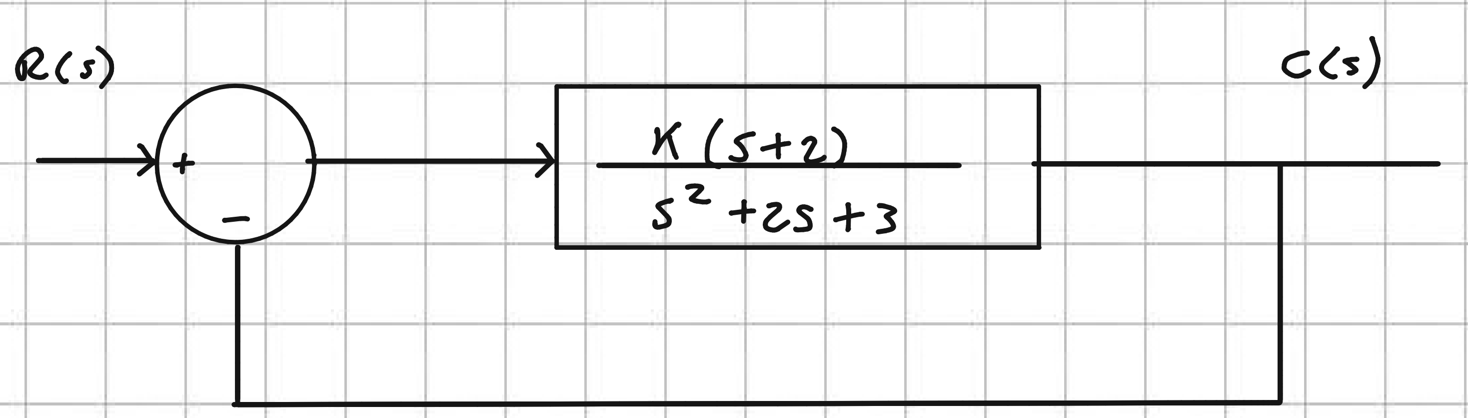
Nombre: Oscar David Poblador Parra
Código: 20211005116

Ejemplo 6.2 de Control Engineering (Ogata)

Considere el siguiente sistema



Donde $K \geq 0$ y los polos del sistema son

$$s = -1 + j\sqrt{2} \quad ; \quad s = -1 + j\sqrt{2}$$

Para determinar el lugar de las raíces se deben segir los siguientes pasos

1) Determine el lugar de la raíces en el eje real

Para determinar la región en la que se ubican las raíces basta con considerar los ceros del sistema que en este caso corresponden a $s = -2$ y $-\infty$.

Conocidos los ceros del sistema se sabe que las raices del sistema se ubican entre $-\infty$ y -2.

Al considerar cualquier punto en el eje real (entre -2 y $-\infty$) se observa como las contribuciones de los polos complejos conjugados es de $360°$ y su influencia en el eje real es nulo comprobando así que la región es parte del lugar de las raíces.

De este modo, se presenta una asintota que coincide con el eje real negativo.

2) Determinar el ángulo de salida de los polos complejos conjugados

Encontrar el angulo de salida de los polos permite conocer si tienden a desplazarse en el eje real o si tienden de forma asintótica al eje.

Considere un polo y un cero como se observa en la figura 1.

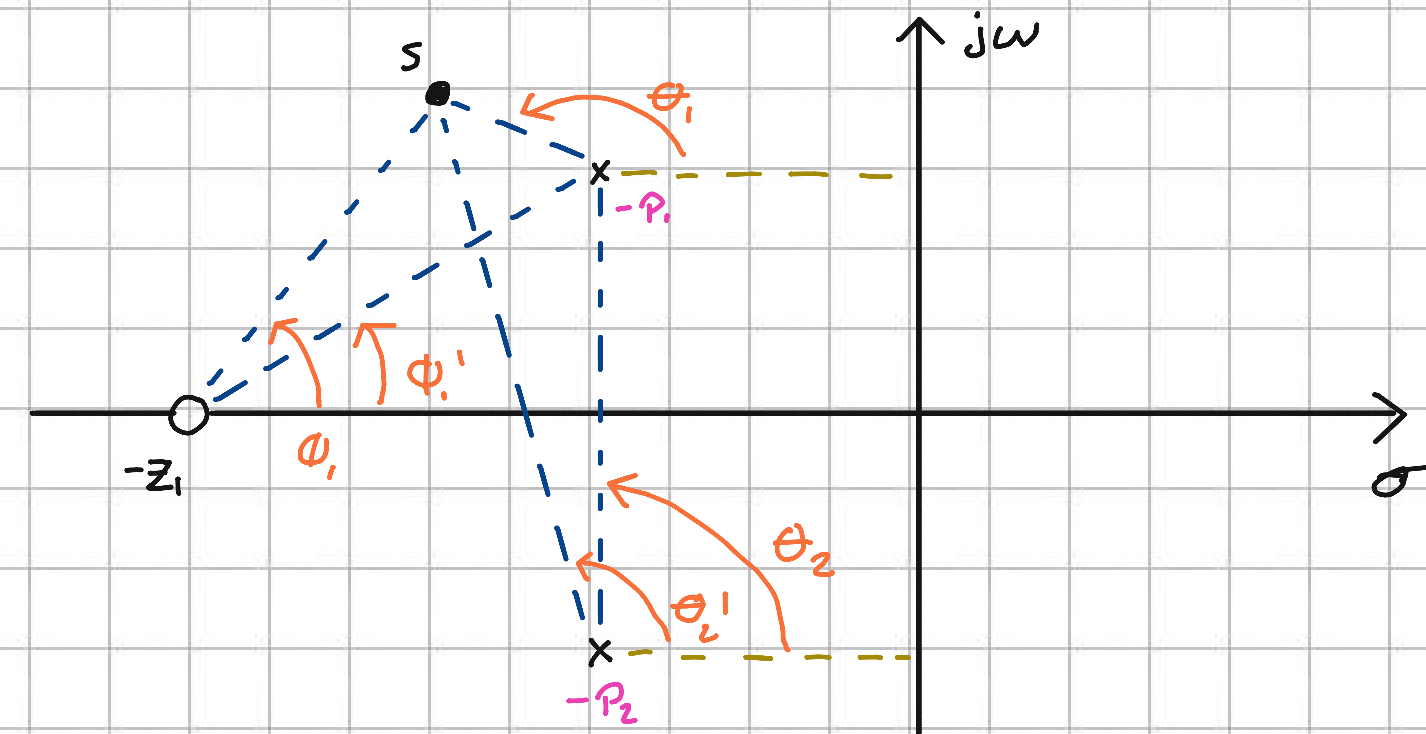


Figura 1. Determinar ángulo de salida

Partiendo del polo s se tiene un ángulo ϕ_1 al cero z_1. Si el polo se desplaza hasta $s = -P_1$ se determina que tiene una incidencia igual en $s = -P_2$ para el punto de prueba.

Si el punto de prueba está en el lugar de las raíces entonces se sabe que la suma de ϕ_1', $-\theta_1$ y $-\theta_2'$ debe ser $\pm 180°(2K+1)$ con $K = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces

$$\phi_1' - (\theta_1 + \theta_2') = \pm 180°(2K+1)$$

Lo que es igual a

$$\theta_1 = 180° - \theta_2' + \phi_1' = 180° - \theta_2 + \phi_1$$

Al tomar los angulos $\phi_1 = 55°$ y $\theta_2 = 90°$ se tiene que

$$\theta_1 = 180° - 90° - 55° = 145°$$

De esa forma al ver los polos $-P_1$ y $-P_2$ como simétricos al eje real se determina el angulo de salida de $-P_2$ como $-145°$

3) Determinar punto ruptura

El punto de ruptura es donde un par de ramas en el lugar de las raíces se fusiona a un determinado valor de K.

Para determinar el punto de ruptura se tiene que:

$$K = -\frac{s^2+2s+3}{s+2}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-(2s+2)(s+2)-(s^2+2s+3)}{(s+2)^2} = 0$$

$$(2s+2)(s+2) - s^2+2s+3 = 0$$

$$s^2+4s+1 = 0$$

Al realizar la ecuación cuadrática se sabe:

$$s = -3,7320 \quad ; \quad s = -0,2680$$

Aquí se puede observar que la raíz $-0,2680$ no se encuentra dentro de la región de las raíces de forma que no puede ser el punto de ruptura.

En este caso el punto de ruptura es en $s=-3,7320$ que corresponde a un valor de $K = 5,4641$.

4) Diagrama lugar de las raíces

Para determinar el lugar de las raíces con presición se deben encontrar varios puntos entre el punto de ruptura y los polos complejos de lazo abierto.

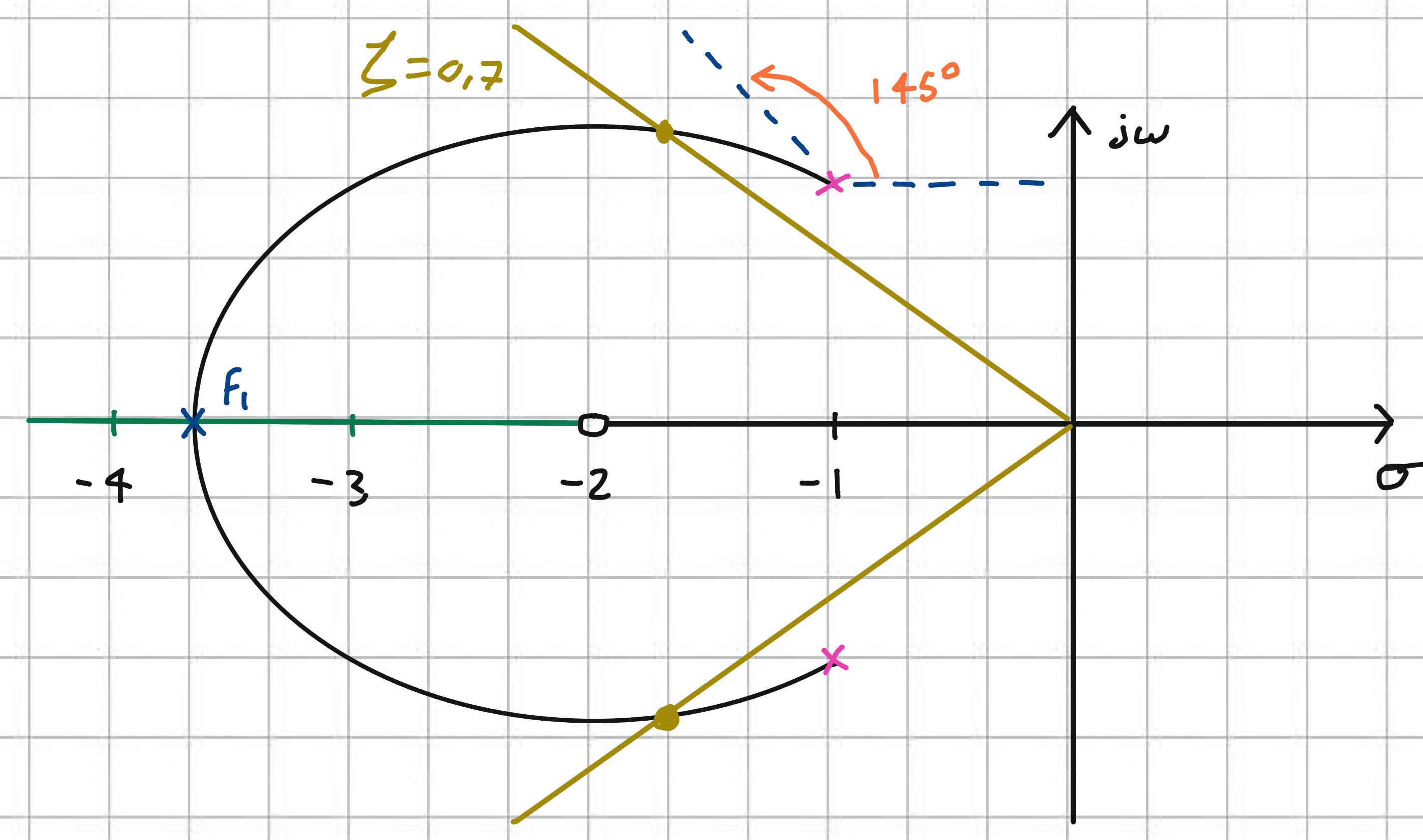


Figura 2. Lugar de las raíces.

De la figura 2 se tiene la región de las raíces, los polos complejos, el ángulo de salida y el punto ruptura.

En el caso de los polos complejos en malla cerrada ($s=-1,67 \pm j1.70$) se presenta un coeficiente de amortiguamiento de 0,7.

En este caso se observa un lugar de las raíces como parte de un círculo. Esto puede darse segun la ubicación de los polos y ceros.

Para demostrar la ocurrencia de un lugar de las raíces circular se realiza el siguiente procedimiento:

La condición angular del sistema es así

$$\angle s+2 - \angle s+1-j\sqrt{2} - \angle s+1+j\sqrt{2} = \pm 180°(2K+1)$$

Si $s = \sigma + j\omega$

$$\angle \sigma+2+j\omega - \angle \sigma+1+j\omega-j\sqrt{2} - \angle \sigma+1+j\omega+j\sqrt{2} = \pm 180^\circ (2k+1)$$

Se puede expresar como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)$$

$$= \pm 180^\circ (2k+1)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) =$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \mp 180^\circ (2k+1)$$

Al aplicar tan a ambos lados

$$\frac{\dfrac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1} + \dfrac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}}{1 - \left(\dfrac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\left(\dfrac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)} = \frac{\dfrac{\omega}{\sigma+2} \pm 0}{1 \mp \dfrac{\omega}{\sigma+2} \cdot 0}$$

$$\frac{2\omega(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2 - (\omega^2-2)} = \frac{\omega}{\sigma+2}$$

$$\omega\left((\sigma+2)^2 + \omega^2 - 3\right) = 0$$

De la última ecuación se establecen las siguientes relaciones

$$\omega = 0 \; ; \quad (\sigma+2)^2 + \omega^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$$

Estas relaciones denotan el lugar de las raíces en el que al observar la relación $\omega = 0$ se determina la región correspondiente al intervalo $(-\infty \text{ a } -2)$ en el eje real.

Esta región corresponde cuando $k \geq 0$, el resto es para cuando k es negativo.

La segunda relación cuando $(\sigma+2)^2+\omega^2=(\sqrt{3})^2$ corresponde a la ecuación de un círculo en el que su centro es en $\sigma=-2$ y $\omega=0$ con un radio de $\sqrt{3}$.

Esta región circular corresponde para $k \geq 0$ y es la región de los polos complejos conjugados.

Este método permite observar facilmente las regiones de las raíces de los polos, sin embargo no se recomienda para sistemas con muchos polos y ceros que complican las ecuaciones y dificultan la identificacion de las regiones de las raíces.