Correction TD 1 exo 3

1

3

1) F et G sont supplémentaires dans E ssi

$F \oplus G = E$ (E est somme directe de F et G)

De façon équivalente $F \oplus G = E$ si tout vecteur de E s'écrit de <u>façon unique</u> comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G

2) F est un plan vectoriel. De plus

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

i.e. $$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ qui est une droite vectorielle

On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$ donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Et comme $\dim F + \dim G = 3$ $\quad F + G = \mathbb{R}^3$

Finalement $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

3) toute droite vectorielle vect(v) tel que $v \notin F$ est supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

2.

4) Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ $\forall v \in \mathbb{R}^3$ $\exists! \, v_F \in F$ et $\exists! \, v_G \in G$ tq $v_F + v_G = v$

Donc les applications $p_F \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v \longmapsto v_F \end{pmatrix}$ et $p_G \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v \longmapsto v_G \end{pmatrix}$ sont bien définies.

Elles sont linéaires. Montrons le pour p_F

- $v + w = p_F(v+w) + p_G(v+w)$

Mais $v = p_F(v) + p_G(v)$ et $w = p_F(w) + p_G(w)$

Donc $p_F(v) + p_F(w) + p_G(v) + p_G(w) = p_F(v+w) + p_G(v+w)$

Mais la décomposition en somme d'éléments de F et de G est $\underline{\text{unique}}$, et comme F (resp G) est un ss.e.v

$p_F(v) + p_F(w) \in F$ (resp. $p_G(v) + p_G(w) \in G$)

On a donc $p_F(v+w) = p_F(v) + p_F(w)$ (de même pour p_G)

- Aussi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda v = p_F(\lambda v) + p_G(\lambda v)$

$= \lambda p_F(v) + \lambda p_G(v)$. Par unicité de la décomposition

$p_F(\lambda v) = \lambda p_F(v)$ (idem pour p_G)

5) $\ker p_F = \{ v : v_F = 0 \}$

Comme $v = v_F + v_G \Rightarrow v = v_G$

et tout vecteur de G s'écrit comme $0 + v_G$

Donc $\ker p_F = G$ (de même $\ker p_G = F$)

$\mathrm{Im}\, p_F = \{ p_F(v) : v \in \mathbb{R}^3 \} = \{ v_F : v \in \mathbb{R}^3 \} = F$

(de même $\mathrm{Im}\, p_G = G$)

On dit que p_F est la projection sur F parallèlement à G.

Donc $\mathbb{R}^3 = \ker p_F \oplus \mathrm{Im}\, p_F$

Si $v \in \ker p_F$, $p_F(v) = 0_{\mathbb{R}^3} = 0.v$

Donc les éléments de $\ker p_F$ sont des vecteurs propres de valeur propre 0 de p_F

Si $v \in \mathrm{Im}\, p_F$ $v \in F$ donc $p_F(v) = v = 1.v$

Donc les éléments de $\mathrm{Im}\, p_F$ sont des vecteurs propres de valeur propre 1

6) $p_F(p_G(v)) = p_F(v_G) = 0$ car $v_G \in G = \ker p_F$

vrai pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\boxed{p_F \circ p_G = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$.

De même $\boxed{p_G \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$

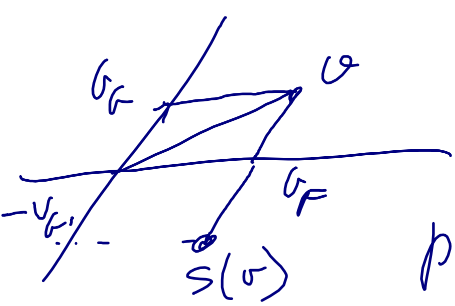
$\forall v \quad v = v_F + v_G = p_F(v) + p_G(v) = (p_F + p_G)(v)$

$\Rightarrow \boxed{p_F + p_G = Id.}$

7) $s \circ s = (p_F - p_G) \circ (p_F - p_G) = p_F^2 - p_G \circ p_F - p_F \circ p_G + p_G^2$

$= p_F^2 + p_G^2 = p_F + p_G = Id$

S est donc une symétrie (c'est la symétrie autour de F parallèlement à G)

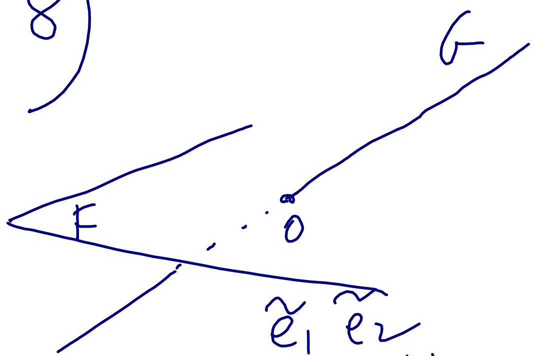


si $v \in F$ $s(v) = (p_F - p_G)(v) = v$

si $v \in G$ $s(v) = 0 - v = -v$

Donc F est l'ensemble des vecteurs propres de valeur propre 1 de S et G est l'ensemble des vecteurs propres de valeur propre -1 de S.

8)



$$F = \operatorname{Vect}\left(\underset{\tilde{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\tilde{e}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right) \text{ (par exemple) et } G = \operatorname{Vect} \underset{\tilde{e}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est c.l. des vecteurs $\tilde{e}_1$ $\tilde{e}_2$ $\tilde{e}_3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On résoud

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \beta + 2\gamma = x + y \\ 3\gamma = z + (x+y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = (x+y+z)\frac{1}{3} \\ \beta = x + y - \frac{2}{3}(x+y+z) = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2}{3}z \\ \alpha = x - (x+y+z)\frac{1}{3} - \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2}{3}z\right) \end{cases}$$

$$= \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z$$

Donc si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$

$$P_G(v) = \frac{1}{3}(x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donc $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de P_F dans la base canonique (Remarquer que $P_F(e_1)$ $P_F(e_2)$ $P_F(e_3)$ sont tous colinéaires à $e_1+e_2+e_3$)

$$\Rightarrow P_G : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$S : P_F - P_G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$