Un corrigé du Contrôle Continu Commun 1 2013

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

• **P** : Si e_1, e_2, e_3 sont des vecteurs de E deux à deux non colinéaires, alors la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

P est FAUSSE.

Contre-exemple : $E = \mathbb{R}^2$; $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (1,1)$ et $e_3 = (0,1)$.
e_1, e_2, e_3 sont deux à deux non colinéaires, mais (e_1, e_2, e_3) est liée car : $e_2 = e_1 + e_3$

•• **Q** : Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Q est VRAIE.

preuve
$$\begin{aligned} g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ g(f(x)) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \in \mathrm{Ker}(g) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{Im}(f),\ y \in \mathrm{Ker}(g) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g) \end{aligned}$$

••• **R** : Aucune application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^5)$ ne peut être injective.

R est VRAIE.

preuve Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^5)$.
D'après le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^6) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, soit
$6 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$. Or, $\mathrm{Im}(f)$ est un s.ev de $\mathbb{R}^5$, donc : $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 5$
par conséquent : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$ et alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \neq 0$: f est non injective.

Exercice 2

Soit f une application de E vers F où E et F sont des $\mathbb{K}$-ev.

1) f est linéaire (c-à-d : $f \in \mathcal{L}(E;F)$) $\Leftrightarrow \forall (u,v) \in E^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$

2)

$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) / u \in E\} = \{v \in F / \exists u \in E : v = f(u)\}$

i) Puisque f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$: $0_F \in \mathrm{Im}(f)$

ii) Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}\, f$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Prouvons que : $\alpha v_1 + v_2 \in \mathrm{Im}(f)$.
Puisque $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}\, f$, il existe $u_1, u_2 \in E$ tels que : $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$.
Alors, $\alpha v_1 + v_2 = \alpha f(u_1) + f(u_2)$ et puisque f est linéaire :
$\alpha v_1 + v_2 = f(\alpha u_1 + u_2)$: $\alpha v_1 + v_2 \in \mathrm{Im}(f)$.

i) et ii) prouvent que : Im (f) est un s.ev de F.

3) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Pour tout vecteur u de E, existent $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que :
$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.
Alors : $f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)$, soit par linéarité de f
$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i).$$
Par conséquent : $\mathrm{Im}(f) = \{f(u) / u \in E\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) \ / \ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\right\}$,
soit $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.
La famille $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Im}(f)$ est un s.ev de F de dimension finie et : $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(E) = n$.

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^4$, on considère :
$v_1 = (1,0,-1,2)$, $v_2 = (1,0,1,-2)$ et $v_3 = (1,0,-3,6)$.

1. La famille (v_1, v_2, v_3) engendre $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ ($\dim(F) \leq 3$).

On échelonne (v_1, v_2, v_3) :

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 & : & v_1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & : & v_2 \\ 1 & 0 & -3 & 6 & : & v_3 \end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 & : & v_1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & : & v_2 - v_1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & : & v_3 - v_1 \end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 & : & v_1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & : & v_2 - v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & -2v_1 + v_2 + v_3 \end{matrix}\right.$$

Les trois familles ci-dessus sont des familles génératrices de F, la dernière est échelonnée et possède deux vecteurs non nuls :
$(v_1, v_2 - v_1)$ est une base échelonnée de F ; de même que $(v_1, \frac{1}{2}(v_2 - v_1))$.

$((1,0,-1,2), (0,0,1,-2))$ est une base échelonnée de F, donc : $\dim(F) = 2$.

La famille suivante est échelonnée sans vecteur nul :

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 & : & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & : & \frac{1}{2}(v_2 - v_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \varepsilon_4 \end{matrix}\right.$$

Par conséquent ; $(v_1, \frac{1}{2}(v_2 - v_1), \varepsilon_2, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (famille libre maximale), par suite $G = \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_4)$ est un supplémentaire de F dans E.

$G = \text{Vect}((0,1,0,0), (0,0,0,1))$ est un supplémentaire de F dans E : $E = F \oplus G$.

2. $u = (x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : u = a(1,0,-1,2) + b(0,0,1,-2)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{rcl} a & & = x \\ & 0 & = y \\ -a & + \; b & = z \\ 2a & - \; 2b & = t \end{array}\right.}_{\text{inconnues}} \quad \text{est compatible}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & x \\ b & = & x + z \\ -2b & = & -2x + t \\ 0 & = & y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & x \\ b & = & x + z \\ 0 & = & 2z + t \\ 0 & = & y \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{conditions de compatibilité}$$

$$u = (x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ 2z + t = 0 \end{array}\right.$$

$$F : \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ 2z + t = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = (y+z,\ x-z,\ -x+y+2z).$$

1- $A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2- $(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\big((1,-1,1)\big)$ avec $(1,-1,1) \neq (0,0,0)$ (!) :

$\mathcal{B}_1 = \big((1,-1,1)\big)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

3- $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \operatorname{Vect}\big((0,1,-1), (1,0,1), (1,-1,2)\big)$:

$\big((1,0,1), (0,1,-1), (1,-1,2)\big)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$, échelonnons-la :

$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & : u_1 \\ 0 & 1 & -1 & : u_2 \\ 1 & -1 & 2 & : u_3 \end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & : u_1 \\ 0 & 1 & -1 & : u_2 \\ 0 & -1 & 1 & : u_3 - u_1 \end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & : u_1 \\ 0 & 1 & -1 & : u_2 \\ 0 & 0 & 0 & : -u_1 + u_2 + u_3 \end{matrix}\right.$

(u_1, u_2) est une base de $\operatorname{Im} f$: $\mathcal{B}_2 = \big((1,0,1), (0,1,-1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

4. Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Puisque $\operatorname{card}(\mathcal{B}') = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, pour prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E, il suffit de prouver que $\mathcal{B}'$ est une famille libre, donc de rang 3.

Echelonnons $\mathcal{B}'$:

$\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & : v_1 \\ 1 & 0 & 1 & : v_2 \\ 0 & 1 & -1 & : v_3 \end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & : v_1 \\ 0 & 1 & 0 & : v_2 - v_1 \\ 0 & 1 & -1 & : v_3 \end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & : v_1 \\ 0 & 1 & 0 & : v_2 - v_1 \\ 0 & 0 & -1 & : v_1 - v_2 + v_3 \end{matrix}\right.$

ces trois familles de vecteurs ont le même rang, la dernière est échelonnée et est composée de trois vecteurs non nuls ; donc son rang est 3.

$\operatorname{rg}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{card}(v_1, v_2, v_3) = 3$: (v_1, v_2, v_3) est libre, maximale dans $\mathbb{R}^3$, c'est une base de E : $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.

Puisque $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E : $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

5- $\mathcal{B}_2 = \big((1,0,1), (0,1,-1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$ et :

$f(1,0,1) = (1,0,1)$ et $f(0,1,-1) = (0,1,-1)$, par conséquent :

$\forall v \in \operatorname{Im}(f),\ f(v) = v$.

Soit $u \in E$.

D'après 4. $\exists!\,(w,v) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f$: $u = w + v$.

Alors puisque f est linéaire : $f(u) = f(w) + f(v)$ avec

$f(w) = 0_E$ car $w \in \operatorname{Ker} f$ et $f(v) = v$ car $v \in \operatorname{Im}(f)$ d'après ce qui précède.

Finalement, $f(u) = v$:

f est la projection sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$.