Correction Feuille 1 L2 Geom. (1)

Exo 1

(1) Si $\forall i \in I$ F_i ss-e-v de E alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sev

Pr $\forall i \in I$ $0_E \in F_i \Rightarrow 0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$

Soit $v_1, v_2 \in \bigcap_{i\in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mq $\lambda v_1 + \mu v_2 \in \bigcap_{i\in I} F_i$

$\forall i$ $\lambda v_1 + \mu v_2 \in F_i$ car F_i ss-ev

$\Rightarrow \lambda v_1 + \mu v_2 \in \bigcap_{i\in I} F_i \Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sev.

(2) Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G \Rightarrow F \cup G$ ss ev.

m chose si $G \subset F$

Si $F \not\subset G$ alors $\exists v_F \in F$ et $v_F \notin G$

De même si $G \not\subset F$ alors $\exists v_G \in G$ et $v_G \notin F$

Donc si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ m.q. $v_F + v_G \notin F$ et $v_F + v_G \notin G$

Sinon $v_F + v_G \in F \Rightarrow (v_F + v_G) - v_F \in F$

i.e. $v_G \in F$ ce qui contredit l'hypothèse.

De même $v_F + v_G \notin G \Rightarrow v_F + v_G \notin G$.

On a donc montré que :

$F \not\subset G$ et $G \not\subset F \Rightarrow F \cup G$ n'est pas un sev. On a donc

la contraposée : $F \cup G$ sev $\Rightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

CQFD.

Ex1 3 $F+G = \{ v+w \ : \ v \in F \text{ et } w \in G \}$

Si F, G ssev alors $F+G$ ssev

Pr :

- $0_E = 0_E + 0_E \in F+G$
- Si $z_1, z_2 \in F+G$ $z_1 = v_1 + w_1$ $v_1, w_1 \in F$ et $z_2 = v_2 + w_2$ $v_2, w_2 \in G$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$z_1 + \lambda z_2 = (v_1 + w_1) + \lambda(v_2 + w_2) =$
$(v_1 + \lambda v_2) + (w_1 + \lambda w_2)$ or $v_1 + \lambda v_2 \in F$
de m. $w_1 + \lambda w_2 \in G \Rightarrow z_1 + \lambda z_2 \in F+G$.

4 St $\alpha \in \mathbb{R}$ H_α est un plan vectoriel

Pr : $H_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -u-\alpha t \\ u \\ t \end{pmatrix} : u, t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

Remarque $H_\alpha \supset \text{vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ H_α est un plan vectoriel qui contient la droite $D = \text{vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc si $\alpha \neq \beta$ (3)

$H_\alpha \cap H_\beta \supset D$.

Mq $H_\alpha \cap H_\beta = D$

Par exemple : $H_\alpha \cap H_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} x+y+\alpha z = 0 \\ x+y+\beta z = 0 \end{matrix} \right\}$

On résoud :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\alpha z = 0 \\ (\beta-\alpha) z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = D.$$

$$H_\alpha + H_\beta = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in H_\alpha + H_\beta$$

Ces 3 vecteurs sont libres :

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - b\alpha - c\beta = 0 \\ a = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ -b\alpha + b\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Donc $H_\alpha + H_\beta = \mathbb{R}^3$.

Ex 2 :

1. Montrer que l'ensemble des matrices 2×2 à coeff. réels de déterminant non nul est un groupe pour la multiplication de matrices, qu'on notera $Gl(2, \mathbb{R})$.

2. Montrer que l'ensemble des éléments de $Gl(2, \mathbb{R})$ qui commutent avec tout autre élément de $Gl(2, \mathbb{R})$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.