Devoir Maison de mathématiques n°7

Oscar Plaisant

Pour le vendredi 9 avril

Exercice 1:

Partie A

$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

1. $u(1) = 0$ et $u(4) = 0$
2. On sait que $\mathscr{D}$ est une asymptote de $\mathscr{C}_u$. Or, puisque $\mathscr{D}$ à pour équation $y = 1$, on peut dire que :

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 1$$

On sait également que :

$$\begin{array}{rcl}
\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) & = & \lim\limits_{x \to +\infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) \\
 & = & \lim\limits_{x \to +\infty} (a) + \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{x} \right) + \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{c}{x^2} \right) \\
 & = & \lim\limits_{x \to +\infty} (a) + 0 + 0 \\
\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) & = & a
\end{array}$$

On peut donc dire que $a = 1$.

3. On cherche à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ u(1)=0 \\ u(4)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ a+\dfrac{b}{1}+\dfrac{c}{1^2}=0 \\ a+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{4^2}=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ 1+b+c=0 \\ 1+\dfrac{1}{4}b+\dfrac{1}{16}c=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b+c=-1 \\ b+\dfrac{1}{4}c=-4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-c-1 \\ b+\dfrac{1}{4}c=-4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-c-1 \\ -c-1+\dfrac{1}{4}c=-4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-c-1 \\ \dfrac{3}{4}c=3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-c-1 \\ c=4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{array}\right.$$

On à donc : $u(x)=1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}$

$u(x)=\dfrac{x^2-5x-4}{x^2}$ 4. On a :

$$\begin{aligned}
u(x) &= 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} \\
&= \frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \\
&= \frac{x^2 - 5x - 4}{x^2}
\end{aligned}$$

Partie B

1. On commence par chercher l'ensemble de définition de f.

ln est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ On peut donc dire que $x \mapsto x^2 - 5x\ln(x) - 4$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}_*$. On peut donc dire que $x \mapsto \frac{1}{x}\left(x^2 - 5x\ln(x) - 4\right)$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$

On peut donc dire que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)) = \lim\limits_{x\to 0^+}(f(x))$

$\lim\limits_{x\to 0^+} = \lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{x^2 - 5x\ln(x) - 4}{x^2})$

On sait que :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2) = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to ^+}(x\ln(x)) = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - 5x\ln(x) - 4) = 4$

Puisque la fonction carré tend vers 0^+ en 0, par quotient, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^2 - 5x\ln(x) - 4}{x^2}\right) = -\infty$

Soit :

$$\lim_{x\to 0^+}(f(x)) = -\infty$$

2. On cherche à déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x))$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - 5\ln(x) + \dfrac{4}{x}\right)$

On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right) = 0$.

On chercher à calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}(x - 5\ln(x))$

On pose $X = \ln(x)$. On a donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}(x - 5\ln(x)) = \lim\limits_{X\to +\infty}\left(e^X - 5X\right)$

Et, par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{X\to +\infty}\left(e^X - 5X\right) = +\infty$

Puisque $\lim\limits_{X\to +\infty}(5X) = \lim\limits_{x\to +\infty}(5\ln(x)) = +\infty$, on peut conclure que :

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x - 5\ln(x)) = +\infty$

Par somme, on obtient :

$\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x - 5\ln(x)) + \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right) = +\infty$

3. Pour x strictement positif, la fonction ln est définie. f est donc également définie.

$f'(x) = 1 - 5\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = u(x)$

On sait que $u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$

Racines de u

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$

$\Delta > 0$, u possède donc 2 racines qu'on appellera x_1 et x_2 :

$x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{9}}{2} = 1 \qquad x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{9}}{2} = 4$

x	0		1		4		$+\infty$
signe de x^2	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
signe de $x^2 - 5x + 4$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
signe de $u(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. On sait que cette courbe est la courbe représentative de u. On sait également que une primitive se u sur $\mathbb{R}_*^+$ est f.

On à donc :

$$\mathcal{A} = \int_4^1 u(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_4^1 = f(1) - f(4) = \left(1 - 5\ln(1) - \frac{4}{1}\right)\left(4 - 4\ln(4) - \frac{4}{4}\right) = 5\ln(4) - 6$$

2. On cherche une valeur de λ telle que $\int_4^\lambda u(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}$

$\displaystyle\int_4^\lambda u(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_1^\lambda = f(\lambda) - f(4) = f(\lambda) + 3 + 5\ln(4)$

On a donc :

$\displaystyle\int_4^\lambda u(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A} \iff f(\lambda) - 3 + 5\ln(4) = \mathcal{A} \iff f(\lambda) = -3$

Puisque f est continue et strictement monotone sur $[4; +\infty]$, et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on peut dire, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe une unique solution dans $[4; +\infty]$ à $f(\lambda) = -3$.

Il existe donc bien une valeur de λ pour laquelle $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}$

Exercice 2

1. Puisque [UV] et [EF] sont parallèles, et que [KM] appartient à (UVK) et à (SEF), d'après le théorème du toit, on peut affirmer que (KM) est parallèle à (UV) et à (EF)
2. On sait que (UK) et (NP) sont tous les deux sur le plan (UVK). On sait également que [UK] est sur (SOA) et que [NP] est sur (CGB). Puisque ces deux plans sont parallèles et que [UK] et [NP] sont sur un plan qui leur est sécant, on peut dire que [UK] et [NP] sont parallèles.
3. a) K est sur [ES]. On commence donc par chercher l'équation paramétrique de (ES).

On cherche à déterminer le vecteur directeur de (ES) :

$$\overrightarrow{ES}\begin{pmatrix} x_S - x_E \\ y_S - y_E \\ z_S - z_E \end{pmatrix} = \overrightarrow{ES}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ES) est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{ES}$ et qui passer par le point S.

$$(ES) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -4t + a \\ y & = & b, \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R} \\ z & = & t + c \end{array} \right.$$

et avec (a, b, c) tels qu'il existe une valeur de t telle que $(x; y; z) = (0; 0; 3,5)$, soit $(a; b; c) = (0; 0; 3,5)$

$$(ES) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -4t \\ y & = & 0 \\ z & = & t + 3,5 \end{array} \right.$$

Puisque K est sur (ES), $K(1,2; 0; 3,2) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lcl} -4t & = & 1,2 \\ 0 & = & 0 \\ 3,2 & = & t + 3,5 \end{array} \right.$, ce qui est vérifié pour $t = -0,3$. K est donc bien sur (ES).