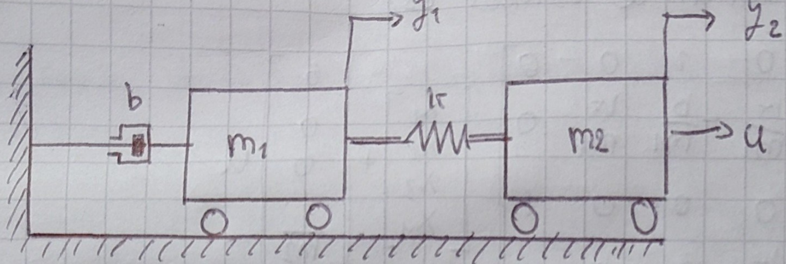
Ejemplo 3.3



Obtenga una representación de estados del sistema de la figura

Solución:

$$m_1\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + k(y_1 - y_2) = 0$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = u$$

Las variables de salida para este sistema son y_1 y y_2. Definimos las variables de estado como:

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = \dot{y}_1$$

$$x_3 = y_2$$

$$x_4 = \dot{y}_2$$

Entonces obtenemos la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}\left[-b\dot{y}_1 - k(y_1 - y_2)\right] = -\frac{k}{m_1}x_1 - \frac{b}{m_1}x_2 + \frac{k}{m_1}x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}\left[-k(y_2 - y_1) + u\right] = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_3 + \frac{1}{m_2}u$$

Por lo tanto la ecuación de estados es:

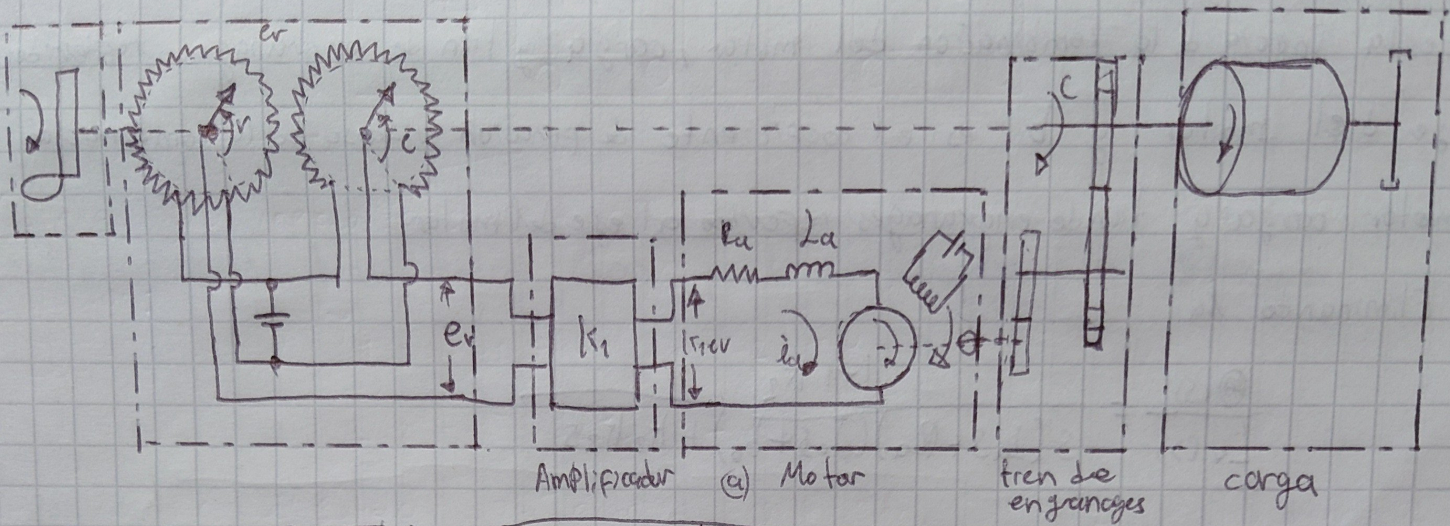
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

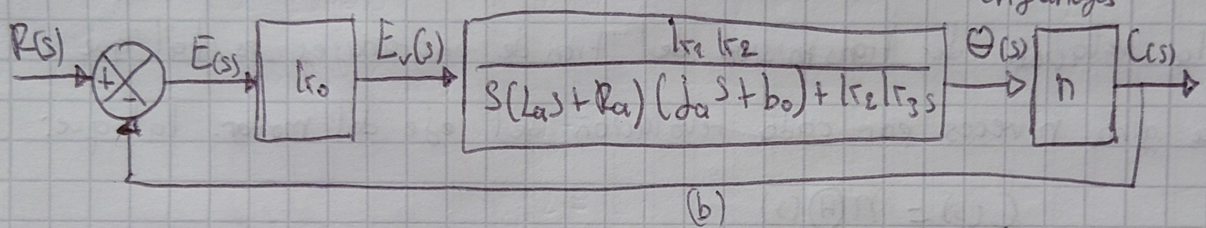
y la ecuación de salida es:

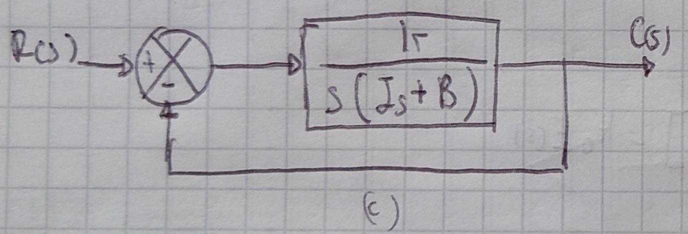
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio A-3-9

Considere el sistema servo de la figura. El motor que se muestra es un servomotor







(a)

(b)

(c)

-Obtenga la función de transferencia entre el desplazamiento angular del eje del motor θ y el voltaje de error e_v. Obtenga el diagrama de bloques para el sistema y el diagrama de bloque simplificado cuando L_a es despreciable.

Solución: La velocidad de un servomotor CC controlado por armadura esta controlada por el voltaje de la armadura. (El voltaje de armadura $e_a = K_1 e_v$ es la salida del amplificador). La ecuación diferencial para el circuito de armadura es:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

or

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v$$

La ecuación para el equilibrio del par:

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a$$

J_0 es la inercia de la combinación del motor, carga y tren de engranajes referido al eje del motor y b_0 es el coeficiente de fricción viscosa de la combinación de motor, carga y tren de engranajes referido al eje del motor

Eliminando i_a

$$\frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s}$$

Suponamos que la relación de transmisión del tren de engranajes es tal que el eje de salida gira n veces por cada revolución del eje del motor. tal que:

$$C(s) = n\Theta(s)$$

La relación entre $E_v(s)$, $R(s)$ y $C(s)$ es:

$$E_v(s) = K_0[R(s) - C(s)] = K_0 E(s)$$

La función de transferencia en la rata de avance de este sistema es:

$$G(s) = \frac{C(s)\ \Theta(s)\ E_v(s)}{\Theta(s)\ E_v(s)\ E(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_1]}$$

Cuando L es pequeña, puede despreciarse y la función de transferencia G(s) queda expresada como:

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]}$$

$$= \frac{K_0 K_1 K_2\, n/R_a}{J_0 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right)s}$$

$J = \frac{J_0}{n^2}$ => Momento de inercia referido al eje de salida.

$B = [b_0 + (k_2 k_3/R_a)]/n^2$ => Coeficiente de fricción viscosa referido al eje de salida

$K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$

La función de transferencia G(s) puede ser simplificada, obteniendo:

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

o

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

donde

$$K_m = \frac{K}{B}, \quad T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3}$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 S^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) S}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 S^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) s}$$

$$J_0 s^2 Y(s) + \left(b_0 \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) s Y(s) = K_2 K_1 K_0 n / R_a \, X(s)$$

$$J_0 \ddot{y} + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) \dot{y} = K_2 K_1 K_0 n / R_a \, u$$

$$\ddot{y} = K_2 K_1 K_0 n / R_a \, J_0 - \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) \frac{1}{J_0} \dot{y}$$

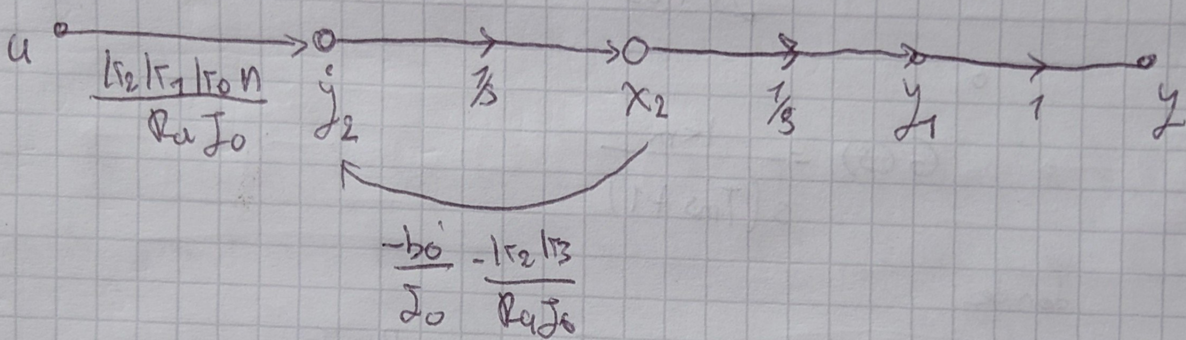
$$y = y(s)$$

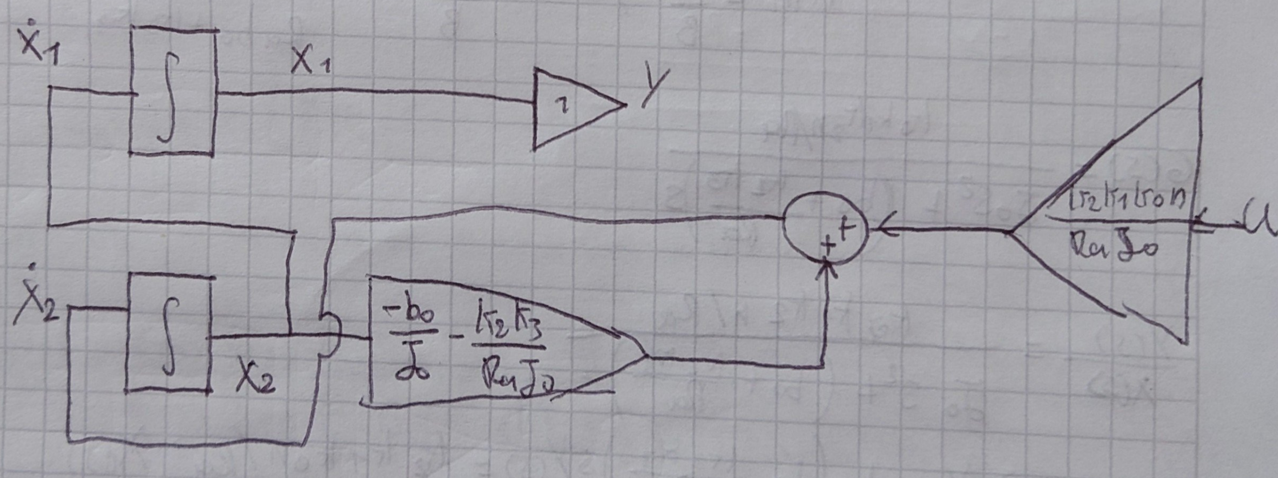
$$\dot{y} = \dot{Y}(s) = \dot{y}_1 = Y_2$$

$$\ddot{y} = \dot{y}_2$$

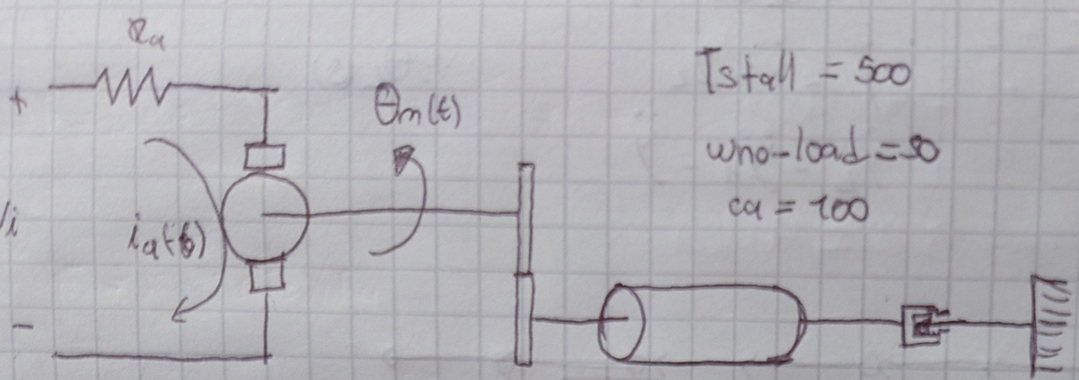
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{J_0}\left(b_0 + \frac{k_2 k_3}{R_a}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2 k_1 k_0 n}{R_a J_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$





Función de transferencia Motor D.C con carga



$T_{stall} = 500$

$\omega_{no\text{-}load} = 50$

$e_a = 100$

$J_a = 5\ Kg\ m^2$

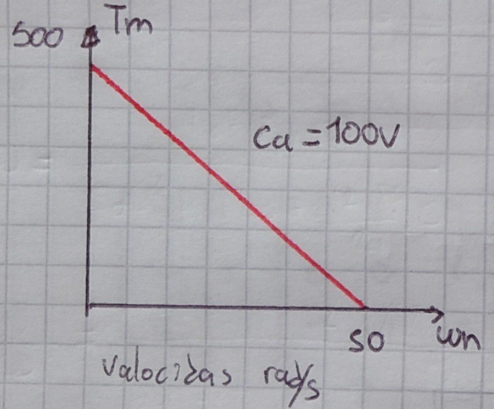
$D_a = 2Nm\ s/rad$

$N_2 = 1000$

$R_L = 800N\ m/s/rad$

$$J_m = J_a + J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 5 + 700\left(\frac{1}{100}\right)^2 = 12$$

$$D_m = D_a + D_2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 2 + 800\left(\frac{1}{10}\right) = 10$$



$$E_a(s) \longrightarrow \boxed{\frac{0,0417}{s(s+1,667)}} \longrightarrow \theta_2(s)$$

$$\frac{K_a}{R_a} = \frac{T_{stall}}{e_a} = \frac{500}{100} = 5\ ; \quad K_b = \frac{e_a}{\omega_{no\text{-}carga}} = \frac{100}{50} = 2$$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{5/12}{s\left(s + \frac{1}{12}[10 + (5)(2)]\right)} = \frac{0.417}{s(s+1,667)}$$

$$\frac{\theta_L}{E_a(s)} \longrightarrow \frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} \cdot \frac{N_1}{N_2} = \frac{0,0417}{s(s+1,667)}$$

$$\theta_m(s)\,(s^2 + 1,667s) = 0,0417\ E_a(s)$$

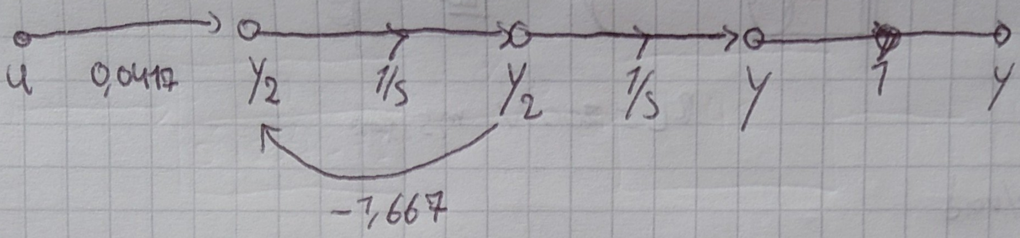
$$\ddot{Y} + 1{,}667\,\dot{y} = 0{,}0417\,u$$

$$\ddot{y} = 0{,}0417\,u - 1{,}667\,s$$

$$Y = \Theta_L(s) = y_1 \qquad u = V_a(s)$$

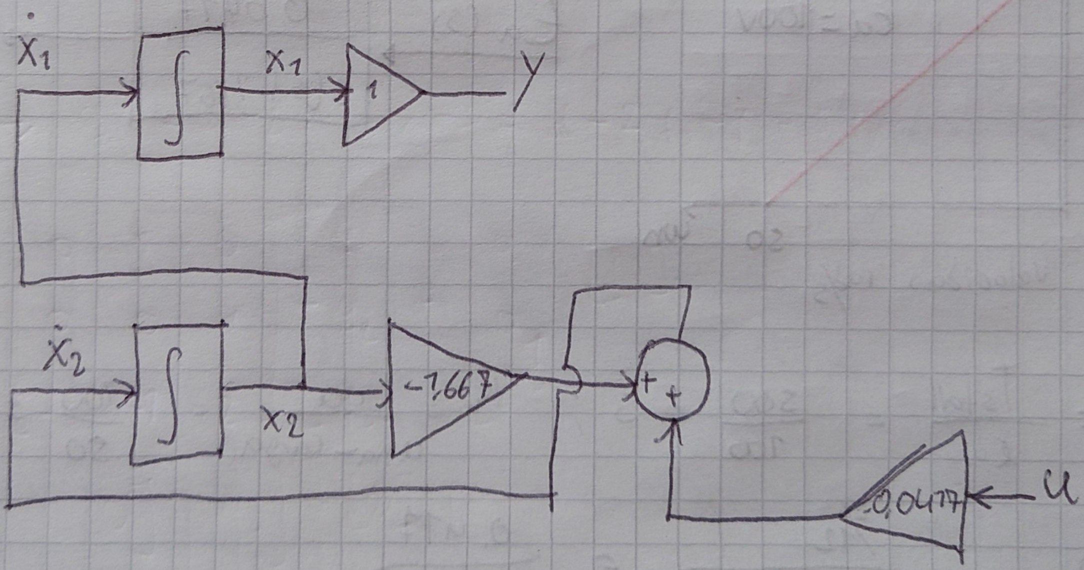
$$\dot{y}_1 = \dot{y} = y_2 \qquad Y = \Theta_L(s)$$

$$\dot{y}_2 = \ddot{y}_1 = \ddot{y}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0417 \end{bmatrix} [u]$$

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$



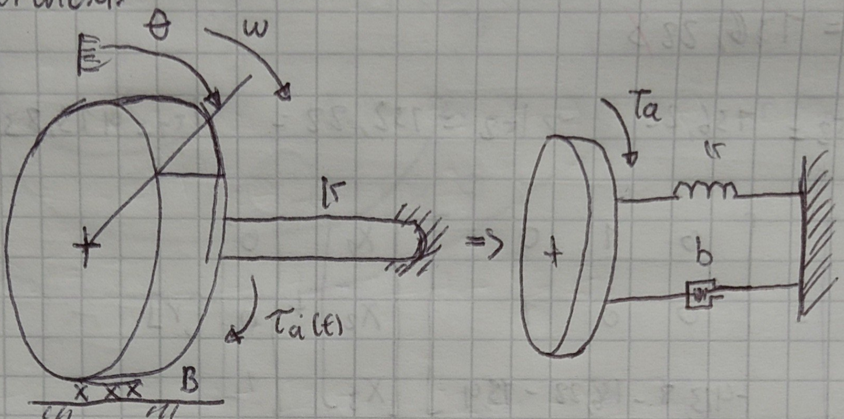
Para el sistema rotacional el la figura, determine:

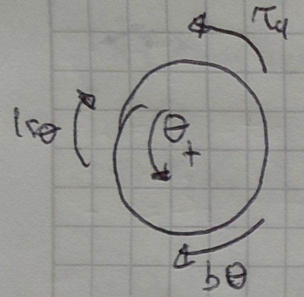
a) La representación en espacio de estados.

b) Diagrama de bloques.

c) Diagrama de flujo de señal.

d) Función de transperencia.





$$I_0\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau_a \qquad q_1 = \theta$$

$$\Rightarrow I_0\dot{q}_2 + bq_2 + kq_1 = \tau_a \qquad q_2 = \dot{\theta} = \dot{q}_1$$

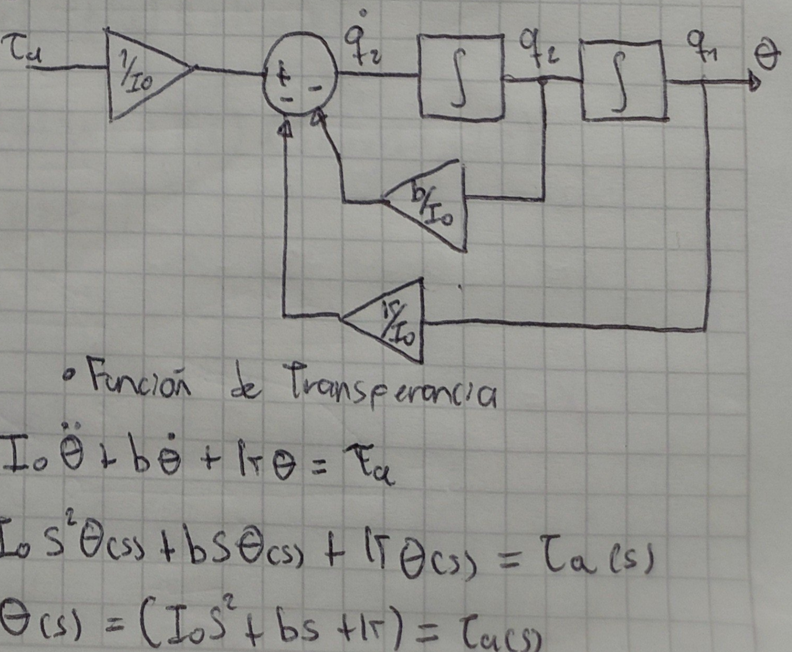
$$I_0\dot{q}_2 = \tau_a - bq_2 - kq_1 \qquad \dot{q}_2 = \ddot{\theta} = \ddot{q}_1$$

$$\Rightarrow \dot{q}_2 = \frac{\tau_a}{I_0} - \frac{b}{I_0}q_2 - \frac{k}{I_0}q_1$$

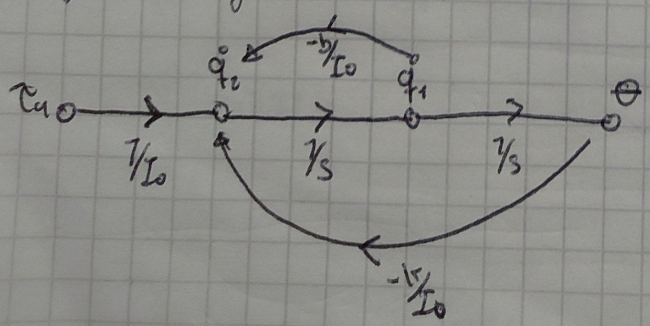
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{I_0} & -\frac{b}{I_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I_0 \end{bmatrix} [\tau_a]$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

- Diagrama de bloques



- Diagrama Flujo de señal



- Función de Transperencia

$$I_0\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau_a$$

$$\Rightarrow I_0 s^2\theta(s) + bs\theta(s) + k\theta(s) = \tau_a(s)$$

$$\Rightarrow \theta(s) = (I_0 s^2 + bs + k) = \tau_a(s)$$

$$\therefore G(s) = \frac{\theta(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{I_o s^2 + bs + k}$$

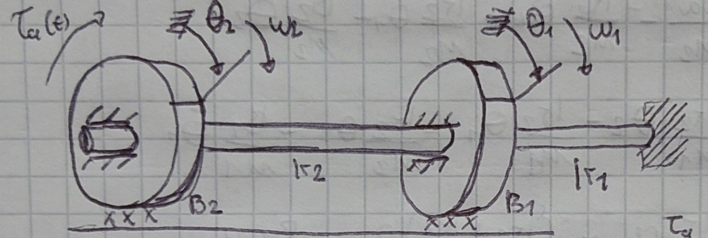
Para el siguiente sistema rotacional, asuma $\theta_2 > \theta_1$ y determine:

a) Función de transferencia relacionado θ_2 y T_a

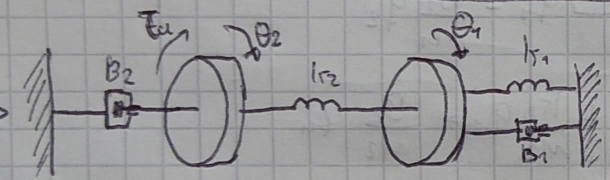
b) Representación en el espacio de estados

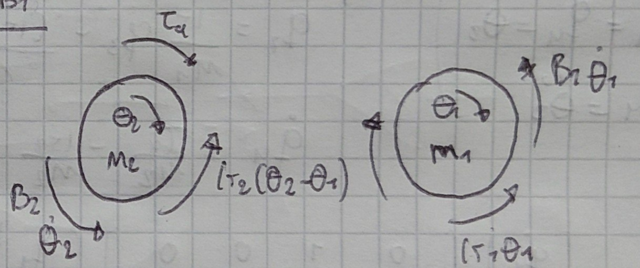
c) Diagrama de bloques

d) Diagrama de flujo de señal, Todo en términos de θ_2



$\Rightarrow$





$T_a - M_2\ddot{\theta} - k_2(\theta_2 - \theta_1) - B_2\dot{\theta}_2 = 0$

$\Rightarrow T_a = M_2\ddot{\theta}_2 + k_2(\theta_2 - \theta_1) + B_2\dot{\theta}_2$

$\Rightarrow T_a = M_2\ddot{\theta}_2 + k_2\theta_2 - k_2\theta_1 + B_2\dot{\theta}_2$

$\Rightarrow T_a(s) = M_2 s^2\theta_2(s) + k\theta_2(s) - k_2\theta_1(s) + B_2 s\theta_2(s)$

$\Rightarrow T_a(s) = \theta_2(s)\left[M_2 s^2 + k_2 + B_2 s\right) + \theta_1(s)(-k_2)\right]$

$k_2(\theta_2 - \theta_1) - M_1\ddot{\theta}_1 - k_1\theta_1 - B_1\dot{\theta}_1 = 0$

$\Rightarrow k_2\theta_2 - k_2\theta_1 = M_1\ddot{\theta}_1 - k_1\theta_1 - B_1\dot{\theta}_1 = 0$

$\Rightarrow k_2\theta_2(s) - k_2\theta_1(s) - M_1 s^2\theta_1(s) - k_1\theta_1(s) - B_1 s\theta_1(s) = 0$

$\Rightarrow \theta_1(s)\left[-B_1 s - k_1 - k_2 - M_1 s^2\right) + k_2\theta_2(s)\right] = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} T_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_2 & M_2 s^2 + k_2 B_2 s \\ -B_1(s) - k_1 - k_2 - M_1 s^2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{M_2 s^2 + k_2 + B_2 s}{-k_2^2 (M_2 s^2 + k_2 + B_2 s)(B_1 s\, k_1 + k_2 + M_1 s^2)}$$

- Representación en espacio de estados $\quad k_2\theta_2 - k_2\theta_1 - M_1\ddot{\theta}_1 - B_1\theta_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= q_1 \\ q_2 &= \dot{\theta}_1 \\ \dot{q}_2 &= \ddot{\theta}_1 \\ q_3 &= \theta_2 \\ \dot{q}_3 &= q_4 = \dot{\theta}_2 \\ \dot{q}_4 &= \ddot{\theta}_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\tau_a = M_2\ddot{\theta} + k_2(\theta_2 - \theta_1) + B_2\dot{\theta}_2$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\tau_a}{M_2} - \frac{k_2}{M_2}\theta_2 + \frac{k_2}{M_2}\theta_1 - \frac{B_2}{M_2}\dot{\theta}_2$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{k_2}{M_1}\theta_2 - \frac{k_2}{M_1}\theta_1 - \frac{k_2}{M_2}\theta_1 - \frac{B_1}{M_1}\dot{\theta}_1$$

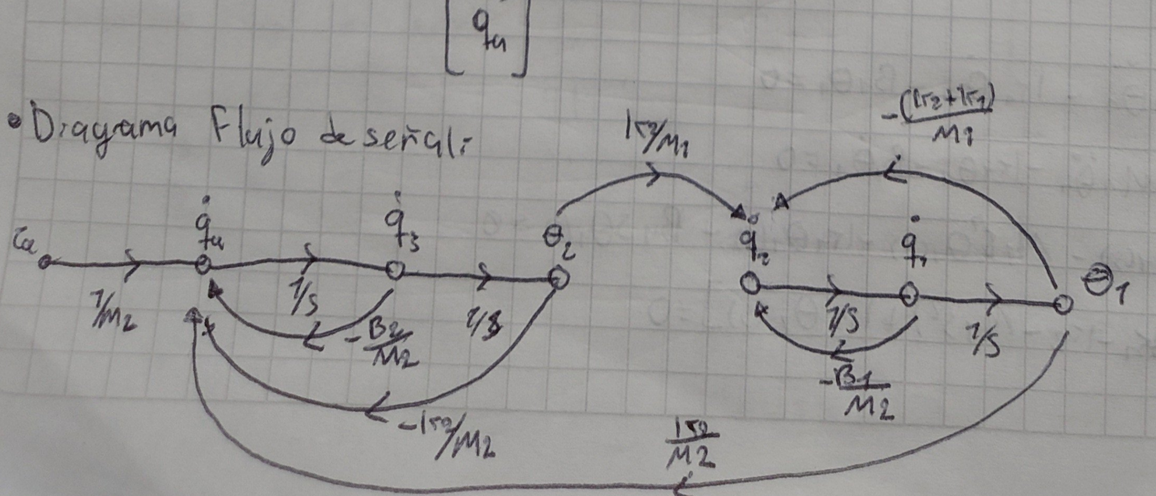
$$\Rightarrow \dot{q}_2 = \frac{k}{M_1}q_3 - \frac{(k_2+k_1)}{M_1}q_1 - \frac{B_1}{M_1}q_2$$

$$\dot{q}_4 = \frac{\tau_a}{M_2} - \frac{k_2}{M_2}q_3 + \frac{k_2}{M_2}q_1 - \frac{B_2}{M_2}q_4$$

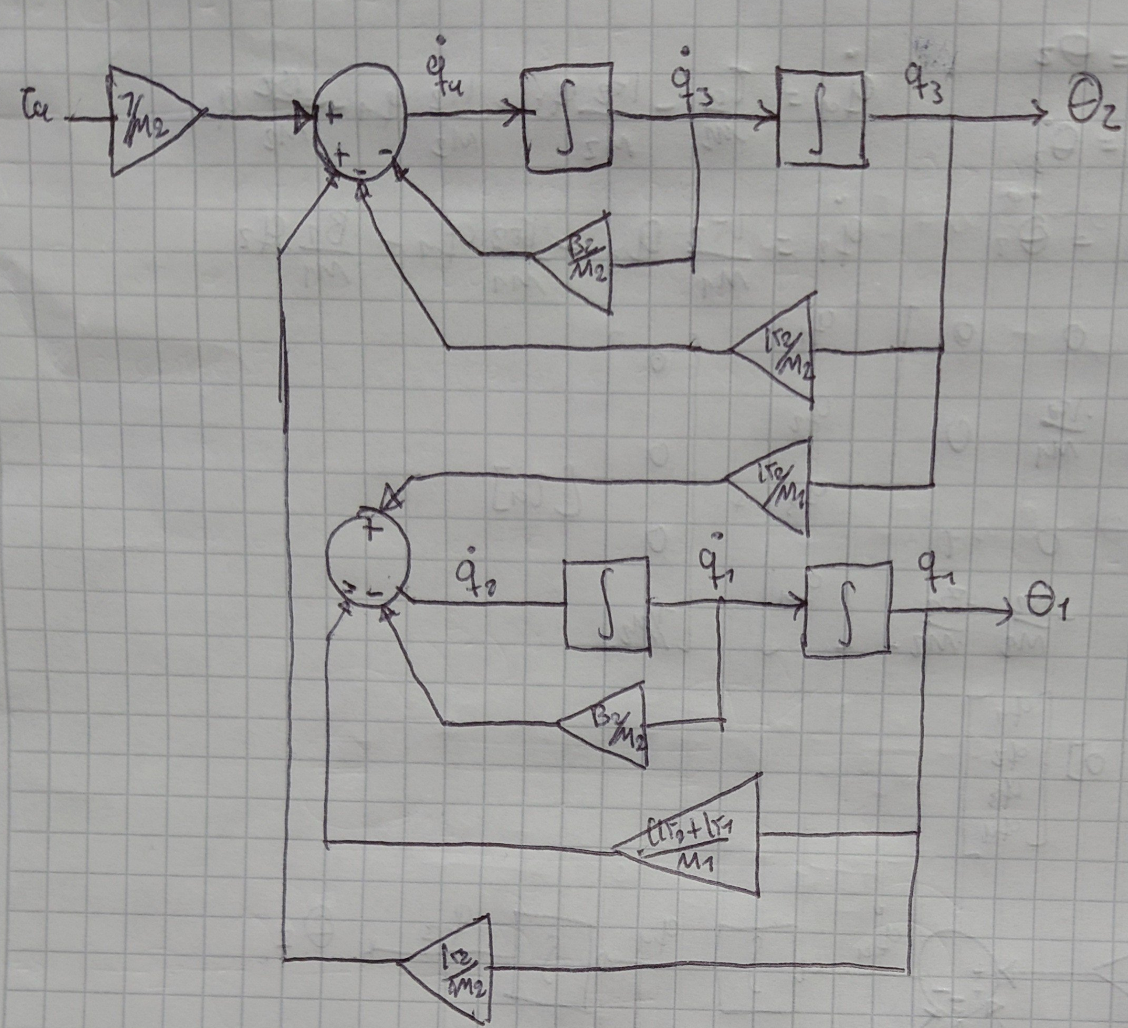
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_2+k_1)}{M_1} & -\frac{B_1}{M_1} & \frac{k_2}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{M_2} & 0 & -\frac{k_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} [\tau_a]$$

$$y = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

- Diagrama Flujo de señal:



- Diagrama de bloques:



3) Tomando $K_1 = 0$

$T_a = M_2\ddot{\theta}_2 + K_2\theta_2 - K_1\theta_1 + B_2\dot{\theta}_2$

$K_2\theta_2 - K_1\theta_1 - J_1\ddot{\theta}_1 - B_1\dot{\theta}_1 = 0$

$T(s) = \theta_2(s)\,(M_2 s^2 + K_2 + B_2 s) + \theta_1(s)\,(-K_2)$

$\theta_1(s)\,(-B_1 s - K_2 - M_1 s^2) + K_2\theta_2(s) = 0$

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 & M_2 s^2 + K_2 + B_2 s \\ -B_1 s - K_2 - M_1 s^2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{M_2 s^2 + K_2 + B_2 s}{-K_2^2 \quad (M_2 s^2 + K_2 + B_2 s)(B_1 s + K_2 + J_1 s^2)}$$

Espacio de estados

$$q_1 = \theta_1 \qquad q_3 = \theta_2$$

$$q_2 = \dot{\theta}_1 \qquad \dot{q}_3 = \dot{\theta}_2$$

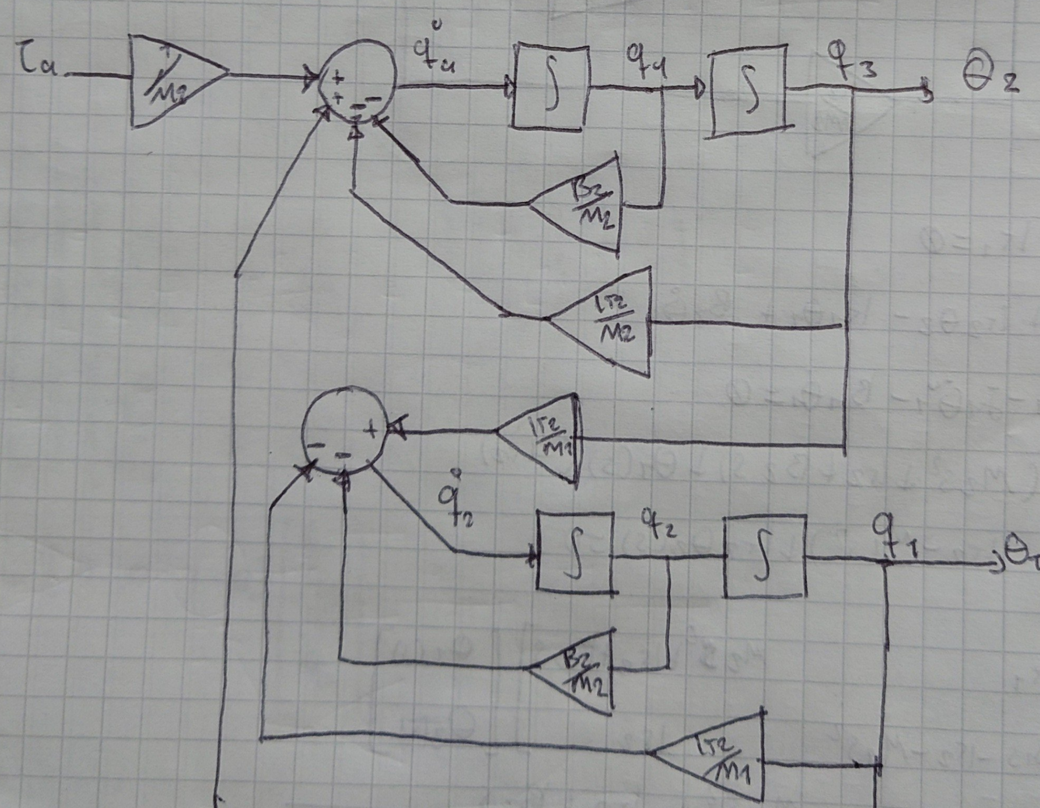
$$\dot{q}_2 = \ddot{\theta}_1 \qquad q_4 = \ddot{\theta}_2$$

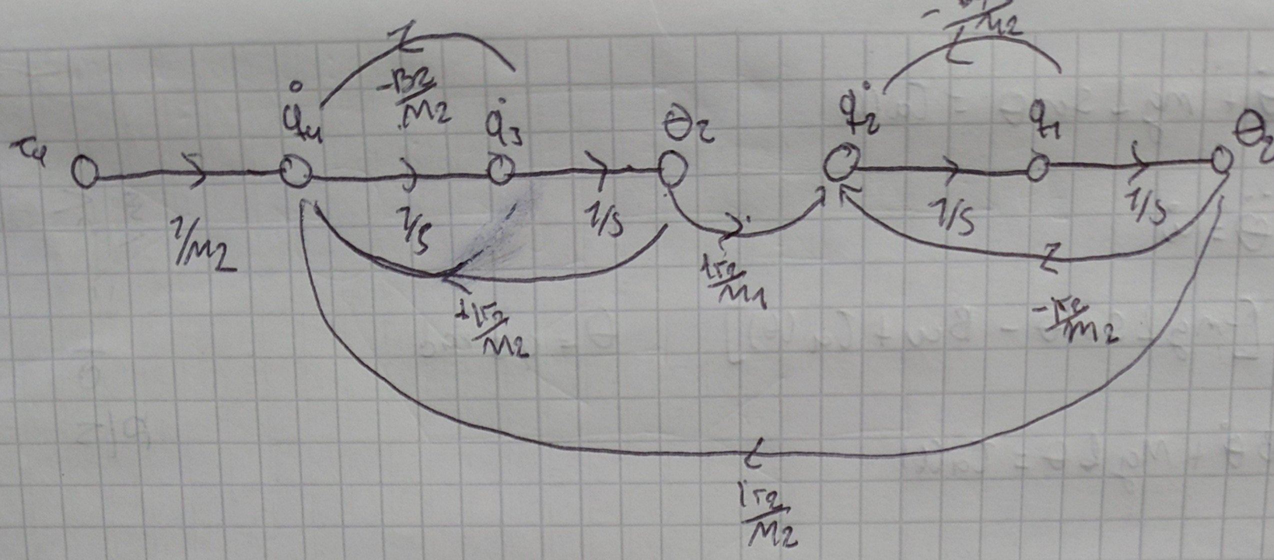
$$\dot{q}_4 = \frac{\tau_a}{M_2} - \frac{K_{r2}}{M_2} q_3 + \frac{K_{r2}}{M_2} q_1 - \frac{B_2}{M_2} q_4$$

$$\dot{q}_2 = \frac{K_{r2}}{M_1} q_3 - \frac{K_{r2}}{M_1} q_1 - \frac{B_1}{M_1} q_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_{r2}}{M_1} & -\frac{B_1}{M_1} & \frac{K_{r2}}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_{r4}}{M_2} & 0 & -\frac{K_{r2}}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/M_2 \end{bmatrix} [\tau_a]$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$





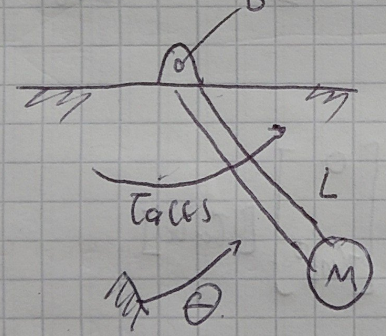
4) Para el sistema rotacional de la figura determine

a) La función de transferencia relacionando θ y τ_a

b) Representación en espacio de estados

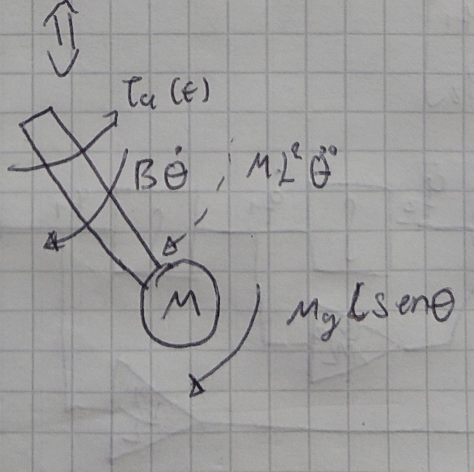
c) Diagrama de bloques

d) Diagrama de flujo de señal



$I = ml^2$

$\tau_a(t) = mgl\,\text{sen}\,\theta$



$mL^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + mgL\,\mathrm{sen}\,\theta = \tau_a(t)$

$\dot{\theta} = \omega \qquad \ddot{\theta} = \dot{\omega}$

$\dot{\omega} = \frac{1}{mL^2}\left[-mgL\,\mathrm{sen}\,\theta - B\omega + \tau_a(t)\right] \qquad \theta = 0.5\ \mathrm{rad}$

$ML^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + MgL\theta = \tau_a(t)$

$\dot{\theta}\ \omega$

$\dot{\omega} = \frac{1}{ML^2}\left[-mgL\theta - B\omega + \tau_a(t)\right]$

$\Rightarrow \theta = q_1$

$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\theta} = \omega \qquad \rightarrow \dot{q}_2 = \frac{1}{mL^2}\left[-MgLq_1 - Bq_2 + \tau_a(t)\right]$

$\dot{q}_1 = \ddot{\theta} = \dot{\omega}$

$\dot{q}_2 = -\frac{g}{L}q_1 - \frac{B}{ML^2}q_2 + \frac{\tau_a(t)}{ML^2}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{B}{ML^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/ML^2 \end{bmatrix} [\tau_a(t)]$$

$$\theta = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$