TD1 – ANALYSE COMBINATOIRE

I Notations ensemblistes (révisions)

Exercice 1

Remplir les espaces avec l'un des symboles \in , \subset , = lorsque c'est possible :

- (3,5) ... {(3,5)}
- (3,5) ... {5,3}
- (3,5)...(5,3)

- {3,5} ... {5,3}
- {3,5} ... {4,5,3}
- $\{3,5\} \dots \mathcal{P}(\{4,5,3\})$

Exercice 2

A, B, et C sont trois parties d'un ensemble Ω et x est un élément de Ω . Compléter à l'aide de A, Bet C et des symboles \cap , \cup , \triangle et C la propriété "x appartient à ...":

- 1) A, B, et C simultanément,
- 2) Au moins l'un des trois ensembles,
- 3) C uniquement,
- 4) Aucun des trois ensembles,

- 5) A ou B mais pas aux deux,
- 6) Un seul des trois ensembles,
- 7) Deux des ensembles exactement
- 8) Au maximum deux des trois ensembles.

II Analyse combinatoire

Exercice 1

- 1) Combien y-a-t-il de paires d'initiales possibles (prénom, nom) pour une personne ?
- 2) Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins ont les mêmes initiales ?

Exercice 2

- 1) Déterminer de combien de façons 4 filles et 4 garçons peuvent être assis sur un rang.
- 2) Même question si les garçons doivent rester ensemble.
- 3) Même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi.
- 4) Même question si deux personnes du même sexe ne doivent jamais être côte à côte?

Exercice 3

On dispose d'un lot de six pièces discernables dont 3 sont bonnes et 3 sont défectueuses.

- 1) Combien peut-on former d'échantillons différents de 3 pièces ?
- 2) Combien, parmi ces échantillons, contiennent 3 pièces bonnes ?
- 3) Combien contiennent au moins une pièce bonne?

Exercice 4

Deux amis se trouvent dans la queue à l'entrée d'un restaurant self-service, sans nécessairement être l'un derrière l'autre. On considérera les personnes autres que les deux amis comme étant <u>indiscernables</u>. La queue comporte *n* personnes alignées.

- 1) Combien y-a-t-il de cas possibles?
- 2) Combien y-a-t-il de cas où les deux amis sont séparés par exactement r personnes ?

Exercice 5

Un ascenseur dessert les 12 étages d'un immeuble. Au rez-de-chaussée, l'ascenseur est vide et 10 personnes y entrent. On suppose que personne ne monte dans l'ascenseur aux différents étages atteints. Lorsqu'il parvient au 8^{ème} étage, il est vide.

Déterminer de combien de façons les 10 personnes qui ont pris cet ascenseur peuvent s'être réparties entre les étages.

Exercice 6

Les douze tomes d'une encyclopédie sont placés au hasard.

- 1) Combien y-a-t-il de manières de les placer ?
- 2) Parmi ces classements, combien y-en-a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre?

Exercice 7

Un réseau de téléphonie mobile comporte des numéros à 10 chiffres dont les deux premiers sont imposés. On ne raisonnera donc que sur les 8 chiffres restants. Ces 8 chiffres sont pris dans l'ensemble [0,9]. Dénombrer les numéros comportant :

- 1) 8 chiffres différents,
- 2) 8 chiffres dont le produit est divisible par 2,
- 3) deux fois le 1, deux fois le 4, 3 fois le 5 et une fois le 8,
- 4) deux chiffres se répétant 4 fois,
- 5) un chiffre apparaissant 4 fois, les autres 1 fois,
- 6) 8 chiffres formant une suite strictement croissante,
- 7) 8 chiffres formant une suite croissante.

Exercice 8

Dans une entreprise, le comité d'entreprise comprend 5 délégués du personnel et 4 personnes de la direction. De combien de manières peut-on former un sous-comité comprenant 3 délégués du personnel et 2 membres de la direction ?

Exercice 9

Un représentant s'apprête à visiter 5 de ses clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visites :

- 1) s'il les fait toutes le même jour?
- 2) s'il en fait trois un jour et deux le lendemain?

Exercice 10

On achète 6 pièces mécaniques indiscernables destinées à des ateliers numérotés. Comment peut-on les répartir :

- 1) s'il y a 6 ateliers et si elles doivent être placées chacune dans un atelier différent ?
- 2) s'il y a 3 ateliers, chacun recevant deux pièces?
- 3) s'il y a 4 ateliers, deux recevant deux pièces et deux autres une seule pièce?

Exercice 11

On dispose de 5 outils identiques et de 7 casiers numérotés susceptibles de les recevoir.

On suppose que chaque casier peut contenir jusqu'à 5 outils. Déterminer :

- 1) le nombre de façons de placer les 5 outils dans les 7 casiers d'une façon quelconque,
- 2) le nombre de façons de placer les 5 outils dans les 7 casiers, avec au maximum un outil par casier.

Exercice 12

On considère deux revues A et B. Sur 20 personnes, 10 lisent au moins A, 8 lisent au moins B et 3 lisent les A et B. De combien de façons différentes peut-on choisir 5 personnes parmi les 20 si :

- 1) chacune des 5 personnes lit au moins une revue?
- 2) trois d'entre elles lisent uniquement A, les deux autres lisant uniquement B?
- 3) trois d'entre elles au moins lisent A?

Exercice 13

Une association, comprenant 20 membres dont 12 hommes et 8 femmes, désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Dénombrer les comités que l'on peut former dans chacun des cas suivants :

- 1) Chaque membre de l'association accepte d'en faire partie,
- 2) Deux des hommes refusent d'en faire partie,
- 3) Mr A et Mme B refusent de siéger ensemble.

Exercice 14

Démonstration de la formule donnant le nombre de combinaisons avec répétition K_n^p :

- 1) Calculer les premières valeurs K_n^1, K_n^2, K_n^3 .
- 2) Montrer que, si l'on écrit toutes les combinaisons avec répétition de p éléments de E, un élément donné x (quelconque) est écrit $\frac{p}{n} * K_n^p$ fois.
- 3) Montrer que le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments contenant x au moins une fois est égal à K_n^{p-1} ,
- 4) Montrer que $\frac{p}{n} * K_n^p = K_n^{p-1} + \frac{p-1}{n} * K_n^{p-1}$. En déduire l'expression de K_n^p .

Exercice 15

Démontrer les deux formules suivantes :

1)
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1} + \binom{p}{p}$$

2) $\sum_{i=0}^{n} {n \choose i}^2 = {2n \choose n}$ On pourra ici utiliser la formule du binôme de Newton.