Université de Tours 2021/22

L2-Math : Analyse 3

Corrigé du CC2

Exercice 1. 1) On a $\frac{1}{(n+1)^{4/3}} \sim \frac{1}{n^{4/3}}$ et $\sum \frac{1}{n^{4/3}}$ est une série de Riemann convergente $(4/3 > 1)$ donc $\sum \frac{1}{(n+1)^{4/3}}$ est convergente.

$\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}$ est une série alternée et $(\frac{1}{(n+1)^{2/3}})$ est une suite décroissante qui tend vers 0 donc par le critère de série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}$ est convergente.

2) On a

$$\begin{aligned}\exp(\frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}) - 1 &= 1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^{4/3}} + o(\frac{1}{(n+1)^{4/3}}) - 1 \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}} + O(\frac{1}{(n+1)^{4/3}})\end{aligned}$$

Le terme général est donc la somme de deux termes. La série associée au premier terme $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}$ est convergente. Le second terme est un O du terme général d'une série absolument convergente donc et la série associée à ce second terme est convergente. Ainsi la série associée à la somme $\sum(\exp(\frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}) - 1)$ converge.

Exercice 2.

- En $+\infty$ on a $t^2 = o_{+\infty}(e^{t/2})$ donc

$$(t^2+4)e^{-t} \sim_{+\infty} t^2 e^{-t} = o_{+\infty}(e^{-t/2})$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt$ est convergente donc $\int_0^{+\infty}(t^2+4)e^{-t}dt$ est convergente.

- Nous allons appliquer la règle d'Abel pour montrer la convergence de l'intégrale. Tout d'abord $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\int_1^x \cos(t)(1+2\sin(t))dt = \int_1^x \cos(t) + 2\cos(t)\sin(t)dt &= \int_1^x \cos(t) + \sin(2t)dt \\ &= \sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) - \sin(1) + \frac{1}{2}\cos(2)\end{aligned}$$

Ainsi $\left|\int_1^x \cos(t)(1+2\sin(t))dt\right| \leq 3$. La règle d'Abel permet alors de conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}(1+2\sin(t))dt$ est convergente.

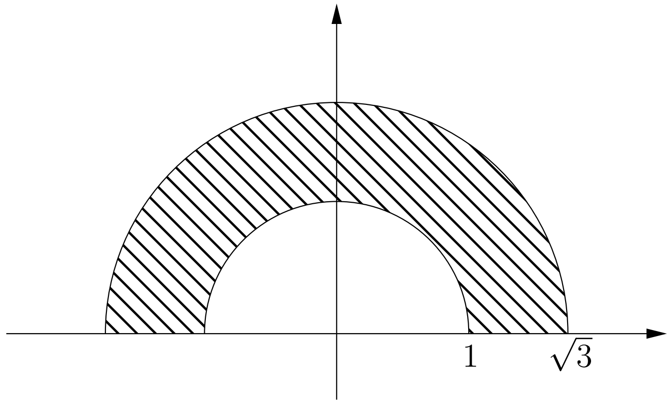
- On applique le critère de D'Alembert

$$\frac{((n+1)^2+1)2^{n+1}}{5^{n+1}+3}\frac{5^n+3}{(n^2+1)2^n} \sim \frac{n^2 2^{n+1}}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n^2 2^n} = \frac{2}{5} < 1$$

Donc la $\sum \frac{(n^2+1)2^n}{5^n+3}$ est convergente.

- On a $\left|\frac{\sin(n^2)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ est convergente.

Exercice 3. Le domaine D est représenté ci-dessous



On commence par effectuer un changement de coordonnées polaires sur l'intégrale. On a

$$\begin{aligned}
\iint_D y\ln(x^2+y^2)dxdy &= \iint_{[1,\sqrt{3}]\times[0,\pi]} r\sin(\theta)\ln(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)rdrd\theta \\
&= \iint_{[1,\sqrt{3}]\times[0,\pi]} r^2\sin(\theta)\ln(r^2)drd\theta \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} 2r^2\ln(r)\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta dr \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} 4r^2\ln(r)dr \\
&= \left[\frac{4}{3}r^3\ln(r)\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}}\frac{4}{3}r^2dr \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{3}^3\ln(\sqrt{3}) - \left[\frac{4}{9}r^3\right]_1^{\sqrt{3}} \\
&= 2\sqrt{3}\ln 3 - \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Exercice 4. 1) On a $\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}\right| \leq \frac{1}{4k^2}$. Comme la série $\sum\frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$ est absoluement convergente donc convergente

2) On a

$$\int_0^1 x^{2k}(1-x)dx = \int_0^1 x^{2k}-x^{2k+1}dx = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

3) On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} &= \sum_{k=0}^n\int_0^1(-1)^k x^{2k}(1-x)dx \\
&= \int_0^1\sum_{k=0}^n(-x^2)^k(1-x)dx \\
&= \int_0^1\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}(1-x)dx \\
&= \int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}dx + \int_0^1(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}(1-x)}{1+x^2}dx
\end{aligned}$$

4) Pour $x \in [0,1]$, on a $\left|\frac{1-x}{1+x^2}\right| \leq 1+x \leq 2$. Ainsi

$$\left|\int_0^1 (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}(1-x)}{1+x^2}dx\right| \leq \int_0^1 x^{2n+2}\left|\frac{1-x}{1+x^2}\right| dx \leq \int_0^1 2x^{2n+2}dx = \frac{2}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx$$

5) On a

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$