TD2 $\begin{cases} \text{Exo 1 : Correction} \\ \text{Exo 2 :} \end{cases}$

(1)

Soit $S \in O^-(2,\mathbb{R})$ alors $S = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 & (1) \\ c^2+d^2=1 & (2) \\ ac+bd=0 & (3) \\ ad-bc=-1 & (4) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow \exists!\, \theta \in [0,2\pi[$ tq $a=\cos\theta \quad b=\sin\theta$

(2) $\Rightarrow \exists!\, \theta' \in [0,2\pi[$ tq $c=\cos\theta' \quad d=\sin\theta'$

(3) $\Rightarrow \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0 \Rightarrow \cos(\theta-\theta')=0$

$\Rightarrow \theta-\theta' = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

(4) $\Rightarrow \cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' = -1 \Rightarrow \sin(\theta'-\theta)=-1$

$\Rightarrow \theta'-\theta = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$

(3) et (4) $\Rightarrow \theta' = -\frac{\pi}{2}+\theta+2k\pi$

$\Rightarrow \quad c=\cos\theta' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+2k\pi\right) = \sin\theta$

$d=\sin\theta' = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+2k\pi\right) = -\cos\theta$

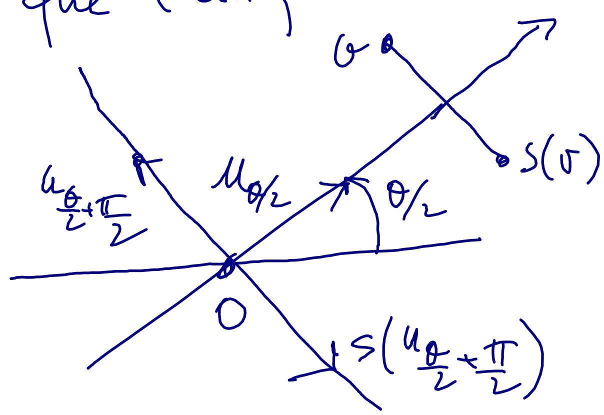
$\Rightarrow \boxed{S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}$ et $\theta\in[0,2\pi[$ est unique.

② $S_\theta u_{\theta/2} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 \\ \sin\theta/2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\theta/2 \\ \sin\theta\cos\theta/2 - \cos\theta\sin\theta/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta-\theta/2) \\ \sin(\theta-\theta/2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta/2 \\ \sin\theta/2\end{pmatrix}$

$= u_{\theta/2}$ ($u_{\theta/2}$ est un vecteur directeur unitaire de l'axe de symétrie de S_θ. Noter que l'angle est moitié de θ)

De m̂ on montre que $s(u_{\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}) = -u_{\frac{\theta}{2}+\pi/2}$



Rem : $s(v)+v = 2\langle u_{\theta/2}, v\rangle \ \forall v$

③ $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}-2\end{pmatrix}$ ne sont pas de m̂ longueurs
$\Rightarrow \nexists$ de rotation vectorielle qui envoie l'un sur l'autre

④ On cherche φ tq. $S_\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ i.e. $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi[$

$\Rightarrow$

$S = S_{\pi/4} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ (l'axe fait un angle $\frac{\pi}{8}$ avec $\overrightarrow{Ox}$)

Exo 2

Par définition, p est l'application linéaire : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
tq $p(\vec{u}) = \vec{u}$ et $p(\vec{v}) = \vec{0}$.

Donc, dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, la matrice de p est :

$$P_{\mathcal{B}} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) En général, si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre
c'est une base de $\mathbb{R}^2$ et donc
$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(\vec{u}) \oplus \mathrm{Vect}(\vec{v})$$
Donc $\forall v \in \mathbb{R}^2$ $\exists!\, v_1 \in \mathrm{Vect}(u)$ et
$\exists!\, v_2 \in \mathrm{Vect}(v)$ tq
$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$
On définit la projection sur $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ parallèlement
à $\mathrm{Vect}(\vec{v})$ comme : $P\begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} \longmapsto \vec{v_1} \end{pmatrix}$

Question : vérifier que p est linéaire.

(3) Voir Pagines

(p linéaire)

(4) $p(\vec{u}) = \vec{u} \iff p(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = \vec{e_1} + \vec{e_2} = p(\vec{e_1}) + p(\vec{e_2})$

$p(\vec{v}) = \vec{0} \iff p(\vec{e_1}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{e_1} + \vec{e_2} = p(\vec{e_2}) \Rightarrow P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{B} = \{e_1, e_2\})$

(Faites une figure)

(5). On peut normaliser $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on remplace $\vec{u}$ par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, ...)

On suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

Si S est une symétrie orthogonale telle que $S(\mathrm{Vect}(u)) = \mathrm{Vect}(v)$ alors $S(\vec{u}) = \lambda \vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\|S(\vec{u})\| = 1 \Rightarrow$

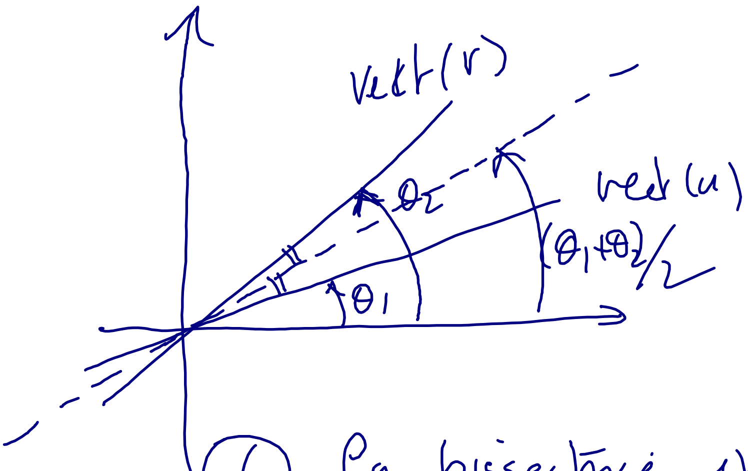
$\Rightarrow \|\lambda \vec{v}\| = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\exists \theta_1, \theta_2$ tq $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$. On cherche φ

tq $S_\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$ ie tq

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\boxed{\varphi = \theta_1 + \theta_2}$



De même

On cherche ψ tq

$$S_\psi(u) = v$$

On trouve $\psi = \theta_1+\theta_2+\pi$

(6) La bissectrice intérieure est $\text{vect}\left(\vec{u}_{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)$ et l'anti bissectrice (extérieure) est $\text{vect}\left(\vec{u}_{\frac{\theta_1+\theta_2+\pi}{2}}\right)$ et fait bien un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec la première.