M3.1 - Algèbre 3 - Algèbre linéaire

—

Contrôle continu n° 1 du 7 novembre 2019 (Durée : 2h)

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Les exercices proposés sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction des réponses.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Soient E un espace vectoriel réel, f un endomorphisme de E et $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
   (a) Montrer que :
   $$f(\mathcal{F}) = \{f(u_1), f(u_2), f(u_3), \dots, f(u_n)\} \text{ libre} \Longrightarrow \mathcal{F} \text{ libre.}$$
   (b) La réciproque est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
   (c) Si ce n'est pas le cas, à quelle condition sur f a-t-on l'équivalence suivante ? On ne demande pas de démonstration pour cette question.
   $$f(\mathcal{F}) = \{f(u_1), f(u_2), f(u_3), \dots, f(u_n)\} \text{ libre} \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ libre.}$$
2. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in L(E)$.
   (a) Montrer que
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow f \text{est injective.}$$
   (b) A-t-on l'équivalence
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow f \text{est bijective ?}$$

Exercice 2. Vrai ou Faux. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, considérons les quatre vecteurs suivants

$$u_1 = (0, 1, -2, 1), u_2 = (1, 0, 2, -1), u_3 = (3, 2, 2, -1), u_4 = (0, 0, 1, 0) \text{ et } u_5 = (0, 0, 0, 1)\cdot$$

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses par une démonstration ou par un contre-exemple selon les cas. Les questions posées ne demandent pas de longs développements.

1. La famille $\{u_1, u_2, 0\}$ est libre.
2. La famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ est libre.
3. $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$.
4. $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \cap \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.
5. $\dim (\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \cap \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4)) = 1$.
6. $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) + \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.
7. $\mathrm{Vect}(u_4, u_5)$ et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.

Partie 1. Étude d'un exemple.
Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - z, x + y, y + z)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
3. Déterminer une base de l'image de f et donner le rang de f.
4. Calculer $f^2 = f \circ f$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ puis que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Tournez la page s.v.p. . .

Partie 2. Cas général. On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. Plus généralement, montrer que pour tout entier $k \geq 0$, $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
3. On suppose que $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0+1})$ pour un certain entier $k_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on a $\mathrm{Im}(f^{k_0+1}) = \mathrm{Im}(f^{k_0})$.
4. On suppose qu'il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0+1})$. Montrer que pour tout entier $k \geq k_0$, $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
5. Justifier qu'il existe un entier $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\mathrm{Ker}(f) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f^{k_0})$ et $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_{0+1}})$. On pourra étudier la suite des dimensions de $\mathrm{Ker}(f^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que l'on a alors $E = \mathrm{Ker}(f^{k_0}) \oplus \mathrm{Im}(f^{k_0})$.

Fin du sujet