Devoir Maison de mathématiques

Antonin Peronnet, Benoit Leroux, Oscar Plaisant

Exercice 1 :

$u_0 = 3$

$u_1 = 6$

$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

Partie A

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

La formule est "=(5*B3/4) + (B2/4)"

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10 - 3 près deun pour n allant de 2 à 5.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3,000
3	1	6,000
4	2	6,750
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. Que peut-on conjecturer à propose de la convergence de la suite (u_n) ?

On peut conjecturer que la suite diverge vers $+\infty$

Partie B

1.

a) Démontrer que (v_n) est une suite constante

$$\begin{aligned} v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n & \iff & v_{n+1} = u_{n+2} + \frac{1}{4}u_{n+1} \\ & \iff & v_{n+1} = \left(\frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ & \iff & v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ & \iff & v_{n+1} = v_n \end{aligned}$$

Donc, la suite (v_n) est constante. #### b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$

On sait que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n + \frac{1}{4}u_n \\ &= v_0 + \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{21}{4} + \frac{1}{4}u_n \end{aligned}$$

2.

a) En utilisant le résultat de la question 1.b), montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 15\backslash$
On pose P, la proposition : $P_n \iff u_n \leq u_{n+1} \leq 15$

Initialisation $P_0 \iff u_0 \leq u_1 \leq 15 \iff 3 \leq 6 \leq 15$

Donc, P_0 est vraie.

Hérédité On cherche à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \implies P_{n+1}$.

$$\begin{aligned} P_n & \iff & u_n \leq u_{n+1} \leq 15 \\ & \iff & \frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4}u_{n+1} \leq \frac{15}{4} \\ & \iff & \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}u_n \leq \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} \leq \frac{15}{4} + \frac{21}{4} \\ & \iff & u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 9 \\ & \implies & u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 15 \end{aligned}$$

On à donc bien $P_n \implies P_{n+1}$

Récurrence puisque $P_0 \land \forall n \in \mathbb{N}, P_n \implies P_{n+1}$, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ b) En déduire que la suite (u_n) est une suite convergente.

La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 15, on peut donc dire qu'elle converge.

3.

a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison
On sait que :

$w_n = u_n - 7$

On peut donc en déduire que :

$w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$

Et que :

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} & = & u_{n+1} - 7 \\ & = & \dfrac{u_n}{4} + \dfrac{21}{4} - \dfrac{28}{4} \\ & = & \dfrac{u_n - 7}{4} \\ w_{n+1} & = & \dfrac{1}{4} w_n \end{array}$$

On à donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} w_0 & = & -4 \\ w_{n+1} & = & \dfrac{1}{4} w_n \end{array} \right.$$

On peut donc dire que la suite (w_n) est une suite de premier terme -4 et de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ On sait que (w_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme -4. On peut donc dire que $w_n = -4\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

On sait également que $w_n = u_n - 7$, soit que $u_n = 7 + w_n$.

On peut donc dire que $w_n = u_n - 7 \iff w_n = 7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

c) calculer la limite de la suite (u_n) On sait que $u_n = 7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$. On cherche donc à calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$:

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \left(7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} (7) - \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \\ & & \text{Or, } \dfrac{1}{4} \in]-1;1[\quad \text{Donc :} \\ & = & 7 - 0 \\ & = & 7 \end{array}$$

Exercice 2 :

1. Le périmètre du carré (en mètres) est de 4, donc : $u_0 = 4$

   Lors de la première étape, on ajoute le périmètre d'un carré de côté $\frac{1}{3}$.

   $u_1 = 4 + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$

   Lors de la deuxième étape, on rajoute encore $4 \cdot \frac{1}{9}$ au périmètre total par petit carré restants, c'est à dire 8.

   $u_2 = u_1 + 8 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{3} + \frac{32}{9} = \frac{80}{9}$

2.

— découpage en sous-carrés :

> À chaque étape, chaque carré restant est divisé en 9 sous-carrés. Ces sous-carrés ont un côté 3 fois moins grand que le carré de départ. On enlève le carré central, il reste donc 8 sous-carrés pour la prochaine étape.

Le nombre de carrés à la n-ième étape est donc 8^n

La longueur des côtés des sous-carrés est $\frac{1}{3^{n+1}}$

(pour $n = 0$, le sous-carré central est bien de côté $\frac{1}{3}$)

— augmentation du périmètre

> À chaque étape, on ajoute au périmètre total le périmètre du sous carré total.

$P_{carre} = 4 \cdot c = 4 \cdot \frac{1}{3^n}$

> Or, on ajoute à chaque étape cette quantité pour chaque nouveau sous-carré

On trouve finalement

$u_{n+1} = u_n + 4 \cdot \frac{8^n}{3^n}$

3.

— Programme python 🐍

```python
f = lambda n, v: v + 4/3*(8/3)**n


# version 3.8 +
print(u_n := 4)


for i in range(100):
    print(u_n := f(i, u_n))
```

— Programme rust 🦀

```
fn main(){
    let f = |n, prev| prev + 4.0/3.0*(8f32/3f32).powi(n);
    let mut v = 4.0;

    for i in 1..100 {
      v = f(i as i32, v);
      println!("u({}) = {}", i, v);
   }
}
```

— Programme APL 🍎

$\{\omega = 0 : 4 \diamond (\nabla \omega - 1), \omega + .25 \times (8 \div 3) * \omega\} 100$

On obtient :

5.333333333333333 8.88888888888889 18.37037037037037 43.654320987654316 111.0781893004115 290.87517146776395 770.3337905807039 2048.89010821521
5458.373621907227 14550.329658419272 38795.545755784726 103449.45534875925 275859.88093002466 735621.0158133991 1961650.7088357308 5231063.223561948
13949496.596165193 37198652.25644052 99196400.68384138 264523729.823577 705396607.5295386 1881057614.7454362 5016153633.987829 13376409685.300877
35670425822.135666 95121135520.36179 253656361382.29807 676416963680.7948 1803778569810.1196 4810076186154.985 12826869829741.293 34204986212638.113
91213296567029.62 243235457512073.66 648627886698857.8 1729674364530282.0 4612464972080746.0 1.2299906592215316e+16 3.279975091257417e+16
8.74660024335311e+16 2.332426731560829e+17 6.219804617495544e+17 1.6586145646654784e+18 4.4229721724412754e+18 1.17945924598434e+19 3.14522465595824e+19
8.387265749221974e+19 2.236604199792526e+20 5.964277866113402e+20 1.5904740976302406e+21 4.241264260347308e+21 1.1310038027592821e+22
3.016010140691419e+22 8.04269370851045e+22 2.144718322269453e+23 5.719248859385207e+23 1.5251330291693884e+24 4.067021411118369e+24 1.0845390429648983e+25
2.8921041145730623e+25 7.712277638861499e+25 2.0566073703630663e+26 5.484286320968177e+26 1.4624763522581804e+27 3.899936939355147e+27
1.039983183828039e+28 2.7732884902081045e+28 7.395435973888278e+28 1.9721162597035407e+29 5.258976692542775e+29 1.4023937846780732e+30
3.739716759141529e+30 9.972578024377409e+30 2.6593541398339757e+31 7.091611039557267e+31 1.8910962772152713e+32 5.04292340590739e+32 1.344779574908637e+33
3.586078866423032e+33 9.562876977128085e+33 2.5501005272341563e+34 6.800268072624416e+34 1.8134048193665105e+35 4.835746184977362e+35
1.289532315993963e+36 3.438752842650568e+36 9.170007580401514e+36 2.445335354773737e+37 6.520894279396632e+37 1.738905141172435e+38 4.637080376459826e+38
1.2365547670559534e+39 3.297479378815876e+39 8.793278343509003e+39 2.344874224935734e+40 6.252997933161957e+40 1.667466115509855e+41 4.44657630802628e+41
1.1857536821403412e+42 3.16200981904091e+42

4.

Démonstration par récurrence :

On a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{4}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n$$

On pose $P : P_n \iff u_n = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} \times \left(\frac{8}{3}\right)^n$

Initialisation On sait que :

$$P_0 \iff u_0 = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} \times \left(\frac{8}{3}\right)^0 = 4$$

Or, on sait que $u_0 = 4$, donc P_0 est vraie.

Hérédité On cherche à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \implies P_{n+1}$:

On suppose que P_n est vraie, soit que : $u_n = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} \times \left(\frac{8}{3}\right)^n$

On à donc :

$$\begin{aligned}
u_n = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} \times \left(\frac{8}{3}\right)^n \quad &\iff \quad u_{n+1} = \left(\frac{16}{5} + \frac{4}{5} \times \left(\frac{8}{3}\right)^n\right) + \frac{4}{3} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{n+1} \\
&\iff \quad u_{n+1} = \frac{16}{5} + \frac{4}{3} \times \left(\left(\frac{8}{3}\right)^n + \left(\frac{8}{3}\right)^{n+1}\right) \\
&\iff \quad u_{n+1} = \frac{16}{5} + \frac{4}{3} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{n+1} \times \left(\frac{3}{8} + 1\right) \\
&\iff \quad u_{n+1} = \frac{16}{5} + \frac{4}{3} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{n+1} \times \left(\frac{11}{8}\right)
\end{aligned}$$

Récurrence Puisque $P_0 \land \forall n \in \mathbb{N}, P_n$, on peut dire que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$.

5. En déduire la limite de (u_n)

On sait que :

$u_n = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} \times \left(\frac{8}{3}\right)^n$

On pose $s_n = \frac{4}{5} \times \left(\frac{8}{3}\right)^n$. (s_n) est une suite géométrique de raison $\frac{8}{3}$ et de premier terme $\frac{4}{5}$.

On sait que $\lim_{n\to+\infty}(s_n) = +\infty$, puique la raison de (s_n) est strictement supérieure à 1 (et que son premier terme est non nul).

On sait aussi que $u_n = s_n + \frac{16}{5}$. On peut donc dire que $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$

Exercice 3)

Le but est de trouver la valeur de la fraction continue suivante

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Pour cela, on définit d'abord la fonction f suivante, définie sur $\mathbb{R}_*^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$

$$f : x \mapsto 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$$

On définit également les différentes suites (u_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad u_0 \in \mathbb{R}_*^+$$

Formlation du probleme

Trouver la valeur de la fraction continue précédente correspond à trouver la limite de la suite (u_n)

Par exemple,

$$u_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u_0}}}}$$

Cependant, il faut définir quelle est le premier terme de cette suite.

On voir si cela a de l'importance, on peut calculer le deuxième terme de la suite à partir de différentes graines.

On trouve :

-4.9	-3.9	-2.9	-1.9	-0.9	0.1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1
1.69	1.70	1.72	1.76	2.14	1.52	1.60	1.63	1.64	1.64	1.65

On peut conjecturer que la suite converge vers ϕ (1.62) pour toutes les graines positives.

Cependant, pour certaines graines négatives (autour de -1), il est moins évident que la suite converge.

Dans la partie qui suit, nous nous contenterons de prouver que la suite converge pour toute graine positive

étude de f

variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$

Pout étudier les variations de f, on cherche d'abord sa dérivée :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \\ &= 1 + \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{1+x+x}{x+1} \\ &= \frac{1+2x}{x+1} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2-1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

le dénominateur est toujours positif, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ $f'(x) > 0$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

f, fonction identité et points fixes

On cherche à résoudre $x = f(x)$ sur $\mathbb{R}_*^+$

$$
\begin{aligned}
x > f(x) &\iff x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} \\
&\iff x = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}} \\
&\iff x = 1 + \frac{x}{x+1} \\
&\iff x - 1 = \frac{x}{x+1} \\
&\iff (x-1)(x+1) = x \\
&\iff x^2 - x - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Cette équation a une unique solution positive $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

C'est le point fixe de la fonction f

> Note : si on avait considéré une fonction définie dans les négatifs, on aurait trouvé une deuxième solution $\phi' = -\dfrac{1}{\phi}$
>
> et en effet, $1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi'}} = \phi'$
>
> mais la suite ne converge vers cette valeur seulement avec $u_0 = \phi'$ Pour toutes les autres valeurs négatives, on converge également vers ϕ. C'est ce que nous n'avons pas réussi à prouver.

On cherche à résoudre $x > f(x)$ sur D

$$
\begin{aligned}
x > f(x) &\iff x > 1 + \frac{x}{x+1} \\
&\iff x - 1 > \frac{x}{x+1} \\
&\iff (x-1)(x+1) > x \quad (\text{ car x+1 } > 0) \\
&\iff x^2 - x - 1 > 0
\end{aligned}
$$

$x^2 - x - 1$ ayant une seule racine positive à ϕ, c'est le seul changement de signe de cette quadratique dans l'ensemble de définition de f

On trouve que : - $f(x) > x$ sur $]0; \phi[$ - $f(x) < x$ sur $]\phi; +\infty[$

Convergence vers phi

On veut prouver que si (u_n) converge, alors sa limite sera ϕ

On suppose que (u_n) converge vers un réel L :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = L$$

On sait que f est continue sur son ensemble de définition. On a donc

$$\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$$

Donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} u_n = L \\ \\ \lim\limits_{x \to L} f(x) = f(L) \end{array} \right\} \implies \lim_{n \to \infty} f(u_n) = f(L)$$

Et par unicité de la limite, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) = \lim_{n \to \infty} u_{n+1} = \lim_{n \to \infty} u_n = L$$

Finalement, on trouve

$$L = f(L)$$

Autrement dit, Si u_n converge, elle converge vers un point fixe.

Or, ϕ est le seul point fixe dans l'ensemble de définition de f

Donc elle convergera nécéssairement vers ϕ

Comportement de (u_n) pour différentes valeurs de u_0

On distingue 2 cas :

1. $u_0 < \phi$

On prouve par récurrence la propriété $u_n < u_{n+1} < \phi$ avec $n \in \mathbb{N}$

Hérédité On sait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} u_n < u_{n+1} < \phi &\implies f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(\phi) \\ &\implies u_{n+1} < u_{n+2} < \phi \end{aligned}$$

la propriété est bien héréditaire

Initialisation On sait que $x < \phi \implies f(x) > x$

Et on est dans le cas où $u_0 < \phi$

$$\begin{aligned} u_0 < \phi &\implies f(u_0) > u_0 \\ &\implies u_1 > u_0 \end{aligned}$$

f étant strictement croissante,

$$\begin{aligned} u_0 < \phi &\implies f(u_0) < f(\phi) \\ &\implies u_1 < \phi \end{aligned}$$

Notre propriété est bien vérifiée au rang 0 :

$u_0 < u_1 < \phi$

— **conclusion**

Par récurrence, on a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1} < \phi$

On tire de cette propriété que (u_n) est

— croissante
— majorée par ϕ

Donc (u_n) converge

Donc (u_n) converge vers ϕ

2. $\phi < x$

On prouve par récurrence la propriété $\phi < u_{n+1} < u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$

— **Hérédité**

On sait que f est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}\phi < u_{n+1} < u_n &\implies f(\phi) < f(u_{n+1}) < f(u_n)\\ &\implies \phi < u_{n+2} < u_{n+1}\end{aligned}$$

la propriété est bien héréditaire

— **Initialisation**

On sait que $x > \phi \implies f(x) < x$

Et on est dans le cas où $u_0 > \phi$

$$\begin{aligned}u_0 > \phi &\implies f(u_0) < u_0\\ &\implies u_1 < u_0\end{aligned}$$

f étant strictement croissante,

$$\begin{aligned}u_0 > \phi &\implies f(u_0) > f(\phi)\\ &\implies u_1 > \phi\end{aligned}$$

Notre propriété est bien vérifiée au rang 0 :

$\phi < u_1 < u_0$

— **conclusion**

Par récurrence, on a prouvé que $\phi < u_{n+1} < u_n$

On tire de cette propriété que (u_n) est

— décroissante
— minorée par ϕ

Donc (u_n) converge

Donc (u_n) converge vers ϕ

Conclusion :

La suite (u_n) converge vers ϕ à la fois quand : - $0 < u_0 < \phi$ - $u_0 = phi$ - $u_0 > \phi$

On a donc prouvé que (u_n) converge vers ϕ pour toute graine positive.

En particulier, (u_n) converge vers ϕ avec $u_0 = 1$

Cela permet de justifier que

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}} = \phi$$