Devoir maison de mathématiques n°5

Oscar Plaisant

Pour le Dimanche 31 Janvier

Exercice 1 :

On sait que seuls 4 triangles sont à considérer : RME, RMT, TMC et EMC.

Les triangles RME et RMT On cherche à montrer que

Donc, parce que l'on sait que $(s) \perp [RE]$ et que $(d) \perp [RT]$, on peut conclure que RME et RME sont tous les deux des triangles rectangles.

Le triangle CME Pour monter que le triangle CME est rectangle en E, on cherche à monter que $\vec{CE} \cdot \vec{CM} = 0$

On sait, d'après la relation de chasles, que $EM = ER + RM$.

On peut donc dire que : $$\begin{aligned} \vec{EC} \cdot \vec{EM} &= \vec{EC} \cdot \left(\vec{ER} + \vec{RM}\right) \\ &= \vec{EC} \cdot \vec{ER} + \vec{EC} \cdot \vec{RM} \end{aligned}$$

Or, [EC] et [ER] sont des cotés adjacents de RECT qui est un rectangle. EC est donc orthogonal à ER, et (d) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, donc toutes les droites sur $\mathcal{P}$ qui passent par R sont orthogonales à (d), et le vecteur $\vec{ER}$ est orthogonal au vecteur $\vec{RM}$. Les produits scalaires $\vec{EC} \cdot \vec{ER}$ et $\vec{EC} \cdot \vec{RM}$ sont donc nuls.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \vec{EC} \cdot \vec{EM} &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, on sait qu'ils sont orthogonaux, et donc que le triangle CME est rectangle en E.

Le triangle TMC Pour monter que le triangle TMC est rectangle en T, on cherche à monter que $\vec{TC} \cdot \vec{TM} = 0$

On sait, d'après la relation de chasles, que $TM = TR + RM$.

On peut donc dire que : $$\begin{aligned} \vec{TC} \cdot \vec{TM} &= \vec{TC} \cdot \left(\vec{TR} + \vec{RM}\right) \\ &= \vec{TC} \cdot \vec{TR} + \vec{TC} \cdot \vec{RM} \end{aligned}$$

Or, [TC] et [TR] sont des cotés adjacents de RECT qui est un rectangle. TC est donc orthogonal à TR, et (d) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, donc toutes les droites sur $\mathcal{P}$ qui passent par R sont orthogonales à (d), et le vecteur $\vec{TR}$ est orthogonal au vecteur $\vec{RM}$. Les produits scalaires $\vec{TC} \cdot \vec{TR}$ et $\vec{TC} \cdot \vec{RM}$ sont donc nuls.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \vec{TC} \cdot \vec{TM} &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, on sait qu'ils sont orthogonaux, et donc que le triangle TMC est rectangle en T.

Exercice 2 :

Partie A : Principe

1. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
2. On cherche le point qui est l'intersection entre l'axe des abcisses et la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

   On cherche donc à résoudre l'équation suivante pour x_1 :

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 &\iff f'(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0) \\ &\iff x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &\iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

3. On sait que f est convexe. La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au dessus de ses tangentes. Puisque $x_0 \leq c$, et que le point c a une abcisse égale à $f(c) = 0$, on sait donc que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est en dessous de la courbe au point d'abcisse c, et donc que, soit $\mathscr{T}_0$ la fonction dont la courbe représentative est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0, $\mathscr{T}_0(c)$ est inférieur à 0.

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_0(c) \leq 0 &\iff f'(c)(c - x_0) + f(x_0) \leq 0 \\ &\iff f'(c)(c - x_0) \leq -f(x_0) \\ &\iff c - x_0 \leq -\frac{f(x)}{f'(x)} \\ &\iff c \leq x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

   Or, on sait (voir le 2.) que $x_0 - \frac{f(x)}{f(x)}f'(x) = x_1$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_0(c) \leq 0 &\iff c \leq x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)} \ . \\ &\iff c \leq x_1 \end{aligned}$$

4. On procède de la même manière que pour le 2.
   A chaque étape, on cherche à nésoudre l'équation $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0 &\iff f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n) \\ &\iff x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &\iff x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

5. On utilise une démonstration par récurrence.
   On cherche à montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, c \leq x_n$

   Initialisation On sait par l'énoncé que $x_0 \geq c$, et on sait (voir le 3.) que $x_1 \geq c$.

   Récurrence Pour tout n réel, on sait que, si $x_n \geq c$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est en dessous de $\mathscr{C}_f$. Puisque le point d'abscisse c à une ordonnée $f(c) = 0$, on peut dire que, soit $\mathscr{T}_n$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $\mathscr{M}_n$, on a $x_n \leq c \implies \mathscr{T}_n(c) \leq 0$.
   Or, on sait que :

$$\begin{aligned}
x_n \leq c &\implies \mathcal{T}_n(c) \leq 0 \\
&\implies f'(c)(c - x_n) + f(x_n) \leq 0 \\
&\implies f'(c)(c - x_n) \leq -f(x_n) \\
&\implies c - x_n \leq -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&\implies c \leq x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&\implies c \leq x_{n+1}
\end{aligned}$$

Partie B : Application

1. f est une fonction polynôme du troisième degré, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est continue sur cet intervalle.
   $f'(x) = 3x^2 - 2x - 0.5$
   f' est donc une fonction polynôme du second degré.
   $$\begin{aligned}
   \Delta' &= (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -0.5 \\
   &= 4 + 6 \\
   &= 10 \\
   \Delta' &> 0
   \end{aligned}$$
   Donc, f' s'annule 2 fois sur $\mathbb{R}$
   $S = \left\{ \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} = \left\{ \dfrac{2 - \sqrt{10}}{6} ; \dfrac{2 - \sqrt{10}}{6} \right\}$
   La fonction f' a un coefficient devant x positif, donc elle possède un minimum dans $\mathbb{R}$. Ce minimum est situé au point d'abcisse $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$
   Puisque f' est une fonction polynôme du second degré, on peut dire qu'elle est croissante après son sommet (ici don minimum, en $\dfrac{1}{3}$). On peut donc dire que f' est croissante sur I, car $c > \dfrac{1}{3}$
   On sait que f' est croissante sur I et que $f'(1) = 3(1)^2 - 2(1) - 0,5 = 0,5 > 0$, on peut dire que pour tout x dans I, $f'(x) > 0$. duit que f est strictement croissante sur I.
   $f''(x) = 6x - 2$
   f'' est une fonction affine. Son coefficient dirrecteur est 6, elle est donc croissante.
   $$\begin{aligned}
   f''(x) > 0 &\iff 6x - 2 > 0 \\
   &\iff 6x > 2 \\
   &\iff x > \frac{1}{3}
   \end{aligned}$$
   Puisque, pour tout $x > \dfrac{1}{3}$, $f(x) > 0$, on peut dire que f'' est positive sur I, que f' est croissante sur I et que f est convexe sur I.

   2. f est une fonction polynôme du troisième degré, donc dérivable, et on sait qu'elle est strictement croissante sur I. f est donc continue et strictement monotone sur I. De plus, $f(1) = 1,2$ et $f(3) = 15,8$ (1 et 3 sont les bornes de l'intervalle I). D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur I.

3. programme en langage python :

```python
def f(x: int or float) -> int or float:
    return x**3 - x**2 - 0.5*x - 0.7

def derivee(x: int or float) -> int or float:
    return 3*x**2 - 2*x - 0.5

def newton(x: int or float, n: int) -> int or float:
    for i in range(n):
        x = x - (f(x) / derivee(x))
    return x
```

4. Si on souhaite avoir l'affichage de ces valeurs, on peut soit taper ceci dans la console après que le script aie été lancé :

```python
>>> for rang in range(10):
...     print(newton(3, rang))
```

soit changer le script précédent pour celui-ci (ajout des 3 dernières lignes) :

```python
def f(x: int or float) -> int or float:
    return x**3 - x**2 - 0.5*x - 0.7

def derivee(x: int or float) -> int or float:
    return 3*x**2 - 2*x - 0.5

def newton(x: int or float, n: int) -> int or float:
    for i in range(n):
        x = x - (f(x) / derivee(x))
    return x

if __name__ == "__main__":
    for rang in range(10):
        print(newton(3, rang))
```