L2-Math : Analyse 3

Corrigé du CC2

Exercice 1. 1) On a $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente donc $\sum \frac{1}{n+1}$ est divergente.

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est une série alternée et $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ est une suite décroissante qui tend vers 0 donc par le critère de série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est convergente.

2) On a

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}-1 &= 1+\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{8}\frac{1}{n+1}+o(\frac{1}{(n+1)})-1\\ &= \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{8}\frac{1}{n+1}(1+o(1))\end{aligned}$$

Le terme général est donc la somme de deux termes. La série associée au premier terme $\sum \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est convergente. Le second terme $\frac{1}{8}\frac{1}{n+1}(1+o(1))$ est équivalent à $\frac{1}{8}\frac{1}{n+1}$ donc positif et la série associée à ce second terme est divergente. Ainsi la série associée à la somme $\sum \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}-1$ diverge.

Exercice 2.

- En $+\infty$ on a $t = o_{+\infty}(e^{-t/2})$ donc

$$\frac{t}{e^t+4} \sim_{+\infty} \frac{t}{e^t} = o_{+\infty}(e^{-t/2})$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt$ est convergente donc $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t+4}dt$ est convergente.

- On a $\sin u \sim_0 u$ donc $\frac{1}{\sqrt{t}}\sin(\frac{1}{t}) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ est une intégrale de Riemann convergente donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin(\frac{1}{t})dt$ est convergente.
- On a

$$\frac{n-2^n}{3^n-\sqrt{n}} \sim \frac{-2^n}{3^n} = -(\frac{2}{3})^n$$

La série $\sum(\frac{2}{3})^n$ est une série géométrique convergente donc $\sum \frac{n-2^n}{3^n-\sqrt{n}}$ est convergente.

- On applique le critère de Cauchy

$$\sqrt[n]{(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}} = (1-\frac{1}{\sqrt{n}})^n = \exp(n\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})) = \exp(-\sqrt{n}+o(\sqrt{n})) \to 0 < 1$$

(la limite venant du fait que $-\sqrt{n}+o(\sqrt{n}) \to -\infty$). Donc la série $\sum(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$ converge.

Exercice 3. 1) On a grâce à un changement de variable $s = t+1$

$$\begin{aligned}
I(x) = \int_0^x f(t+1) - f(t)dt &= \int_0^x f(t+1)dt - \int_0^x f(t)dt \\
&= \int_1^{x+1} f(s)ds - \int_0^x f(t)dt \\
&= \int_1^x f(t)dt + \int_x^{x+1} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt - \int_1^x f(t)dt \\
&= \int_x^{x+1} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt
\end{aligned}$$

2) Comme f est croissante, sur $[x, x+1]$ on a $f(x) \leq f(t) \leq f(x+1)$. Donc en intégrant on obtient

$$f(x) \leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x+1)$$

Par passage à la limite on obtient $\lim \int_x^{x+1} f(t)dt = \ell$. Ainsi $I(x)$ converge vers $\ell - \int_0^1 f(t)dt$. Donc I est convergente et

$$\int_0^{+\infty} f(t+1) - f(t)dt = \ell - \int_0^1 f(t)dt$$

3) On a par intégration par partie

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan(t)dt &= [t\arctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= \arctan(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

4) La fonction arctan est croissante et converge vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$. Donc les résultats des questions 1) et 2) s'appliquent et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \arctan(t+1) - \arctan(t)dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \arctan(t+1) - \arctan(t)dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

Exercice 4. 1) On applique le critère de D'Alembert, on a

$$\frac{\frac{1}{2k+3}\frac{1}{4^{k+1}}}{\frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k}} = \frac{2k+1}{2k+3}\frac{1}{4} \to \frac{1}{4} < 1$$

Donc la série $\sum \frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k}$ converge.

2) Comme $x^2 \neq 4$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} (\frac{x^2}{4})^k = \frac{1-(\frac{x^2}{4})^{n+1}}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{4-4(\frac{x^2}{4})^{n+1}}{4-x^2}$$

3) Ainsi en intégrant sur $[0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\int_0^1 x^{2k}dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{4^k}dx \\
&= \int_0^1 \frac{4-4(\frac{x^2}{4})^{n+1}}{4-x^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{4}{4-x^2} - \int_0^1 \frac{1}{4^n}\frac{x^{2n+2}}{4-x^2}dx
\end{aligned}$$

4) Comme $x \in [0,1]$, On a les majorations suivantes

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{4^n}\frac{x^{2n+2}}{4-x^2}dx\right| \leq \int_0^1 \frac{1}{4^n}\frac{1}{4-x^2}dx = \frac{1}{4^n}\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}dx \to 0$$

Donc par passage à la limite

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k} = \int_0^1 \frac{4}{4-x^2}dx$$

5) On a $\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$.
6) On a

$$\int_0^1 \frac{4}{4-x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}dx = [-\ln(2-x) + \ln(2+x)]_0^1 = \ln 3$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{4^k} = \ln 3$$