Exercice 1 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1. Étude de la fonction

a) étudier la parité de la fonction f

On sait, par définition qu'une fonction f est paire si et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, et qu'une fonction est impaire si et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Or, on sait que $f(-x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} = -f(x)$, on peut donc dire que la fonction f est impaire.

b) Établir le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On calcule d'abord f' :

On pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v(x) = \dfrac{-x^2}{2}$, $v'(x) = -x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\left(e^v\right)(x) + u(x)\left(e^v\right)'(x) \\ &= 1\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right) + x\left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right) \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}} - x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}}\left(1 - x^2\right) \end{aligned}$$

On cherche à déterminer le signe de $1 - x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, or $1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff x < 1$

x	0	1	$+\infty$
signe de $e^{\frac{-x^2}{2}}$	$+$	$+$	$+$
signe de $1 - x^2$	$-$	$+$	$-$
signe de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
variations de f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

c) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe C au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente est :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(a)(x-a)+f(a) \\ & = & \left(e^{\frac{-a^2}{2}}\left(1-a^2\right)\right)(x-a)+ae^{\frac{-x^2}{2}}\Big|_{a=0} \\ & = & \left(e^{\frac{-(0)^2}{2}}\left(1-(0)^2\right)\right)(x-0)+(0)e^{\frac{-x^2}{2}} \\ & = & e^0(x-0) \\ y & = & x \end{array}$$

d) Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflextion

Pour étudier la convexité de f, on cherche le signe de $f''(x)$.

On pose :

$$u(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$$
$$u'(x)=-xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$v(x)=1-x^2$$
$$v'(x)=-2x$$

On sait que :

$$f'(x)=u(x)v(x)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f''(x) \quad &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \\ &= -xe^{\frac{-x^2}{2}}\left(1-x^2\right)-2xe^{\frac{-x^2}{2}} \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}}\left(-x\left(1-x^2\right)-2x\right) \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}}\left(x^3-3x\right) \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}}\left(x\left(x^2-3\right)\right) \\ &= xe^{\frac{-x^2}{2}}\left(x^2-3\right) \end{aligned}$$

On sait que la fonction exponentielle est positive $\mathbb{R}$. On peut donc dire que $e^{\frac{-x^2}{2}}>0$.
On cherche le signe de (x^2-3) : $x^2-3>0x^2>3-\sqrt{3}>x>\sqrt{3}$

On à donc :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
signe de $xe^{\frac{-x^2}{2}}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
signe de x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On voit donc que f est concave sur $]-\infty;-3]$, puis convexe sur $[-\sqrt{3};0]$, concave sur []

`Graphique.png`

Figure 1: