Université de Lille
Licence Mathématiques 2ème année

Année 2017-2018
Semestre 4

M41
Suites et séries de fonctions

rédigé par Anne Moreau

***Augustin Louis, baron Cauchy**, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Catholique fervent, il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'Œuvre des Écoles d'Orient. Royaliste légitimiste, il s'exila volontairement lors de l'avènement de Louis-Philippe, après les Trois Glorieuses. Ses positions politiques et religieuses lui valurent nombre d'oppositions.*

Table des matières

CHAPITRE 1

Suites de fonctions

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse à la convergence de suites de fonctions définies sur un même domaine non vide D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le module sur $\mathbb{C}$ est noté $|\cdot|$, c'est-à-dire $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Convergences

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 1 – convergence simple

Soit f une application de D dans $\mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge simplement*** vers f si pour tout x de D, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On dit aussi que f est la ***limite simple*** de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si pour tout x de D, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N,\ \text{ on ait } |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

⚠ **Attention** : dans l'expression ci-dessus, l'entier N dépend de x dans D (et de ε).

On peut noter $f_n \xrightarrow{CVS} f$ pour exprimer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur D).

Exemple 1.

1. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers f, où

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f, où f est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
3. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{x+n}$. La suite de fonctions$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers f, où f est la fonction identiquement nulle sur $[0,+\infty[$.
4. (Phénomène de bosse glissante) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto n^2 x e^{-nx}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers f, où f est la fonction identiquement nulle sur $[0,+\infty[$.

Exercice de cours 1. Vérifier les assertions des exemples ci-dessus, et représenter graphiquement f_1, f_2, f_3 dans l'exemple 4.

Remarque 1. Dans l'exemple 1, on observe que la limite f n'est pas continue à gauche en 1 alors que toutes les fonctions f_n le sont.

Dans l'exemple 4, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n'(0)) = +\infty$ alors que $\big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\big)'(0) = f'(0) = 0$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 1 \neq \int_0^1 \big(\lim_{n\to+\infty} f_n\big)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Définition 2 – convergence uniforme

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge uniformément*** vers f sur D si
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$
On dit aussi que f est la ***limite uniforme*** de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si :
$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\,n \geqslant N,\ \text{ on ait : } \forall\,x \in D,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

⚠ **Attention** : dans l'expression ci-dessus, l'entier N ne dépend pas de x dans D (il dépend seulement de ε). On observera la différence avec la définition 1.

On peut noter $f_n \xrightarrow{CVU} f$ pour exprimer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur D).

Exercice de cours 2.

1. Représenter graphiquement la notion de convergence uniforme à l'aide «d'un tube».

2. Parmi les suites de fonctions de l'exercice 1, quelles sont celles qui convergent uniformément vers f ?

3. Pour l'exemple 1, vérifier que l'on a la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur tout segment inclus dans $[0, 1[$.

Proposition 3 – la convergence uniforme entraine la convergence simple

Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction f, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f.

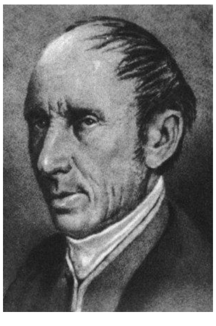
Exercice de cours 3. Démontrer cette proposition.

Rappel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***de Cauchy*** si :
$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\,p, q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$
Toute suite de nombres complexes convergente est de Cauchy, et la réciproque est vraie également : toute suite de Cauchy est convergente. Ceci donne ainsi un critère de convergence, appelé ***critère de Cauchy***. L'avantage de ce critère de convergence est qu'il n'est pas nécessaire de connaître la limite potentielle de la suite dont on cherche à montrer qu'elle converge.

Proposition 4 – critère de Cauchy de convergence uniforme

Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction de D dans $\mathbb{C}$ il faut et il suffit que :
$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\,(p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p, q \geqslant N,\ \text{ on ait : } \forall\,x \in D,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon.$$

***Augustin Louis, baron Cauchy**, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.*



Exercice de cours 4. Démontrer cette proposition.

2. Convergence uniforme et limite

Le résultat suivant est important, il donne une condition suffisante pour intervertir deux limites.

Théorème 5 – interversion de deux limites

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{C}$, et a un élément de D. On suppose :

1. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D,
2. chaque fonction f_n admet une limite b_n en a, c'est-à-dire, $\lim_{x\to a} f_n(x) = b_n$.

Alors :

(i) la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe b,

(ii) la fonction f admet en a la limite b.

Ce résultat qui semble évident (mais qui ne l'est pas !) peut se formuler ainsi :

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to+\infty}\big(\lim_{x\to a} f_n(x)\big) = b.$$

Exercice de cours 5. Démontrer ce théorème.

Remarque 2. On remarque dans l'exercice 5 que a peut n'appartenir qu'à l'adhérence de D (par exemple, l'un des bords de D si D est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$). En particulier si $D = [0, +\infty[$, le résultat peut s'appliquer en $+\infty$.

Exemple 2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{n+e^x}$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$. Or, pour n fixé, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Les deux limites sont différentes, et la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Il y a seulement convergence simple vers la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

3. Convergence uniforme et continuité

Le théorème suivant est une conséquence du théorème 5.

Théorème 6 – la convergence uniforme préserve la continuité en un point

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{C}$, et a un élément de D. On suppose :

1. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction notée f,
2. chaque fonction f_n est continue en a.

Alors f est continue en a.

Exercice de cours 6. Démontrer ce théorème de deux manières différentes :

1. comme conséquence du théorème 5,
2. «directement», sans utiliser le théorème 5 (ni le critère de Cauchy de convergence uniforme).

Exemple 3. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exemple 1 de l'exercice 1 ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$ puisque les fonctions f_n sont toutes continues en 1, mais pas f.

Corollaire 7 – la convergence uniforme préserve la continuité

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{C}$. On suppose :

1. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction notée f,

2. chaque fonction f_n est continue sur D.

Alors f est continue sur D.

Il arrive souvent qu'il n'y ait pas convergence uniforme sur D mais qu'il y ait convergence uniforme sur certaines parties de D.

Comme la continuité est une notion locale, le corollaire suivant permet parfois de contourner le problème :

Corollaire 8 – la convergence locale uniforme préserve la continuité

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{C}$, f une fonction de D dans $\mathbb{C}$, et a un élément de D. On suppose :

1. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur toute partie compacte de D,

2. chaque fonction f_n est continue sur D.

Alors f est continue sur D.

Lorsque les conditions du corollaire 8 sont satisfaites, on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge localement uniformément*** vers f.

En pratique, si D est une partie de $\mathbb{R}$, comme les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier la convergence uniforme sur tout segment inclus dans D.

⚠ **Attention** : la convergence locale uniforme sur D n'entraine pas la convergence uniforme sur D ; penser de nouveau à la suite de fonctions $f_n : [0,1[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^n$ sur $[0,1[$.

Remarque 3. Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ (donc uniformément continue par le théorème de Heine) peut toujours être approchée, au sens de la convergence uniforme par une suite de fonctions en escaliers (qui ne sont donc pas continues en général). C'est ce résultat qui est à la base de l'intégrale de Riemann. Ceci montre que la limite uniforme d'une suite de fonctions non continue peut, elle, être continue !

Eduard Heine *(15 mars 1821, Berlin - 21 octobre 1881, Halle) est un mathématicien allemand célèbre pour ses résultats sur les fonctions spéciales et l'analyse réelle. Il a notamment étudié les séries hypergéométriques basiques.*

Georg Friedrich Bernhard Riemann*, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.*

4. Convergence uniforme et intégration sur un segment

Théorème 9 – convergence uniforme et intégration sur un segment

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues (ou continues par morceaux) de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux aussi. Alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice de cours 7. Démontrer ce théorème.

⚠ **Attention** : ce résultat n'est plus valable avec la convergence simple ; voir l'exemple 4 de l'exercice 1 (phénomène de bosse glissante).

Les conditions du théorème 9 sont des conditions suffisantes et peuvent parfois être affaiblies. Il se peut notamment qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un segment $[a,b]$ converge simplement, non uniformément, vers une fonction continue f sur $[a,b]$ et que cependant : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 4. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, est définie par : $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = nx^n(1-x)$ converge simplement, non uniformément, vers la fonction nulle sur $[0,1]$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$.

(*Il s'agit d'un cas particulier du théorème de* convergence dominée.)

Exercice de cours 8. Vérifier les assertions de l'exemple ci-dessus.

Dans le cas des intégrales sur un intervalle quelconque (intégrales généralisées), la convergence uniforme ne suffit plus, et on a besoin en général d'autres conditions : domination (théorème de *convergence dominée*), monotonie (théorème de *convergence monotone*), etc., mais cela dépasse un peu le programme (voir le cours «séries numériques et intégrales généralisées» pour des cas particuliers).

La convergence uniforme n'est plus suffisante lorsque l'intervalle n'est plus compact comme l'illustre l'exercice suivant :

Exercice de cours 9. Soit f_n la suite de fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } x \in [n^2,(n+1)^2], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \neq \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

5. Convergence uniforme et dérivation

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Théorème 10 – convergence uniforme et primitive

Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$, et $a \in I$. On suppose :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur I,
2. la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction notée g.

Alors :

(i) la fonction g est continue sur I,

(ii) en notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $h_n : I \to \mathbb{C}$ la primitive de g_n sur I telle que $h_n(a) = 0$, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction notée h,

(iii) la fonction h est la primitive de g telle que $h(a) = 0$.

Exercice de cours 10. Démontrer ce théorème.

Corollaire 11 – convergence uniforme et dérivation

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$. On suppose :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonctions f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction notée f,
3. la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction notée g.

Alors :

(i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f,

(ii) la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $f' = g$.

Exercice de cours 11. Démontrer ce corollaire.

⚠ **Attention** : Les trois conditions du corollaire 11 sont importantes. Nous savions déjà que la convergence simple n'était pas suffisante (voir l'exemple 4 – phénomène de bosse glissante – de l'exercice 1) ; l'exemple ci-dessous montre que la troisième condition est cruciale.

Exemple 5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, posons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et même uniformément vers f sur $[-1,1]$, où $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$. Toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$. Pourtant, la limite f n'est pas dérivable en 0. Le problème vient ici de ce que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[-1,1]$.

Exercice de cours 12. Vérifier les assertions de l'exemple ci-dessus.

Une récurrence immédiate sur k permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 12 – convergence uniforme et dérivation successive

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonctions f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
2. pour tout i de $\{0, \ldots, k-1\}$, la suite $\left(f_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction notée φ_i,
3. la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction notée φ_k.

Alors :

(i) pour tout i de $\{0, \ldots, k-1\}$, la suite $\left(f_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers φ_i,

(ii) la fonction $f = \varphi_0$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $f^{(i)} = \varphi_i$.

Exercice de cours 13. Démontrer ce corollaire.

Les résultats de cette section seront surtout utiles dans le cadre des séries de fonctions et des séries entières.

CHAPITRE 2

Séries de fonctions

On s'intéresse maintenant à des suites de fonctions particulières, les *séries de fonctions*. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un même domaine non vide D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, pour $x \in D$, à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles,

$$\forall\, x \in D, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

On a déjà rencontré (en première année) des séries de fonctions particulières, par exemple $\sum_{n\geqslant 0}(x \mapsto \dfrac{x^n}{n!})$, de somme exp sur $\mathbb{R}$, ou bien $\sum_{n\geqslant 1}(x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n})$ de somme $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1,1[$, ou encore $\sum_{n\geqslant 0}(x \mapsto x^n)$, de somme $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

Voici un exemple de série de fonctions qui n'est pas une *série entière*, c'est-à-dire du type $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(x \mapsto \dfrac{1}{n^x})$, de somme la ***fonction ζ de Riemann*** :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Cette fonction est bien définie sur $]1,+\infty[$ car la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente dès que $\alpha > 1$.

Nous allons voir qu'il est possible de montrer qu'elle possède certaines propriétés de régularité (continuité, dérivabilité, ...) en appliquant les résultats obtenus pour les suites de fonctions à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles.

1. Convergences

1.1. Convergences simple et absolue.

Définition 13 – convergence simple pour les séries de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ de terme général f_n ***converge simplement*** sur D si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D.

On appelle parfois ***domaine de convergence simple*** de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ l'ensemble des $x \in D$ tels que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge.

On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur D. On note, pour $x \in D$, $S(x)$ la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ de sorte que :

$$\forall\, x \in D, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

La fonction S, définie sur D, est appelée la ***somme*** de la série $\sum f_n$.

On appelle, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, ***reste d'ordre*** n la fonction $R_n \colon D \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\, x \in D, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n + R_n = S$.

Définition 14 – convergence absolue pour les séries de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ de terme général f_n ***converge absolument*** sur D si pour chaque x de D, la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ converge dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge absolument sur D si et seulement si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ converge simplement sur D.

Exemple 6. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x \mapsto x^n)$ converge simplement et absolument sur $]-1,1[$. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x \mapsto x^n)$ est la fonction f, où $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

1.2. Convergence uniforme. On peut, comme pour les suites de fonctions, définir la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ en utilisant la suite de fonctions des sommes partielles.

Définition 15 – convergence uniforme pour les séries de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ de terme général f_n ***converge uniformément*** sur D si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D.

En d'autres termes, pour montrer la convergence uniforme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sur D, il faut d'abord vérifier la convergence simple de la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note S la somme, puis vérifier que le reste converge uniformément vers 0,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = 0.$$

⚠ **Attention** : pour que le reste $R_n(x)$, avec $x \in D$, ait un sens il faut d'abord vérifier la convergence simple en chaque x de D.

Proposition 16 – une condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions

Si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur D.

Exercice de cours 14.

1. Démontrer cette proposition.
2. Montrer, à l'aide de la proposition, que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x \mapsto \dfrac{x}{x+n^2})$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ mais qu'elle ne converge pas uniformément.

Il est en général difficile de contrôler le reste d'une série de fonctions. Cela est cependant parfois possible pour les séries de fonctions alternées comme le montre la proposition suivante :

Proposition 17 – critère de convergence uniforme pour les séries de fonctions alternées

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives, définies sur D, telle que :

1. la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0,
2. pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ décroit, c'est-à-dire $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors la série de fonctions $\sum(-1)^n f_n$ converge uniformément sur D.

Exercice de cours 15. Démontrer cette proposition à l'aide du critère de convergence pour les séries alternées numériques, et de l'estimation du reste pour ces séries.

Grâce au critère de Cauchy pour les suites de fonctions (proposition 4), on obtient le théorème suivant :

Théorème 18 – critère de Cauchy de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Pour que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D, il faut et il suffit que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \text{avec } q > p > N,\ \text{on ait : } \left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

1.3. Convergence normale. Rappelons que pour toute application bornée φ de D dans $\mathbb{C}$, on note

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in D} |\varphi(x)| \in \mathbb{R}_+.$$

Ceci définit une norme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées de D dans $\mathbb{C}$.

Pour les séries de fonctions, nous disposons d'une nouvelle notion de convergence.

Définition 19 – convergence normale pour les séries de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ de terme général f_n ***converge normalement*** sur D s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n > N$, la fonction f_n est bornée et la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant N} \|f_n\|_\infty$ converge.

La convergence normale implique toutes les autres convergences comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 20 – relations entre les différentes notions de convergences

On a les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd}
 & \sum f_n \ \mathit{CVA} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\sum f_n \ \mathit{CVN} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \sum f_n \ \mathit{CVS} \\
 & \sum f_n \ \mathit{CVU} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

(où l'on a abrégé convergence normale, absolue, uniforme, simple en *CVN*, *CVA*, *CVU*, *CVS*.)

Exercice de cours 16. Démontrer le théorème.

Remarque 4. Pour démontrer l'implication $\sum f_n$ *CVA* $\Rightarrow \sum f_n$ *CVS* nous avons utilisé le critère de Cauchy pour les séries numériques (ce critère est utilisé pour montrer qu'une série absolument convergente est convergente). L'implication $\sum f_n$ *CVN* $\Rightarrow \sum f_n$ *CVS* repose donc, elle aussi, sur le critère de Cauchy.

Autrement dit, nous utilisons de façon cruciale le fait que toute suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{C}$ est convergente dans $\mathbb{C}$. Cette remarque sera importante quand nous étendrons ces résultats au cas des séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie (voir le chapitre 4).

En pratique, pour montrer qu'une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement, on procède souvent ainsi :
on majore $|f_n(x)|$ ou $\sup_{x\in D} |f_n(x)|$ par un réel positif a_n, indépendant de x, telle que la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge.
Parfois, on s'assure d'abord de la convergence simple avant le calcul éventuel de $\sup_{x\in D} |f_n(x)|$.

⚠ **Attention** : on ne tente jamais de montrer directement que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge. Comme pour les séries numériques, on travaille, sauf cas exceptionnels, sur le terme général avant de considérer la somme !

Exemple 7. **1.** La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n!}\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x \mapsto x^n)$ ne converge pas normalement sur $]-1,1[$ mais converge normalement sur $[a,b]$ pour tous $a,b \in]-1,1[$ tels que $a<b$.

3. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x \mapsto nx^2e^{-x\sqrt{n}})$ converge simplement sur $[0,+\infty[$, ne converge ni normalement ni uniformément sur $[0,+\infty[$, mais converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$.

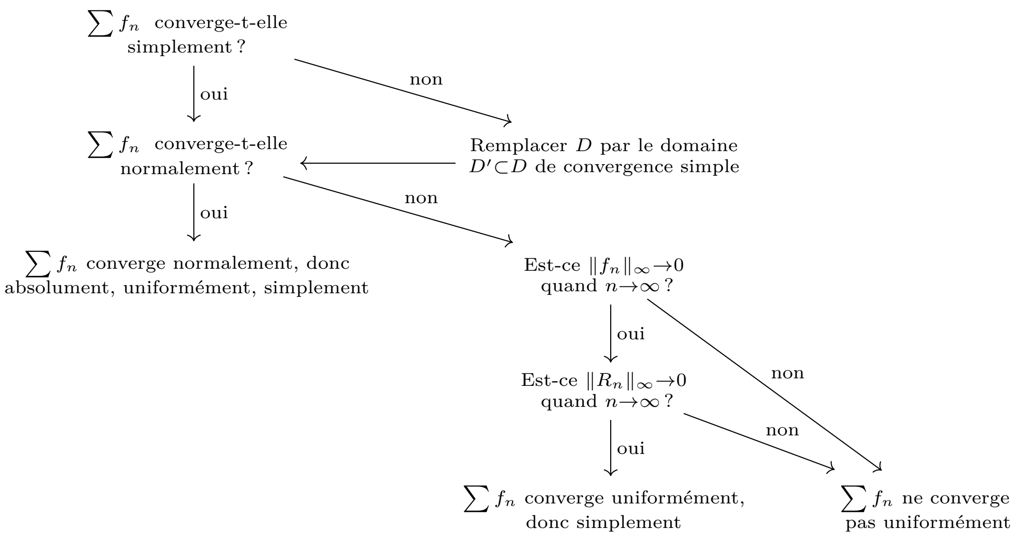
4. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, où f_n est définie, pour $n\in\mathbb{N}^*$, par $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x\in[n,n+1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

converge uniformément mais non normalement sur $[1,+\infty[$.

Exercice de cours 17. Vérifier les assertions des exemples précédents.

Plan d'étude sommaire pour l'étude d'une série de fonctions.

Pour étudier, sur un exemple donné, les convergences d'une série de fonctions $\sum f_n$, on peut proposer le plan suivant, qu'il sera parfois nécessaire de compléter :



Dans le cas où n'y a pas convergence normale ou uniforme de $\sum f_n$ sur D, on indiquera les parties de D sur lesquelles il y a convergence normale ou uniforme.

1.4. Critère d'Abel uniforme.

Rappel. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nb_n$ une série numérique telle que :

1. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante,

2. la suite $(a_n)_{n\in N}$ converge vers 0,

3. il existe $M>0$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^n b_n| \leqslant M$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nb_n$ est convergente. Il s'agit d'une généralisation du critère des séries alternées.

***Niels Henrik Abel**, (1802-1829) est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.*

Pour les séries de fonctions, nous obtenons le critère de convergence uniforme suivant qui généralise le critère de convergence uniforme pour les séries de fonctions alternées (voir la proposition 17).

Proposition 21 – critère d'Abel de convergence uniforme

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\beta_n$ une série de fonctions définies sur D telle que :

1. pour tout $x \in D$, la suite $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante,
2. la suite de fonctions $(\alpha_n)_{n\in N}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle,
3. il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sup_{x\in D}\left|\sum_{k=0}^{n}\beta_n\right| \leqslant M$.

Alors la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\beta_n$ converge uniformément sur D.

Exercice de cours 18.

1. Démontrer cette proposition.
2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right)$ converge uniformément sur $[a, 2\pi - a]$, où $0 < a < \pi$.

1.5. Fonction zeta de Riemann. Pour conclure cette section, étudions la ***fonction ζ de Riemann*** :

$$\begin{aligned} \zeta\colon]1,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}, \end{aligned}$$

et la fonction

$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}. \end{aligned}$$

Les deux séries de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(x \mapsto \frac{1}{n^x}\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}\right)$ convergent simplement sur $]1, +\infty[$ et $]0, +\infty[$ respectivement. Les deux fonctions ci-dessus sont donc bien définies.

Exercice de cours 19.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(x \mapsto \frac{1}{n^x})$ ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$, mais qu'elle converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(x \mapsto \frac{1}{n^x})$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$, mais qu'elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.

Exercice de cours 20.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x})$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et converge absolument sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x})$ ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$, mais qu'elle converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x})$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$, mais qu'elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

2. Propriétés de la convergence uniforme

À l'aide des propriétés de la convergence uniforme pour les suites de fonctions, on obtient des propriétés similaires pour les séries de fonctions, que nous énoncerons sans démonstration. Il suffit d'appliquer les résultats du chapitre 1 à la suite de fonctions des sommes partielles.

2.1. Convergence uniforme et limite.

Théorème 22 – convergence uniforme et limite

Soient a dans l'adhérence $\overline{D}$ de D, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions définies sur D. Supposons :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite b_n en a,

2. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D.

Alors, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on a :

(i) la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge dans $\mathbb{C}$,

(ii) la fonctions S admet une limite en a, et

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

La partie (ii) peut s'exprimer ainsi : $\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$.

2.2. Convergence uniforme et continuité.

Théorème 23 – convergence uniforme et continuité en un point

Soient $a \in D$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions définies sur D. Supposons :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a,

2. la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D.

Alors, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, la fonction S est continue en a.

Exercice de cours 21. Montrer à l'aide du théorème précédent que la série de fonction

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}\right)$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais non uniformément sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 24 – convergence uniforme et continuité

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions définies sur D. Supposons :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D,

2. la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D.

Alors, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, la fonction S est continue sur D.

Exercice de cours 22. Vérifier à l'aide du corollaire précédent et de l'exercice 19 que la fonction ζ de Riemann est continue sur $]1, +\infty[$.

2.3. Convergence uniforme et intégration sur un segment.

Théorème 25 – convergence uniforme et intégration sur un segment

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues (ou continues par morceaux) de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur $[a,b]$. Alors :

(i) la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$,

(ii) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\big)$ converge dans $\mathbb{C}$, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice de cours 23. Montrer à l'aide du théorème ci-dessus : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t = x.$

2.4. Convergence uniforme et dérivation. Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit et à un point.

Théorème 26 – convergence uniforme et dérivation

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$. On suppose :

1. la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I,

2. la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors :

(i) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I,

(ii) la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Corollaire 27 – convergence uniforme et dérivation successive

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions classe $\mathscr{C}^k$ de I dans $\mathbb{C}$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose :

1. pour tout i de $\{0,\dots,k-1\}$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(i)}$ converge simplement sur I,

2. la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors :

(i) pour tout i de $\{0,\dots,k-1\}$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I,

(ii) la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et, pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, $S^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$.

Exemple 8 (fonction ζ de Riemann). Considérons la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, où $f_n\colon]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in]1,+\infty[, \qquad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

À l'aide du corollaire précédent, on montre alors que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in]1,+\infty[, \qquad \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

En particulier, on voit que la fonction ζ est décroissante (ce qui est facile à voir directement) et convexe.

Exercice de cours 24. Vérifier les assertions de l'exemple précédent, et tracer la courbe représentative de ζ.

CHAPITRE 3

Séries entières

Nous avons déjà rencontré la *série géométrique* : pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{1-z}$. L'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

est, lue de gauche à droite, la sommation d'une *série entière* particulière et, lue de droite à gauche, le *développement en série entière* de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

Nous étudions dans ce chapitre les *séries entières*, c'est-à-dire les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et z est la variable, $z \in \mathbb{C}$.

1. Rayon de convergence

Définition 28 – série entière

On appelle ***série entière*** toute série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C})$ telle qu'il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = a_n z^n.$$

Remarque 5. Il est d'usage d'adopter pour les séries entières la notation $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ au lieu de $\sum_{n\geqslant 0}(z \mapsto a_n z^n)$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ pourra désigner soit une série entière (cas particulier de série de fonctions) soit une série numérique, lorsque z est fixé.

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n z^n, \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}, \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{n^2+1}, \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+in}{e^n} z^n$ sont des séries entières.

1.1. Rayon de convergence et somme d'une série entière.

Proposition 29 – Lemme d'Abel

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Exercice de cours 25. Démontrer cette proposition.

Théorème-Définition 30 – rayon de convergence

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique élément R de $\overline{\mathbb{R}_+^*} = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ tel que :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} |z| < R \Rightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge absolument}\right), \\ |z| > R \Rightarrow ((a_n z^n)_{n\in\mathbb{R}} \text{ n'est pas bornée}). \end{cases}$$

Cet élément de $\overline{\mathbb{R}_+^*}$ s'appelle ***rayon de convergence***, ou ***rayon***, de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exercice de cours 26. Démontrer ce théorème.

Le théorème 30 implique les assertions suivantes, très utiles en pratique : si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon R, alors pour $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé :

- $((a_n z_0^n)_{n\geqslant 0}$ bornée $) \Longrightarrow R \geqslant |z_0|$,
- $\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n \text{ converge}\right) \Longrightarrow R \geqslant |z_0|$,
- $\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n \text{ non absolument convergente }\right) \Longrightarrow R \leqslant |z_0|$,
- $\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n \text{ diverge}\right) \Longrightarrow R \leqslant |z_0|$,

⚠ **Attention** : lorsque $|z| = R$, on ne peut en général rien affirmer de simple quant au comportement de la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exemple 9.

1. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ diverge pour pour tout z tel que $|z| = 1$.
2. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$ diverge en $z = 1$ et converge pour tout z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 0$.
3. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n^2}$ converge pour pour tout z tel que $|z| = 1$.

Exercice de cours 27. Vérifier les assertions des exemples ci-dessus.

Définition 31 – cercle d'incertitude

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = R\}$ est appelé le ***cercle d'incertitude*** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Il est parfois appelé le ***cercle de convergence*** mais l'appellation est peu judicieuse...

Exemple 10 (série géométrique). Soit $a \in \mathbb{C}^*$. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} a^n z^n$, appelée ***série géométrique***, a pour rayon $\dfrac{1}{|a|}$.

Exercice de cours 28.

1. Représenter le cercle d'incertitude dans le plan complexe ; il partage en deux zones le plan complexe. Indiquer sur chacune des zones les propriétés de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ à l'aide du Théorème 30. (Nous complèterons le dessin au fur et à mesure du cours.)
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} e^{-\sqrt{n}} z^n$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \sin n z^n$.

Définition 32 – fonction somme d'une série entière

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R. On appelle ***somme*** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ l'application $S \colon \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple 11 (série géométrique). Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{|a|}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^n = \frac{1}{1 - az}.$$

Proposition 33 – comparaison de rayons et majorations

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_a \geqslant R_b$.

Exercice de cours 29.

1. Démontrer cette proposition.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} e^{\sin n} z^n$.

Proposition 34 – comparaison de rayons et équivalents

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. Si $|a_n| \sim |b_n|$ quand $n \to +\infty$, alors $R_a = R_b$.

Exercice de cours 30.

1. Démontrer cette proposition.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e\right) z^n$.

1.2. Règles de d'Alembert et de Cauchy.

Rappel (règle de d'Alembert pour les séries numériques). Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ admette une limite finie ℓ dans $\overline{\mathbb{R}_+^*}$.

— Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
— Si $\ell > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

***Jean le Rond D'Alembert**, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783, est un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français. Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'en 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles.*

Proposition 35 – règle de d'Alembert pour les séries entières

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\, n \geqslant N, \quad a_n \neq 0, \\ \left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geqslant N} \text{ admet une limite finie } \ell \text{ dans } \overline{\mathbb{R}_+^*}, \end{cases}$$

alors le rayon R de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{\ell}$ (où, par convention, $\dfrac{1}{0} = \infty$ et $\dfrac{1}{\infty} = 0$).

Exercice de cours 31.

1. Démontrer cette proposition.

2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$, $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2-n+3}{2n^3+n+\pi} z^n$,

⚠ **Attention** : si $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}_+^*}$, la règle de d'Alembert est inapplicable.

Exemple 12. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \sin n z^n$ est de rayon 1, et $\left(\left|\dfrac{\sin(n+1)}{\sin n}\right|\right)_n$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}_+^*}$.

⚠ **Attention** : la règle de d'Alembert est inapplicable aux séries entières du type : $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n+1}$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n^2}$, etc.

Pour déterminer le rayon de telles séries entières, on pourra essayer :
- soit d'appliquer la règle de d'Alembert pour les séries numériques en fixant z,
- soit d'effectuer un changement variable du type $Z = z^2$.

Exercice de cours 32. Déterminer le rayon de convergence de ma série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n^2+1} z^{2n}$.

Dans tous les cas où la règle de d'Alembert s'applique, la *règle de Cauchy*, plus générale, s'applique aussi. Elle est cependant parfois moins agréable à utiliser.

Rappel (règle de Cauchy pour les séries numériques). Soit $\sum_{n\geqslant 0}$ une série numérique. On suppose que la suite $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}_+^*}$.
- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Comme pour la règle de d'Alembert, si $\ell = 1$, on ne pas conclure et tout peut se produire.

Proposition 36 – règle de Cauchy pour les séries entières

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Si la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}_+^*}$, alors le rayon R de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{\ell}$.

2. Opérations sur les séries entières

2.1. Structure vectorielle. Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b, et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ a pour rayon R_a, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$,

$$\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

Exercice de cours 33. Vérifier cette assertion.

On note R_{a+b} le rayon de la ***série entière somme*** $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$.

Proposition 37 – rayon de convergence de la série entière somme

On $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n + \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n.$$

De plus, si $R_a \neq R_b$, alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Exercice de cours 34. Démontrer la proposition.

⚠ **Attention** : lorsque $R_a = R_b$, il se peut que $R_{a+b} = R_a$ ou que $R_{a+b} > R_a$.

EXEMPLE 13.
1. les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} nz^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_{n\geqslant 0}(1+n)z^n$ est de rayon 1.
2. les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}(2^{-n}-1)z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}z^n$ est de rayon 2.
3. les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} -z^n$ sont de rayon 1 et leur série entière somme $\sum_{n\geqslant 0} 0z^n$ est de rayon ∞.

Exercice de cours 35. Vérifier les assertions ci-dessus.

2.2. Dérivation. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière.

Définition 38 – série entière dérivée

On appelle ***série entière dérivée*** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ la série entière $\sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}$, ou encore $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}z^n$.

Proposition 39 – rayon de convergence de la série dérivée

La série entière dérivée d'une série entière a le même rayon que celle-ci.

Exercice de cours 36.
1. Démontrer cette proposition.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin n}{n^2} z^n$.

2.3. Produit de Cauchy de deux séries. Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.

Définition 40 – produit de Cauchy

On appelle ***série entière produit*** ou ***produit de Cauchy*** des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Proposition 41 – rayon de convergence du produit de Cauchy

On note R_c le rayon de la série entière produit $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$. Alors $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n.$$

Exercice de cours 37. Démontrer cette proposition.

⚠ **Attention** : il se peut que $R_c \neq \min(R_a, R_b)$, même si $R_a \neq R_b$.

Exemple 14. Posons pour tout $n \geqslant 0$, $a_n = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $b_n = 0$. On a ici $R_a = 1$, $R_b = \infty$, $c_0 = 1$, et pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = 0$, d'où $R_c = \infty$. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \dfrac{1}{1-z}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = 1 - z$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = 1$.

3. Convergence

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R.

Théorème 42 – convergence normale sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement sur toute partie compacte K incluse dans le disque ouvert $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < R\}$.

Exercice de cours 38. Démontrer ce théorème.

⚠ **Attention** : il se peut que, pour une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon R, il n'y ait pas convergence normale, ni même uniforme, dans le disque ouvert $B(0,R)$ comme le montre l'exemple $\sum_{n\geqslant 0} z^n$.

⚠ **Attention** : ne pas confondre la convergence absolue de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ dans le disque ouvert $B(0,R)$ et la convergence normale (donc uniforme) dans tout disque fermé $\overline{B}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leqslant r\}$ tel que $0 \leqslant r < R$.

Exercice de cours 39. Quelles sont les séries entières uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$?

Le théorème suivant est un outil central de l'étude des séries entières. Sa démonstration est subtile.

Théorème 43 – théorème de convergence tangentiel d'Abel

Si une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge en un point z_0 de $\mathbb{C}$ alors la convergence est uniforme sur $[0, z_0]$. En particulier, la somme $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le segment $[0, z_0]$.

Nous connaissions déjà ce résultat pour z_0 tel que $|z_0| < R$, si R est le rayon de la série entière (voir le théorème 42). Le théorème 43 et donc surtout intéressant pour z_0 sur le cercle de convergence, c'est-à-dire lorsque $|z_0| = R$ (l'hypothèse du théorème assure que $|z_0| \leqslant R$).

Exercice de cours 40.

1. Démontrer ce théorème.

2. Application : calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

4. Régularité de la somme d'une série entière

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R, et de somme S.

Théorème 44 – continuité d'une série entière sur son disque ouvert de convergence

L'application S est continue sur le disque ouvert $B(0,R)$.

Exercice de cours 41. Démontrer ce théorème.

Comme la théorie de la dérivation n'a pas été développée dans le cas des fonctions d'une variable complexe, on se limite dans la suite de cette section au cas d'une variable réelle, notée plutôt x que z selon l'usage. En revanche, les coefficients a_n sont a priori complexes.

Théorème 45 – une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ ur son disque ouvert de convergence

On suppose $\underline{R > 0}$. L'application S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]-R, R[, \qquad S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En particulier : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Autrement dit, on peut dériver termes à termes la somme d'une série entière dans l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

Exercice de cours 42. Démontrer ce théorème.

Exemple 15. On a vu (cf. exemple 11) que la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon 1 et que :

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On en déduit ;

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n,$$

puis, par une récurrence immédiate sur k : $\forall \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+k)\ldots(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{k!n!}x^n.$$

5. Développements en série entière

Rappel. La ***formule de Taylor avec reste intégral***, ou ***formule de Taylor-Laplace***, rappelée ci-dessous est cruciale en analyse comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre.

Brook Taylor, *est un homme de science anglais, né à Edmonton, aujourd'hui un quartier de Londres, le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Principalement connu comme mathématicien, il s'intéressa aussi à la musique, à la peinture et à la religion.*

Pierre-Simon de Laplace, *né Pierre-Simon Laplace, comte Laplace puis 1er marquis de Laplace, né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge et mort le 5 mars 1827 à Paris, est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.*

Théorème 46 – formule de Taylor avec reste intégral

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\colon]-r, r[\to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)} \mathrm{d}t.$$

La quantité $(R_n(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\mathrm{d}t = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est appelé le ***reste*** à l'ordre n. Nous nous intéressons dans cette section aux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui coïncident avec la somme de leur série de Taylor, $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, au voisinage de 0. Rappelons qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un ***voisinage de*** 0 s'il existe $r > 0$ tel que $]-r, r[\subset V$.

5.1. Généralités. Soit $D \subset \mathbb{R}$ un voisinage de 0 et f une application de D dans $\mathbb{C}$.

Définition 47 – fonction développable en série entière

1. On dit que f est ***développable en série entière en*** 0 (en abrégé ***DSE***(0)) s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $\underline{R > 0}$ et $r \in]0, R]$ tels que :
$$\forall\, x \in]-r, r[\cap D, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est ***développable en série entière en*** x_0 (en abrégé ***DSE***(x_0)) s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $\underline{R > 0}$ et $r \in]0, R]$ tels que :
$$\forall\, x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap D, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Avec les notations de la définition, f est DSE(x_0) si et seulement si la fonction $t \mapsto f(x_0 + t)$ est DSE(0). On va donc s'intéresser principalement au cas des fonctions DSE(0).

Exemple 16 (cas des polynômes). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Pour tout x_0 de $\mathbb{R}$, la fonction polynomiale associée à P est DSE(x_0). Cela résulte de la formule de Taylor pour les polynômes (voir le cours d'algèbre de première année) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Proposition 48 – unicité du développement en série entière

Supposons que f soit DSE(0). Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, et $r \in]0, R]$ tels que pour tout $x \in]-r, r[\cap D$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[\cap D$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Exercice de cours 43. Démontrer cette proposition.

La relation

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

qui n'est valable que sur un voisinage de 0, est appelée le ***développement en série entière de*** f ***en*** 0 (en abrégé ***DSE***(0)), ou ***développement de Maclaurin de*** f.

Colin Maclaurin*, février 1698 - Édimbourg 14 juin 1746) est un mathématicien écossais. Il fut professeur de mathématiques au Marischal College à Aberdeen de 1717 à 1725 et à l'université d'Édimbourg de 1725 à 1745.*

⚠ **Attention :** il se peut qu'une fonction soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 sans que f soit DSE(0) comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice de cours 44. Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f n'est pas DSE(0). (*On pourra raisonner par l'absurde.*)

Par ailleurs, nous avons déjà rencontré (voir la fiche n°2) le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor est divergente en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Proposition 49 – une fonction $\mathscr{C}^\infty$ est DSE(0) si et seulement si son reste converge simplement

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\colon]-r, r[\to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour que f soit DSE(0) il faut et il suffit qu'il existe $\alpha \in]0, r]$ tel que le reste de la formule de Taylor $\big(R_n(f)\big)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers 0 sur $]-\alpha, \alpha[$.

Exercice de cours 45. Démontrer cette proposition.

Remarque 6 (Opérations sur les fonctions développables en séries entières). Soient f, g deux fonctions DSE(0), et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, $f + \lambda g$, fg, les dérivées successives de f et les «primitives successives» de f sont DSE(0). Ceci résulte des opérations sur les séries entières (voir la section 2).

5.2. DSE(0) usuels. Nous allons maintenant étudier des DSE(0) de fonctions usuelles qu'il faudra retenir. Dans la plupart les cas, on utilisera la formule de Taylor avec reste intégral et la proposition 49 pour obtenir ces DSE(0).

Exercice de cours 46.

1. Montrer que la fonction exponentielle $\exp\colon x \mapsto e^x$ est DSE(0) et donner son DSE(0). Préciser le domaine de validité de la formule. (*Indication : utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.*)
2. Même question pour les fonctions cos et sin.
3. Même question pour la fonction $f_\alpha\colon x \mapsto (1+x)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est <u>fixé</u>. (*Indication : utiliser la méthode dite «de l'équation différentielle».*)
4. Même question pour les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto -\ln(1-x)$. (*Indication : considérer une primitive du DSE(0) de* $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.)
5. Même question pour les fonctions circulaires réciproques arctan, arcsin, arccos.

Liste des DSE(0) usuels

Formule	Rayon de la série entière	Ensemble de validité
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1 (∞ si $\alpha \in \mathbb{N}$)	$]-1,1[$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1	$]-1,1[$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	1	$]-1,1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	1	$]-1,1]$
$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$[-1,1[$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	1	$[-1,1]$
$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$]-1,1[$
$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1,1]$
$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1,1]$

⚠ **Attention** : Il connaître par cœur au moins les dix premiers DSE(0) de ce tableau ! Certains sont très faciles à retrouver, comme par exemple arctan, par primitivation...

Les expressions de DSE(0) ci-dessus redonnent bien entendu les développements limités de fonctions usuels à tout ordre vus dans le cours d'analyse de première année.

6. Fonctions usuelles d'une variable complexe

6.1. Exponentielle complexe.

Définition 50 – exponentielle complexe

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est de rayon infini. Sa somme est appelée l'***exponentielle complexe***, et notée exp. On a ainsi :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad \exp z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.$$

L'exponentielle complexe étend l'exponentielle réelle. On notera donc souvent e^z au lieu de $\exp z$.

Le théorème suivant se démontre à l'aide du produit de Cauchy de deux séries entières.

Théorème 51 – produit de deux exponentielles

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

Exercice de cours 47. Démontrer ce théorème.

Théorème 52 – l'application exponentielle est un morphisme continu

L'application $z \mapsto e^z$ est un morphisme surjectif continu du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice de cours 48. Démontrer ce théorème.

La proposition suivante donne une définition rigoureuse et explicite du nombre π. Rappelons que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Proposition-Définition 53 – définition du nombre π

L'application $\psi\colon t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{U}, \times)$ et il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathrm{Ker}(\psi) = a\mathbb{Z}$. On note $\pi = \frac{a}{2}$.

Exercice de cours 49.

1. Démontrer cette proposition.

2. Montrer : $\forall z \in \mathbb{C}$, $(e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z})$.

6.2. Fonctions circulaires et hyperboliques.

On définit de même, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\mathrm{ch}\, z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathrm{sh}\, z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, sont toutes de rayon infini, et leurs sommes coïncident sur $\mathbb{R}$ avec les fonctions cos, sin, ch et sh respectivement.

Proposition 54 – autres expressions des fonctions circulaires et hyperboliques

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos z + i\sin z = e^{iz}, \quad \cos z - i\sin z = e^{-iz}, \quad \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = e^{z}, \quad \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = e^{-z},$$
$$\cos z = \operatorname{ch}(iz), \qquad i\sin z = \operatorname{sh}(iz).$$

Exercice de cours 50. Montrer :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} \cos z = 0 \iff z \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \\ \sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Définition 55 – tangente et cotangente

1. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, on note $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on note $\operatorname{cotan} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

Formules de trigonométrie circulaire

On se convaincra aisément que les formules de trigonométrie relatives aux fonctions circulaires d'une variable réelle restent en grande partie valables pour les fonctions circulaires d'une variable complexe. Ainsi, on a par exemple pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 a + \sin^2 a = 1,\\
&\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,\\
&\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,\\
&\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},\\
&\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Formules de trigonométrie hyperbolique

D'après la proposition 54 et ses conséquences, $i\operatorname{sh} z = \sin(iz)$, $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$, on obtient les formules de trigonométrie hyperbolique à partir des formules de trigonométrie circulaire. Par exemple, à partir de la relation $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$, on obtient pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$:

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b).$$

CHAPITRE 4

Exponentielle de matrices et systèmes différentiels

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On s'intéresse dans ce chapitre à des suites et séries à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (de dimension finie). Ceci nous permettra de définir l'*exponentielle d'une matrice*,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}, \qquad A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),$$

et de présenter une application aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On commence par des résultats généraux sur les espaces vectoriels normés. Comme il ne s'agit pas d'un cours de topologie, nous admettrons bon nombre de résultats (dont certains ont déjà été évoqués dans le cours «fonctions de plusieurs variables» au premier semestre).

1. Espaces vectoriels normés

1.1. Normes, exemples. Rappelons la définition d'une norme sur E, vue par exemple dans le cours d'algèbre.

Définition 56 – norme

On appelle ***norme*** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ telle que :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $N(\lambda x) = \lambda N(x)$ (homogénéité),

2. $\forall x \in E$, $(N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$ (caractère défini),

3. $\forall (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On appelle ***espace vectoriel normé*** (en abrégé ***evn***) tout couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E.

S'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on note E au lieu de (E, N).

Exemple 17 (les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Exercice de cours 51. Vérifier que les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple 18 (norme de Hölder). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout p de $[1, +\infty[$, l'application

$$\|\cdot\|_p \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée ***norme de Hölder***. Elle généralise les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Vérifier que l'application $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ est assez délicate.

Otto Ludwig Hölder *(1859-1937) est un mathématicien allemand né à Stuttgart, capitale de l'actuel Land Baden-Würtenberg (Allemagne).*

Exemple 19 (normes sur des espaces d'applications). **1.** Soit X un ensemble non vide. L'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathscr{B}(X,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad f \longmapsto \sup_{x\in X} |f(x)|$$

est une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$. C'est la ***norme de la convergence uniforme***, déjà rencontrée. En particulier, $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un $\mathbb{K}$-evn.

2. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in E$, posons :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2 \colon E \to \mathbb{R}_+$ sont des normes sur E.

Exercice de cours 52. Vérifier les assertions des exemples ci-dessus.

Proposition 57 – inégalité trinagulaire renversée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-evn. On a pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|x-y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$.

Exercice de cours 53. Démontrer cette proposition.

Rappelons qu'une ***algèbre*** (ou $\mathbb{K}$-***algèbre***) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une loi interne, notée $\cdot$ ou par l'absence de symbol, telle que :

1. $\cdot$ est distributive sur $+$,

2. $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall(x,y) \in A^2$, $(\lambda x)\cdot y = \lambda(x\cdot y) = x\cdot(\lambda y)$.

Si de plus $\cdot$ est commutative (resp. associative, resp. admet un élément neutre), on dit que A est ***commutative*** (resp. ***associative***, resp. ***unitaire***).

Exercice de cours 54. Donner des exemples d'algèbres commutatives et non commutatives.

Définition 58 – norme d'algèbre

Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre, et N une norme sur A. On dit que N est une ***norme d'algèbre*** si :

$$\forall\,(x,y) \in A^2, \qquad N(x\cdot y) \leqslant N(x)N(y).$$

On appelle $\mathbb{K}$-***algèbre normée*** tout couple (A,N) où A est une $\mathbb{K}$-algèbre et N une norme d'algèbre sur A.

Exemple 20. Pour tout ensemble non vide X, $(\mathscr{B}(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre normée, la loi $\cdot$ étant la multiplication.

Exercice de cours 55. Vérifier l'assertion ci-dessus.

1.2. Suites dans un espace vectoriel normé. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-evn.

Définition 59 – convergence d'une suite dans un evn

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E ***converge vers un élément*** ℓ de E si la suite à termes positifs $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Avec cette définition, la plupart des résultats concernant les suites réelles ou complexes restent valables pour les suites de E (unicité de la limite, opérations sur les limites, etc.). En particulier, on peut considérer des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à valeurs dans le $\mathbb{K}$-evn E à l'aide de la suite des sommes partielles.

La notion de convergence absolue est alors remplacée par la notion de *convergence en norme* :

Définition 60 – convergence en norme

On dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à valeurs dans E ***converge en norme*** si la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ converge.

La convergence normale pour des suites de fonctions bornées s'interprète donc comme un cas particulier de convergence en norme.

⚠ **Attention** : Dans un $\mathbb{K}$-evn quelconque, la converge en norme n'implique pas en général la convergence de la série.

Nous verrons que c'est toutefois le cas pour les $\mathbb{K}$-evn de dimension finie.

1.3. Comparaison de normes. Soient E un $\mathbb{K}$-evn, et N, N' deux normes sur E.

Définition 61 – normes équivalentes

On dit que N ***est équivalente à*** N', et on note $N \sim N'$, si :

$$\exists\,(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x).$$

Proposition 62 – la relation $\sim$ est une relation d'équivalence

La relation «est équivalente à» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Exercice de cours 56. Démontrer cette proposition.

Exemple 21. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice de cours 57. Vérifier l'assertion ci-dessus.
Indication : considérer pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} n(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Proposition 63 – équivalence de normes et convergence de suites

Supposons que N et N' soient équivalentes, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E, N) si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E, N').

Exercice de cours 58. Démontrer cette proposition.

1.4. Application linéaire continue, norme subordonnée. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn. Comme dans le cours d'algèbre, on note $\mathscr{L}(E,F)$ (resp. $\mathscr{L}(E)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F (resp. l'ensemble des endomorphismes de E).

Théorème 64 – caractérisation de la continuité pour une application linéaire

Pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue sur E,
(ii) $\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$.

Exercice de cours 59. Démontrer ce théorème.

On note $\mathscr{LC}(E,F)$ (resp. $\mathscr{LC}(E)$) l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F (resp. l'ensemble des endomorphismes continus de E).

Si $E \neq \{0\}$, on note, pour $f \in \mathscr{LC}(E,F)$,

$$\boxed{|||f||| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.}$$

Cette borne supérieure existe d'après le théorème précédent.

Remarque 7. On a : $\displaystyle\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$

Exercice de cours 60. Vérifier l'assertion ci-dessus.

Proposition-Définition 65 – norme subordonnée

L'application $|||\cdot|||\colon \mathscr{LC}(E,F)\to\mathbb{R}_+,\ f\mapsto |||f|||$ est une norme d'algèbre sur $\mathscr{LC}(E,F)$, appelée la ***norme subordonnée*** aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. La norme $|||\cdot|||$ est appelée aussi la ***norme d'opérateurs***.

Exercice de cours 61. Démontrer cette proposition.

Exemple 22. **1.** Soit E un $\mathbb{K}$-evn. L'application $\mathbb{K}\times E\to E$, $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$ est continue.

2. Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre normée. L'application $A\times A\to A$, $(u,v)\mapsto uv$ est continue.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-evn. L'application $\mathscr{LC}(E)\times\mathscr{LC}(E)\to\mathscr{LC}(E)$, $(f,g)\mapsto f\circ g$ est continue.

Exercice de cours 62. Vérifier les assertions des exemples ci-dessus.

1.5. Suites de Cauchy. Soit $(E,\|,\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-evn. La définition suivante étend celle déjà rencontrée pour les suites réelles ou complexes.

Définition 66 – suite de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est dite ***de Cauchy*** si :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \forall\,N\in\mathbb{N},\ \forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } p,q\geqslant N,\ \|u_q-u_q\|\leqslant\varepsilon.$$

Remarque 8. Si deux normes N, N' sur E sont équivalentes, alors les suites de Cauchy de (E,N) sont les suites de Cauchy de (E,N').

Proposition 67 – toute suite de Cauchy est bornée, toute suite convergente est de Cauchy

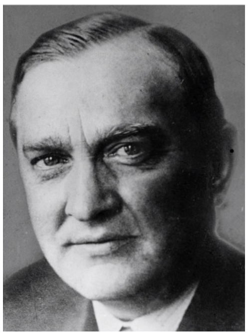
(i) Toute suite de Cauchy dans E est bornée.
(ii) Toute suite convergente dans E est de Cauchy.

Exercice de cours 63. Démontrer cette proposition.

Définition 68 – espace complet

On dit qu'une partie A de E est ***complète*** si tout suite de Cauchy de A converge <u>dans A</u>. On dit que E est ***complet*** si E est une partie complète de E, autrement dit si tout suite de Cauchy de E converge dans E. On appelle ***espace de Banach*** tout $\mathbb{K}$-evn complet.

__Stefan Banach__ (1892-1945) est un mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs.



1.6. Cas de la dimension finie. Soit E un $\mathbb{K}$-evn. On admet le résultat fondamental suivant ; il résulte du fait que, dans $\mathbb{K}^n$, la sphère unité $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{K}^n\ ;\ \|x\|_\infty = 1\}$ est une partie compacte.

Théorème 69 – Toutes les normes sont équivalentes dans un evn de dimension finie

Supposons que E soit de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.

On admet aussi le théorème suivant, tout aussi fondamental. Il résulte du fait que, dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

Théorème 70 – Toute application linéaire définie sur un evn de dimension finie est continue

Soit F un $\mathbb{K}$-evn. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue, autrement dit $\mathscr{LC}(E,F) = \mathscr{L}(E,F)$.

On admet enfin le théorème suivant, qu'on a déjà utilisé de façon essentielle dans le cas particulier des espaces vectoriels $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 71 – Tout evn de dimension finie est complet

Tout evn de dimension finie est complet.

⚠ **Attention** : Il existe des evn non complet, et il existe des evn complets qui ne sont pas de dimension finie.

On présente ci-dessous, sans justification, quelques exemples et contre-exemples.

Exemple 23 (Exemples d'evn complets et non complet).

1. $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un evn complet qui n'est pas de dimension finie.

2. On note ℓ^∞ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|u\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Alors $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un evn complet qui n'est pas de dimension finie.

3. On note $N\colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad N(P) = \sup_{z\in\mathbb{U}} |P(z)|.$$

Alors N est une norme sur $\mathbb{C}[X]$ et $(\mathbb{C}[X], N)$ n'est pas complet.

Compte tenu des théorèmes 69 et 71, la théorie des suites et séries dans un $\mathbb{K}$-evn E de dimension finie est similaire à celle vue pour les suites et séries à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par conséquent, les résultats énoncés pour les suites et séries de fonctions dans les chapitres 1 et 2 restent valables si l'on considère des fonctions f_n définies sur un domaine non vide D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans E. Il suffit de remplacer le module dans $\mathbb{C}$ par *n'importe quelle* norme fixée sur E (toutes les normes sur E sont équivalentes d'après le théorème 69 donc les notions de convergences sont indépendantes du choix d'une norme).

D'autre part, on peut dans *tous*[1] les énoncés remplacer D par n'importe quel ensemble non vide X. Ainsi la définition de la convergence uniforme pour une suites de fonctions devient-elle par exemple :

1. Seuls les énoncés concernant la dérivation de fonctions ne sont pas valables dans ce contexte, mais nous avions pris soin de noter I, et non D, le domaine (qui était alors un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$) dans ce cas.

Définition 72 – convergence uniforme pour des suites de fonctions à valeurs dans un evn

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications de* X *dans* E*, et* f *une application de* X *dans* E*. On dit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** *vers* f *sur* X *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

Comme E est complet (d'après le théorème 71), toute suite de Cauchy de E converge dans E. On démontre alors le résultat suivant exactement comme le théorème 20 (voir la remarque 4) :

Théorème 73 – relations entre les différentes notions de convergences

Soient E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions définies sur un ensemble non vide X et à valeurs dans E. Supposons que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement, c'est-à-dire que la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge. Alors :

(i) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément,

(ii) pour tout x de D, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\|$ converge. En particulier, pour tout x de D, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge dans E ; autrement dit, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement.

2. Exponentielle de matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, par exemple la norme euclidienne. On identifiera $\mathbb{K}^n$ avec l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note :

$$|||A||| = \sup_{X\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{X\in\mathbb{K}^n, \|X\|=1} \|AX\|.$$

L'application $|||\cdot|||\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, appelée la ***norme triple***.

Exercice de cours 64. Vérifier cette assertion à l'aide de la norme subornée sur l'algèbre $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$.

Proposition-Définition 74 – l'application exponentielle

La série d'applications de matrices, de terme général

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \dfrac{1}{k!}A^k, \end{array}$$

converge normalement sur toute partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle ***exponentielle*** l'application :

$$\exp\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \longmapsto e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k.$$

Exercice de cours 65. Demontrer cette proposition.

Remarque 9. On a $\exp(0) = e^0 = I_n$.

Proposition 75 – propriétés de l'exponentielles

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si A et B commutent, c'est-à-dire $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

(ii) On a : $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

(iii) Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A e^P$.

⚠ **Attention** : l'assertion (i) n'est pas vraie si A et B ne commutent pas !

Exercice de cours 66.

1. Demontrer cette proposition.
2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que e^{A+B}, $e^A e^B$, $e^B e^A$ ne soient pas égaux.

Proposition 76 – dérivée de l'application $t \mapsto e^{tA}$

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'application $\varphi\colon I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto e^{tA}$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall\, t \in I, \qquad \varphi'(t) = A\varphi(t) = \varphi(t)A.$$

Exercice de cours 67. Demontrer cette proposition.

3. Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

3.1. Généralités. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $B\colon I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $t \mapsto B(t) = (b_i(t))_{1\leqslant i\leqslant n}$, et $A\colon I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto A(t) = (a_{i,j}(t))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des applications continues.

Remarque 10. Dire que les applications A et B sont continues, c'est dire que pour chaque $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, les applications b_i et $a_{i,j}$ sont continues.

Définition 77 – système différentiel linéaire du premier ordre

On appelle ***système différentiel linéaire du premier ordre*** l'équation différentielle

$$(E)\colon \qquad Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t),$$

l'inconnue étant l'application dérivable $y\colon J \to \mathbb{K}^n$, $t \mapsto Y(t) = (y_i(t))_{1\leqslant i\leqslant n}$, où J est un intervalle inclus dans I.

Définition 78 – système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants

Dans les notations de la définition 77, lorsque l'application A est constante, on dit qu'il s'agit d'un ***système différentiel du premier ordre à coefficients constants***.

C'est à de tels systèmes différentiels que nous nous intéressons principalement dans la suite.
On admet le théorème suivant, y compris dans le cas où A est constante.

Théorème 79 – théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy :

$$(C)\colon \begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule sur I.

Rudolph Otto Sigismund Lipschitz *(14 mai 1832, Königsberg - 7 octobre 1903, Bonn) est un mathématicien allemand.*

On note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de $(E_0)\colon Y' = A(t)Y$ sur I, et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(E)\colon Y' = A(t)Y + B(t)$ sur I.

Rappel. Pour $n = 1$, nous connaissons $\mathscr{S}_0$ et $\mathscr{S}$ (voir le cours d'analyse de première année) :

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ y\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \lambda e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s} \ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ y\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \lambda e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s} + y_0 \ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où y_0 est une solution particulière de (E_0). On cherche une telle solution particulière y_0 à l'aide de la méthode dite ***de variation de la constante***.

On voit en particulier que $\mathscr{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, et que $\mathscr{S}$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension 1, de direction $\mathscr{S}_0$.

Le résultat suivant généralise le cas $n = 1$.

Proposition 80 – structure de $\mathscr{S}_0$ et $\mathscr{S}$

Soit $t_0 \in I$.

(i) L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de (E_0) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{S}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ Y & \longmapsto & Y(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(ii) L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ Y & \longmapsto & Y(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces affines.

Exercice de cours 68. Demontrer cette proposition à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz.

La démonstration de la proposition précédente montre que la solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E). On voit ainsi que la résolution de (E) se ramène à la résolution de (E_0) et à la détermination d'au moins une solution de (E).

Nous n'étudions pas dans ce cours la résolution générale de (E) et (E_0). Nous nous intéressons désormais au cas des systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants, c'est-à-dire au cas où A est constante.

3.2. Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $B\colon I \to\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$ une application continue. On envisage ici l'équation différentielle linéaire

$$(E)\colon \quad Y'(t) = AY(t) + B(t),$$

et l'équation différentielle linéaire homogène associée,

$$(E_0)\colon \quad Y'(t) = AY(t).$$

On note comme précédemment $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble de solutions de (E) et (E_0) respectivement.

Résolution de (E_0). On commence par le cas où A est diagonalisable (voir l'exercice ci-dessous).

Exercice de cours 69. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Décrire la solution générale $\mathscr{S}_0$ de (E_0) en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A et d'une base de vecteurs propres $(V_0, \ldots, V_n)$ pour A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivement. Retrouver le fait que $\mathscr{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et donner une base de $\mathscr{S}_0$.

Lorsque A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut décrire $\mathscr{S}_0$ de façon similaire au cas diagonalisable : on se ramène ici à un système différentiel «en cascade». Rappelons que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pourra utiliser une trigonalisation dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice de cours 70. Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = x - 3y - 4z \\ y' = -x + y - 2z \\ z' = x - 3y, \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Résolution de (E). D'après la proposition 80, il suffit de trouver une solution particulière de (E).

- Il se peut que (E) admette une solution évidente ; voir l'exemple 24 ci-dessous.
- **Principe de superposition des solutions** : supposons que $B = B_1 + \cdots + B_N$, où $B_1, \ldots, B_N : I \to \mathbb{K}^n$ sont continues et «plus simples» que B. Si pour chaque i de $\{1, \ldots, N\}$, on connaît une solution Y_i du système différentiel $Y' = AY + B_i$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ est une solution de (E).
- Cas où le second membre est une exponentielle-polynôme vectorielle ; voir l'exercice 71 ci-dessous.

Exemple 24. Le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y - z - 1 \\ y' = x - y + z - 1 \\ z' = -x + y + z - 1 \end{cases}$ admet la solution évidente $(x = 1, y = 1, z = 1)$.

Exercice de cours 71. Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z + te^t - t \\ y' = -2x + 3y + 2z + te^t - 2t + 2 \\ z' = 3x - 3y - 4z - 1, \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

3.3. Utilisation d'une exponentielle de matrice. Pour la recherche d'une solution particulière de (E) dans le cas général, et donc la résolution générale de (E), nous avons besoin de l'application exponentielle. La solution générale de (E_0) s'exprime elle aussi à l'aide d'une exponentielle de matrice, même si nous avons vu qu'en pratique on peut souvent s'en passer.

Théorème 81

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B\colon I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ continue.

(i) L'ensemble des solutions de $(E_0)\colon Y' = AY$ est $\{I \longrightarrow \mathbb{K}^n,\, t \longmapsto e^{tA}Y_0 \,;\, Y_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$.

(ii) Une solution de $(E)\colon Y' = AY + B$ sur I est, pour $t_0 \in I$ fixé quelconque,

$$t \longmapsto e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s) \mathrm{d}s.$$

La partie (ii) est une généralisation de la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière.

Exercice de cours 72. Démontrer ce théorème à l'aide de la proposition 76.

Exercice de cours 73. Calculer e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire l'allure des trajectoires du système différentiel autonome linéaire,

$$(S)\colon \begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

— fin du cours —