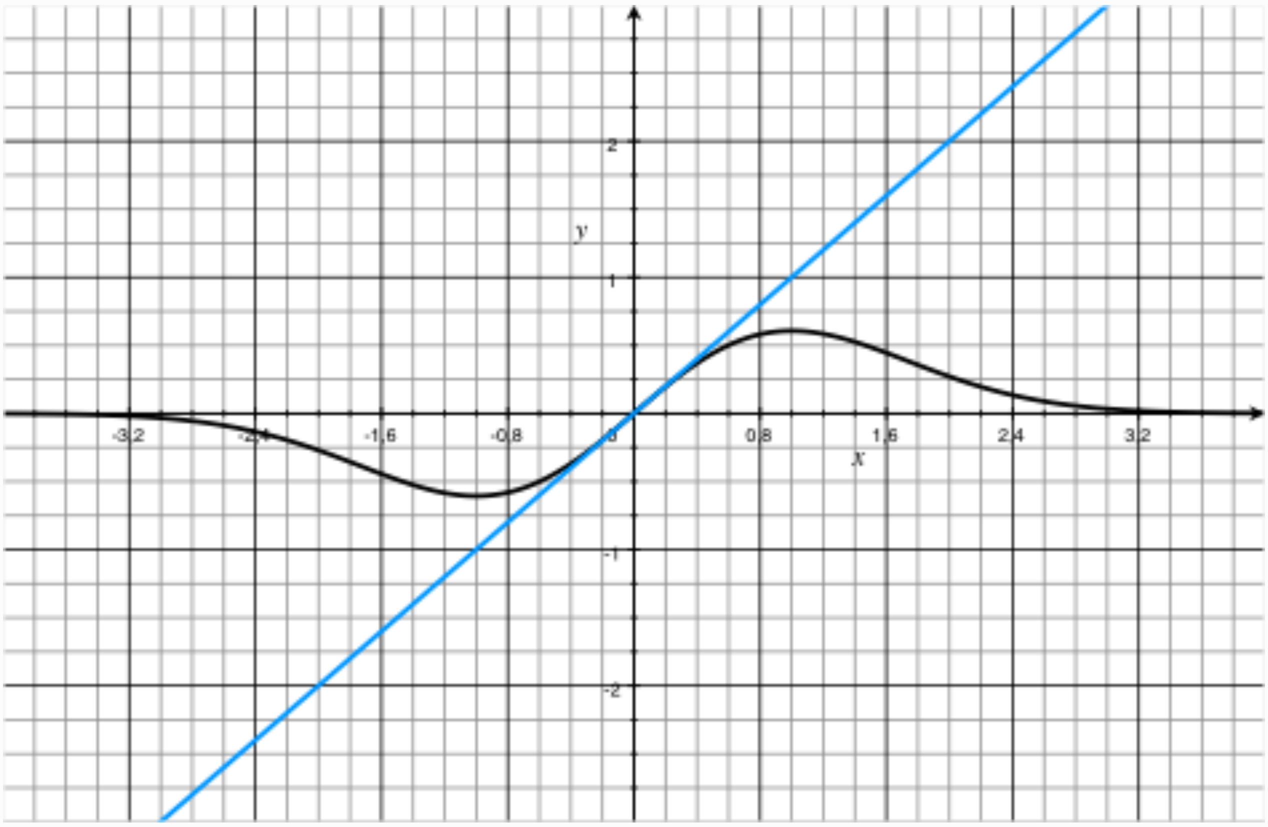
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= -xe^{\frac{-x^2}{2}}\left(1-x^2\right) - 2xe^{\frac{-x^2}{2}} \\
&= e^{\frac{-x^2}{2}}\left(-x\left(1-x^2\right) - 2x\right) \\
&= e^{\frac{-x^2}{2}}\left(x^3 - 3x\right) \\
&= e^{\frac{-x^2}{2}}\left(x\left(x^2-3\right)\right) \\
&= xe^{\frac{-x^2}{2}}\left(x^2-3\right)
\end{aligned}
$$

On sait que la fonction exponentielle est positive $\mathbb{R}$. On peut donc dire que $e^{\frac{-x^2}{2}} > 0$.
On cherche le signe de (x^2-3) : $x^2 - 3 > 0 \iff x^2 > 3 \iff -\sqrt{3} > x > \sqrt{3}$
On à donc :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\sqrt{3}$
signe de $xe^{\frac{-x^2}{2}}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
signe de x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On voit donc que f est concave sur $]-\infty; -\sqrt{3}]$, puis convexe sur $[-\sqrt{3}; 0]$, concave sur $[0; \sqrt{3}]$ et enfin convexe sur $[\sqrt{3}; +\infty]$.

e) Tracer T_0 et $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé du plan, en choisissant une unité graphique adaptée.



EXERCICE 2:

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

On utilise une démonstration par réccurence, avec la proposition $P_n : 0 \leq u_n \leq 1$

Initialisation

$P_0 \iff 0 \leq u_0 \leq 1 \iff 0 \leq 1 \leq 1$, donc P_0 est vraie.

Hérédité

On cherche à démontrer que $P_n \implies P_{n+1}$. On suppose donc que P_n est vraie.

$$\begin{aligned} P_{n+1} &\iff 0 \leq f(u_n) \leq 1 \\ &\iff 0 \leq u_n e^{\frac{-u_n^2}{2}} \leq 1 \end{aligned}$$

Or, on sait que $0 \leq u_n \leq 1$, on peut en déduire que $0 \leq u_n^2 \leq 1$, que $0 \leq \dfrac{-u_n^2}{2}$, que $e^0 \geq e^{\frac{-u_n^2}{2}} \geq e^{-1}$, et donc que $1 \geq e^{\frac{-u_n^2}{2}} \geq e^{-1}$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, car la fonction $x \mapsto \dfrac{-x}{2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, et car la fonction exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut donc en déduire que $0 \leq u_n \leq 1$, puisque la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, et donc que $e^{-1} \geq 1$.

b) Déduire de la convexité de la fonction f le sens de variation de la suite (u_n)

Pour étudier les variation de (u_n), on commence par chercher si $f(x) > x$, ce qui revient à chercher le signe de $f(x) - x$, soit le signe de $xe^{\frac{-x^2}{2}} - x = x(e^{\frac{-x^2}{2}} - 1)$. On sait que la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, et inférieure à 1 sur $\mathbb{R}^-$. On en déduit donc que $e^{\frac{-x^2}{2}} - 1$ est négatif sur $\mathbb{R}^-$, nul en $x = 0$ et positif sur $\mathbb{R}^+$, soit du signe de x. En multipliant par x, on ne change donc pas le signe. $xe^{\frac{-x^2}{2}} - x$ est donc du signe de x. Sur $\mathbb{R}^+$ (le domaine qui nous intéresse pour (u_n)), $f(x) \geq x$, et on peut donc dire que (u_n) est croissante, puisque chacun de ses termes est supérieur ou égal au précédent. On peut même dire que (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque, sur cet intervalle, $f(x) > x$.

c) On admet que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est $L = 0$. Écrire un algorithme en langage naturel de sorte qu'il détermine le plus petit rang n_0 à partir duquel, pour tout $n \leq 0$, $|u_0| \leq 10^{-1}$

Puisque l'on est en langage naturel, on pourrait dire :

```
retourner le plus petit k pour k entier naturel tel que pour tout n supérieur ou égal à k, |u(n)| est inférieur à 0.1.
```

avec `u(n)` définit comme :

```
0 si n est nul, le produit de u(n-1) et de l'exponentielle de la moitié de l'opposé de u(n-1) sinon.
```

soit :

```
retourner le plus petit k pour k entier naturel tel que pour tout n supérieur ou égal à k, la valeur absolue de la fonction qui renvoie 0 si son entrée est nulle et elle même avec pour entrée son entrée moins 1 — appelée en n est inférieur à 0.1.
```

Cependant, cette réponse ne correspond pas à certaines définitions du langage naturel. On pourra donc plutôt dire :

```
On définit f, une fonction d'argument x, qui retourne:
  x·exp(-(x·x)÷2)

On définit U, une fonction d'argument n, qui retourne :
  si n est nul : 0
  sinon : la f(U(n-1))

k ← 0
Tant que |U(n)| >= .1:
  k ← k + 1

retourner k
```

d) Coder cet algorithme en langage *Python*. Donner le programme, le saisir, l'exécuter. Indiquer la valeur de n_0 obtenue.

```python
from math import exp
def f(x: float) -> float:
    return x * exp((- x ** 2)/2)

def U(n: int) -> float:
    return 1 if not n else f(U(n - 1))

if __name__ == "__main__":
    k = 0
    while abs(U(k)) >= .1:
        k += 1
    print(k)
```

Python 3.8 permet un petit changement assez joli dans la boucle while :

```python
from math import exp
def f(x: float) -> float:
    return x * exp((- x ** 2)/2)

def U(n: int) -> float:
    return 1 if not n else f(U(n - 1))

if __name__ == "__main__":
    k = 0
    while abs(U(k := k + 1)) >= .1: pass
    print(k)
```

L'éxécution du programme affiche :

```
97
```

Ce qui signifie que n_0 vaut 97.