

Exercice 1 :

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1. Étude de la fonction

a) étudier la parité de la fonction f

On sait, par définition qu'une fonction f est paire si et seulement si pour tout x dans \mathbb{R} , $f(-x) = f(x)$, et qu'une fonction est impaire si et seulement si pour tout x dans \mathbb{R} , $f(-x) = -f(x)$.

Or, on sait que $f(-x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} = -f(x)$, on peut donc dire que la fonction f est impaire.

b) Établir le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On calcule d'abord f' :

On pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$; $v(x) = \frac{-x^2}{2}$, $v'(x) = -x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)(e^v)(x) + u(x)(e^v)'(x) \\ &= 1 \left(e^{\frac{-x^2}{2}} \right) + x \left(-xe^{\frac{-x^2}{2}} \right) \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}} - x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}} (1 - x^2) \end{aligned}$$

On cherche à déterminer le signe de $1 - x^2$ sur \mathbb{R}^+ , or $1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff x < 1$

x	0	1	$+\infty$
signe de $e^{\frac{-x^2}{2}}$	+	+	+
signe de $1 - x^2$	-	+	-
signe de $f'(x)$	-	+	-
variations de f	\searrow	\nearrow	\searrow

c) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe C au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente est :

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= \left(e^{\frac{-a^2}{2}} (1-a^2) \right) (x-a) + ae^{\frac{-a^2}{2}} \Big|_{a=0} \\ &= \left(e^{\frac{-(0)^2}{2}} (1-(0)^2) \right) (x-0) + (0)e^{\frac{-x^2}{2}} \\ &= e^0(x-0) \\ y &= x \end{aligned}$$

d) Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion

Pour étudier la convexité de f , on cherche le signe de $f''(x)$.

On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\frac{-x^2}{2}} \\ u'(x) &= -xe^{\frac{-x^2}{2}} \\ v(x) &= 1-x^2 \\ v'(x) &= -2x \end{aligned}$$

On sait que :

$$f'(x) = u(x)v(x)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -xe^{\frac{-x^2}{2}} (1-x^2) - 2xe^{\frac{-x^2}{2}} \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}} (-x(1-x^2) - 2x) \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}} (x^3 - 3x) \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}} (x(x^2 - 3)) \\ &= xe^{\frac{-x^2}{2}} (x^2 - 3) \end{aligned}$$

On sait que la fonction exponentielle est positive \mathbb{R} . On peut donc dire que $e^{\frac{-x^2}{2}} > 0$.

On cherche le signe de $(x^2 - 3)$: $x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 3 \Rightarrow x > \sqrt{3}$

On a donc :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
signe de $xe^{\frac{-x^2}{2}}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
signe de $x^2 - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On voit donc que f est concave sur $] -\infty; -3]$, puis convexe sur $[-\sqrt{3}; 0]$, concave sur $] 0; 3]$, puis convexe sur $[3; +\infty[$.

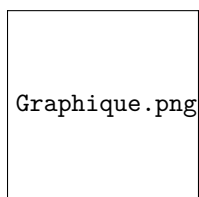


Figure 1: