Université F.Rabelais 2013-2014
L2S3 UE 3-1 Mathématiques

Contrôle continu commun 1 (Lundi 4/11 - Durée 2 h) 4 exercices indépendants

Exercice 1 (6 points)

En justifiant vos réponses soit par une preuve (concise) soit par un contre-exemple (précis), les assertions suivantes, où E est un espace vectoriel réel, sont-elles VRAIES, FAUSSES ?

P : Si e_1, e_2, e_3 sont des vecteurs de E deux à deux non colinéaires, alors la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
Q : Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors on a l'équivalence suivante :

$$g \circ f = 0_{L(E)} \Leftrightarrow Im(f) \subset \ker(g).$$

R : Aucune application linéaire f de $\mathbb{R}^6$ vers $\mathbb{R}^5$ ne peut être injective.

Exercice 2 COURS (5 points)

Soit f une application de E vers F où E et F sont des espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$.
1. Donner une définition de : "f est linéaire".
2. Lorsque f est linéaire, définir son image : $Im(f)$, puis prouver que c'est un s-ev de F.
3. Si $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, prouver qu'alors pour toute application linéaire f de E vers F : $Im(f) = Vect(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$.
Qu'en déduisez-vous quant à la dimension de $Im(f)$?

Exercice 3 (4 points)

Dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les trois vecteurs suivants :
$v_1 = (1, 0, -1, 2), v_2 = (1, 0, 1, -2), v_3 = (1, 0, -3, 6)$.
1. Déterminer une base échelonnée de $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$.
En déduire la dimension de F et l'un de ses supplémentaires : G dans E.
2. Déterminer un système d'équations de F.

Exercice 4 (6 points)

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (y + z, x - z, -x + y + 2z).$$

1. Déterminer la matrice représentative de f : A, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ du noyau de f.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de l'image de f.
4. Prouver que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E. Qu'en déduisez-vous ?
5. Etablir que pour tout vecteur $v \in Im(f)$, $f(v) = v$, puis reconnaître et caractériser f.
.