Corrigé du contrôle continu n° 1 du 7 novembre 2019

Exercice 2. Vrai ou Faux. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, considérons les cinq vecteurs suivants

$$u_1 = (0, 1, -2, 1), u_2 = (1, 0, 2, -1), u_3 = (3, 2, 2, -1), u_4 = (0, 0, 1, 0) \text{ et } u_5 = (0, 0, 0, 1)\cdot$$

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses par une démonstration ou par un contre-exemple selon les cas. Les questions posées ne demandent pas de longs développements.

1. La famille $\{u_1, u_2, 0\}$ est libre.
   La proposition est fausse. En effet, toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est une famille liée.
2. La famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ est libre.
   La proposition est fausse. En effet, une famille de cinq vecteurs ne peut pas être libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4 car $5 > 4$.
3. $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$.
   La proposition est vraie. On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$. D'une part, on a $u_3 = 2u_1 + 3u_2$ d'où $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$. Les vecteurs u_1 et u_2 sont clairement non colinéaires, ils forment donc une famille libre et génératrice de F. La famille $\{u_1, u_2\}$ est donc une base de F et $\dim(F) = 2$. D'autre part, il est facile de voir que $(1, 1, 0, 0) = u_1 + u_2$ et que $(-1, 1, -4, 2) = u_1 - u_2$. Ainsi, $G \subset F$. Les vecteurs $(1, 1, 0, 0)$ et $(-1, 1, -4, 2)$ sont clairement non colinéaires et forment donc une famille libre et génératrice de G. Ainsi, $\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$ est une base de G et $\dim(G) = 2$. On a ainsi montré que $G \subset F$ et $\dim(F) = \dim(G)$ d'où $F = G$.
4. $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.
   La proposition est vraie. En effet, d'après la question précédente, $(1, 1, 0, 0) = u_1 + u_2$ donc $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(u_1, u_2)$. De plus, $(1, 1, 0, 0) = -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3$ d'où $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$. On a bien montré que $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.
5. $\dim(\text{Vect}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)) = 1$.
   La proposition est fausse. En effet, d'après la question précédente, on a $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$. De plus, $u_2 \in \text{Vect}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$. Les vecteurs u_1 et u_2 étant clairement non colinéaires, ils forment donc une famille libre de $\text{Vect}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$. Ainsi, on a $\dim(\text{Vect}(u_1, u_2) \cap \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)) \geq 2$.
6. $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.
   La proposition est fausse. En effet,
   $$\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_4)$$
   car $u_3 = 2u_1 + 3u_2$. Ainsi, $\dim(\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_2, u_3, u_4))) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, u_4)) \leq 3$. Mais $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$ n'est pas égal à $\mathbb{R}^4$.
7. $\text{Vect}(u_4, u_5)$ et $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
   La proposition est vraie. En effet, d'une part $\mathcal{B} = \{u_4, u_5\}$ est clairement une base de $\text{Vect}(u_4, u_5)$ et d'autre part $\mathcal{C} = \{u_1, u_2\}$ est une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ d'après la question 3. La famille $\mathcal{B}\cup\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ car la famille est échelonnée. Puisque $\text{card}(\mathcal{B}\cup\mathcal{C}) = \dim(R^4)$, $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$ et $\text{Vect}(u_4, u_5)$ et $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. $f(x, y, z) = (x - z, x + y, y + z)$.
Partie I.

1. On vérifie facilement que pour tout réel λ, on a $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda f(x, y, z)$ et pour $(x, y, z), (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$
   $$f(x + x', y + y', z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z').$$
   Cela montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Tournez la page s.v.p. . .

2. Le vecteur (x,y,z) est dans $\ker f$ ssi

$$\begin{cases} x-z=0 \\ x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

puisque la deuxième équation est la somme des deux autres. On voit donc que $\ker f$ est la droite vectorielle dirigée par $u=(1,-1,1)$ donc $\dim\ker f=1$.

3. D'après le théorème du rang, on doit avoir $\mathrm{rg}(f)=3-\dim\ker f=2$. Or

$$\mathrm{Im}(f)=\{(x-z,x+y,y+z)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,1),(-1,0,1))=\mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,1))$$

car $(-1,0,1)=-(1,1,0)+(0,1,1)$. Ainsi $((1,1,0),(0,1,1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. On obtient

$$f\circ f(x,y,z)=((x-z)-(y+z),(x-z)+(x+y),(x+y)+(y+z))=(x-y-2z,2x+y-z,x+2y+z).$$

5. Le vecteur (x,y,z) est dans $\ker f$ ssi

$$\begin{cases} x-y-2z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

en échelonnant les équations. On a bien $\ker f^2=\ker f$. Par ailleurs $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}((1,2,1),(-1,1,2),(-2,-1,1))=\mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,1))$, là encore en échelonnant. D'où $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f^2)$.

Partie II.

1. Cette question a été traitée en TD !
2. La preuve est similaire. Si $x\in\ker f^k$, alors $f^k(x)=0$ et donc $f^{(k+1)}(x)=f(f^k(x))=0$ c'est à dire $x\in\ker f^{k+1}$. Maintenant si $y\in\mathrm{Im}(f^{k+1})$, alors il existe $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $y=f^{k+1}(x)=f^k(f(x))$ et donc $y=f^k(z)$ avec $z=f(x)$ c'est) dire $y\in\mathrm{Im}(f^k)$.
3. D'après le théorème du rang

$$n=\mathrm{rg}(f^{k_0})+\dim\ker f^{k_0}=\mathrm{rg}(f^{k_0+1})+\dim\ker(f^{k_0+1}).$$

Donc il y a équivalence entre les égalités $\mathrm{rg}(f^{k_0})=\mathrm{rg}(f^{k_0+1})$ et $\dim\ker f^{k_0}=\dim\ker(f^{k_0+1})$.

4. Supposons $\ker f^{k_0}=\ker(f^{k_0+1})$ et montrons que $\ker f^k=\ker(f^{k+1})$ pour tout entier $k\geq k_0$. On sait déjà d'après la question 2 que $\ker f^k\subset\ker(f^{k+1})$. Pour obtenir l'inclusion réciproque, considérons x dans $\ker(f^{k+1})$. On a $f^{k+1}(x)=f^{k_0+1}(f^{k-k_0}(x))=0$ donc $y=f^{k-k_0}(x)\in\ker f^{k_0+1}=\ker f^{k_0}$. Ainsi $f^{k_0}(y)=f^{k_0}(f^{k-k_0}(x))=0$ ce qui donne $f^k(x)=0$. On a bien montré que $x\in\ker f^k$ pour tout $x\in\ker f^{k+1}$ avec $k\geq k_0$ d'où l'inclusion $\ker f^{k+1}\subset\ker(f^k)$.
5. La suite des dimensions des noyaux $\ker f^k, k\geq 0$ est croissante pour l'inclusion et comme elle est bornée par n, elle est stationnaire à partir du rang k_0. Par ailleurs, la question précédente montre qu'elle est strictement croissante puis stationnaire à partir du rang k_0, comme souhaité.
6. Remarquons que la suite $\mathrm{Im}(f^k)$ est elle strictement décroissante jusqu'au rang k_0 puis constante d'après la question 3. On a par ailleurs $n=\mathrm{rg}(f^{k_0})+\dim\ker f^{k_0}$, il ne reste donc plus qu'à montrer que $\mathrm{Im}(f^{k_0})\cap\ker f^{k_0}=\{0\}$. Soit donc $y\in\mathrm{Im}(f^{k_0})\cap\ker f^{k_0}$. Il existe $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $y=f^{k_0}(x)$ et $f^{k_0}(y)=f^{2k_0}(x)=0$. Mais alors $x\in\ker f^{2k_0}$ et on sait que $\ker f^{2k_0}=\ker f^{k_0}$ ce qui donne $x\in\ker f^{k_0}$ et $y=f^{k_0}(x)=0$, comme souhaité.

Fin du corrigé