CONTROLE CONTINU 2 D'ALGEBRE–DUREE 2h

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Les exercices proposés sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction des réponses.

EXERCICE 1 (Questions de cours et QCM, réponses à justifier). (Barème indicatif: 10)

Parmi les assertions suivantes, ou les réponses à des questions, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses? Justifiez vos réponses par une démonstration ou par un contre-exemple selon le cas. Les questions posées ne demandent pas de longs développements.

I. (Questions de cours)

1. Rappeler le théorème de la base incomplète:

   Toute famille libre d'un e.v E de dimension finie peut être complétée en une base de E.

2. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

   (a) Comparer la multiplicité de λ et la dimension du sous-espace propre associé à λ:

   $$\dim(E_f(\lambda)) \leq \mathrm{mult}(\lambda)$$

   (b) Si λ est valeur propre simple, que peut-on en déduire de la dimension du sous-espace propre associé $E_f(\lambda)$?

   $$\dim(E_f(\lambda)) = 1$$

   car dans ce cas : $1 \leq \dim(E_f(\lambda)) \leq \mathrm{mult}(\lambda) = 1$

3. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Sans aucun calcul, donner les valeurs propres de f ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres.

   La matrice A étant diagonale, ses valeurs propres sont 1 (de multiplicité trois) et -1 (simple) et en plus $(e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_4 = (0,0,0,1))$ est une base de $E_f(1)$ et $(e_3 = (0,0,1,0))$ est une base de $E_f(-1)$.

II. (Vrai ou Faux)

1. Soient F et G deux s.e.v de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 (chacun):

   (a) $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.Faux

   (b) $F \cap G \neq \{(0,0,0)\}$. Vrai

   (c) F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.Faux

   (d) Si F et G sont distincts, alors $\dim(F \cap G) = 1$.Vrai

   (e) $1 \leq \dim(F \cap G) \leq 2$ Vrai

   En effet, on a $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$, et vu que $\dim F + G \leq 3$ (car $F + G$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$) et $\dim F \cap G \leq 2$ (car $F \cap G$ est un s.e.v de F et de G), on en déduit que $4 - \dim F \cap G \leq 3$, d'où $\dim F \cap G \geq 1$, ainsi $1 \leq \dim(F \cap G) \leq 2$, de plus $\dim F \cap G = 2$ signifie que $F \cap G = F = G$

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si et seulement si :

   (a) $a = 0$ ou $-2.\dim F \cap G \geq 1$ Faux

   (b) $a = 2$.Faux

   (c) $a \notin \{0, 2\}$.Faux

   (d) $a \notin \{-2, 0, 2\}$.Vrai

   En effet, $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & -1 & 0 & -1 \\ a-2 & a & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & a & -1 \\ a-2 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} = (a-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} = (a-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix}$

   $= (a-2)\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-2)\,a\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = a(a-2)(a^2+2a) = a^2(a-2)(a+2)$

   les opérations utilisées sont: $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ et $L_2 \to L_2 - L_1; L_3 \to L_3 - L_1; L_4 \to L_4 - L_1$

3. Soient A et B deux matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) La matrice A^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.Vrai

   En effet si $D = P^{-1}\,A\,P$ (où D est diagonale) alors,$D^2 = P^{-1}\,A^2\,P$. La matrice D^2 étant diagonale, on en déduit que A^2est diagonalisable

   (b) La matrice ${}^tA$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vrai

En effet si $D = P^{-1}\,A\,P$ (où D est diagonale) et si on pose $Q = ({}^tP)^{-1}$ alors,${}^tD = D = Q^{-1}\,({}^tA)\,Q$ car $({}^tP)^{-1} ={}^t (P^{-1})$

(c) Si A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $A + B$ l'est aussi.Faux

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables (A a deux valeurs propres distinctes et B est diagonale) mais $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car elle est non nulle

EXERCICE 2 (Barème indicatif: 4)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et posons $N = A - I_3$.

   (a) Calculer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^n = 0_3$ pour $n \geq 3$

   (b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   On a $A = N + I_3$ et vu que N et I_3 commutent, on a par la formule du binôme pour tout $n \geq 2$,

$$A^n = (N + I_3)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} N^k\, I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=2} \binom{n}{k} N^k = I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3 (Barème indicatif: 6)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ est:

$$A := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le rang de $A - 3\,I_3$ puis en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f - 3\,id_{\mathbb{R}^3})$.

$\mathrm{rg}(A - 3I_3) = \dim \mathrm{Im}(f - 3id_{\mathbb{R}^3}) = \dim \mathrm{Vect}((1,2,3),(1,1,-3),(1,1,-3)) = 2$ ce qui entraine par le théorème du rang que $\mathrm{Ker}(f - 3\,id_{\mathbb{R}^3}) = 1$ et donc 3 est une valeur propre de f dont le sous-espace propre $E_f(3) = \mathrm{Ker}(f - 3\,id_{\mathbb{R}^3})$ est de de dimension 1.

(b) Montrer que f a deux valeurs propres qu'on déterminera: une simple qu'on notera λ_1 et une double qu'on notera λ_2.

$$P_f = \begin{vmatrix} 4-X & 2 & -4 \\ 1 & 4-X & -3 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & -4 \\ 2-X & 4-X & -3 \\ 2-X & 1 & -X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 4-X & -3 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix}$$
$$= (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 0 & -1 & 4-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ 3-X & 4-X \end{vmatrix}$$
$$= (2-X)(3-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4-X \end{vmatrix} = -(X-3)^2\,(X-2)$$

donc f a deux valeurs propres une simple $\lambda_1 = 2$ et une double $\lambda_2 = 3$

(c) Montrer que les s.e propres associés à ces valeurs propres sont donnés par : $E_{\lambda_1}(f) = \mathrm{Vect}\,\{v_1\}$ et $E_{\lambda_2}(f) = \mathrm{Vect}\,\{v_2\}$ avec $v_1 = (x,y,1)$ et $v_2 = (z,t,1)$, les coordonnées x,y,z,t étant à calculer.

Un calcul simple (à détailler) donne $v_1 = (1,1,1)$ et $v_2 = (2,1,1)$

(d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable, sinon trigonalisable ?

Vu que $\dim E_3(f) \neq \mathrm{mult}(3)$ l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable mais vu que son polynôme carctéristique P_f est scindé dans $\mathbb{R}$ il est trigonalisable

(e) Trouver un vecteur v_3 dont la deuxième coordonnée dans la base canonique vaut 1 et tel que

$$(f - 3\,id_{\mathbb{R}^3})(v_3) = v_2$$

Posons $v_3 = (x,1,z)$; on doit avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne facilement $x = z = 0$ et donc finalement $v_3 = (0,1,0)$

(f) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis donner la matrice $T := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$\det_{\mathcal{B}_c}(v_1,v_2,v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ donc $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Et on a $T := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ car $f(v_3) = v_2 + 3v_3$

(g) Touver une matrice P inversible telle que $T = P^{-1}\,A\,P$.

D'après la question précédente il suffit de prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$