Solutions des exercices supplémentaires 1

Ex 1

$n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 0$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$

1°/ $f_n(x) = \dfrac{nx}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)}} = \dfrac{nx}{n\sqrt{1+x^2/n^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}} = 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}} = x$

Ainsi on a (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f(x) = x$.

2°/ $x_n = n$, $f_n(x_n) - f(x_n) = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+n^2}} - n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)n$

On a $\sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Conclusion la converge de la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$.

3°/ a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq 0$, on a :

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \frac{x\sqrt{n^2+x^2} - nx}{\sqrt{n^2+x^2}} \right| = \frac{x}{\sqrt{n^2+x^2}} \left| \sqrt{n^2+x^2} - n \right|$$

D'après l'inégalité $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$ on a

$\left|\sqrt{n^2+x^2} - n\right| = \left|\sqrt{n^2+x^2} - \sqrt{n^2}\right| \leq \sqrt{x^2} = x$. Il vient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^2}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{n^2}} = \frac{x^2}{n} \quad (n^2+x^2 \geq n^2)$$

Ainsi on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n}$$

b) Soit $M>0$. D'après 3°. a) on a

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,M] \quad |f(x)-f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{M^2}{n}$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,M]} |f(x)-f_n(x)| \leq \frac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,M]} |f(x)-f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Conclusion $(f_n)_n$ cv. uniformément sur $[0,M]$ $\forall M>0$

Ex 2

$n\in\mathbb{N}^*$, $x\geq 0$ $\quad f_n(x)=n\left(e^{x/n}-1\right)$

1°/ Pour $x=0$ $\quad f_n(0)=0 \quad f_n(0)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Pour $x>0$ On a $\frac{x}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. et comme $e^t-1 \underset{0}{\sim} t$ on obtient

$f_n(x)=n\left(e^{x/n}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} n\frac{x}{n}=x \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=x$

Ainsi on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=x=f(x) \quad \forall x\geq 0$

2°/ $x_n=n \quad f_n(x_n)-f(x_n)=n\left(e^1-1\right)-n=n\left(e^{-1}-2\right)$

On a $\quad \sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(x_n)-f(x_n)|=\left(e^{-1}-2\right)n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x)-f(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$. Conclusion la convergence de la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$.

3°/ Montrons que la convergence est uniforme sur $[0,a]$ $\forall a>0$

On cherche le $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x)-f(x)|$. Posons $\varphi_n(x)=f_n(x)-f(x)$, $x\geq 0$

$\varphi_n(x)=n\left(e^{x/n}-1\right)-x$, $\varphi_n'(x)=e^{x/n}-1\geq 0$ $\quad \varphi_n$ est croissante

sur $[0,+\infty[$ $\Rightarrow \forall x\in[0,a], 0=\varphi_n(0)\leq\varphi_n(x)\leq\varphi_n(a)$.

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,a]} |\varphi_n(x)|=\varphi_n(a) \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x)-f(x)|=\varphi_n(a)=f_n(a)-f(a)\to 0$

Conclusion $(f_n)_{n\geq 1}$ cv uniformément sur $[0,a]$, $\forall a>0$

4) Posons $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{1+x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 0$. D'après 1°/ on a

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = \frac{x}{1+x^2} = g(x), \ \forall x \geq 0.$$ $(g_n)_{n\geq 1}$ CV simplement vers la fonction

$g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Montrons que la CV est uniforme sur $[0,1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$ on a

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{1+x^2} |f_n(x) - x| \leq |f_n(x) - x| = |f_n(x) - f(x)|$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$ (D'après 3°/ $(f_n)_n$ cv unif sur $[0,1]$)

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x) - g(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$ donc $(g_n)_n$ cv unif sur $[0,1]$

D'après le théorème du cours on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 g_n(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$ Conclusion : $\underline{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{f_n(x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\ln 2}{2}}$

Ex 3

$n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}}$

1°/ Pour $x < 0$, on a $e^{nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $f_n(x) \longrightarrow x$.

Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Pour $x > 0$, on a $e^{nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{1+e^{nx}} \longrightarrow 0$

Ainsi on a $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2°/ a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \leq 0$, $|f_n(x) - F(x)| = \left| \dfrac{x}{1+e^{nx}} - x \right| = \dfrac{|-x e^{nx}|}{1+e^{nx}} \leq -x e^{nx}$

$\left(1 + e^{nx} \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+e^{nx}} < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \geq 0, \ \left|f_n(x) - F(x)\right| = \dfrac{x}{1+e^{nx}} \leq x\, e^{-nx}$.

$\left(1+e^{nx} \geq e^{nx} \Rightarrow \dfrac{1}{1+e^{nx}} \leq \dfrac{1}{e^{nx}} = e^{-nx}\right)$

b) $\theta_n(x) = x\, e^{-nx}, \ x \geq 0 \quad \theta_n'(x) = e^{-nx} - nx\, e^{-nx} = (1-nx)\, e^{-nx}$

x	0		$1/n$		$+\infty$
$\theta_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\theta_n(x)$	0	$\nearrow$	α_n	$\searrow$	0

$\alpha_n = \theta_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{e^{-1}}{n}$

$\sup\limits_{x \geq 0} x\, e^{-nx} = \dfrac{e^{-1}}{n}$

c) D'après 3°_a) on a

. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0 \ \left|f_n(x) - F(x)\right| \leq x\, e^{-nx} \leq \dfrac{e^{-1}}{n}$

. Si $x \leq 0$ on a $-x \geq 0$ et d'après b) on a $-x\, e^{nx} \leq \dfrac{e^{-1}}{n}$. Il vient

. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \leq 0 \ \left|f_n(x) - F(x)\right| \leq -x\, e^{nx} \leq \dfrac{e^{-1}}{n}$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$ on a $\left|f_n(x) - F(x)\right| \leq \dfrac{e^{-1}}{n}$

$\Rightarrow \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|f_n(x) - F(x)\right| \leq \dfrac{e^{-1}}{n}, \ \dfrac{e^{-1}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|f_n(x) - F(x)\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

3°/ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n'(x) = \dfrac{1+e^{nx} - nx\, e^{nx}}{(1+e^{nx})^2} = \dfrac{1}{1+e^{nx}} - \dfrac{nx\, e^{nx}}{(1+e^{nx})^2}$

Si $x < 0$, $e^{nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $n\, e^{nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow f_n'(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Si $x = 0$ $\quad f_n'(0) = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$

Si $x > 0$ on a $e^{nx} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{1+e^{nx}} \longrightarrow 0$

$\dfrac{nx\, e^{nx}}{(1+e^{nx})^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{nx\, e^{nx}}{(e^{nx})^2} = nx\, e^{-nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad (x > 0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{nx\, e^{nx}}{(1+e^{nx})^2} = 0$. On obtient $f_n'(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Finalement on a $f_n'(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4) Les fonctions f_n' sont continues sur $\mathbb{R}$. G n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (G n'est pas continue en 0). Donc la convergence de (f_n') n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Ex4

$f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ f continue $f(0)=0$ et $f \not\equiv 0$

$n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 0$ $f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$

1/ On a $\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, f est continue en 0 on a $f\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = 0$

Ainsi on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \equiv 0$, $\forall x \geq 0$

2/ $x_0 > 0$ / $f(x_0) \neq 0$ (x_0 existe car $f \not\equiv 0$). On pose $u_n = n x_0$

On a $f_n(u_n) - f(u_n) = f(x_0)$ et

$$|f(x_0)| = |f_n(u_n) - f(u_n)| \leq \sup_{t \geq 0} |f_n(t) - f(t)|$$

Si $(f_n)_n$ cv uniformément sur $[0,+\infty[$ on aura

$\sup_{t\geq 0} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on obtient $|f(x_0)| \leq 0$ i.e. $f(x_0) = 0$

Ce qui est absurde. Conclusion la convergence de $(f_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$.

3/ a) Soit $\varepsilon > 0$ f étant continue en 0, on a :

$$\exists a > 0 / \ \forall x \in [0,a] \ |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon \quad (f(0)=0)$$

$$\Rightarrow \exists a > 0 / \ \forall x \in [0,a] \ |f(x)| \leq \varepsilon \quad (*)$$

b) $M > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ / $\frac{M}{n_0} \leq a$

$\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [0,a]$, on a $0 \leq \frac{x}{n} \leq \frac{x}{n_0} \leq \frac{M}{n_0} \leq a$

$\Rightarrow \forall n \geqslant n_0 \; \forall x \in [0, M]$ on a $0 \leq \frac{x}{n} \leq a$ et $(*)$ nous donne que $|f(\frac{x}{n})| \leq \varepsilon$ i.e $|f_n(x)| \leq \varepsilon$

Ainsi on a montré que :

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall x \in [0, M]$, on a $|f_n(x)| \leq \varepsilon$

Ceci nous donne par définition de la cv uniforme que :

$(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, M]$ vers la fonction $f \equiv 0$.

Ex 5

$n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad f_n(x) = \dfrac{n(1 - e^{-x/n})}{(1+x^2)^2}$

1/ Pour $x = 0$ $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$

Pour $x > 0$, on a $\frac{x}{n} \longrightarrow 0$ et comme $1 - e^{-t} \underset{0}{\sim} t$, on obtient

$$n(1 - e^{-x/n}) \sim n \frac{x}{n} = x \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n(1 - e^{-x/n}) = x$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \frac{n(1 - e^{-x/n})}{(1+x^2)^2} \longrightarrow \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Conclusion on a $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \geqslant 0$.

2°/ a) $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geqslant 0$ $\quad \varphi_n(x) = x - n(1 - e^{-x/n})$

$\varphi_n'(x) = 1 - e^{-x/n} \geqslant 0$ car $x \geqslant 0 \Rightarrow \varphi_n$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et on a $\forall x \geqslant 0$, $0 = \varphi_n(0) \leq \varphi_n(x)$: $\underline{0 \leq \varphi_n(x), \forall x \geqslant 0}$.

b) $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, a]$, on a

$$f(x) - f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{n(1 - e^{-x/n})}{(1+x^2)^2} = \frac{\varphi_n(x)}{(1+x^2)^2}$$

D'après a) on a $0 \leq \varphi_n(x) \Rightarrow \underline{0 \leq f(x) - f_n(x)}$

De plus on a $\varphi_n \nearrow$ sur $\mathbb{R}^+ \Rightarrow \varphi_n(x) \leq \varphi(a) \; \forall x \in [0, a]$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{(1+x^2)^2} \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(a)$$

Ainsi on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,a] \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varphi_n(a) \quad (*)$

c) D'après $(*)$ on a $\forall a > 0 \quad \sup_{x \in [0,a]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varphi_n(a)$ et on a

$\varphi_n(a) = a - n(1 - e^{-a/n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \left(n(1 - e^{-a/n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} a \text{ voir } 1°/ \right)$

d'où $\sup_{x \in [0,a]} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Conclusion (f_n) cv uniformément sur $[0,a]$ $\forall a > 0$

3°/ • $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ cv ? f est continue sur $[0, +\infty[$. Ph en $+\infty$

$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \sim \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ cv donc $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ cv

• $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ cv ? f_n est continue sur $[0, +\infty[$. Ph en $+\infty$

D'après 2°/b) on a $0 \leq f(x) - f_n(x)$ $\forall x \in [0, +\infty[$

$\Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq f(x)$. $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ cv donc $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ cv

• $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. On utilise le Th de convergence dominé.

• f_n est continue $f_n \to f$ unif sur $[0,a]$ $\forall a > 0$

$|f_n(x)| \leq f(x)$. et $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. cv

Le Th de convergence dominé nous donne que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,d$

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$

Finalement on a $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$