Solutions des exercices supplémentaires (2)

Ex 1 • $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$: $x \longmapsto f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{e^x-1}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

Pb en 0 ? $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \to 0 \Rightarrow e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \Rightarrow \sqrt{e^x-1} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$

$\Rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{e^x-1}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ cv $\left(\int_0^1 x^\alpha dx \text{ cv} \Leftrightarrow \alpha > -1 \right)$ ici $\alpha = -1/2$

donc $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ cv

Pb en $+\infty$: $\left| \frac{\cos x}{\sqrt{e^x-1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$, $\forall x \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{e^x}} = e^{-x/2}$

$\int_1^{+\infty} e^{-x/2}\,dx$ cv $\left(\int_1^{+\infty} e^{-ax} \text{ cv} \Leftrightarrow a > 0 \right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ est absolument convergente.

Conclusion $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ est convergente

• $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right) dx$. $\frac{\cos x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)$ $\varepsilon(h) \to 0$

$\ln\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right) = \frac{\cos x}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos^2 x}{x^2} + \frac{\cos^2 x}{x^2}\varepsilon\left(\frac{\cos x}{x}\right)$

$= f_1(x) + f_2(x)$ avec $f_1(x) = \frac{\cos x}{x}$ et

$f_2(x) = -\frac{1}{2}\frac{\cos^2 x}{x^2} + \frac{\cos^2 x}{x^2}\varepsilon\left(\frac{\cos x}{x}\right)$

D'après le critère d'Abel on a $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$

$f_2(x) \sim -\frac{1}{2}\frac{\cos^2 x}{x^2} < 0$, $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ cv

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} f_2(x)\,dx$. Conclusion $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right) dx$ c

• $\int_1^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin x}{x}\right) - 1 \right) dx$ $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ $e^h = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$ $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

$f(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{x}\right) - 1 = \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2}\varepsilon\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$= f_1(x) + f_2(x)$ avec $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ et

$f_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2}\varepsilon\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. D'aprés le critère d'Abel on a $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ cv

et $f_2(x) \sim \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{x^2}$ $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ cv $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ cv

et $\int_1^{+\infty} f_2(x)\,dx$ cv Conclusion $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ cv

$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$. Soit $M>0$. On pose $I(M)=\int_1^M \sin(x^2)\,dx$

On utilise le changement de variable $y=x^2$, on a $dy=2x\,dx$

$\Rightarrow dx=\frac{dy}{2x}=\frac{dy}{2\sqrt{y}}$, $I(M)=\int_1^{M^2}\sin(y)\frac{dy}{2\sqrt{y}}$

D'après le critère d'Abel on a $\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\,dy$ converge, d'où

$$\lim_{M\to+\infty} I(M)=\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2}\int_1^{M^2}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,dy=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\,dy$$

Conclusion l'intégrale $\int_1^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$ est convergente

Ex 2 $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ f continue. et $\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ converge

1) $x_n\to+\infty$ et $y_n\to+\infty$ On a

$$\int_{x_n}^{y_n}f(t)\,dt=\int_{x_n}^{0}f(t)\,dt+\int_0^{y_n}f(t)\,dt=\int_0^{y_n}f(t)\,dt-\int_0^{x_n}f(t)\,dt$$

. $y_n\to+\infty$ et comme $\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ cv on a $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{y_n}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$

de même on a $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{x_n}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$. D'où on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_n}^{y_n}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt-\int_0^{+\infty}f(t)\,dt=0$$

2) Application : $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}e^{-t\sin t}\,dt$. le changement de variab $y=t-(2n+1)\pi$

nous donne $I_n=\int_0^{\pi}e^{-(y+(2n+1)\pi)\sin(y+(2n+1)\pi)}\,dy$; $\sin(y+(2n+1)\pi)=\sin(y+$
$=-\sin y$

d'où $I_n=\int_0^{\pi}e^{+(y+(2n+1)\pi)\sin y}\,dy$

$\forall y\in[0,\pi]$ on a $(y+(2n+1)\pi)\sin y\geq 0$ et $e^{(y+(2n+1)\pi)\sin y}\geq 1$

On a donc $I_n\geq\int_0^{\pi}dy=\pi$

Si l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}e^{-t\sin t}\,dt$ est cv et comme on a $(2n+1)\pi\to+\infty$ et $(2n+2)\to 0$ on obtient (d'après 1°) : $I_n\to 0$ ce qui absurde : $I_n\geq\pi$

Conclusion l'intégrale I est divergente

Ex 3

1) $\alpha > 1$ $\quad I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln t)}{t^\alpha} dt$, $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln t)}{t^\alpha} dt$

les fonctions $t \longmapsto \frac{\cos(\ln t)}{t^\alpha}$ et $t \longmapsto \frac{\sin(\ln t)}{t^\alpha}$ sont continues sur $[1, +\infty[$. On a un pb en $+\infty$

$\forall t \geq 1 \quad \left| \frac{\cos(\ln t)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $\left| \frac{\sin(\ln t)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$

On a $\alpha > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge et par suite les intégrales I_α et J_α sont convergentes.

2) $t \geq 1$ $\quad f_\alpha(t) = \frac{\cos(\ln t)}{t^\alpha}$, $g_\alpha(t) = \frac{\sin(\ln t)}{t^\alpha}$

a) Le calcul de dérivée nous donne :

$$f'_{\alpha-1}(t) = (1-\alpha) f_\alpha(t) - g_\alpha(t) \text{ et } g'_{\alpha-1}(t) = f_\alpha(t) + (1-\alpha) g_\alpha(t)$$

et on obtient : $(1-\alpha) f'_{\alpha-1}(t) + g'_{\alpha-1}(t) = ((1-\alpha)^2+1) f_\alpha(t) \quad (1)$

$(1-\alpha) g'_{\alpha-1}(t) - f'_{\alpha-1}(t) = ((1-\alpha)^2+1) g_\alpha(t) \quad (2)$

b) $\alpha > 1$:

Soit $A > 1$ d'après (1) et (2) on obtient par intégration :

$$((1-\alpha)^2+1) \int_1^A f_\alpha(t) dt = (1-\alpha) \left[f_{\alpha-1}(t) \right]_1^A + \left[g_{\alpha-1}(t) \right]_1^A$$

$$= (1-\alpha) \left[\frac{\cos(\ln A)}{A^{\alpha-1}} - 1 \right] + \frac{\sin(\ln A)}{A^{\alpha-1}} \quad (1')$$

et $$((1-\alpha)^2+1) \int_1^A g_\alpha(t) dt = (1-\alpha) \left[g_{\alpha-1}(t) \right]_1^A - \left[f_{\alpha-1}(t) \right]_1^A$$

$$= (1-\alpha) \frac{\sin(\ln A)}{A^{\alpha-1}} - \left(\frac{\cos(\ln A)}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) \quad (2')$$

On a $\left| \frac{\cos(\ln A)}{A^{\alpha-1}} \right| \leq \frac{1}{A^{\alpha-1}} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha > 1 \Rightarrow \lim_{A \to +\infty} \frac{\cos(\ln A)}{A^{\alpha-1}} = 0$. De même on a $\lim_{A \to +\infty} \frac{\sin(\ln A)}{A^{\alpha-1}} = 0$ Finalement on a : en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1') et (2') :

$$I_\alpha = \frac{\alpha-1}{(1-\alpha)^2+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+2} \text{ et } J_\alpha = \frac{1}{(1-\alpha)^2+1} = \frac{1}{\alpha^2-2\alpha+2}$$

3) Pour $\alpha=1$, d'après (1') et (2') on a : $\forall A \geq 1$ $\int_1^A f_1(t)dt = \sin(\ln A)$

et $\int_1^A g_1(t)dt = 1 - \cos(\ln A)$

$\ln A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \lim_{A\to+\infty} \int_1^A f_1(t)dt$ n'existe pas donc I_1 diverge

de même on J_1 diverge.

Si $\alpha<1$, $\frac{1}{A^{\alpha-1}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{\cos(\ln A)}{A^{\alpha-1}}$ et $\frac{\sin(\ln A)}{A^{\alpha-1}}$ n'ont pas de limite

quand $A \to +\infty \Rightarrow I_\alpha$ et J_α diverges.

<u>Ex4</u> 1) $a>0$ la fonction : $t \longmapsto \frac{\ln t}{a^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ on a un Pb en 0 et en $+\infty$.

<u>Pb en 0</u> : $\frac{\ln t}{a^2+t^2} \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln t}{a^2} < 0$, $\int_0^1 \ln t\, dt$ cv (voir TD) on a donc

$\int_0^1 \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$ cv (1)

<u>Pb en $+\infty$</u> $t^{3/2} \frac{\ln t}{a^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\left(\frac{t^{3/2}\ln t}{a^2+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \to 0 \right)$

$\frac{\ln t}{a^2+t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ cv $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$ cv (2)

(1) et (2) $\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$ cv.

2) $\varepsilon>0$, $M>0$ $I(\varepsilon, M) = \int_\varepsilon^M \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$. On fait le changement de variable

$x = \frac{a^2}{t} \Rightarrow dt = -\frac{a^2}{x^2} dx$

$$I(\varepsilon,M) = \int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/M} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{a^2+\frac{a^4}{x^2}} \left(-\frac{a^2}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/M} \frac{\ln(a^2) - \ln(x)}{a^2x^2+a^4} (-a^2)\, dx = -\int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/M} \frac{2\ln a - \ln x}{x^2+a^2} dx$$

$$\Rightarrow I(\varepsilon, M) = -2\ln a \int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/M} \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/M} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx \quad (*)$$

3) $\frac{1}{a^2+x^2} \sim \frac{1}{x^2} > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ cv $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$ cv

$M>0$ $\int_0^M \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^M \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int_0^M \frac{1/a}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\left[\mathrm{Arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^M$

$$= \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{M}{a}\right) \xrightarrow[M\to+\infty]{} \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Ainsi on a $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$

Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$? On va faire tendre ε vers 0 dans $(*)$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$ sont convergentes.

On a $\lim_{\varepsilon\to0} \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{a^2/M} \frac{dx}{x^2+a^2} = \int_{+\infty}^{a^2/M} \frac{dx}{x^2+a^2}$ et $\lim \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{a^2/M} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \int_{+\infty}^{a^2/M} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$

$(*) \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to0} I(\varepsilon, M) = -2\ln a \int_{+\infty}^{a^2/M} \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_{+\infty}^{a^2/M} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$

$$= 2\ln a \int_{a^2/M}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} - \int_{a^2/M}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$$

et comme $\int_0^1 \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$ cv on a

$$\lim_{\varepsilon\to0} I(\varepsilon, M) = \lim_{\varepsilon\to0} \int_\varepsilon^M \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt = \int_0^M \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt \text{ . D'où}$$

$$\int_0^M \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt = 2\ln a \int_{a^2/M}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} - \int_{a^2/M}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx \quad (**)$$

En faisant tendre M vers $+\infty$ dans $(**)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt = 2\ln a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$$

$$\Rightarrow I := \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt = \ln a \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \ln a \cdot \frac{\pi}{2a} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{2a}\ln a}$$

Ex 5 1) a. la fonction $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$

Pb en 0 ? On a $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} - \varepsilon(x) \longrightarrow 0$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ converge.

Pb en $+\infty$: $0 \leq f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2} \leq \dfrac{2}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ cv $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ cv

Conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ converge.

b) $\varepsilon > 0$, $M > 0$ $I(\varepsilon, M) = \displaystyle\int_\varepsilon^M \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ On utilise une intégration par parties : $u' = \dfrac{1}{x^2}$, $v = 1 - \cos x$ $u = -\dfrac{1}{x}$ et $v' = \sin x$

On a $I(\varepsilon, M) = -\left[\dfrac{1-\cos x}{x}\right]_\varepsilon^M + \displaystyle\int_\varepsilon^M \frac{\sin x}{x}\,dx$

$\Rightarrow I(\varepsilon, M) = \dfrac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} - \dfrac{1-\cos M}{M} + \displaystyle\int_\varepsilon^M \frac{\sin x}{x}\,dx$ $(*)$

---

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est cv on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_\varepsilon^M \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx$

et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$. En faisant tendre ε vers 0 dans $(*)$ on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon, M) = -\frac{1-\cos M}{M} + \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx$$

de plus on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} I(\varepsilon, M) = \displaystyle\int_0^M \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$. D'où

$\displaystyle\int_0^M \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = -\frac{1-\cos M}{M} + \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx$. En fait tendre M vers $+\infty$

on a $\lim\limits_{M \to +\infty} \dfrac{1-\cos M}{M} = 0$. et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ sont cv

On obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ est convergente ?

La fonction $x \longmapsto g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$

Pb en 0 : On a $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. La fonction g est prolongeable par continuité en 0, en posant $g(0) = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ est convergente.

Pb en $+\infty$ On a $\forall x \geqslant 1$ $\quad 0 \leq g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \leq$ et $\quad$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ cv

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ cv. Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ cv.

On a $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos 2x}{x^2}\right) dx$

Soit $\varepsilon > 0$ le changement de variable $y = 2x$ nous donne

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1 - \cos 2x}{x^2}\,dx = \int_{2\varepsilon}^2 \frac{1 - \cos y}{y^2/4} \cdot \frac{dy}{2} = \int_{2\varepsilon}^2 2\,\frac{1 - \cos y}{y^2}\,dy$$

$M > 0$, $\displaystyle\int_1^M \frac{1 - \cos 2x}{x^2}\,dx = \int_2^{2M} 2\,\frac{1 - \cos y}{y^2}\,dy$

En faisant tendre ε vers 0 et M vers $+\infty$ on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos 2x}{x^2}\,dx = \int_0^2 2\,\frac{1 - \cos y}{y^2}\,dy \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}\,dx = 2\int_2^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2}\,dy$$

et par suite :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2}\,dy = \pi/2$$

On a bien montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi/2$

Ex 6 1) $n \in \mathbb{N}$. $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}\,dx$. La fonction $x \mapsto x^n e^{-x^2/2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, On a $x^{n+2} e^{-x^2/2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow x^n e^{-x^2/2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est CV $\Rightarrow$ I_n est convergente.

$M>0$ $I_1 = \int_0^1 x e^{-x^2/2} = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^M = -\left(e^{-M^2/2} - 1\right) \xrightarrow[M\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \underline{I_1 = 1}$

2) Intégrant par parties : $u'(x) = x^n$, $v(x) = e^{-x^2/2}$

$u(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ $v'(x) = -x e^{-x^2}$

$M>0$ $\int_0^M x^n e^{-x^2/2} = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} e^{-x^2/2}\right]_0^M + \frac{1}{n+1}\int_0^M x^{n+2} e^{-x^2/2}\,dx$

$= \frac{1}{n+1} M^{n+1} e^{-M^2/2} + \frac{1}{n+1}\int_0^M x^{n+2} e^{-x^2/2}\,dx$

$M \to +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} x^{n+2} e^{-x^2/2}\,dx \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{n+1} I_{n+2}$

$\Rightarrow \underline{I_{n+2} = (n+1) I_n \,,\ \forall n \in \mathbb{N}}$ (1)

3) On admet que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Montrons par récurrence que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

c'est vrai pour $n=0$, Supposons que c'est vrai pour n et montrons le pour $n+1$. On a $I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = (2n+1) I_{2n}$ (d'après (1))

$\Rightarrow I_{2(n+1)} = (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)}{(2n+2)\,2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow I_{2(n+1)} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Ainsi on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

On a $I_1 = 1$. Montrons par récurrence que $I_{2n+1} = 2^n n!$. C'est vrai pour $n=1$ Supposons que c'est vrai pour n et montrons le pour $n+1$

On a $I_{2(n+1)+1} = I_{2n+3} = (2n+2) I_{2n+1}$ (d'aprs (1))

$= (2n+2)\, 2^n n! = 2^{n+1}(n+1)!$

$\Rightarrow I_{2(n+1)+1} = 2^{n+1}(n+1)!$. Ainsi on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underline{I_{2n+1} = 2^n n!}$