Chapitre 4

Séries numériques

Que signifie l'écriture décimale $\pi = 3,141592653...$? De manière plus générale, que signifie pour un nombre réel positif x d'avoir pour écriture décimale $a_{-N} \cdots a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 ...$, où $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pour $i \geq -N$?

Tout d'abord qu'est ce que l'écriture décimale d'un nombre entier ? Écrire un nombre entier x sous la forme $a_{-N} \cdots a_0$ signifie $x = \sum_{n=0}^{N} a_{-n} 10^n$. Une telle écriture est unique et a_0 est juste le reste de la division euclidienne de x par 10. $a_{-N} \cdots a_1$ est alors l'écriture en base dix du quotient de la division euclidienne de x par 10.

Si x est un réel positif, on écrit alors $x = E(x) + (x - E(x))$ où $E(x)$ est la partie entière de x. On sait donc écrire $E(x)$ en base dix, reste donc à voir comment écrire $(x - E(x)) \in [0, 1[$ en base 10.

Pour construire les décimales d'un nombre x de $[0, 1[$, on pose $a_0 = 0$ puis $x_0 = 0$. La première décimale, le chiffre a_1, est alors définie comme la partie entière de $10(x - x_0)$ et on pose $x_1 = x_0 + a_1 10^{-1}$. Comme $0 \leq 10(x - x_0) - a_1 < 1$, on a $0 \leq x - x_1 < 10^{-1}$. On construit alors par récurrence la suite des décimales (a_n) et la suite des approximations (x_n) de sorte que $0 \leq x - x_n < 10^{-n}$. Si les deux suites sont construites jusqu'au rang n, on définit alors a_{n+1} comme la partie entière de $10^{n+1}(x - x_n)$. Comme $0 \leq 10^{n+1}(x - x_n) < 10$, on a $0 \leq a_{n+1} \leq 9$ et on pose $x_{n+1} = x_n + a_{n+1} 10^{-(n+1)}$ et on a $0 \leq x - x_{n+1} < 10^{-n-1}$.

L'écriture décimale de x_n est $a_0, a_1 \cdots a_n$, il s'agit d'une version tronquée de l'écriture de x. De plus, on a $|x - x_n| \leq 10^{-n}$, autrement dit x_n est une approximation de x à 10^{-n} près et $x_n \to x$. On peut aussi écrire

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}.$$

On pourrait donc écrire

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k},$$

mais quel sens donner à une telle somme infinie ? C'est la théorie des séries qui répond à cette question.

4.1 Définition des séries et premières propriétés

Une série n'est pas un objet mathématique à proprement parler mais plutôt un problème que l'on pose. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 4.1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. L'étude de la série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, consiste en l'étude de la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. S_n est appelée somme partielle d'ordre n.

Si la suite $(S_n)_n$ converge vers une limite finie, cette limite est appelée somme de la série et notée $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

L'étude d'une série porte essentiellement sur l'étude de la convergence de la suite $(S_n)_n$ et sur l'éventuel calcul de sa limite.

Remarque. Si (u_n) et $(\tilde{u}_n)$ sont deux suites telles que $u_n = \tilde{u}_n$ pour $n \geq n_0$. Les sommes partielles associées S_n et $\widetilde{S}_n$ vérifient $S_n - \widetilde{S}_n = S_{n_0} - \widetilde{S}_{n_0}$ pour $n \geq n_0$. Ainsi étudier la convergence de S_n ou de $\widetilde{S}_n$ revient au même. On dit que la convergence de la série $\sum u_n$ ne dépend pas des premiers termes. En revanche, en cas de convergence de la série, la somme de la série dépend, elle, des premiers termes.

Si $\sum u_n$ est une série convergente, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, appelé le reste d'ordre n de la série. Cette série converge car ses derniers termes sont les mêmes que $\sum u_n$. On a alors

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Remarque. Les outils développés pour l'étude des séries peuvent être utiles aussi pour l'étude des suites. Considérons $(u_n)_n$ une suite numérique et définissons $v_0 = u_0$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$. La somme partielle de la série $\sum v_n$ d'ordre n est alors

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{k-1} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$$

Ainsi étudier la convergence de la suite (u_n) revient à étudier la convergence de la série $\sum v_n$.

Exemple. Un premier exemple important est celui des séries géométriques. Fixons $q \in \mathbb{C}$, considérons $u_n = q^n$ et étudions la série $\sum q^n$.

Dans ce cas, on peut calculer explicitement les sommes partielles, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

si $q \neq 1$ et $S_n = n + 1$ si $q = 1$. Ainsi on peut conclure que

- Si $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

- Si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge.

Exemple. Étudions un autre exemple $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Pour étudier cette série nous utilisons l'égalité $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ainsi nous pouvons exprimer les sommes partielles

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim S_n = 1$ et la série converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

On a une propriété de linéarité sur les séries.

Proposition 4.1.2. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.*

Démonstration. Soit S_n et T_n les sommes partielles d'ordre n respectives de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. La somme partielle d'ordre n de $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est $\lambda S_n + T_n$. Comme (S_n) et (T_n) convergent, $(\lambda S_n + T_n)$ converge vers $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. C'est le résultat attendu. $\square$

Remarque. Reprenons l'exemple $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Aurait-on pu écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \quad ?$$

La réponse est NON car les séries qui apparaissent dans le terme de droite sont divergentes (on le verra ci-dessous). Il faut donc manipuler la linéarité avec soin pour les séries.

Remarque. Parfois, il peut être intéressant de montrer qu'une série diverge. Un critère simple dans ce cas est de montrer que le terme général u_n ne tend pas vers 0. En effet, si S_n désigne les sommes partielles, on peut écrire $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série converge S_n et S_{n-1} converge vers la même limite et donc u_n tend vers 0.

On peut donc retenir : si le terme général u_n ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

Un critère de convergence, assez théorique dans un premier temps, est le suivant

Proposition 4.1.3 (Critère de Cauchy)**.** *Une série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles est une suite de Cauchy ou encore si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m \geq n \geq n_0, \left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| \leq \varepsilon$$

Démonstration. La série est convergente si et seulement si $(S_n)_n$ est convergente. Or $(S_n)_n$ est convergente si et seulement si $(S_n)_n$ est de Cauchy (Propositions 1.3.2 et 1.5.1). Quant à la réécriture, on a $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} u_k$ pour $m > n$ donc

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m > n \geq n_0, |S_m - S_n| \leq \varepsilon \\
&\qquad\qquad \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m > n \geq n_0, \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| \leq \varepsilon \\
&\qquad\qquad \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m \geq n \geq n_0 + 1, \left| \sum_{k=n}^{m} u_k \right| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Exemple. Un cas où ce critère peut être utilisé directement est celui de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ (dans ce cas le terme général est $\frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$). Si on fixe $N \in \mathbb{N}^*$, on peut estimer

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$

Ainsi le critère de Cauchy n'est pas satisfait et donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge comme annoncé ci-dessus.

4.2 Séries de termes généraux positifs

Dans cette partie nous introduisons des outils pour étudier la convergence des séries de termes généraux positifs.

Tout d'abord nous pouvons remarquer que, si $(u_n)_n$ est une suite positive et $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, alors la suite $(S_n)_n$ est croissante ($S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$). Ainsi $(S_n)_n$ converge soit vers une limite finie ℓ soit vers $+\infty$.

Proposition 4.2.1. *Soit (u_n) une suite positive. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$. Alors la série $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. Soit S_n les sommes partielles de la série. Comme u_n est positive S_n est croissante et, par hypothèse, S_n est majorée ; donc la suite (S_n) converge : la série converge. □

4.2.1 Comparaison entre séries

Proposition 4.2.2. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives. On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

- *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Démonstration. On note $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On a $S_n \leq T_n$ pour tout n. Si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est finie, la suite (T_n) est majorée, donc la suite (S_n) est majorée et converge vers une limite finie : $\sum u_n$ converge. De plus

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim S_n \leq \lim T_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

La seconde assertion est aussi vraie comme contraposée de la première. □

On a le corollaire

Corollaire 4.2.3. *Soit* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites positives. On suppose que* $u_n = O(v_n)$. *On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Exemple. Que dire de la série $\sum \frac{1}{n^2}$? On a $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ et on sait que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Exemple. Que dire de $\sum n^2 q^n$ avec $q > 0$. Tout d'abord on note que si $q \geq 1$ le terme général $n^2 q^n$ diverge vers $+\infty$ donc la série diverge. Supposons maintenant que $q < 1$ et $q' \in]q, 1[$. Ainsi $\frac{q'}{q} > 1$ et donc $n^2 = O(\left(\frac{q'}{q}\right)^n)$ ou encore $n^2 q^n = O(q'^n)$. Comme $q' < 1$, $\sum q'^n$ converge donc $\sum n^2 q^n$ converge.

Dans certains cas, il peut être intéressant d'estimer les quantités apparaissant dans l'étude des séries.

Proposition 4.2.4. *Soit* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites positives. On suppose que* $u_n = o(v_n)$. *On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si* $\sum v_n$ *converge alors on peut comparer les restes des séries :*

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right).$$

- *Si* $\sum v_n$ *diverge alors on peut comparer les sommes partielles des séries :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Démonstration. Pour le premier cas, notons que, d'après la proposition précédente, $\sum u_n$ est convergente. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $u_n = o(v_n)$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a $u_n \leq \varepsilon v_n$. Ainsi on a, pour $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} v_k.$$

Ceci signifie exactement $\sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)$.

Pour le second cas, notons $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les sommes partielles respectives de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On a $\lim T_n = +\infty$. Fixons ε et n_0 comme ci-dessus. Comme $T_n \to +\infty$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $S_{n_0} \leq \varepsilon T_n$. Pour $n \geq n_1$, on a donc

$$S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq \varepsilon T_n + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \leq 2\varepsilon T_n$$

Ceci signifie exactement $S_n = o\left(T_n\right)$. □

4.2.2 Comparaison série-intégrale

Les résultats de la partie précédente sont très similaires à ceux de la Section 3.2. En fait il y a un lien fort entre la théorie des séries et celle des intégrales impropres. Le résultat ci-dessous est un résultat dans ce sens.

Proposition 4.2.5. *Soit $f \in C^0_{pm}(\mathbb{R}_+)$ une fonction décroissante et positive. Les deux propriétés ci-dessous sont alors équivalentes*

- (i) $\sum f(n)$ *est convergente.*
- (ii) $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente.*

Le résultat reste vrai si f n'est définie que sur $[a, +\infty[$ et on retire les premiers termes de la série.

Démonstration. Comme f est décroissante, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

En sommant ces inégalités on obtient

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^{n} f(t)dt$$

Si (i) est vraie, le terme du milieu est borné donc celui de gauche aussi et donc l'intégrale converge, (ii) est vraie. Si (ii) est vraie, le terme de droite est borné donc celui du milieu aussi et la série converge, (i) est vraie. □

Exemple. Un exemple important d'application est celui des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ vérifie les hypothèses de la proposition ci-dessus pour $\alpha \geq 0$. Ainsi d'après les résultats concernant les intégrales de Riemann on a

- la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Un second exemple intéressant concerne les séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ ($\alpha \geq 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$). Tout d'abord si $\alpha > 0$, on note $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$ et on calcule

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta} - \frac{\beta}{x^{\alpha+1}(\ln x)^{\beta+1}} = (-\alpha - \frac{\beta}{\ln x})\frac{1}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta}$$

Ainsi $f'(x) < 0$ pour x grand ($\alpha > 0$) et f est donc décroissante à partir d'une certaine valeur de x. De plus $\lim_{+\infty} f = 0$. On peut donc appliquer la proposition et utiliser les résultats concernant les intégrales de Bertrand du chapitre précédent. La série converge dès que $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. Si $\alpha = 0$ on note que $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\ln^\beta n})$ donc la série $\sum \frac{1}{\ln^\beta n}$ diverge.

- la série $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

On peut même préciser certains comportements asymptotiques.

Proposition 4.2.6. *Soit $f \in C^0_{pm}(\mathbb{R}_+)$ une fonction décroissante, positive et telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge. Alors*

$$\int_0^n f(t)dt \sim \sum_{k=0}^n f(k)$$

Démonstration. Notons tout d'abord que comme f est décroissante, on a $0 \leq f(t) \leq f(0)$. Ainsi $\int_1^{n+1} f(t)dt = \int_0^n f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt + \int_n^{n+1} f(t)dt$ et $|-\int_0^1 f(t)dt + \int_n^{n+1} f(t)dt| \leq 2f(0) = o(\int_0^n f(t)dt)$. Ainsi en reprenant une inégalité de la démonstration précédente on obtient

$$\int_0^n f(t)dt + o(\int_0^n f(t)dt) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)dt$$

Ceci donne $\sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_0^n f(t)dt$. L'ajout du terme $f(0)$ ne modifie par l'équivalent puisque la série diverge. □

Exemple. Reprenons l'exemple $\sum \frac{1}{k}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ vérifie les hypothèses de la proposition donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \int_1^n \frac{1}{t}dt = \ln n$$

On peut même être plus précis sur cet équivalent. Posons $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ et considérons $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$.