4.5 Objets géométriques de l'espace affine $\mathbb{R}^3$

On se contentera de parler des sous-espaces affines : les plans affines er les droites affines . On a déjà indiqué qu'un plan affine est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de direction un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ vectoriel tandis qu'un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de dimension un est une droite affine. Nous allons regarder combien d'équations il faut pour chacn de s objets à étudier... Cette problématique sera reprise au second semestre avec l'étude des formes linéaires et de la dualité.

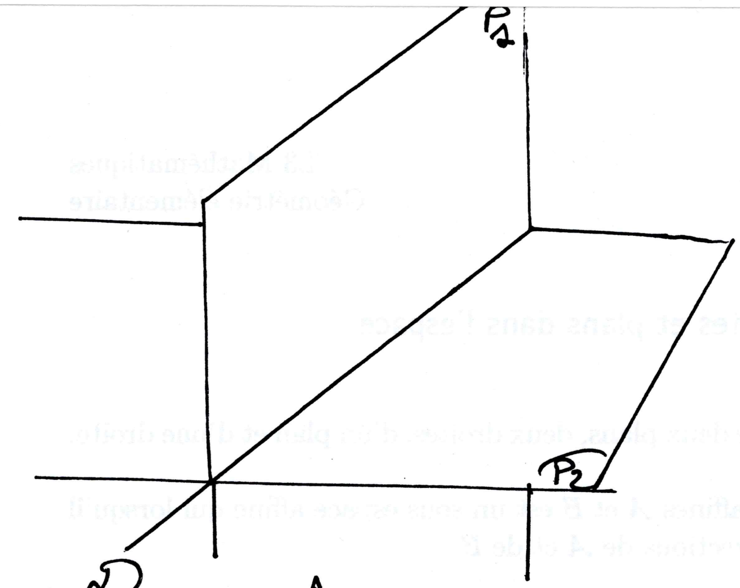
Proposition 4.30. *Un sous-espace affine $\mathcal{F}$ est un plan affine de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ si et seulement si il admet une équation de la forme*

$$ax + by + cz = d, \qquad \text{où } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

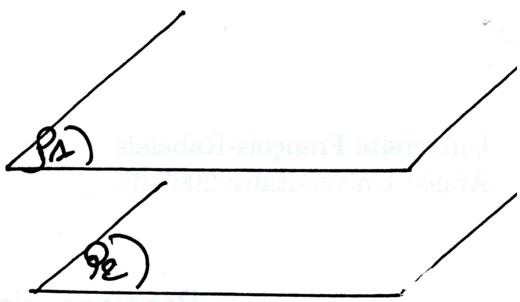
Preuve : Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des points $M(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $ax + by + cz = d$. Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, les coordonnées des points $M(x, y, z)$ sont solution d'un système linéaire de rang 1. Si par exemple c'est $a \neq 0$, alors l'ensemble des solutions est $M_0(\frac{d}{a}, 0, 0) + \ker \psi$ où $\psi : (x, y, z) \to \psi(x, y, z)) = ax + by + cz$. Comme $\psi(a, 0, 0) = a^2 \neq 0$, le théorème du rang dit que $\ker \psi$ est de dimension 2.
Réciproquement, si on se donne $\mathcal{P}$, passant par $A = (x_A, y_A, z_A)$ et de direction $\vec{P} = Vec(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on sait par le cours d'algèbre (revu au second semestre) que l'on peut trouver $(a, b, c) \neq$ tels que $ax + by + cz = 0$ soit une équation de $\vec{P}$ et tout point M de $\mathcal{P}$ vérifie $\overrightarrow{AM} \in \vec{P}$ donc on a comme équation de $\mathcal{P}$:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \quad \text{soit } \psi(x, y, z) = \psi(x_A, y_A, z_A)$$

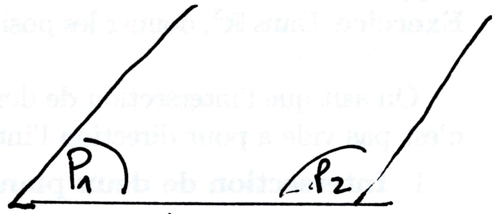
4.5.1 Position relative de plans et de droites dans $\mathbb{R}^3$ euclidien



A1



A3



A2

2. **Intersection d'un plan et d'une droite**

L'intersection d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une droite $\mathcal{D}$ est soit vide soit un sous-espace affine de direction l'intersection des directions $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{D}$. Cette intersection est donc soit le vide soit un point (dans ce cas $\overrightarrow{E} = \{\overrightarrow{0}\}$) soit une droite de direction $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{D}$.
Regardons cela grâce à un système linéaire . Le plan affine $\mathcal{P}$ a une équation de la forme :

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z = h_1 \qquad \text{avec } u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \neq 0$$

et la droite $\mathcal{D}$ a pour système d'équation un système du type (voir cas précédent) :

$$\begin{cases} u_2 x + v_2 y + w_2 z &= h_2 \\ u_3 x + v_3 y + w_3 z &= h_3 \end{cases} \qquad \text{avec, pour } i = 2,3\ u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 \neq 0$$

dont on peut supposer (quite à renuméroter les inconnues) que le déterminant $\delta_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$ est non nul .
On a donc à résoudre le système linéaire, à trois équations et trois inconnues :

$$(S) : \begin{cases} u_1 x + v_1 y + w_1 z &= h_1 \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z &= h_2 \\ u_3 x + v_3 y + w_3 z &= h_3 \end{cases} \text{ de système homogène } \quad (S_0) : \begin{cases} u_1 x + v_1 y + w_1 z &= 0 \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z &= 0 \\ u_3 x + v_3 y + w_3 z &= 0 \end{cases}$$

On reconnait le cadre de la discussion "classique", **Cramer ou Alternative de Fredholm**

– **Ou bien** le déterminant $\delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$ et les systèmes (S) et (S_0) sont **de Cramer** donc possèdent une **unique solution** qui dans le cas de (S_0) est bien sûr $(0,0)$ ($\overrightarrow{E} = \{\overrightarrow{0}\}$) et pour (S), est donnée par **les formules de Cramer** :

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & v_1 & w_1 \\ h_2 & v_2 & w_2 \\ h_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & h_1 & w_1 \\ u_2 & h_2 & w_2 \\ u_3 & h_3 & w_3 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad z_0 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\delta}.$$

La droite et le plan se coupe donc en un point $M(x_0, y_0, z_0)$(fig B1)

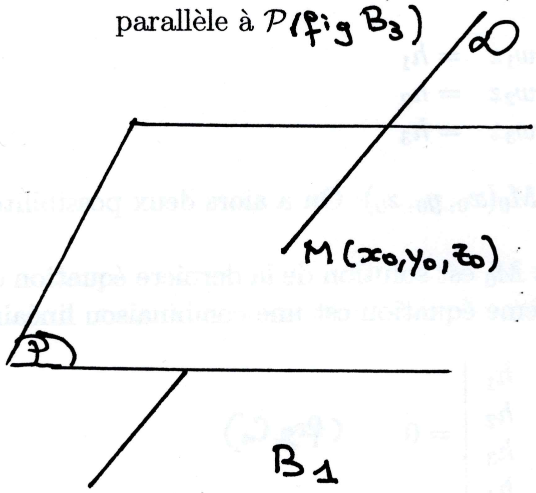
- **Ou bien** $\delta = 0$ ce qui exprime que les trois équations de (S_0) sont liées donc on peut n'en garder que deux ie $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{D}$ puisque l'on sait que les deux équations définissant $\overrightarrow{D}$ ne sont pas proportionnelles et on a deux possibilités (**Alternative de Fredholm**)
  - **Ou bien** le système (S) se ramène aussi au système formé par les équations de $\mathcal{D}$ donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \mathcal{D}$ et ainsi $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$; ceci n'arrive que si le déterminant

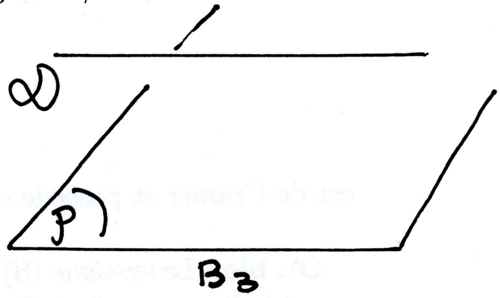
$$\delta_2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

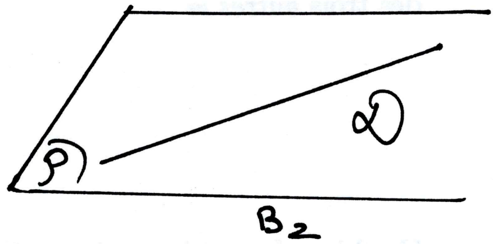
  car le fait que $\delta_2 = 0$ dit que le vecteur (h_1, h_2, h_3) appartient bien à l'image de l'application linéaire ψ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\psi(x, y, z) = (u_1x + v_1y + w_1z, u_2x + v_2y + w_2z, u_3x + v_3y + w_3z)$$

  et on sait puisque $\delta = 0$ que cette image est de dimension 2, (grâce au **Théorème du rang** puisque le noyau de ψ , dont un système d'équations est (S_0), c'est $\overrightarrow{D}$ dans ce cas là) et est engendrée par les deux vecteurs libres (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) (se souvenir encore que $\delta_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0$)(fig B_2)
  - **Ou bien** $\delta_2 \neq 0$ et le système est incompatible ou encore le système ne peut avoir de solution puisque le vecteur (h_1, h_2, h_3) n'appartient pas à l'image de ψ . Donc $\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$(fig B_3)







3. **Intersection de deux droites**

L'intersection des deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est soit vide soit un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{E}$, intersection des directions $\overrightarrow{D}_1$ et $\overrightarrow{D}_2$. Comme $\overrightarrow{E}$ est au plus de dimension 1, on a donc pour l'intersection des deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soit le vide soit un point ($\overrightarrow{E} = \{\overrightarrow{0}\}$) soit une droite (dans ce cas $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$). Regardons cela grâce à un système linéaire . La droite $\mathcal{D}_1$ a pour système d'équation un système du type :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z &= h_1 \\ u_2x + v_2y + w_2z &= h_2 \end{cases} \quad \text{avec, pour } i = 1, 2 \; u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 \neq 0$$

dont on peut supposer (quite à renuméroter les inconnues) que le déterminant $\delta_1 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$ est non nul et la droite $\mathcal{D}$ a pour système d'équation un système du type (voir cas précédent) :

$$\begin{cases} u_3x + v_3y + w_3z &= h_3 \\ u_4x + v_4y + w_4z &= h_4 \end{cases} \quad \text{avec, pour } i = 3, 4 \; u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 \neq 0.$$

On a donc à résoudre un système de 4 équations à 3 inconnues :

$$(S) : \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z &= h_1 \\ u_2x + v_2y + w_2z &= h_2 \\ u_3x + v_3y + w_3z &= h_3 \\ u_4x + v_4y + w_4z &= h_4 \end{cases} \quad \text{de système homogène} \quad (S_0) : \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z &= 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z &= 0 \\ u_3x + v_3y + w_3z &= 0 \\ u_4x + v_4y + w_4z &= 0 \end{cases}$$

Le rang du système qui est celui de l'application linéaire ψ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par

$$\psi(x, y, z) = (u_1x + v_1y + w_1z, u_2x + v_2y + w_2z, u_3x + v_3y + w_3z, u_4x + v_4y + w_4z)$$

est au plus 3 (par le théorème du rang) et au moins 2 (car $\mathcal{D}_1$ est une droite).

- **Soit le rang de ψ est** 3 ie le noyau de ψ dont un système d'équations est (S_0) est réduit au vecteur nul. Ceci arrive quand l'un des deux déterminants

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix}$$

  est non nul .Si par exemple $\delta_1 \neq 0$, alors le système linéaire

$$(S') : \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z &= h_1 \\ u_2x + v_2y + w_2z &= h_2 \\ u_3x + v_3y + w_3z &= h_3 \end{cases}$$

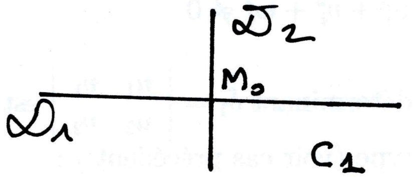
  est de Cramer et possède donc une unique solution $M_0(x_0, y_0, z_0)$. On a alors deux possibilités

  - **Ou bien** Le système (S) est compatible ie le point M_0 est solution de la dernière équation ce qui indique que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{P}_3$ ou encore la 4ème équation est une combinaison linéaire des trois autres ie

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & h_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(fig } C_1\text{)}$$

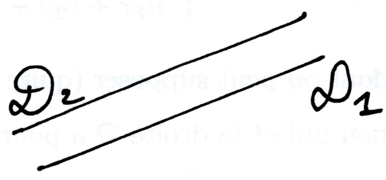
  - **Ou bien** $\delta_3 \neq 0$ le système n'est pas compatible et l'intersection des droites est vide sans que les droites ne soient parallèles puisque leurs directions ne sont pas égales(fig C_2)

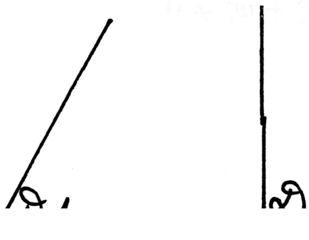
- **Soit le rang de ψ est** 2 mais alors le noyau de ψ est de dimension 1 ce qui dit que $\vec{E} = \vec{D}_1 = \vec{D}_2$. Les droites sont parallèles ; soit elles sont confondues si le système est compatible et dans ce cas le déterminant δ_3 est nul (développer par rapport à la dernière colonne) , soit elles le sont strictement si le système est incompatible (ie quand $\delta_3 \neq 0$)(fig C_3, fig C_4)



C_1

C_4





C_2

C_3