Devoir Maison de mathématiques

Oscar Plaisant

Exercice 1 :

$u_0 = 3$

$u_1 = 6$

$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

Partie A

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

La formule est "=(5*B3/4) + (B2/4)"

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10 - 3 près deun pour n allant de 2 à 5.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3,000
3	1	6,000
4	2	6,750
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. Que peut-on conjecturer à propose de la convergence de la suite (u_n) ?

On peut conjecturer que la suite diverge vers $+\infty$

Partie B

1.

a) Démontrer que (v_n) est une suite constante

$$\begin{aligned} v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad &\iff \quad v_{n+1} = u_{n+2} + \frac{1}{4}u_{n+1} \\ &\iff \quad v_{n+1} = \left(\frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ &\iff \quad v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ &\iff \quad v_{n+1} = v_n \end{aligned}$$

Donc, la suite (v_n) est constante. #### b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$

On sait que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n + \frac{1}{4}u_n \\ &= v_0 + \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{21}{4} + \frac{1}{4}u_n \end{aligned}$$

2.

a) En utilisant le résultat de la question 1.b), montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 15\backslash$
On pose P, la proposition : $P_n \iff u_n \leq u_{n+1} \leq 15$

Initialisation $P_0 \iff u_0 \leq u_1 \leq 15 \iff 3 \leq 6 \leq 15$

Donc, P_0 est vraie.

Hérédité On cherche à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \implies P_{n+1}$.

$$\begin{aligned} P_n \quad &\iff \quad u_n \leq u_{n+1} \leq 15 \\ &\iff \quad \frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4}u_{n+1} \leq \frac{15}{4} \\ &\iff \quad \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}u_n \leq \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} \leq \frac{15}{4} + \frac{21}{4} \\ &\iff \quad u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 9 \\ &\implies \quad u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 15 \end{aligned}$$

On à donc bien $P_n \implies P_{n+1}$

Récurrence puisque $P_0 \land \forall n \in \mathbb{N}, P_n \implies P_{n+1}$, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ b) En déduire que la suite (u_n) est une suite convergente.

La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 15, on peut donc dire qu'elle converge.

3.

a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison
On sait que :

$w_n = u_n - 7$

On peut donc en déduire que :

$w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$

Et que :

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} & = & u_{n+1} - 7 \\ & = & \frac{u_n}{4} + \frac{21}{4} - \frac{28}{4} \\ & = & \frac{u_n - 7}{4} \\ w_{n+1} & = & \frac{1}{4} w_n \end{array}$$

On à donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} w_0 & = & -4 \\ w_{n+1} & = & \frac{1}{4} w_n \end{array} \right.$$

On peut donc dire que la suite (w_n) est une suite de premier terme -4 et de raison $\frac{1}{4}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ On sait que (w_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme -4. On peut donc dire que $w_n = -4\left(\frac{1}{4}\right)^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

On sait également que $w_n = u_n - 7$, soit que $u_n = 7 + w_n$.

On peut donc dire que $w_n = u_n - 7 \iff w_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

c) calculer la limite de la suite (u_n) On sait que $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. On cherche donc à calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$:

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \left(7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} (7) - \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \\ & & \text{Or, } \frac{1}{4} \in]-1;1[\quad \text{Donc :} \\ & = & 7 - 0 \\ & = & 7 \end{array}$$