UNIVERSITÉ DE TOURS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Licence 2ième année
2019–2020

Examen de contrôle continu : correction

Durée : 2h
Documents et calculatrices interdits

REMARQUE : Dans ce corrigé nous avons volontairement introduit des vérifications des calculs. Il est important, dans des exercices calculatoires où des erreurs peuvent se glisser facilement, d'avoir des moyens de contrôler qu'il n'y a pas eu d'erreur commise.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** 1. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Quelles propriétés supplémentaires doit-elle satisfaire pour être un produit scalaire ? (On ne se contentera pas d'énoncer chacune des propriétés, on en donnera une définition mathématique précise).

2. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux formes linéaires sur E, on a

$$\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0, f_1 = \alpha f_2.$$

3. Enoncer et démontrer le théorème de Pythagore.

SOLUTION :

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ doit être
   - symétrique : $\forall u, v \in E,\ \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$,
   - positive : $\forall u \in E,\ \langle u, u\rangle \geqslant 0$,
   - définie : $\forall u \in E,\ \langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0_E$.

2. Distinguons deux cas. Tout d'abord si $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2 = E$, f_1 et f_2 sont toutes deux la forme linéaire nulle. Elles sont donc proportionnelles (peu importe la constante).

   Sinon, $H = \operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$ est un hyperplan de E. Il existe donc $u \in E \setminus H$, c'est-à-dire tel que $f_1(u) \neq 0$ et $f_2(u) \neq 0$.

   On a $E = H \oplus \mathbb{R}u$. En effet, $H \cap \mathbb{R}u = \{0_E\}$ car si $0 \neq v \in H \cap \mathbb{R}u$, on aurait $u = \alpha v$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ et donc, puisque $v \in H$, $u \in H$, ce qui est absurde.

   Maintenant, pour tout $v \in E$, on peut écrire

$$v = \underbrace{\frac{f_1(v)}{f_1(u)}u}_{\in \mathbb{R}u} + \underbrace{\left(v - \frac{f_1(v)}{f_1(u)}u\right)}_{\in H}.$$

   En effet, pour voir que le second terme est dan H, il suffit de calculer son image par f_1 :

$$f_1\left(v - \frac{f_1(v)}{f_1(u)}u\right) = f_1(v) - \frac{f_1(v)}{f_1(u)}f_1(u) = 0.$$

   Ceci montre que $E = H + \mathbb{R}u$. Comme nous avons montré précédemment que $H \cap \mathbb{R}u = \{0_E\}$, on en déduit que $E = H \oplus \mathbb{R}u$.

   Soit maintenant $\alpha = f_1(u)/f_2(u)$ de sorte que $f_1(u) = \alpha f_2(u)$. Pour tout $v \in E$, on peut écrire de manière unique $v = \lambda u + v'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v' \in H$. On a alors

$$\begin{aligned} f_2(v) &= \lambda f_2(u) + f_2(v') = \lambda f_2(u), \\ f_1(v) &= \lambda f_1(u) + f_1(v') = \lambda f_1(u) = \lambda\alpha f_2(u) = \alpha f_2(v). \end{aligned}$$

   Cette dernière égalité étant vraie pour tout $v \in E$, on a bien $f_1 = \alpha f_2$.

3. Le théorème de Pythagore est le suivant : Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors pour tous $u, v \in E$, on a

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

La démonstration est un simple calcul. Si $u, v \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\
&= \langle u+v, u\rangle + \langle u+v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2, \\
\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 &= 2\langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0.$$

Exercice 2. Sur l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les quatre formes linéaires φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 définies par

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P'(0), \quad \varphi_3(P) = P(1), \quad \varphi_4(P) = P'(1).$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ forme une base de E^*.
2. Calculer la base préduale (P_1, P_2, P_3, P_4) de $\mathcal{B}$.
3. Exprimer la forme linéaire ψ définie par $\psi(P) = P(-1)$ comme combinaison linéaire de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$.

Solution :

1. Une réponse laconique à cette question pourrait être de dire qu'il suffit d'être capable de construire la base préduale pour conclure que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^*. En effet, si la base préduale existe et si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0_{E^*}$, on a, en particulier,
$$\lambda_1 = \lambda_1\varphi_1(P_1) + \lambda_2\varphi_2(P_1) + \lambda_3\varphi_3(P_1) + \lambda_4\varphi_4(P_1) = 0_{E^*}$$
et, de même, en remplaçant P_1 par n'importe quel P_i, $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). La famille des φ_i est donc libre et, comme $\dim E^* = \dim E = 4$, c'est une base de E^*.

   Donnons néanmoins une autre preuve. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On calcule le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1) \\ \varphi_1(X) & \varphi_2(X) & \varphi_3(X) & \varphi_4(X) \\ \varphi_1(X^2) & \varphi_2(X^2) & \varphi_3(X^2) & \varphi_4(X^2) \\ \varphi_1(X^3) & \varphi_2(X^3) & \varphi_3(X^3) & \varphi_4(X^3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

   Donc (en utilisant les résultats du cours) $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^*.

2. On cherche P_1 tel que
$$\begin{cases} \varphi_1(P_1) = 1 \\ \varphi_2(P_1) = 0 \\ \varphi_3(P_1) = 0 \\ \varphi_4(P_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(0) = 1 \\ P_1'(0) = 0 \\ P_1(1) = 0 \\ P_1'(1) = 0 \end{cases}$$

   Les deux dernières lignes indiquent que 1 est une racine (au moins) double de P_1. Comme P_1 est de degré au plus 3, il s'écrit
$$P_1 = (X-1)^2(aX+b),$$
   avec $a, b \in \mathbb{R}$. Reste à utiliser les deux premières lignes pour calculer a et b :
$$\begin{aligned}
&1 = P_1(0) = (-1)^2 b = b \qquad \text{donc } b = 1, \\
&0 = P_1'(0) = a \times (0-1)^2 + b \times 2 \times (0-1) = a - 2b \qquad \text{donc } a = 2b = 2.
\end{aligned}$$

   On a donc
$$P_1 = (X-1)^2(2X+1).$$

L'argument pour P_2 est encore plus simple :

$$\begin{cases} \varphi_1(P_2) = 0 \\ \varphi_2(P_2) = 1 \\ \varphi_3(P_2) = 0 \\ \varphi_4(P_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_2(0) = 0 \\ P_2'(0) = 1 \\ P_2(1) = 0 \\ P_2'(1) = 0 \end{cases}$$

On a donc que 0 est racine simple de P_2 et 1 est racine double de P_2 :

$$P_2 = cX(X-1)^2$$

avec $c \in \mathbb{R}$. Pour trouver c, il suffit de calculer $\varphi_2(P_2) = 1$:

$$1 = P_2'(0) = c\big(1 \times (0-1)^2 + 0 \times 2 \times (0-1)\big) = c.$$

D'où

$$P_2 = X(X-1)^2.$$

Le raisonnement est ensuite le même pour P_3 et P_4. 0 est racine double de P_3 donc $P_3 = (aX+b)X^2$. On calcule $P_3(1) = 1$, $P_3'(1) = 0$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 0 = 3a + 2b \end{cases}$$

d'où on tire $a = -2$ et $b = 3$:

$$P_3 = (-2X+3)X^2.$$

Et, finalement pour P_4, 0 est racine (au moins) double de P_4 et 1 est racine simple :

$$P_4 = cX^2(X-1).$$

Or, $1 = P_4'(1) = c$ d'où

$$P_4 = X^2(X-1).$$

On obtient donc

$$P_1 = (X-1)^2(2X+1), \quad P_2 = X(X-1)^2, \quad P_3 = (-2X+3)X^2, \quad P_4 = X^2(X-1).$$

3. Si $\psi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \psi(P_1) = (2 \times (-1) + 1) \times (-1-1)^2 = -4, \\ \alpha_2 &= \psi(P_2) = (-1) \times (-1-1)^2 = -4, \\ \alpha_3 &= \psi(P_3) = (-2 \times (-1) + 3) \times (-1)^2 = 5, \\ \alpha_4 &= \psi(P_4) = (-1-1) \times (-1)^2 = -2. \end{aligned}$$

Finalement

$$\psi = -4(\varphi_1 + \varphi_2) + 5\varphi_3 - 2\varphi_4$$

VÉRIFICATION : Nous allons vérifier nos calculs en prenant testant cette dernière égalité sur les vecteurs de la base canonique. En général, il n'est pas nécessaire de faire des vérifications aussi poussées, on s'aperçoit rapidement des erreurs...

- On a $\psi(1) = 1$ et $-4(\varphi_1(1) + \varphi_2(1)) + 5\varphi_3(1) - 2\varphi_4(1) = -4 + 5 = 1$: OK.
- On a $\psi(X) = -1$ et $-4(\varphi_1(X) + \varphi_2(X)) + 5\varphi_3(X) - 2\varphi_4(X) = -4 + 5 - 2 = -1$: OK.
- On a $\psi(X^2) = 1$ et $-4(\varphi_1(X^2) + \varphi_2(X^2)) + 5\varphi_3(X^2) - 2\varphi_4(X^2) = 5 - 2 \times 2 = 1$: OK.
- On a $\psi(X^3) = -1$ et $-4(\varphi_1(X^3) + \varphi_2(X^3)) + 5\varphi_3(X^3) - 2\varphi_4(X^3) = 5 - 2 \times 3 = -1$: OK.

Exercice 3. Sur l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on se donne la forme quadratique

$$\Phi((x_1, x_2, x_3)) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2.$$

1. Donner la forme bilinéaire symétrique φ associée à Φ.

2. Faire une réduction de Gauss de Φ.

3. La forme bilinéaire φ définit-elle un produit scalaire ? Justifier votre réponse.

Solution :

1. On utilise l'identité de polarisation. La forme bilinéaire symétrique φ est donnée, pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y2, y_3)$ par

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[4\left((x_1+y_1)^2 - x_1^2 - y_1^2\right) + 4\left((x_2+y_2)^2 - x_2^2 - y_2^2\right) + \left((x_3+y_3)^2 - x_3^2 - y_3^2\right)\right. \\
&\quad - 12\left((x_2+y_2)(x_3+y_3) - x_2x_3 - y_2y_3\right) - 4\left((x_1+y_1)(x_3+y_3) - x_1x_3 - y_1y_3\right) \\
&\quad \left.+2\left((x_1+y_1)(x_2+y_2) - x_1x_2 - y_1y_2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[4\left(2x_1y_1\right) + 4\left(2x_2y_2\right) + \left(2x_3y_3\right) - 12\left(x_2y_3 + x_3y_2\right) - 4\left(x_1y_3 + x_3y_1\right) + 2\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)\right] \\
&= 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 - 6\left(x_2y_3 + x_3y_2\right) - 2\left(x_1y_3 + x_3y_1\right) + \left(x_1y_2 + x_2y_1\right).
\end{aligned}$$

Vérification : Le fait de ne pas avoir réorganisé les termes montre immédiatement que si on échange x et y $\varphi(x,y)$ reste inchangée : elle est donc symétrique. De même, en égalant x et y, on voit que $\varphi(x,x) = \Phi(x)$.

2. Mettons tout d'abord en évidence tous les termes (dans $\Phi(x)$) contenant du x_1 :

$$\begin{aligned}
\Phi((x_1,x_2,x_3)) &= 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2 \\
&= 4x_1^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 \\
&= 4\left(x_1^2 - x_1x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2\right) + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 \\
&= 4\left[\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2\right] + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 \\
&= 4\left[\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 - \left(\frac{1}{4}x_3^2 - 2\frac{x_3}{2}\frac{x_2}{4} + \frac{1}{16}x_2^2\right)\right] + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 \\
&= 4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 - x_3^2 + x_2x_3 - \frac{x_2^2}{4} + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 \\
&= 4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}x_2^2 - 11x_2x_3.
\end{aligned}$$

Procédons ensuite de même avec les termes restants contenant du x_2 :

$$\begin{aligned}
\Phi((x_1,x_2,x_3)) &= 4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}x_2^2 - 11x_2x_3 \\
&= 4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x_2^2 - \frac{44}{15}x_2x_3\right) \\
&= 4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}\left[\left(x_2 - \frac{22}{15}x_2x_3\right)^2 - \left(\frac{22}{15}\right)^2 x_3^2\right] \\
&= 4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x_2 - \frac{22}{15}x_3\right)^2 - \frac{15}{4}\left(\frac{22}{15}\right)^2 x_3^2 \\
&= 4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x_2 - \frac{22}{15}x_3\right)^2 - \frac{121}{15}x_3^2.
\end{aligned}$$

On a donc obtenu la réduction de Gauss de Φ suivante :

$$\Phi((x_1,x_2,x_3)) = 4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x_2 - \frac{22}{15}x_2x_3\right)^2 - \frac{121}{15}x_3^2.$$

VÉRIFICATION : On développe l'expression qu'on a trouvée :

$$\begin{aligned}
&4\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x_2 - \frac{22}{15}x_2x_3\right)^2 - \frac{121}{15}x_3^2 \\
&= 4\left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{4} + \frac{x_2^2}{16} - x_1x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{4}x_2x_3\right) + \frac{15}{4}\left(x_2^2 - \frac{44}{15}x_2x_3 + \left(\frac{22}{15}\right)x_3^2\right)^2 - \frac{121}{15}x_3^2 \\
&= 4x_1^2 + x_3^2 + \frac{x_2^2}{4} - 4x_1x_3 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + \frac{15}{4}x_2^2 - 11x_2x_3 + \frac{121}{15}x_3^2 - \frac{121}{15}x_3^2 \\
&= 4x_1^2 + x_3^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2 - 12x_2x_3 \\
&= \Phi((x_1, x_2, x_3)).
\end{aligned}$$

3. La signature de la forme quadratique Φ est $(n_+ = 2, n_- = 1)$. La forme bilinéaire φ associée n'est donc pas définie positive. On peut également considérer le vecteur $x = \left(\frac{2}{15}, \frac{22}{15}, 1\right)$[1] pour lequel $\Phi(x) = -\frac{121}{15} < 0$.

Exercice 4. Sur l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère la forme bilinéaire symétrique

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Quelle est la norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire ?
3. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et donner le cas d'égalité.
4. Enoncer l'inégalité de Minkoswki pour $\|\cdot\|$ et donner le cas d'égalité.

SOLUTION :

1. L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est clairement symétrique en P et Q :

$$\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X].$$

De plus, pour tous $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2}(\lambda P_1 + P_2)(k)Q(k) = \sum_{k=0}^{2}(\lambda P_1(k) + P_2(k))Q(k) \quad = \lambda\sum_{k=0}^{2}P_1(k)Q(k) + \sum_{k=0}^{2}P_2(k)Q(k) = \lambda\langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q$$

où on a utilié la linéarité de la somme pour passer de la première ligne à la seconde. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc linéaire à gauche. Par symétrie, elle est linéaire à droite. C'est une forme bilinéaire.
De plus, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{2} P(k)^2 \geqslant 0$$

Donc la forme bilinéaire est positive. Et, si $\langle P, P\rangle = 0$, on a

$$0 = \sum_{k=0}^{2} P(k)^2.$$

Puisque la somme du membre de droite ne comporte que des termes positifs ou nuls, on a que chacun de ces termes est nul :

$$P(0) = P(1) = P(2) = 0.$$

0, 1 et 2 sont donc racines de P. Or P est un polynôme de degré au plus 2. S'il était non nul, il admettrait au plus 2 racines, ce qui implique que $P = 0$. La forme bilinéaire est donc définie. C'est un produit scalaire.

2. Par définition de la norme associée à un produit scalaire,

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{2} P(k)^2}.$$

[1]Le choix de ce vecteur n'est pas lié au hasard. C'est le troisième vecteur de la base duale de $\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_2, x_2 - \frac{22}{15}x_3, x_3\right)$

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad |\langle P, Q\rangle| \leqslant \|P\| \ \|Q\|.$$

Dans le cas présent, on obtient donc

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \left|\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{2} P(k)^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{2} Q(k)^2}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si P et Q sont liés, autrement dit, si $P = 0$ ou si $Q = \lambda P$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. L'inégalité de Minkowski s'écrit

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \|P + Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|.$$

On obtient donc ici

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \sqrt{\sum_{k=0}^{2}(P(k) + Q(k))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{2} P(k)^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{2} Q(k)^2}.$$

On a égalité si et seulement si P et Q sont positivement liés, c'est-à-dire si $P = 0$ ou s'il existe une constante $\lambda \geqslant 0$ telle que $Q = \lambda P$.