Corrigé CC1

Ceci est UN corrigé du CC1, sur certaines questions, il peut y avoir plusieurs façons de répondre qui soient valables.

Exercice 1.

1. $f_n(x) = \dfrac{n\cos(x)}{\sqrt{n^2+x^2}}$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. $f_n(x) = \dfrac{n\cos(x)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}} = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}}$

   et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}} = \dfrac{\cos(x)}{1} = \cos(x)$. f_n converge simplement vers $f = \cos$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_n = 2n\pi$. Il suffit de montrer que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ pour prouver que les f_n ne convergent pas uniformément vers f.

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{n}{\sqrt{n^2+4n^2\pi^2}} - 1\right| = \left|\frac{n}{n\sqrt{1+4\pi^2}} - 1\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}} - 1\right| \neq 0$$

   Cette quantité ne dépend pas de n et est différente de 0 donc il n'y a pas CVU des f_n.

3. (a) On rappelle l'inégalité suivante: Si $a < b$, $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(b-a)$.

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{n\cos(x)}{\cos(x) - \sqrt{n^2+x^2}}\right| &\leqslant \left|1 - \frac{n}{\sqrt{n^2+x^2}}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\sqrt{n^2+x^2} - \sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+x^2}}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{n^2+x^2-n^2}{2\sqrt{n^2}\sqrt{n^2+x^2}}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{x^2}{2n\sqrt{(n^2+x^2)}}\right| \leqslant \frac{x^2}{2n^2}
\end{aligned}$$

   avec ici, $a = n^2$ et $b = n^2 + x^2$ (et pas $a = \sqrt{n^2}$ et $b = \sqrt{n^2+x^2}$, ATTENTION) et parce que $\dfrac{1}{2(n^2+x^2)} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

   (b) Comme l'inégalité précédente est vraie sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc vraie sur $[0, M]$:

$$\sup_{x\in[0,M]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,M]} \frac{x^2}{2n^2} = \frac{M}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   donc f_n converge bien uniformément sur $[0, M]$.

4. Comme les f_n sont continues sur $[0,\pi]$ et f_n converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$, on peut appliquer le théorème interversion limite-intégrale:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi}\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= [\sin(x)]_0^{\pi} = 0-0=0
\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, avec $x\in\mathbb{R}^+$. $n^3xe^{-nx^2} = n^2f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, d'où $n^2f_n(x) = o_{+\infty}(1) \Leftrightarrow f_n(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où $\sum f_n(x) << \sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2. (a) $f_n'(x) = n(e^{-nx^2} - x(2nxe^{-nx^2})) = ne^{-nx^2}(1-2nx^2)$.
   $f_n'(x)\geqslant 0$ ssi $(1-2nx^2)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
   D'où $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = \left|f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}})\right| = \frac{n}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ et $\sum ||f_n||_{+\infty} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\sum n^{\frac{1}{2}}$ n'est pas une somme convergente donc la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Soit $a>0$. Deux cas de figure, soit $a>\frac{1}{\sqrt{2n}}\Leftrightarrow n>\frac{1}{2a^2}$, soit $a<\frac{1}{\sqrt{2n}}$, donc dépendant des valeurs de n, si $n>\frac{1}{2a^2}$, $||f_n||_\infty = nae^{-na^2}$ et $||f_n||_\infty = \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ sinon. D'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}||f_n||_\infty &= \sum_{n=1}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{2a^2}\right)}||f_n||_\infty + \sum_{n=\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{2a^2}\right)+1}^{+\infty}||f_n||_\infty \\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{2a^2}\right)}\frac{n^{1/2}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=\mathrm{Ent}\left(\frac{1}{2a^2}\right)+1}^{+\infty} nae^{-na^2}
\end{aligned}$$

   Le premier terme est une somme finie et le deuxième est une somme infinie convergente par la question 1. Donc la convergence de la série des f_n est normale sur $[a,+\infty]$.

3. Nous pouvons appliquer le théorème d'intégration terme à terme grâce à la continuité des f_n et à la question précédente nous donnant la convergence locale normale (donc

locale uniforme) sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
\int_1^x f(t)\mathrm{d}t &= \sum_{n\geqslant 1}\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\int_1^x nte^{-nt^2}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\left[-\frac{e^{-nt^2}}{2}\right]_1^x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\left(-e^{-nx^2}+e^{-n}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{e}\right)^n \\
&= -\frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})}+\frac{1}{2}\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ étant une primitive de f en x, on dérive

$$f(x)=-\frac{1}{2}\frac{-2xe^{-x^2}-2xe^{-2x^2}+2xe^{-2x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}=\frac{xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$$

4. En utilisant le développement limité de e^{-x^2} en 0 à l'ordre 2 on a:

$$\begin{aligned}
\frac{xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}=\frac{xe^{-x^2}}{(x^2+o(x^2))^2} &= \frac{xe^{-x^2}}{x^4+o(x^4)} \\
\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{x^3+o(x^3)} &= +\infty
\end{aligned}$$

Il ne saurait donc y avoir de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ car f est discontinue ($f(0)=0$) et par conservation de la continuité par CVU, on devrait avoir f continue.

Exercice 3.

1. $f_n(x)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}=\dfrac{x}{n(n+x)}$, avec $x\in\mathbb{R}^+$.

   $f_n(x)=\dfrac{x}{n(n+x)}=\dfrac{x}{n^2+nx}\leqslant\dfrac{x}{n^2}$ et en passant à la somme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}f_n(x)\leqslant x\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ qui est une somme convergente sur $\mathbb{R}^+$ d'où la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}f_n(x)$.

2. Soit $a>0$. $f_n'(x)=\dfrac{1}{(n+x)^2}>0$. Sur $[0,a]$, le sup des f_n est atteint en a d'où $||f_n||_\infty=\dfrac{a}{n^2+na}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}||f_n||_\infty=\sum_{n\geqslant 1}\frac{a}{n^2+na}\leqslant a\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$

   d'où la convergence normale sur $[0,a]$.

3. Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et par la question précédente nous avons la convergence locale normale et donc la convergence locale uniforme sur $\mathbb{R}^+$ donc par le théorème de la continuité de la somme, f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4. Vérifions les conditions du théorème de dérivation terme à terme une par une.

   - Les f_n sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$.
   - En $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout n, d'où $f(0) = 0$.
   - Soit $M > 0$, $f_n''(x) = \dfrac{-2}{(n+x)^3} < 0$ donc sur $[0, M]$, le sup des f_n' est atteint en 0. $||f_n'||_\infty = f_n'(0) = \dfrac{1}{n^2}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} ||f_n'||_\infty = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ d'où la convergence locale normale (donc uniforme) sur $\mathbb{R}^+$.

   Par le théorème de dérivation terme à terme, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2}$.

5.

$$\begin{aligned}
f(x+1) - f(x) &= \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} \right) - \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+x+1} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+x} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+x} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+x+1} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+x} - \sum_{\substack{n'\geqslant 2 \\ n'=n+1}} \frac{1}{n'+x} \\
&= \frac{1}{x+1} + \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n+x} - \sum_{n'\geqslant 2} \frac{1}{n'+x} \\
&= \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$