Chapitre 2

Le plan vectoriel euclidien

2.1 Brefs rappels sur $\mathbb{R}^2$ vu comme plan vectoriel

2.1.1 Définitions

On a vu dans le cours de première année que $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Un espace vectoriel de dimension 2 est désigné par l'expression **plan vectoriel** .
Donnons en rappel les notions utilisés après :

Définition 2.1. *On appelle espace vectoriel $\vec{E}$sur un corps K(notation abrégée K-EV) un ensemble muni d'une addition, notée + et d'une multiplication externe, notée . tel que :*

1. *$(\vec{E}, +)$ est un groupe commutatif*
2. *pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ appartenant à $\vec{E}^2$ et pour tout λ et μ appartenant à K*

   $$\lambda.(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda.\vec{u}+\lambda.\vec{v}\,;\ (\lambda\mu).\vec{u} = \lambda.(\mu.\vec{u})\,;\ 1.\vec{u} = \vec{u}\,;\ (\lambda+\mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u}$$

Exemples utilisés : Dans ce cours , ce seront des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ puisque le plan vectoriel peut-être confondu avec $\mathbb{R}^2$ et l'espace ambiant avec $\mathbb{R}^3$.
Dans $\mathbb{R}^2$, on sait que :

$$\forall\lambda \in R, \forall(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y)+(x', y') = (x+x', y+y') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$

et dans $\mathbb{R}^3$ on a aussi , $\forall\lambda \in R, \forall(x, y, x', y', z, z') \in \mathbb{R}^6$,

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

En général on note $\lambda\vec{u}$ au lieu de $\lambda.\vec{u}$ afin d'éviter toute confusion avec le produit scalaire (voir plus loin).

2.1.2 Bases and cie

On a vu l'an dernier (et on revoit cela cette année) :

Définition 2.2. *Un K-espace vectoriel $\vec{E}$ est de dimension finie s'il possède une partie génératrice généralement noté $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de cardinal fini ; cela signifie que tout vecteur de $\vec{E}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.*

Définition 2.3. *Un famille $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de vecteurs est une base de l'espace vectoriel $\vec{E}$ si c'est une famille libre qui engendre l'espace vectoriel ou de façon équivalente si pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$ il existe un unique n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ d'éléments de K tel que*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i.$$

On démontre en cours d'algèbre et c'est important que :

Proposition 2.1. et Définition *Toutes les bases de $\vec{E}$ ont même cardinal : c'est la dimension de $\vec{E}$.*

Pour $\mathbb{R}^2$, on a l'habitude de noter $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, les deux vecteurs $\vec{\imath} = (1, 0), \vec{\jmath} = (0, 1)$; ils forment une base souvent appelée canonique de $\mathbb{R}^2$ puisque chaque couple (x, y) s'écrit de manière unique $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Comme toutes les bases ont même cardinal, toute base de $\mathbb{R}^2$ est formée de deux vecteurs non colinéaires ; Comment sait-on si deux vecteurs $\vec{e}_1(a_1, b_1), \vec{e}_2(a_2, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une base ? si et seulement si ils forment une famille libre !

Proposition 2.2. *Si $\vec{E}$ est un EV de dimension n et si on a une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si elle est génératrice ou si et seulement elle est libre .*

Ceci nécessite des théorèmes non encore revus mais en dimension 2, on peut comprendre pourquoi le fait d'être libre assure d'être génératrice ...
Rappel : la famille $\vec{e}_1(a_1, b_1), \vec{e}_2(a_2, b_2)$ est libre si et seulement si s'il existe λ_1 et λ_2 de sorte que :

$$\lambda_1\vec{e}_1(a_1, b_1) + \lambda_2\vec{e}_2(a_2, b_2) = \vec{0}$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Lorsque l'on fait, cela on se ramène à résoudre le système linéaire d'inconnues λ_1 et λ_2 :

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0 \tag{2.1}$$
$$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 = 0 \tag{2.2}$$

et en multipliant (2.1) par $-b_1$ (resp. par b_2) et (2.2) par a_1, (resp. par $-a_2$ et en additionnant, on obtient

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\lambda_2 = 0, \tag{2.3}$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)\lambda_1 = 0 \tag{2.4}$$

On a donc la proposition

Proposition 2.3. *la famille* $(\vec{e}_1(a_1, b_1), \vec{e}_2(a_2, b_2))$ *est libre si et seulement si le réel* $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ *est non nul.*

Preuve : Le résultat provient de la résolution du système (2.1 , 2.2) sous sa forme (2.3, 2.4). □

Si l'on sait que la famille $(\vec{e}_1(a_1, b_1), \vec{e}_2(a_2, b_2))$ est libre, elle va aussi être génératrice donc être une base de $\mathbb{R}^2$ car si on cherche à écrire lun vecteur $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ comme conbinaison linéaire des $(\vec{e}_1(a_1, b_1), \vec{e}_2(a_2, b_2))$on doit résoudre le système non homogène :

$$a_1x + a_2y = \alpha_1 \tag{2.5}$$
$$b_1x + b_2y = \alpha_2 \tag{2.6}$$

En faisant les mêmes opérations que ci-dessus, on obtient :

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2\alpha_1 - a_2\alpha_2 \tag{2.7}$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1\alpha_2 - b_1\alpha_1 \tag{2.8}$$

et le fait que $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \neq 0$ permet d'assurer qu'il existe une solution. On voit même qu'elle est unique.

Remarque : le système ci-dessus a pour matrice, la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ et celle-ci est inversible.

On vient de démontrer la proposition :

Proposition 2.4. *Les composantes* (x, y) *d'un vecteur* $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *sur la nouvelle base* $(\vec{e}_1(a_1, b_1), \vec{e}_2(a_2, b_2))$ *sont données par* **les formules de Cramer** *:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & a_2 \\ \beta & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2.9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha \\ b_1 & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2.10}$$

Remarque : Une autre façon de trouver le vecteur $X' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ des composantes de $\vec{u}$ dans la nouvelles base $(\vec{e}_1(a_1, b_1), \vec{e}_2(a_2, b_2))$ à l'aide des composantes $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est d'utiliser la formule de changement base vue en cours d'algèbre. En effet la matrice la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ n'est autre que la matrice de passage (en général on la note P) de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $(\vec{e}_1(a_1, b_1), \vec{e}_2(a_2, b_2))$ puisque ses colonnes sont formées des composantes des vecteurs $\vec{e}_i$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a donc

$$X = AX' \quad \text{soit} \quad X' = A^{-1}X, \text{ avec } A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

Les formules ci-dessus redonnent bien les mêmes expressions que dans la proposition (2.4).

2.2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ vectoriel

2.2.1 Droites vectorielles

On se rappelle que $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $\vec{E}$ si et seulement si $\vec{F}$ est stable par combinaison linéaire. Comme on est dans le plan vectoriel, de dimension 2, les seuls sous-espaces intéressants sont les sous-espaces de dimension 1.

Définition 2.4. *Un sous-espace vectoriel de dimension* 1 *est appelé droite vectorielle* $\vec{D}$.

Comme la droite $\vec{D}$ est de dimension 1, tout vecteur $\vec{u}$, non nul, de $\vec{D}$ est une base de $\vec{D}$ et $\vec{D} = Vect(\vec{u}) = \{\vec{v}/\exists t \in \mathbb{R}, \vec{v} = t\vec{u}\} = \{\vec{v}/(\vec{u}, \vec{v})$ liée $\}$.
Ainsi , un vecteur $\vec{v}(x, y) \in \vec{D}$ si et seulement si $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0$ donc si et seulement si $ay - bx = 0$; ceci est une équation cartésienne de $\vec{D}$.
Remarque : On pourrait aussi introduire l'application ψ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (on appelle cela une forme linéaire) telle $\psi(x, y) = ay - bx$.
Rappelons ce qu'est une application linéaire :

Définition 2.5. *Une application f définie d'un K EV $\vec{E}$ dans un K EV $\vec{F}$ est dite linéaire si*

$$\forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2, \quad f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v});$$

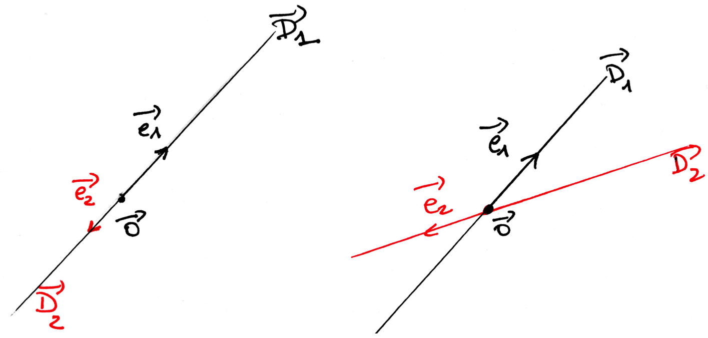
L'application ψ est linéaire (le vérifier) et le théorème du rang (cf cours d'algèbre) dit que si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors le noyau de ψ , $Ker\psi$ est une droite vectorielle car l'image de ψ, $Im(\psi)$ contient le réel $\psi((-b, a)) = a^2 + b^2 \neq 0$ et donc $Im(\psi)$ est de dimension 1 et la dimension de $Ker\psi$ est alors aussi 1. On peut si on ne connaît pas le théorème du rang, se convaincre que $\{\vec{0}\} \neq Ker\psi \neq \mathbb{R}^2$ grâce au calcul de $\psi((-b, a)) = a^2 + b^2 \neq 0$ et de $\psi((a, b)) = 0$.

2.2.2 Position relative

On s'intéresse à connaître la position relative de deux droites vectorielles ce qui signifie décrire leur intersection éventuelle. On se donne donc deux droites vectorielles $\vec{D}_1 = Vect(\vec{e}_1)$ et $\vec{D}_2 = Vect(\vec{e}_2)$ et on appelle $\vec{F} = \vec{D}_1 \cap \vec{D}_2$. On sait que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, en particulier donc $\{0\} \subset F$.
Raisonnons par dysjonction des cas :

— Ou bien la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est liée, mais alors $\vec{D}_1 = Vect(\vec{e}_1) = Vect(\vec{e}_2) = \vec{D}_2$ et les deux droite s vectorielles sont confondues,

— Ou bien la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre, alors si $\vec{u} \in \vec{D}_1 \cap \vec{D}_2$nul , il existe deux réels λ_1 et λ_2 de sorte que $\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1$ d'une part puisque $\vec{u} \in \vec{D}_1$ et d'autre par $= \lambda_2\vec{e}_2$ ce qui dit que $\lambda_1\vec{e}_1 - \lambda_2\vec{e}_2 = \vec{0}$; mais la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre, on en conclut donc que $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ et finalement que $\vec{u} = \mathcal{E}0$. et si la famille est liée alors $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$.



Position relative de deux droites vectorielles

On a donc obtenu :

Proposition 2.5. *Deux droites vectorielles $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont :*
-soit confondues, si la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est liée, $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$
-soit d'intersection réduite au vecteur nul si la famille est libre, $\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2 = \{\vec{0}\}$

Dans le cas où la famille est libre, on dit que $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont en somme directe, $\mathbb{R}^2 = \vec{D}_1 \oplus \vec{D}_2$ et à tout vecteur $\vec{u}$ du plan , on peut associer sa composante sur $\vec{D}_1$ (resp. $\vec{D}_2$). On définie ainsi deux applications linéaires p_1 et p_2 :

Définition 2.6. *Soient $\vec{D}_1 = Vect(\vec{e}_1)$ et $\vec{D}_2 = Vect(\vec{e}_2)$ deux droites vectorielles pour lesquelles $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ forme une famille libre du plan vectoriel. L'application p_1 (resp. p_2) qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ associe*

$$p_1(\vec{u}) = x\vec{e}_1, p_2(\vec{u}) = y\vec{e}_2 \qquad \textit{de sorte que } \vec{u} = p_1(\vec{u}) + p_2(\vec{u})$$

est une application linéaire d'image $\vec{D}_1$ (resp. $\vec{D}_2$) et de noyau $\vec{D}_2$ (resp. $\vec{D}_1$)) ; elle est appelée projection sur $\vec{D}_1$(resp. $\vec{D}_2$) parallèlement à $\vec{D}_2$ (resp. $\vec{D}_1$).

Preuve : On se contente de le faire pour p_1. Tout repose sur l'unicité de la décomposition d'un vecteur puisque $\mathbb{R}^2 = \vec{D}_1 \oplus \vec{D}_2$.
Si $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors par les propriétés d'espaces vectoriel , $\mu\vec{u} = \mu x\vec{e}_1 + \mu y\vec{e}_2$ et donc

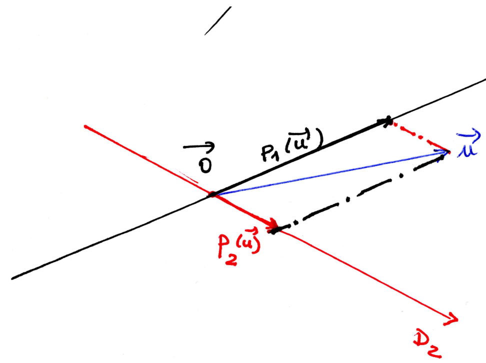
$$p_1(\mu\vec{u}) = \mu x = \mu p_1(\vec{u}).$$

D'autre part, si $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$ alors $\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{e}_1 + (y + y')\vec{e}_2$ et encore une fois l'unicité dans la décomposition donne

$$p_1(\vec{u} + \vec{v}) = p_1(\vec{u}) + p_1(\vec{v}),$$

ce qui établit que p_1 est linéaire .
Par ailleurs, le noyau de p_1 , Ker p_1, est constitué des vecteurs $\vec{u} = \vec{0} + y\vec{e}_2 = y\vec{e}_2$ donc c'est $\vec{D}_2$ et tout vecteur $p_1(\vec{u}) \in \vec{D}_1$ ie $Im(p_1) \subset \vec{D}_1$ et si $\vec{u} = x\vec{e}_1$ alors $p_1(\vec{u}) = x\vec{e}_1 = \vec{u}$ donc $\vec{D}_1 \subset Im(p_1)$ $\square$

Projections de $\vec{u}$ sur deux droites vectorielles $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ non confondues

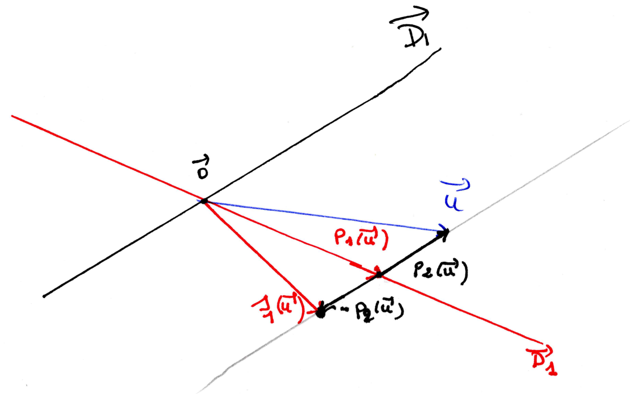


Définition 2.7. *Avec les notations ci-dessus, l'application s_1 (resp. s_2) telle que*

$$s_1(\vec{u}) = p_1(\vec{u}) - p_2(\vec{u}), \quad s_2(\vec{u}) = -p_1(\vec{u}) + p_2(\vec{u})$$

est un application linéaire appelée symétrie par rapport à $\vec{D}_1$(resp. $\vec{D}_2$) parrallèlement à $\vec{D}_2$ (resp. $\vec{D}_1$).

La linéarité est ici immédiate car elle découle de celle de p_1 et de p_2.
symétrique du vecteur $\vec{u}$ par rapport à $\vec{D}_1$ parallèlement à $\vec{D}_2$



Il est classique (et c'est un excellent exercice) :

Exercice 1. *1) Pour $i = 1, 2$, $p_i \circ p_i = p_i$*
2)a) Pour $i = 1, 2$, $s_i \circ s_i = id$.
b) $\vec{D}_1$ (resp.$\vec{D}_2$) est exactement l'ensemble des vecteurs invariants par s_1 (resp. s_2).

Vous démontrerez en cours d'algèbre que les propriétés ci-dessus caractérisent les projections et le symétries.

2.3 Structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$ vu comme plan vectoriel

Définition 2.8. *Le produit scalaire de deux éléments* $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *et* $\vec{v} = (v_1, v_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est défini par :*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}.\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

L'application qui à $(\vec{u}, \vec{v})$ associe $\langle x, y \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive ce qui signifie que si on considère les vecteurs du plan vectoriel $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{z}$ et n'importe quel réel λ, on a

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \qquad \text{Symétrie} \tag{2.11}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + \lambda \vec{z} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \lambda \langle \vec{u}, \vec{z} \rangle \qquad \text{Bilinéarité} \tag{2.12}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0, \qquad \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \tag{2.13}$$

On peut grâce à ces propriétés définir une norme dite euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.9. *On définit une norme sur* $\mathbb{R}^2$ *en posant* $||\vec{u}|| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$

Définition 2.10. *Deux vecteurs* $\vec{u}, \vec{v}$ *sont dit orthogonaux si leur produit scalaire est nul.*

Proposition 2.6. *Etant donné un vecteur* $\vec{u}$ *, non nul, alors l'ensemble*$\{\vec{v}/\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}\}$ *est une droite vectorielle* $\vec{D}$ *dite droite orthogonale à* $\vec{u}$ *et l'équation* $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ *s'appelle une équation normale de* $\vec{D}$*.*

Preuve : L'application linéaire $\psi : \vec{v} \to \vec{u}.\vec{v}$ est une forme linéaire , non nulle puisque $\vec{x}.\vec{u} \neq 0$ et le théorème du rang dit alors que le noyau de ψ est de dimension 1. Donc c'est une droite vectorielle. $\square$

Montrons maintenant deux résultats fondamentaux pour la géométrie vectorielle :

Théorème 2.1. Pythagore *Etant donnés les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si*

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 \tag{2.14}$$

Preuve : On calcule $||\vec{u}+\vec{v}||^2$ par bilinéarité du produit scalaire .
On obtient

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle + ||\vec{v}||^2$$

ce qui permet de conclure □
On remarque donc une propriété qui sera fort utile par la suite (et qui aurait pu être donnée comme définition du produit scalaire une fois donnée l'expression de la norme) :

$$\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \frac{1}{2}\big(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\big) \tag{2.15}$$

Proposition 2.7. *Etant donnés les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, on a l'inégalité, dite de Cauchy-Schwarz :*

$$|\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||.$$

Il y égalité dans cette inégalité si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Preuve : On introduit la fonction $P(t) = ||\vec{u}+t\vec{v}||^2$. Pour tout t réel, on doit avoir $P(t) \geq 0$ en vertu de la propriété (2.13).
Or

$$P(t) = ||\vec{u}||^2 + 2\langle\vec{u}, t\vec{v}\rangle + ||t\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2t\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle + t^2||\vec{v}||^2.$$

P est donc un polynôme du second degré qui doit rester de signe constant .
Donc son discriminant Δ (réduit) est nécessairement négatif ou nul.
Or $\Delta = \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle^2 - ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$ ce qui donne l'inégalité souhaitée .
Le cas d'égalité
Il est clair que si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ alors il y a égalité dans l'inégalité , les deux termes valent $|\lambda|||\vec{u}||^2$.
Réciproquement, en cas d'égalité, le discriminant Δ est nul et le polynôme P a une racine double. Donc il existe t_0 tel que $||\vec{u}+t_0\vec{v}||^2 = 0$ mais alors la propriété (2.13) nous dit que le vecteur $\vec{u}+t_0\vec{v}$ lui même est nul ce qui dit bien que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. □

Une conséquence de ce théorème de Cauchy-Schwarz est l'existence d'un angle géométrique puisque le nombre $\frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} \in [-1, 1]$.

Définition 2.11. *On appelle angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre* $\arccos \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|||\vec{v}||}$ *; c'est donc un nombre réel dans* $[0, \pi]$.

Remarque pour cet angle l'ordre des vecteurs n'a pas d'importance à cause de la symétrie du produit scalaire.

2.4 Construire des bases orthonormées

Définition 2.12. *Soient* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *une famille de deux vecteurs . On dit qu'elle forme un repère orthonormal si et seulement si*

$$||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = 1, \quad \vec{e}_1.\vec{e}_2 = 0.$$

Proposition 2.8. *Un repère orthonormé est une base de* $\mathbb{R}^2$

Preuve : Deux vecteurs orthogonaux sont nécessairement libres et une famille libre de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Exemple : base canonique $(\vec{\imath} = (1,0), \vec{\jmath} = (0,1))$.
Pourquoi est-ce intéressant : parce que les composantes des vecteurs se calculent via des produits scalaires (pensez que cela se généralise en dimension n et que les formules de Cramer sont alors "computationnellement inopérantes".

Proposition 2.9. *Tout vecteur* $\vec{u}$ *du plan vectoriel se décompose sur la base orthonormée* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *en :*

$$\vec{u} = < \vec{u}, \vec{e}_1 > \vec{e}_1 + < \vec{u}, \vec{e}_2 > \vec{e}_2$$

Preuve : on pose $\vec{u} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$ et on calcule par bilinéarité
$< \vec{u}, \vec{e}_1 >= \alpha_1 < \vec{e}_1, \vec{e}_1 > +\alpha_2 < \vec{e}_2, \vec{e}_1 >= \alpha_1 < \vec{e}_1, \vec{e}_1 >= \alpha_1$ car la famille est orthonormée ; l'autre calcul se fait de manière analogue. □
Evidemment ce n'est pas le cas dans les bases non orthonormées ...

Exercice 2. *Soient* $\vec{e}_1 = (2,1)$ *et* $\vec{e}_2 = (1,-1)$.

1. *Etablir que* $\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$*, et que le repère n'est pas orthonormé .*
2. *Soit* $\vec{u} = (x,y)$ *. Déterminer les réels* α, β *de sorte que* $\vec{u} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$.
3. *Comparer* α *et* β *à* $< \vec{u}, \vec{e}_1 >$ *et* $< \vec{u}, \vec{e}_2 >$ *. Conclure*

Exercice 3. *Soient* $\vec{e}_1$ *et* $\vec{e}_2$ *deux vecteurs quelconques formant une famille libre de* $\mathbb{R}^2$*. On se donne deux réels* α *et* β *. Etablir qu'il existe un unique vecteur* $\vec{u}$ *du plan tel que* $< \vec{u}, \vec{e}_1 >= \alpha$ *et* $< \vec{u}, \vec{e}_2 >= \beta$ *. On cherchera les composantes* (x,y) *de* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *en écrivant les conditions ci-dessus sous forme d'un système linéaire d'inconnues* x *et* y *et on pensera à Cauchy-Schwarz.*

Conséquence : Si la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est orthonormée , la projection sur la droite $\vec{D}_1 = \vec{e}_1$ parallèlement à $\vec{D}_2 = \vec{e}_2$ s'appelle la projection orthogonale sur $\vec{D}_1 = \vec{e}_1$ et a pour expression :

$$p_1(\vec{u}) =< \vec{u}, \vec{e}_1 > \vec{e}_1$$

De même, la symétrie associée s'appelle la symétrie orthogonale d'invariant la droite $\vec{D}_1$; on a alors :

$$s_1(\vec{u}) =< \vec{u}, \vec{e}_1 > \vec{e}_1 - < \vec{u}, \vec{e}_2 > \vec{e}_2$$

et on a grâce au théorème de Pythagore $||s_1(\vec{u})||^2 = (< \vec{u}, \vec{e}_1 >)^2 + (- < \vec{u}, \vec{e}_2 >)^2 = ||\vec{u}||^2$ donc s_1 conserve les normes ; mais grâce au lien entre le produit scalaire et les normes (2.15), s_1 conserve aussi le produit scalaire

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2, \qquad \langle s_1(\vec{u}), s_1(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Définition 2.13. *Une transformation du plan vectoriel euclidien qui préserve la norme (ou le produit scalaire) est appelée isométrie du plan vectoriel euclidien .*

Exemple : la symétrie orthogonale d'invariant la droite $\vec{D}_1$, s_1, est une isométrie du plan vectoriel euclidien .

Proposition 2.10. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt *Etant donnée une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, il existe une base orthonormée $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ du plan vectoriel de sorte que $Vec(\vec{e}'_1) = Vec(\vec{e}_1)$ et $Vec(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) = Vec(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Si on désigne la*

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{e}_1}{||\vec{e}_1||}, \quad \vec{e}'_2 = \frac{\vec{v}_2}{||\vec{v}_2||} \quad \text{où} \quad \vec{v}_2 = \vec{e}_2 - p_1(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 - < \vec{e}_2, \vec{e}'_1 > \vec{e}'_1.$$

On peut maintenant établir

Proposition 2.11. *La valeur absolue du déterminant* $|\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2)|$ *est égal à l'aire du parrallélogramme construit sur* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

2.5 Orientation du plan euclidien

On considère le plan euclidien $(\vec{P} = \mathbb{R}^2, < .,. >)$ où $< .,. >$ le produit scalaire usuel rencontré ci-dessus.

Proposition 2.12. *Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, il existe exactement deux vecteurs $\vec{v}$ tels que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée. Il s'agit de $\vec{v} = -b\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$ et de son opposé.*

Preuve : On cherche les composantes x, y du vecteur $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Elles vérifient :

$$(1)ax + by = 0, \quad (2)x^2 + y^2 = 1.$$

Comme $\vec{u}$ est unitaire, $(a,b) \neq (0,0)$ et on a que l'ensemble des solutions du système linéaire (1) , à une équation et deux inconnues, est $S = \{(x,y) = (-bt, at), t \in \mathbb{R}\} = \{t(-b,a), t \in \mathbb{R}\} = Vect((-b,a))$.

Mais nous cherchons des solutions de (1) qui vérifient aussi (2) .

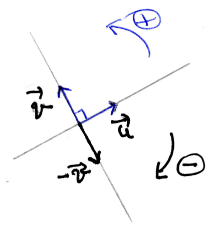
On doit donc avoir $t^2||(-b,a)||^2 = 1$ c'est à dire $t^2 = 1$. D'où le résultat.

Définition 2.14. *Dans $\mathcal{P}$, orienté par $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on dit qu'une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ est directe si les vecteurs sont de la forme :*

$$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \quad et \quad \vec{v} = -b\vec{\imath} + a\vec{\jmath} \quad avec\ a^2 + b^2 = 1.$$

Dans le cas contraire , on dira que la base est indirecte.

Base directe et indirecte



En fait on choisit cette définition pour que le déterminant $\det_B(\vec{u}, \vec{v})$ (Si $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on met dans les colonnes les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans B) soit un nombre strictement positif. En effet :

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = ||\vec{u}||^2 = 1 > 0 \quad .$$

Définition 2.15. *Etant données deux bases $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $B' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ du plan on dit qu'elles ont même orientation si et seulement si* $\det_B(\vec{e}_1', \vec{e}_2') > 0$.

On peut démontrer , grâce au formule de changement de base et aux propriétés du déterminant, que la relation *être de la même orientation* est une relation d 'équivalence. Ainsi le choix de la base B induit une orientation du plan $\vec{P}$ ie toutes les bases ayant la même orientation que B sont dites *directes* . En général, on choisit comme directe la base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ donc le sens direct correspond à deuxième vecteur de base obtenu par rotation du premier **dans le sens inverse des aiguilles d'une montre** (cf figure ci-dessus).

Une fois choisie l'orientation, on peut parler d'angle orienté ; on admet que

Théorème 2.2. *Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$ du plan $\mathbb{R}^2$, il existe une unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ de sorte que $\vec{u} = \vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$*

C'est une théorème difficile qui met en jeu la notion de connexité qui sera abordée en cours d'analyse en 3ème année (les impatients pourront jeter un coup d'oeil dans Gramain Géométrie élémentaire).

Définition 2.16. *Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ de $\mathbb{R}^2$unitaires, si on désigne par $\vec{v}_1$ le vecteur normé tel que $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ soit une b.o.d., on appelle mesure de l'angle orienté des vecteurs $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$ tout réel θ tel que :*

$$\vec{u}_2 = \cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{v}_1.$$

θ est appelée mesure de l'angle des vecteurs $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$.

Dans le théorème (2.2), θ est une mesure de l'angle orienté des vecteurs $(\widehat{\vec{\imath}, \vec{u}})$.

Et si $\vec{u} = \vec{u}_\theta$ alors le vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit directe est $\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$!

Remarque : Ici $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = -(\widehat{\vec{u}_2, \vec{u}_1})$, les angles orientés ont un signe !

Remarque : Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ne sont pas unitaires on définit la mesure de l'angle des vecteurs $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$ comme celle de mesure de l'angle des vecteurs $(\widehat{\frac{\vec{u}_1}{||\vec{u}_1||}, \frac{\vec{u}_2}{||\vec{u}_2||}})$.

2.6 Isométries vectorielles, Matrices orthogonales

Définition 2.17. *La matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. est dite orthogonale si et seulement si les vecteurs (a, b) et (c, d) forment un repère orthonormal.*

On a vu comme exemple la symétrie orthogonale et que celle-ci conservait la norme ou le produit scalaire (d'où le nom) ; en effet on a le résulat suivant :

Proposition 2.13. *Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. est orthogonale si et seulement si l'une de ces propositions est satisfaite*

1. *$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0$*
2. *$A\ {}^tA = I_2 = {}^tAA$*
3. *La matrice conserve le produit scalaire ie $< A\vec{v}, A\vec{w} >=< \vec{v}, \vec{w} >$ pour tous vecteurs $\vec{v}, \vec{w}$.*
4. *A transforme une base orthonormée en une base orthonormée.*

Preuve : Faire à la main, tout est simple surtout si on remarque que $< \vec{v}, \vec{w} >= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.
Une conséquence de la proposition (2.12) c'est que

Proposition 2.14. *1) Les matrices orthogonales sont toutes inversibles, d'inverse leur matrice transposée.*
2) L'ensemble $O_2(\mathbb{R})$ de toutes les matrices orthogonales est un groupe multiplicatif, non commutatif, appelé Groupe Orthogonal.

Preuve : 1) On utilise $A\ {}^tA = I$ donc puisque d'une part $\det(AB) = \det A \det B$ et que $\det\ {}^tA = \det A$, $(\det A)^2 = 1$ donc $\det(A) \neq 0$, toute matrice orthogonale est inversible. Et comme $A\ {}^tA = {}^tAA = I \ \ {}^tA = A^{-1}$.
2) Rappel : on connait la notion de groupe

Définition 2.18. *Un groupe est la donnée d'un ensemble G non vide et d'une loi de composition $* : G \times G \to G$ qui à tout couple (x, y) associe $x * y \in G$ vérifiant de plus :*

1. *"$*$" est associative, c'est-à-dire :*
$$\forall (x, y, z) \in G^3,\ (x * y) * z = x * (y * z).$$
2. *"$*$" admet un élément neutre e_G, c'est-à-dire :*
$$\exists e_G \in G,\ \forall x \in G,\ e_G * x = x * e_G = x.$$
3. *Tout élément x de G admet un inverse noté x^{-1}, c'est-à-dire :*
$$\forall x \in G,\ \exists x^{-1} \in G,\ x * x^{-1} = x^{-1} * x = e_G.$$

On dira de plus que le groupe $(G, *)$ est commutatif (ou abélien) si la loi de composition "$*$" est commutative, c'est-à-dire :
$$\forall (x, y) \in G^2,\ x * y = y * x.$$

On doit commencer par montrer que le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale mais si A et B sont orthogonales, en utilisant la propriété 2) ,
${}^t(AB)(AB) = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBI_2B = {}^tBB = I_2$.
Ensuite , on sait que $(AB)C = A(BC)$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ donc c'est aussi vrai dans $O_2(\mathbb{R})$.
La matrice identité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, est bien une matrice de $O_2(\mathbb{R})$, neutre dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ pour la multiplication donc c'est aussi vrai dans $O_2(\mathbb{R})$.
Pour finir, si A est orthogonale , alors $A^{-1} = {}^tA$ et clairement ${}^tA$ est aussi orthogonale d'après la propriété 2) . □

Proposition 2.15. et définition
Une application linéaire f dont la matrice A, dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, est orthogonale est appelée isométrie vectorielle . Sa matrice B dans n'importe quelle autre base orthonormée $\mathcal{B}'$ sera aussi une matrice orthogonale. Par ailleurs f conserve la norme ou le produit scalaire.

Preuve : On sait d'une part que la matrice de passage P transformant la base orthonormée $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$ sera orthogonale , que la formule de changement de base dit que $B = PAP^{-1}$ donc, puisque $O_2(\mathbb{R})$ est un groupe, B appartient à $O_2(\mathbb{R})$. La deuxième propriété vient du point 3) de la proposition (2.13). □
Maintenant on va donner , grâce à la proposition (2.12) une forme plus réduite des matrices orthogonales directes.

Proposition 2.16. *Les matrices orthogonales sont de deux types :*

1. *les matrices de la forme $R_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, qui sont de déterminant $a^2 + b^2 = 1 > o$ et sont dites directes ou positives,*
2. *les matrices de la forme $S_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, qui sont de déterminant $-(a^2 + b^2) = -1 < o$ et sont dites indirectes ou négatives.*
3. *Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires , il existe une unique matrice $R_{a,b} \in O_2(\mathbb{R})$ de sorte que $R_{a,b}\vec{u} = \vec{v}$,*

Preuve : les points 1) et 2) sont des conséquences directes du théorème (2.2) et de la forme décrite dans la proposition .
Pour le point 3), Si on se donne $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$, avec $u_1^2 + u_2^2 = 1$ et $v_1^2 + v_2^2 = 1$, on cherche $R_{a,b}$ en résolvant le système linéaire d'inconnues a

et b :

$$au_1 - bu_2 = v_1 \tag{2.16}$$
$$au_2 + bu_1 = v_2 \tag{2.17}$$

Comme il est de déterminant $u_1^2 + u_2^2 = 1$, on sait qu'il y a une unique solution d'après la proposition (2.4),
Une fois trouvé le couple (a, b), solution du système (par exemple par les formules de Cramer (2.4)), on est sûr que $a^2 + b^2 = 1$ car
$1 = v_1^2 + v_2^2 = (au_1 - bu_2)^2 + (bu_1 + au_2)^2 = (a^2 + b^2)(u_1^2 + u_2^2) = a^2 + b^2$.

Définition 2.19. *Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, l'unique matrice $R_{a,b} \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $R_{a,b}\vec{u} = \vec{v}$ est appelée angle $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$ des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.*

Proposition 2.17. *1) Pour toute matrice R orthogonale directe, il existe une unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ de sorte que $R = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,*
2) Pour tout vecteur $\vec{u}_\alpha$, $R_\theta \vec{u}_\alpha = \vec{u}_{\theta+\alpha}$, ce qui établit que R_θ est la matrice de la rotation vectorielle (angle orienté) dont une mesure est θ.
3) Toute matrice orthogonale indirecte S vérifie $S^2 = I_2$ et il existe une unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ de sorte que $S = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\ \theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$,
4) Le vecteur $\vec{u}_{\frac{\theta}{2}}$ est invariant par S_θ et le vecteur $(\sin(\theta/2), -\cos(\theta/2))$ est changé en son opposé. $S_\theta$est donc une symétrie orthogonale.

Preuve : le 1) est une conséquence directe du théorème (2.2) et de la forme décrite dans la proposition précédente. On dit que θ est une mesure de l'angle de la rotation R_θ.
Un calcul immédiat (si on sait ses formules de trigonométrie) dit que $R_\theta R_\alpha = R_{\theta+\alpha}$ donc en particulier on obtient le point 2) .
La reste de la preuve de (2.17) est laissée en exercice , c'est une excellente révision des formules de trigonométrie $(\cos(a + b), \cos(a - b), \ldots$ etc $\square$

Proposition 2.18. *L'ensemble $O_2^+(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales directes (ou des rotations) est un sous-groupe commutatif de $O_2(\mathbb{R})$.*

Preuve : c'est la conséquence du fait que $R_\theta R_\alpha = R_{\theta+\alpha} = R_{\alpha+\theta} = R_\alpha R_\theta$.
Remarque : Comme θ est appelée mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}_\theta})$ ie la rotation R_θ qui emmène $\vec{\imath}$ sur $\vec{u}_\theta$, la relation ci-dessus dit que

$$mes(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_3}) \equiv mes(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) + mes(\widehat{\vec{u}_2, \vec{u}_3})[2\pi]$$

qui s'appelle la relation de Chasles pour les angles !
Dernière remarque : L'angle $\widehat{(R_\theta\vec{u}, R_\theta\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ autrement dit une rotation conserve les angles .....En effet, l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ c'est la rotation R_α telle que $R_\alpha\vec{u} = \vec{v}$ mais alors en composant à droite par R_θ

$$R_\theta R_\alpha \vec{u} = R_\theta \vec{v} \quad \text{or} \quad (R_\theta R_\alpha)\vec{u} = (R_\alpha R_\theta)\vec{u}$$

donc $R_\alpha R_\theta \vec{u} = R_\theta \vec{v}$ ce qui dit que la rotation R_α est l'angle $\widehat{(R_\theta\vec{u}, R_\theta\vec{v})}$.
On démontre que les matrices orthogonales indirectes "renversent" les angles (cf TD)

Exercice 4. *Soit S une matrice orthogonale indirecte de $\mathbb{O}_2(\mathbb{R})$. On a* $\widehat{(S\vec{u}, S\vec{v})} = \widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$

2.7 Exercices sur le chapitre 2

Exercice 1. Parmi les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, le(s)quel(s) sont des droites vectorielles ?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 3y = 2\} \quad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 3y = 0\}$$

$$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 3y^2 = 2\} \quad E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 3y = 0\} \quad E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 3y^2 = 0\}$$

Exercice 2. Soit $\vec{u} = (a, b)$.
1) Donner une (toutes) équation(s) de la droite vectorielle $\vec{D}$ engendrée par $\vec{u}$ dans le plan.
2) Donner une (toutes) équation(s) de la droite vectorielle $\vec{\Delta}$ orthogonale à $\vec{u}$ dans le plan.
3) Quelle est la position relative de $\vec{D}$ et $\vec{\Delta}$?
Exercice 3. On se donne deux droites vectorielles non confondues $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ et pour $\imath, j\} = \{1, 2\}$ on note p_i les projections sur D_i parallèlement à D_j, démontrer que l'on a : 1) Pour $i = 1, 2$, $p_i \circ p_i = p_i$
2)a) Pour $i = 1, 2$, $s_i \circ s_i = id$.
b) $\vec{D}_1$ (resp.$\vec{D}_2$) est exactement l'ensemble des vecteurs invariants par s_1 (resp. s_2)
Exercice 4. On se place dans le cas particulier de $E = \mathbb{R}^2$,espace vectoriel euclidien dont on notera $< x, y >$ le produit scalaire.Soient $D_1 =$Vect($\overrightarrow{u_1}$) et $D_2 =$Vect($\overrightarrow{u_2}$) deux droites vectorielles engendrées par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, 1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (a, b)$, où a et b sont deux nombres réels.

1) A quelle condition D_1 et D_2 sont elles en somme directe ? orthogonales ?
2) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale p sur D_1 puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à D_1.
3) Donner, quand c'est possible, l'expression analytique de la projection $\tilde{p}$ sur D_1 parallèlement à D_2 puis celle de la symétrie autour de D_1 de direction D_2.

Exercice 5. On se place dans le plan vectoriel euclidien.

1. Démontrer que le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} 3\alpha - 4\beta & = x \\ 4\alpha + 3\beta & = y \end{cases},$$
admet une unique solution que l'on donnera en utilisant les formules de Cramer.
2. Montrer que l'expression analytique de la projection orthogonale p sur $\vec{D}$ =Vect($\overrightarrow{u}$) avec $\overrightarrow{u} = (3,4)$, si M est le point de coordonnées (x, y) du plan, est donnée par $p(x, y) = (\frac{3(3x+4y)}{25}, \frac{4(3x+4y)}{25})$. On pourra utiliser la question 1).
3. En déduire celle de la symétrie s orthogonale par rapport à $\vec{D}$.

Exercice 6. Soient $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ deux vecteurs quelconques formant une famille libre de $\mathbb{R}^2$. On se donne deux réels α et β . Etablir qu'il existe un unique vecteur $\vec{u}$ du plan tel que $< \vec{u}, \vec{e}_1 >= \alpha$ et $< \vec{u}, \vec{e}_2 >= \beta$. On cherchera les composantes (x, y) de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en écrivant les conditions ci-dessus sous forme d'un système linéaire d'inconnues x et y et on pensera à Cauchy-Schwarz.

Exercice 7. Parmi les matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, lesquelles sont orthogonales ?orthogonales directes ?

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Démontrer soigneusement la proposition (2.18).
Exercice 9. Soit S une matrice orthogonale indirecte de $\mathbb{O}_2(\mathbb{R})$. On a $(\widehat{S\vec{u}, S\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$