

Devoir Maison n°6

Oscar Plaisant

Exercice 81 p 235

1.

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4}$$

a.

(E_1) est une équation du type $y' = ay$, avec a un réel, donc les solutions de (E_1) sont de la forme $f(x) = Ce^{ax}$, avec C une constante réelle, soit, dans le cas de (E_1) :

$$f(x) = Ce^{\frac{x}{4}}$$

, avec C une constante réelle.

On cherche donc une valeur de C pour laquelle $f(0) = 0,5$, soit :

$$\begin{aligned} f(0) = 0,5 &\iff Ce^{\frac{0}{4}} = 0,5 \\ &\iff C = \frac{0,5}{e^0} \\ &\iff C = 0,5 \end{aligned}$$

on a donc : $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{4}}$

b.

La fonction $x \mapsto \frac{x}{4}$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , et la fonction exponentielle est également strictement croissante sur \mathbb{R} . La fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{4}}$ est donc aussi strictement croissante sur \mathbb{R} .

On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{4}\right) = +\infty$. On sait aussi que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t) = +\infty$

Donc, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{t}{4}}\right) = +\infty$

On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\frac{t}{4}}\right) = +\infty$, soit que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = +\infty$$

c.

On cherche la plus petite valeur de t telle que $f(t) > 3$.

$$\begin{aligned} f(t) > 3 &\iff \frac{1}{2}e^{\frac{t}{4}} > 3 \\ &\iff e^{\frac{t}{4}} > 6, \text{ et, puisque } e^{\frac{t}{4}} \text{ et } 6 > 0 : \\ &\iff \frac{t}{4} > \ln 6 \\ &\iff t > 4 \ln 6 \end{aligned}$$

la population dépasse donc les 300 individus après $4 \ln 6$ jours, soit environ 7 ans et 61 jours.

2.

a.

Exercice 70 p 233

$(E) : y' + y^2 = 4$, avec $y(0) = 0$

Avec la méthode d'Euler, pour h proche de 0, on obtient l'approximation suivante :

$$y(x_n + h) \approx f(x_n) + hf'(x_n)$$

soit

$$y(x_n + h) \approx f(x_n) + h(4 - (y(x_n))^2)$$

```
h ← 0.1
nextStep ← {+h×(4- *2)}
list ← {(nextStep )0}"
graphStep ← 0.05
plot ← { 0:' ' '- ', -graphStep}"
```

```
list 20
```

```
0.4
0.784
1.1225344
1.396526052
1.601497551
1.74501811
1.84050929
1.901761845
1.940092034
1.963696324
1.978085999
1.986803577
1.992064732
1.995232542
1.997137252
1.998281532
1.998968624
1.999381068
1.999628602
```

1.999777148

plot list 20

