# Université de Tours 2020-2021

## L2-S3 UE 3-1 Algèbre

## Exercices complémentaires III (Réduction)

Parmi les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ci-dessous, lesquelles sont diagonalisables (resp. trigonalisables) et dans ce cas les diagonaliser (resp.trigonaliser) :

|| L'endomorphisme associé à chacune des matrices sera noté pour simplifier $f$.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

• $P_f = P_A = \begin{vmatrix} 4-X & -4 & 4 \\ 3 & -3-X & 4 \\ 3 & -3 & 4-X \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 4-X & -4 & 0 \\ 3 & -3-X & 1-X \\ 3 & -3 & 1-X \end{vmatrix}$

$\underset{C_2 \to C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 4-X & -X & 0 \\ 3 & -X & 1-X \\ 3 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(X-1) \begin{vmatrix} 4-X & +1 & 0 \\ 3 & +1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\underset{L_2 \to L_2 - L_3}{=} -X(X-1) \begin{vmatrix} 4-X & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-X(X-1)(X-4)}$

$\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(f) = \{0, 1, 4\}$

$f$ (resp. $A$) a 3 val. propres simples, donc il est diagonalisable.

• $E_f(0) = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}((1,1,0))$

$E_f(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(0,1,1)$

et

$E_f(4) = \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$



(A faire)

(suite Exo 1)

- Et si on note :

$\mathcal{B} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$

dans cette base, on a :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

et $D = P^{-1} A P$

où $P = P_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

• $P_f = P_B = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 \\ 0 & 2-x & 2-x \end{vmatrix}$

$= (2-x)\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_2 - C_3}{=} (2-x)\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-x)^2(1-x)$

$\mathrm{Spec}(f) = \{2 \text{ (double)}, 1\}$

or $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

et donc $rg(f - 2id) = rg(B - 2I_3) = 1$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(f - 2id) = \dim E_f(2) = 2$

et donc $f$ (resp. $A$) est diagonalisable.

• on trouve :

$E_f(1) = \mathrm{Vect}(1, 1, -1)$

(suite Exo 2)

et $E_f(2) = \text{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$

Dans la base

$B = ((1,1,-1),(1,1,0),(1,0,1))$

on a :

$$\underset{B}{\text{mat}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1} B P$

où $P = P_{\mathcal{B}_\varepsilon \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.

$$C = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

- $P_f = P_C = \begin{vmatrix} -7-X & -16 & 4 \\ 6 & 13-X & -2 \\ 12 & 16 & 1-X \end{vmatrix} \underset{L_1 \to L_1+L_3}{=} \begin{vmatrix} 5-X & 0 & 5-X \\ 6 & 13-X & -2 \\ 12 & 16 & 1-X \end{vmatrix}$

$= (5-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 13-X & -2 \\ 12 & 16 & 1-X \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 - C_1}{=} (5-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 13-X & -8 \\ 12 & 16 & -11-X \end{vmatrix}$

$= (5-X)\begin{vmatrix} 13-X & -8 \\ 16 & -11-X \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1+C_2}{=} (5-X)\begin{vmatrix} 5-X & -8 \\ 5-X & -11-X \end{vmatrix}$

$= -(5-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 11+X \end{vmatrix} = \boxed{-(5-X)^2(X+3)}$

$\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(C) = \{-3, 5 \text{ (double)}\}$

De plus, $C - 5I_3 = \begin{pmatrix} -12 & -16 & 4 \\ 6 & 8 & -2 \\ 12 & 16 & -4 \end{pmatrix}$

avec $L_1 = -L_3$ et $L_3 = 2L_2$

donc $\mathrm{rg}(C - 5I_3) = 1$

et $\dim E_f(5) = 2$.

Ainsi $f$ (resp. $C$) est diagonalisable.

• On trouve (A faire) :

$E_f(-3) = \mathrm{Vect}(2,1,-2)$

et $E_f(5) = \mathrm{Vect}((1,0,3),(0,1,4))$

et dans la Base

$\mathcal{B} = ((2,1,-2),(1,0,3),(0,1,4))$

on a :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$$

et

$$D = P^{-1} C P$$

où

$$P = P_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

• $P_f = P_D = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & -1 \\ 0 & 2 & 4-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 2 & 4-X \end{vmatrix}$

$\underset{L_1 \to L_1 + L_2}{=} (2-X)\begin{vmatrix} 3-X & 3-X \\ 2 & 4-X \end{vmatrix} = (2-X)(3-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4-X \end{vmatrix}$

$= -(X-2)^2(X-3)$

$\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(D) = \{2\ (\text{dm } 2), 3\}$

De plus $D - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

est de rang 2, donc

$\dim E_f(2) = 1 \neq m(2)$

$\Rightarrow f$ (resp. $D$) n'est pas diagble.

$P_f$ étant scindé dans $\mathbb{R}$, $f$ (resp. $D$) est trigonalisable.

• $E_f(3) = \mathrm{Vect}(1,1,2)$

$E_f(2) = \mathrm{Vect}(1,0,0)$

• Soit la base $\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,-2),\ u_2 = (1,0,0),\ u_3 = (0,0,1))$, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(u_3) = a u_1 + b u_2 + 2 u_3$$

$$(f - 2\,id)\,u_3 = a u_1 + b u_2$$

$$\Leftrightarrow (D - 2I_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \underbrace{a = -1 \text{ et } b = 1}$$

Ainsi,

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$$

et $T = P^{-1} D P$.

où

$$P = P_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.

$$J = \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

• $P_f = P_J = \begin{vmatrix}3-x & 1 & -1\\ 1 & 1-x & 1\\ 2 & 0 & 2-x\end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_1}{=} \begin{vmatrix}3-x & 1 & 0\\ 1 & 1-x & 2-x\\ 2 & 0 & 2-x\end{vmatrix}$

$= (2-x)\begin{vmatrix}3-x & 1 & 0\\ 1 & 1-x & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{=} (2-x)\begin{vmatrix}3-x & 1 & 0\\ -1 & 1-x & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$= (2-x)\begin{vmatrix}3-x & 1\\ -1 & 1-x\end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix}2-x & 2-x\\ -1 & 1-x\end{vmatrix}$

$= \boxed{(2-x)^3}$

$f$ (resp. $J$) n'est pas diagonalisable
car $J \neq 2I_3$.

• $E_f(2) = \mathrm{Vect}(0,1,1)$
de dimⁿ 1

on la complète $u_1 = (0,1,1)$ en 1 base
$B = (u_1, u_2 = (x,y,z), u_3 = (0,0,1))$ t.q

$\mathrm{Mat}_B f = \begin{pmatrix}2 & a & b\\ 0 & 2 & c\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ (ou $a \neq 0$
et $b$ ou $c \neq 0$)

(suite Exo 5) $f(u_2) = a u_1 + 2u_2$

$\Leftrightarrow (f - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = a \\ 2x = a \end{cases}$

on peut prendre : $\begin{cases} a = 2 \\ x = 1, \ y = 0 \ z = 1 \end{cases}$

ainsi $u_2 = (1, 0, 1)$ et $a = 2$

pour $u_3 = (0, 0, 1)$,

$(f - 2I_3)(u_3) = b u_1 + c u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow c = -1$ et $b = 1$

D'où : dans $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$

qui est 1 base,

on a $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$

et $T = P^{-1} J P$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$