Exercices Supplementaires

Corrigé

Ex1 $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 0$ $f_n(x) = \sqrt{e^{-2x} + \frac{x}{n^2}}$

1) $\forall x \geq 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{e^{-2x} + \frac{x}{n^2}} = \sqrt{e^{-2x}} = e^{-x}$

Ainsi on a $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f(x) = e^{-x}$

2) $x_n = n^2$ $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\sqrt{e^{-2n^2} + 1} - e^{-n^2}\right| \longrightarrow 1$

On a $\sup\limits_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$\Rightarrow \sup\limits_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)|$ ne peut pas tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

3) D'après l'inégalité : $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{e^{-2x} + \frac{x}{n^2}} - \sqrt{e^{-2x}}\right| \leq \sqrt{\frac{x}{n^2}} = \frac{\sqrt{x}}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0.$$

Soit $M > 0$

$\forall x \in [0, M]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \leq \frac{\sqrt{M}}{n} \Rightarrow \sup\limits_{[0,M]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{M}}{n}$

$\frac{\sqrt{M}}{n} \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{[0,M]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\Rightarrow$ la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, M]$

4). D'après 4) on a $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ et d'après le cours on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$\int_0^1 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$. donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - e^{-1}$

Ex 2

$a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$

1) $x=0$ $f_n(0)=0$ et $\sum_{n\geq 0} f_n(0)$ cv, $x=1$ $f_n(1)=0$ et $\sum_{n\geq 0} f_n(1)$ cv

$x \in]0,1[$, $f_n(x) > 0$ $\quad \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^a x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x < 1$

Le critère de d'Alembert nous donne que $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge

Conclusion la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0,1]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^a x^n (1-x)$$

2) $f'_n(x) = n^a\left(n x^{n-1} - (n+1) x^n\right) = n^a x^{n-1}\left(n - (n+1)x\right)$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	α_n	$\searrow$	0

$\alpha_n = f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = n^a \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right)$

$\alpha_n = \dfrac{n^a}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \alpha_n$

On a $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$ $\Rightarrow$ $\alpha_n = \dfrac{n^a}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^a}{n+1} e^{-1} \sim \dfrac{n^a}{n} e^{-1}$

$\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{n^{1-a}}$. $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$ cv $\Leftrightarrow \sum \dfrac{1}{n^{1-a}}$ cv $\Leftrightarrow 1 < 1-a \Leftrightarrow a < 0$

Conclusion $\sum_{n\geq 1} f_n$ cv normalement sur $[0,1]$ ssi $a<0$

3) $a=0$, a) $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (1-x)$

$\forall x \in [0,1[$ $f(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = (1-x)\dfrac{x}{1-x}$ $\quad \left(0 < x < 1,\ \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}\right)$

$\Rightarrow f(x) = x$ $\forall x \in [0,1[$, $f(1) = 0$

4) Les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$. Si la série $\sum f_n$ cv uniforme sur $[0,1]$, on obtient f est continue sur $[0,1]$. Ce qui est absurd

f n'est pas continue en 1 : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1 \neq f(1)$

Conclusion si $a=0$ la série $\sum f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

4) $a>0$, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $1\leq n^a$ et $x^n(1-x)\leq n^a x^n(1-x) = f_n(x)$, pour tout $x\in[0,1]$

$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$. Ceci nous donne

$\forall x\in[0,1[$ $x\leq f(x)$. Cette inégalité nous donne que f n'est n'est pas continue en 1. En effet:

Si f est continue en 1 alors on a $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$

En faisant tendre x vers 1 dans l'inégalité $x\leq f(x)$, $\forall x\in[0,1[$

on obtient $1\leq \lim_{x\to 1} f(x) = 0$ ce qui est absurde.

Conclusion f n'est pas continue en 1 et par suite la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Ex3

1) $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$, $x\in[0,1]$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ $n\geq 2$ on a $n-x\neq 0$ et $n+x\neq 0$, $\forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow$ la fonction $f_n(x) = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$ est bien définie pour tout $x\in[0,1]$

Pour montrer que f est bien définie sur $[0,1]$, il faut montrer que la série $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$ converge. Si $x=0$ $f_n(0)=0$ et $\sum f_n(0)=0$.

$0<x\leq 1$, $f_n(x) = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2-x^2} \sim \frac{2x}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ cv

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ cv $\forall x\in[0,1]$. Conclusion f est bien définie sur $[0,1]$

2) Etudions la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$

$$f_n(x) = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2-x^2} \quad , \; x \in [0,1]$$

$$f_n'(x) = 2\,\frac{n^2-x^2+2x^2}{(n^2-x^2)^2} = 2\,\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2} \geq 0 \quad , \; f_n \text{ est croissante sur } [0,1]$$

x	0		1
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	α_n

$$\alpha_n = f_n(1) = \frac{2}{n^2-1}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2} \quad , \; \sum \frac{1}{n^2} \text{ cv}$$

$\sum \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$ cv $\Rightarrow$ $\sum f_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ et $\sum f_n$ cv uniformément sur $[0,1]$, le théorème du cours sur la continuité des séries nous donne que f est continue sur $[0,1]$.

3) D'après la cv uniforme sur $[0,1]$, on a d'après le cours.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$n \geq 2 \quad \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) dx = \Big[-\ln(n-x) - \ln(n+x) \Big]_0^1$$

$$= 2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1)$$

Calculons $\sum_{n=2}^{+\infty} \left[2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1) \right]$. Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$,

On a : $$S_N = \sum_{n=2}^{N} \left[2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1) \right] = 2\sum_{n=2}^{N} \ln n - \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow S_N = 2\left(\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln N \right) - \left(\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(N-1) \right) - \left(\ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln(N+1) \right)$$

$$= \ln 2 + \ln N - \ln(N+1) = \ln 2 - \ln\left(\frac{N}{N+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln 2$$

$$S_N \longrightarrow \ln 2 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \left[2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1) \right] = \ln 2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \ln 2$$

4) Montrons que f est dérivable sur $[0,1]$

On a $\forall n \geq 2$, $\forall x \in [0,1]$ $\quad f_n'(x) = 2\,\dfrac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2}$

On a $n^2+x^2 \leq n^2+1$, $\forall x \in [0,1]$ et

$0 < n^2-1 \leq n^2-x^2$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \quad 0 \leq f_n'(x) \leq \dfrac{2(n^2+1)}{(n^2-1)^2}$, $\forall x \in [0,1]$

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n'(x)| \leq 2\,\dfrac{n^2+1}{(n^2-1)^2}$, $\quad \dfrac{n^2+1}{(n^2-1)^2} \sim \dfrac{n^2}{n^4} = \dfrac{1}{n^2}$, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ cv

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 2} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n'(x)|$ cv

$\Rightarrow \sum f_n'(x)$ cv normalement donc uniformément sur $[0,1]$

D'après le théorème de dérivation sur les séries on a

f est dérivable sur $[0,1]$ et on a $f'(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n'(x)$.

Ex4

$n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{nx}}$.

1) $\forall x \geq 0 \quad 0 \leq f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{nx}} \leq \dfrac{1}{e^{nx}} = e^{-nx} = (e^{-x})^n$

$\forall x > 0$ $0 < e^{-x} < 1$ et $\sum\limits_{n\geq 0} (e^{-x})^n$ cv $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ cv $\forall x > 0$

(Remarque $f_n(0) = \frac{1}{2}$ et $\sum f_n(0)$ diverge)

$\forall x > 0 \quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, dx$.

2) $a > 0$ $\forall x \in [a, +\infty[$, $1+e^{na} \leq 1+e^{nx} \Rightarrow 0 < f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{nx}} \leq \dfrac{1}{1+e^{na}} = f_n(a)$

$\sup\limits_{x\geq a} |f_n(x)| = f_n(a)$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(a)$ converge d'après 1°/

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} \sup\limits_{x\geq a} |f_n(x)|$ cv $\Rightarrow \sum f_n(x)$ cv normalement sur $[a,+\infty[$,
$\forall a > 0$

f est continue sur $]0,+\infty[$

f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et $\sum f_n(x)$ cv normalement, donc uniformément sur $[a,+\infty[$, $\forall a>0$. le théorème du cours sur la continuité pour les série nous donne : f est continue sur $[a,+\infty[$, $\forall a>0$ et par suite f est continue sur $]0,+\infty[$.

3) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\geq 0$ $f_n'(x)=\dfrac{-ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2}$,

$$|f_n'(x)|=\frac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2}\leq\frac{ne^{nx}}{(e^{nx})^2}=\frac{n}{e^{nx}}=ne^{-nx}$$

Soit $a>0$ $\forall x\geq a$ $|f_n'(x)|\leq ne^{-nx}\leq ne^{-na}$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\geq a}|f_n'(x)|\leq ne^{-na}=\alpha_n$. $a>0$ $n^2\alpha_n=n^3e^{-na}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

$\alpha_n=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\sum\frac{1}{n^2}$ cv $\Rightarrow\sum\alpha_n$ cv et par suite $\sum\sup\limits_{x\geq a}|f_n'(x)|$ cv

$\Rightarrow\sum f_n'(x)$ cv normalement, donc uniformément sur $[a,+\infty[$, $\forall a>0$

D'après le théorème de dérivation on a f est dérivable sur $[a,+\infty[$, $\forall a>0$

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$

4) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{nx}}=0$ si $n\geq1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f_0(x)=\frac{1}{2}$ $\left(f_0(x)=\frac{1}{2}\right)$

$\sum f_n(x)$ cv unif sur $[1,+\infty[$. (d'après 2°) /

Th cours $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } n\geq1\\ \frac{1}{2} & \text{si } n=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0 \quad 1 \leq e^{nx} \Rightarrow 1 + e^{nx} \leq 2e^{nx}$

$\Rightarrow \frac{1}{2e^{nx}} = \frac{1}{2}(e^{-x})^n \leq \frac{1}{1+e^{nx}} = f_n(x) \quad . \quad 0 < e^{-x} < 1, \forall x > 0$

$\forall x > 0 \quad \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$

avec $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}}$ (Rappel $\forall |q| < 1, \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$)

$\Rightarrow \underline{\forall x > 0 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{-x}} \leq f(x)}$

On a $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-e^{-x}} = +\infty$. d'où $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Ex 5

1) $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{n+1}(1 - e^{-x/n})$

Pour $x = 0$ $f_n(0) = 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 0$

Pour $x > 0$ on a $\frac{x}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et on a $1 - e^{-t} \underset{0}{\sim} t \Rightarrow 1 - e^{-x/n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n(n+1)}$. $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow f_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est convergente, Conclusion $\sum f_n(x)$ cv simplement sur $[0, +\infty[$. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2) $\forall x \geq 0 \quad f_n'(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n} e^{-x/n} > 0 \Rightarrow f_n$ est croissante sur $[0, +\infty[$

Soit $a > 0$ $\forall x \in [0, a]$ on a $0 = f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(a)$

$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x)| = f_n(a)$ et $\sum_{n \geq 1} f_n(a)$ cv (1°) $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup |f_n(x)|$ cv

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, a]$

f_n continue, d'après le cours on a f est continue sur $[0, a]$, $\forall a > 0 \Rightarrow$ f est continue sur $[0, +\infty[$.

3°/ $\forall x \in [0,+\infty[$ $0 \leq f_n'(x) = \dfrac{e^{-x/n}}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\Rightarrow \sup\limits_{x \geq 0} |f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$

$\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ cv $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{x \geq 0} |f_n'(x)|$ est convergente

$\Rightarrow \sum f_n'(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,+\infty[$. Le Théorème du cours nous donne que f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

4)a) $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$ $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{x} = \dfrac{1}{n+1} \dfrac{1 - e^{-x/n}}{x}$.

L'inégalité $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$, valable pour tout $t \geq 0$

nous donne avec $t = \frac{x}{n}$: $0 \leq g_n(x) \leq \dfrac{1}{n+1} \dfrac{x/n}{x} = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow \sup\limits_{x > 0} |g_n(x)| \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$, $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ cv $\Rightarrow \sum \sup\limits_{x>0} |g_n(x)|$ cv

$\Rightarrow \sum g_n(x)$ cv normalement donc uniformément sur $]0,+\infty[$

b) Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

$\forall x > 0$ $\dfrac{f(x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$. $\sum g_n(x)$ cv unif sur $]0,+\infty[$ et on a

$\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = 0$. On a d'après le cours.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} g_n(x) = 0$$

Conclusion $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$