Un corrigé du CC I (Sa 21/10/2017)

Ex 1 COURS

Voir le cours !

Ex 2

• $E = M_2(\mathbb{R})$

$\mathcal{S} = \{ M \in E \ / \ {}^tM = M \}$

$\mathcal{A} = \{ M \in E \ / \ {}^tM = -M \}$

On a : $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, donc $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$,
ce qui prouve que $\mathcal{S}$ est un s-ev de E qui possède une famille génératrice de cardinal 3, cette famille est échelonnée (relativement à la base canonique de E) sans matrice nulle, elle est donc libre : c'est une base de $\mathcal{S}$: $\dim \mathcal{S} = 3$, soit : P est vraie.

De même : $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \ / \ b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et alors $\mathcal{A}$ est la droite (vectorielle) de E dirigée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $\dim \mathcal{A} = 1$, soit :

Q est fausse.

Remarque : On rappelle que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans E : $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = E$.

•• Soit $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Le théorème du rang s'écrit alors pour f :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

i) L'application nulle de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$: $(x, y, z) \mapsto (0,0)$ est linéaire et non surjective ($\mathrm{Im}(f) = \{(0,0)\}$), donc : R est fausse.

ii) D'après le théorème du rang, puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un s-ev de $\mathbb{R}^2$ et donc : $\dim \mathrm{Im}(f) \leq 2$, on aura : $\dim \mathrm{Ker}(f) \geq 1$, soit jamais $\mathrm{Ker}\, f = \{(0,0,0)\}$: S est vraie.

Ex 3

Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{B}$ sa base canonique et pose :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $F = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3) = \{ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \ / \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & 2\alpha_2 - 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} \ / \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Par définition, (A_1, A_2, A_3) est une famille génératrice de F.
Pour obtenir une base de F, il suffit de l'échelonner dans $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 : A_1 \\ 1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 : A_2 \\ 1 \ -2 \quad 2 \quad 1 : A_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 : A_1 \\ 0 \quad 2 \ -1 \quad 0 : A_2 - A_1 \\ 0 \ -2 \quad 1 \quad 0 : A_3 - A_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 : A_1 \\ 0 \quad 2 \ -1 \quad 0 : A_2 - A_1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 : \underbrace{A_2 - A_1 + A_3 - A_1}_{-2A_1 + A_2 + A_3} \end{cases}$$

ces 3 familles de matrices engendrent F, la dernière est échelonnée et comporte une matrice nulle : $(A_1, A_2 - A_1)$ est une base de F.

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F, par conséquent :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \ M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \iff \text{Le système } \begin{cases} \alpha & = a \\ 2\beta & = b \\ \alpha - \beta & = c \\ \alpha & = d \end{cases} \text{ est compatible}$$

En échelonnant ce système

$$\begin{cases} \alpha & = a \\ 2\beta & = b \\ -\beta & = -a + c \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 0 & = -a + d \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha & = a \\ 2\beta & = b \\ 0 & = -2a + b + 2c \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ 0 & = a - d \end{cases}$$

Ce dernier système est échelonné, ses (deux) dernières lignes "nulles" fournissent les conditions de compatibilité du système.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} a - d = 0 \\ -2a + b + 2c = 0 \end{cases}$$

Par définition : $\text{rg}\, \mathcal{F} = \text{rg}\,(A_1, A_2, A_3) = \dim F = 2$

2. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ a - b + d = 0 \right\}$

$a - b + d = 0 \iff a = b - d$.

Alors $G = \left\{ \begin{pmatrix} b-d & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \dots = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$,

donc G est un s-ev de E dont $\left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice, qui après échelonnement (comme dans 1-) nous donne une base de G, par exemple : $\left(B_1, B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 \right)$.

Remarque : G est un hyperplan de E ($\dim(G) = 3 = \dim(E) - 1$), c'est le noyau de la forme linéaire définie sur E par : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a - b + d$.

G est un s-ev de E dont $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $a-b+d = 1-0+1 = 2 \neq 0$: $A_1 \notin G$.

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $a-b+d = 1-2+1 = 0$: $A_2 \in G$

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $a-b+d = 1+2-1 = 2 \neq 0$: $A_3 \notin G$.

$$\underline{A_1 \notin G,\ A_3 \notin G\ ;\ A_2 \in G.}$$

3- Par définition :

$\underline{F+G = \{ M+N \ / \ M \in F,\ N \in G \}}$.

Puisque $F = \text{Vect}\,(A_1, A_2 - A_1)$ et $G = \text{Vect}\,(B_1, B_1+B_2, B_3)$ d'après 1- et 2-, on aura :

$F+G = \text{Vect}\,(A_1, A_2-A_1; B_1, B_1+B_2, B_3)$ et pour obtenir une base de $F+G$, il suffit d'échelonner cette famille génératrice.

$$\left\{\begin{array}{cccccl} 1 & 0 & 1 & 1 & : & A_1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & : & A_2-A_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & : & B_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & B_1+B_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & B_3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{cccccl} 1 & 0 & 1 & 1 & : & A_1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & : & A_2-A_1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & : & B_1-A_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & B_1+B_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & B_3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{cccccl} 1 & 0 & 1 & 1 & : & A_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & B_1+B_2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & : & A_2-A_1-2(B_1+B_2) \\ 0 & 0 & -1 & -2 & : & B_1-A_1-B_1-B_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & B_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccccl} 1 & 0 & 1 & 1 & : & A_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & B_1+B_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & B_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & : & -A_1-B_2+B_3 \end{array}\right.$$

cette dernière famille échelonnée sans matrice nulle est une base de $F+G$, donc $\dim(F+G) = 4$.
Or, $F+G$ est un s-ev de E où $\dim E = 4$, donc :

$$\underline{F+G = E}$$

4- Grâce à la formule de Grassmann :

$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ et grâce à ce qui précède,

on obtient : $\dim(F \cap G) = 2+3-4 = 1$, soit :

$F \cap G$ est une droite vectorielle de E, or $A_2 \in F \cap G$ et $A_2 \neq 0_2$,

par conséquent : $\underline{F \cap G \text{ est la droite vectorielle de } E \text{ dirigée par } A_2.}$

Remarque : On peut aussi utiliser les systèmes d'équations.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \cap G \iff \left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} a - d = 0 \\ -2a + b + 2c = 0 \end{array}\right\} & M \in F \\ a - b + d = 0 & M \in G \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a - d = 0 & \\ b + 2c - 2d = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -b + 2d = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a - d = 0 & \\ b + 2c - 2d = 0 & \\ c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = d \\ b = 2d \\ c = 0 \end{array}\right.$$

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} d & 2d \\ 0 & d \end{pmatrix} / d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

Ex 4

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ par :
$f(x, y, z) = (x, -x-y-z, x+2y+2z)$.

1. $\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1,1) \\ f(e_2) = f(0,1,1) = (0,-1,2) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1,2) \end{cases}$, alors : $A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

2. $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} x = 0 \\ -x-y-z = 0 \\ x+2y+2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \\ y+z = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker} f = \{(0, y, -y) \,/\, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(0,1,-1)$.
Ker f est la droite de E dirigée par $(0,1,-1)$, droite dont $\begin{cases} x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}$ est un système d'équations. $\mathcal{B}_1 = ((0,1,-1))$ est une base de Ker f.

3. D'après le cours (voir Ex 1) : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$, soit puisque $f(e_2) = f(e_3)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,-1,1), (0,-1,2))$ avec $(1,-1,1)$ et $(0,-1,2)$ non colinéaires, donc :
$\mathcal{B}_2 = ((1,-1,1), (0,-1,2))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

$u = (x,y,z) \in \operatorname{Im} f \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a(1,-1,1) + b(0,-1,2) = (x,y,z)$

$\iff$ Le système $\begin{cases} a = x \\ -a - b = y \\ a + 2b = z \end{cases}$ est compatible

$\begin{cases} a = x \\ -b = x+y & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 2b = -x + z & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = x \\ -b = x+y \\ \underbrace{0 = x+2y+z}_{\text{condition de compatibilité}} \end{cases}$

Im f est le plan d'équation : $x + 2y + z = 0$.

4. $A^2 = A$, donc f est un projecteur : c'est la projection sur Im f parallèlement à Ker f.
f est la projection sur le plan d'équation : $x+2y+z=0$ parallèlement à la droite dirigée par $(0,1,-1)$.

Alors Ker f et Im f sont supplémentaires dans E :
$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$ et
le recollement $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ d'une base de Ker f et d'une base de Im f est une base de E : $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.