Université F.Rabelais 2017-2018
L2S3 UE 3-1 Mathématiques

Contrôle continu commun 1 (Samedi 21/10 - Durée 1h45) 4 exercices indépendants

Ni document ni matériel électronique

Exercice 1 COURS (4 points)

Soient f une application linéaire de E vers F, où E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies respectives n et p, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E

1. Prouver l'équivalence suivante : $f$est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

2. Prouver que : $\mathrm{Im}(f) = Vect(f(e_1), ..., f(e_n))$.

3. Prouver l'équivalence suivante : $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est libre $\Leftrightarrow$ f est injective.

Exercice 2 (4 points)

Les quatre assertions suivantes sont-elles vraies (V) ou fausses (F) ?

Une preuve concise justifiera le vrai ; un contre-exemple précis établira le faux.

P : L'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques de $M_2(\mathbb{R})$ en est un s-ev de dimension 3.

Q : L'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices antisymétriques de $M_2(\mathbb{R})$ en est un s-ev de dimension 3.

R : Toute application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ est surjective.

S : Aucune application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ ne peut être injective.

Exercice 3 (7 points)

Dans l'espace vectoriel réel $E = M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 2, dont on note $\mathcal{B}$ la base canonique, on considère les trois vecteurs suivants :

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Définir $F = Vect(A_1, A_2, A_3)$, puis en donner une base et un système d'équations vérifié par a, b, c, d lorsque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à F.

Quel est le rang de la famille $\mathcal{F} = (A_1, A_2, A_3)$?

2. Justifier que $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E / a - b + d = 0\}$ est un s-ev de E dont on donnera une base. Parmi les matrices de la famille $\mathcal{F} = (A_1, A_2, A_3)$, lesquelles appartiennent à G ?

3. Définir $F + G$, puis en donner une base.

4. Prouver que $F \cap G$ est une droite vectorielle de E dont on donnera un vecteur directeur.

Exercice 4 (7 points)

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$f(x, y, z) = (x, -x - y - z, x + 2y + 2z)$.

1. Calculer : $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de E, en déduire la matrice A représentative de f dans $\mathcal{B}$.

2. Déterminer le noyau de f dont on demande un système d'équations et une base $\mathcal{B}_1$.

3. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de l'image de f et un de ses systèmes d'équations.

4. Calculer A^2, puis reconnaître et caractériser f.

Qu'en déduisez-vous pour : $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$; pour $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$?