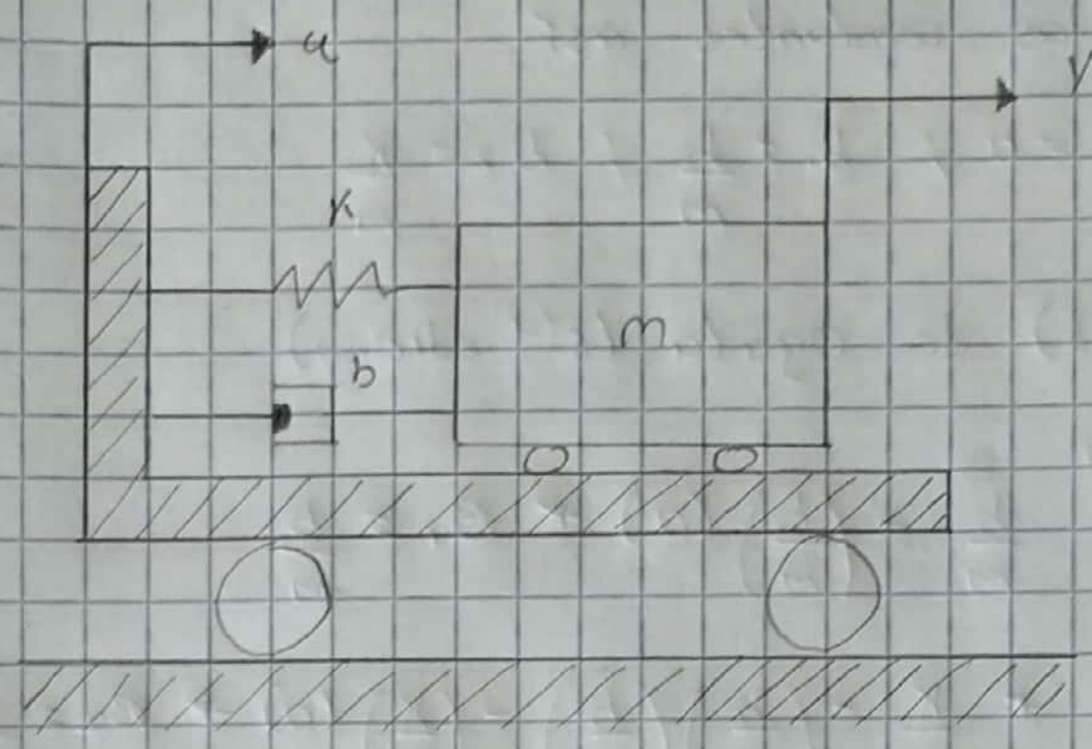
Nombre Oscar David Poblador Parra
Código 202110051116

Punto 1. Segundo Parcial

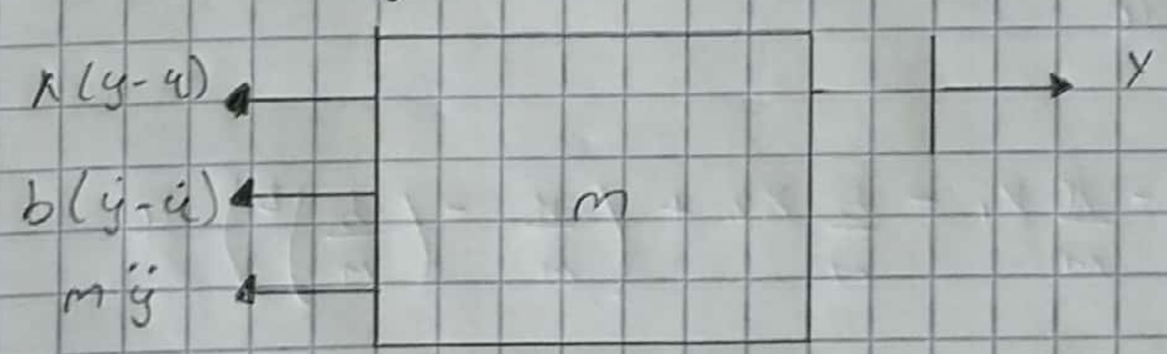
1) Ejemplo 3-3 5ta edición Ogata

✓ Sistema masa-resorte-amortiguador montado en un carro sin masa



Se asume que el cuerpo está quieto para $t<0$ igual que el sistema masa-resorte-amortiguador, $u(t)$ es el desplazamiento del carro y la entrada del sistema, en $t=0$ el carro se mueve a velocidad constante ó constante, el desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida. Se asume que la fuerza de fricción es proporcional a $\dot{y}-\dot{u}$ y la fuerza del resorte proporcional a $y-u$

✓ Por diagrama de cuerpo libre



✓ Por segunda ley de Newton

$$\sum F = m\cdot a \rightarrow -k(y-u)-b(\dot{y}-\dot{u})-m\ddot{y}=0$$

$$m\ddot{y}+b\dot{y}+ky=b\dot{u}+ku$$

✓ Aplicando transformada de Laplace

$$(ms^2+bs+ks)Y(s)=(bs+k)U(s)$$

✓ Para la ecuación de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{ms^2+bs+ks}{bs+k}$$

✓ Considerando las variables de estado para el sistema

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{K}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{K}{m}u$$

✓ si se considera la siguiente forma general

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

Conociendo el valor de las constantes así

$$a_1 = \frac{b}{m} \; ; \; a_2 = \frac{K}{m} \; ; \; b_0 = 0 \; ; \; b_1 = \frac{b}{m} \; ; \; b_2 = \frac{K}{m}$$

→ Considerando de eq (2-35) de Ogata (5ta edición)

✓ $\beta_0 = b_0 \rightarrow \beta_0 = 0$

✓ $\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 \rightarrow \frac{b}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)(0) \rightarrow \beta_1 = \frac{b}{m}$

✓ $\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \rightarrow \frac{K}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)\left(\frac{b}{m}\right) - \left(\frac{K}{m}\right)(0) \rightarrow \beta_2 = \frac{K}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$

→ Considerando eq (2-34) de Ogata (5ta edición)

✓ $x_1 = y - \beta_0 u \rightarrow y - (0)u \rightarrow x_1 = y$

✓ $x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u \rightarrow \dot{x}_1 - \left(\frac{b}{m}\right)u \rightarrow x_2 = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$

→ considerando eq (2-36) de Ogata (5ta edición)

✓ $\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$

✓ $\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left(\frac{K}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right)u$

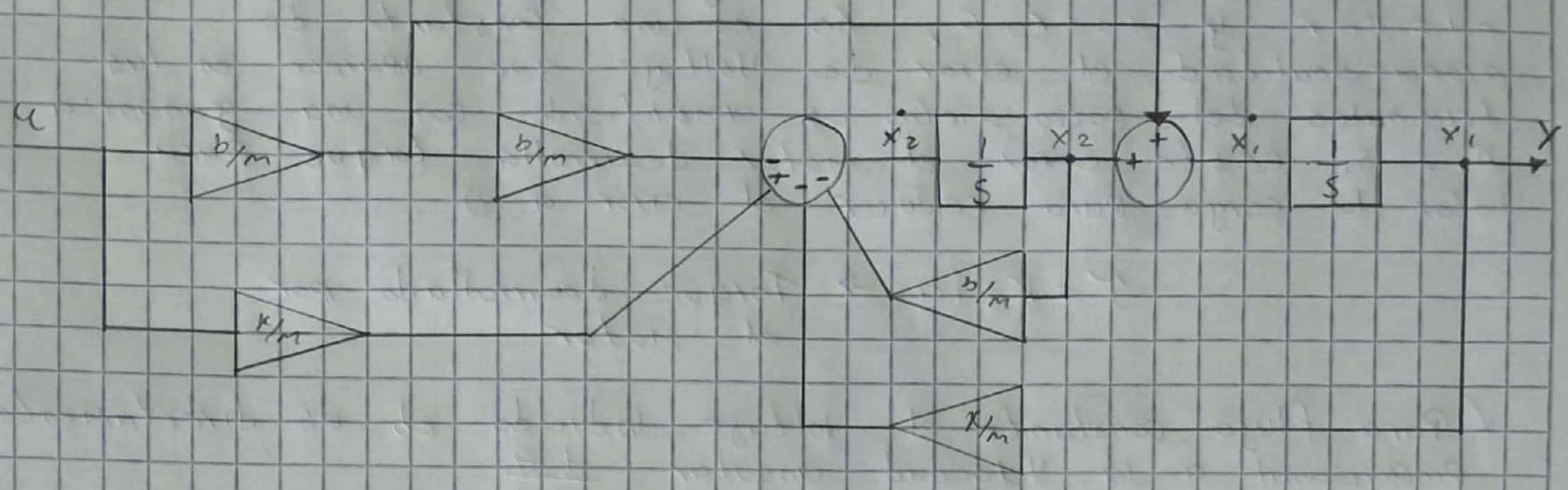
✓ Al considerar la matriz de variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b/m \\ K/m - (b/m)^2 \end{bmatrix} u$$

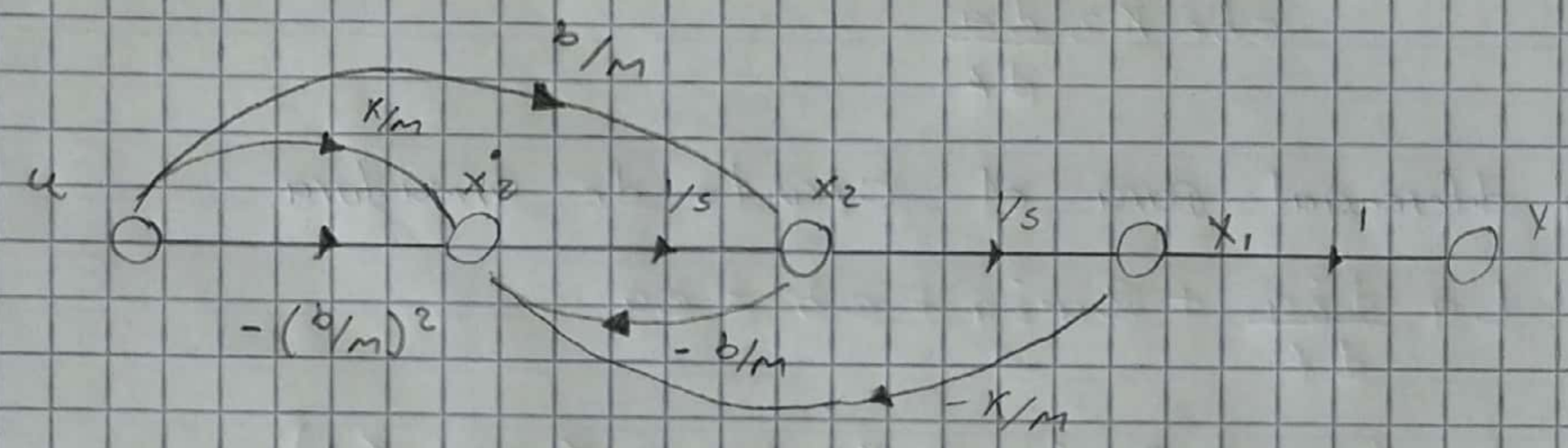
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Powered by CamScanner

✓ Al realizar el diagrama de bloques



✓ Al realizar el diagrama de flujo de señal



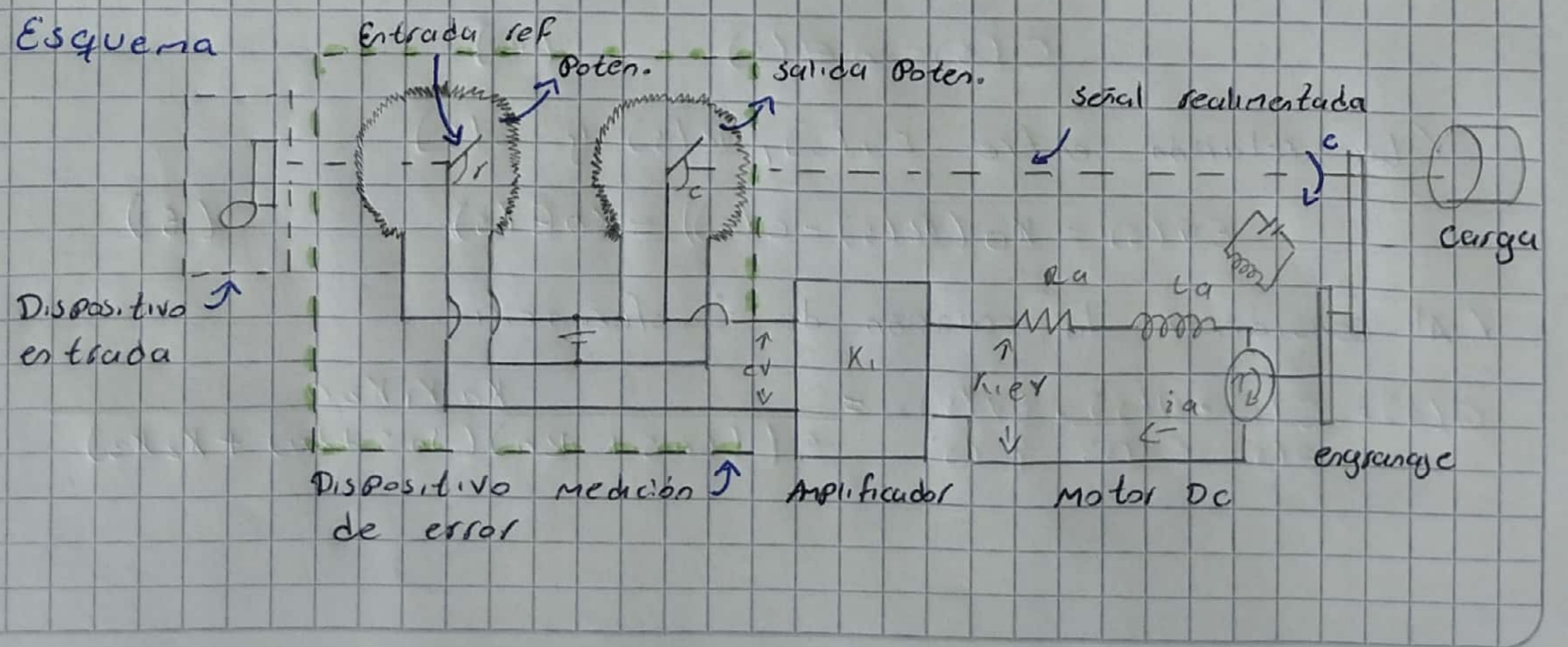
2) Ejercicio A 3-a -5ta edición Ogata

El motor mostrado es un servomotor, diseñado específicamente para usarse en un sistema de control, la operación del sistema es la siguiente: Un par de potenciometros actuan como dispositivo de medición de errores. Convierten las posiciones de entrada y salida en señales electricas proporcionales, la señal de entrada determina la posición angular r del brazo del potenciometro de entrada.

La posición angular r es la entrada de referencia al sistema y el potencial electrico del brazo es proporcional a la posición angular del brazo, la posición del eje de salida determina la posición angular c del brazo del potenciometro de salida, la diferencia entre la posición angular de entrada r y la posición angular de salida c es la señal de error e

$$e = r - c$$

Esquema



La diferencia de potencial $e_v - e_c = e_v$ es el error de voltaje donde e_v es proporcional a r y e_c es proporcional a c; $e_v = K_0 r$ y $e_c = K_0 c$, K_0 es una constante de proporcionalidad, el error de voltaje que aparece en las terminales del potenciometro es amplificado con una ganancia K_1. Si existe error el motor desarrolla torque para botar la carga para reducir el error a 0

$$\tau = K_2 i_a \rightarrow \text{Torque desarrollado por el motor}$$

✓ Para flujo constante el voltaje inducido e_b es directamente proporcional a la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

✓ Ecuación diferencial para el circuito de armadura

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a + e_b = e_a$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v \quad (1)$$

✓ Ecuación para el equilibrio de torque

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = \tau = K_2 i_a \quad (2)$$

- J_0 es la inercia combinada del motor, carga y engranaje
- b_0 es el coeficiente de viscosidad del motor, carga y el engranaje

✓ Eliminando i_a de (1) y (2); despejando e igualando

$$\frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s} \quad (3)$$

✓ Asumiendo que el radio del tren de engranajes es tal que el eje de salida rota n veces por cada revolución

$$C(s) = n\Theta(s) \quad (4)$$

✓ La relación entre $E_v(s)$, $R(s)$ y $C(s)$

$$E_v(s) = K_0 (R(s) - C(s)) = K_0 E(s) \quad (5)$$

✓ Al considerar la ecuación de transferencia

$$G(s) = \frac{C(s)}{\Theta(s)} \cdot \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \cdot \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s((L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3)}$$

✓ Cuando La es pequeña se puede despreciar quedando

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) s}$$

✓ Al dividir arriba y abajo por n^2 se realizan las siguientes consideraciones

- $J = J_0 / n^2$ = Momento de inercia referido al eje de salida
- $B = (b_0 + (K_2 K_3 / R_a)) / n^2$ Coeficiente de viscosidad-fricción referido al eje
- $K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$

$$G(s) = \frac{K}{J s^2 + B s} = \frac{C(s)}{E(s)}$$

✓ Si $E(s) = (R(s) - C(s))$ entonces

$$\frac{C(s)}{R(s) - C(s)} = \frac{K}{J s^2 + B s}$$

$$C(s) = R\left(\frac{K}{J s^2 + B s}\right) - C(s)\left(\frac{K}{J s^2 + B s}\right)$$

$$C(s)\left(1 + \frac{K}{J s^2 + B s}\right) = R\left(\frac{K}{J s^2 + B s}\right)$$

$$C(s) = \frac{R\left(\frac{K}{J s^2 + B s}\right)}{\frac{K}{J s^2 + B s} + 1} \rightarrow H(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$H(s) = \frac{\frac{K}{J s^2 + B s}}{\frac{K}{J s^2 + B s} + 1} \rightarrow \text{Divide arriba y abajo por } \frac{K}{J s^2 + B s}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{K}{J s^2 + B s}}} \rightarrow H(s) = \frac{1}{1 + \frac{J s^2 + B s}{K}}$$

$$H(s) = \frac{K}{J s^2 + B s + K}$$ → Ecuación de transferencia del sistema

✓ Para considerar las variables de estado

$$H(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$C(s)\left(Js^2 + Bs + K\right) = K\left(R(s)\right)$$

✓ Al realizar transformada inversa de Laplace

$$J\ddot{c} + B\dot{c} + Kc = KR$$

✓ Despejando $\ddot{c}$

$$\ddot{c} + \frac{B}{J}\dot{c} + \frac{K}{J}c = \frac{K}{J}R$$

$$\ddot{c} = \frac{K}{J}R - \frac{B}{J}\dot{c} - \frac{K}{J}c \qquad (6)$$

✓ Al considerar las variables de estado así

$$x_1 = c \quad ; \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{c} \quad ; \quad \dot{x}_2 = \ddot{c}$$

✓ La matriz de variables de esta es

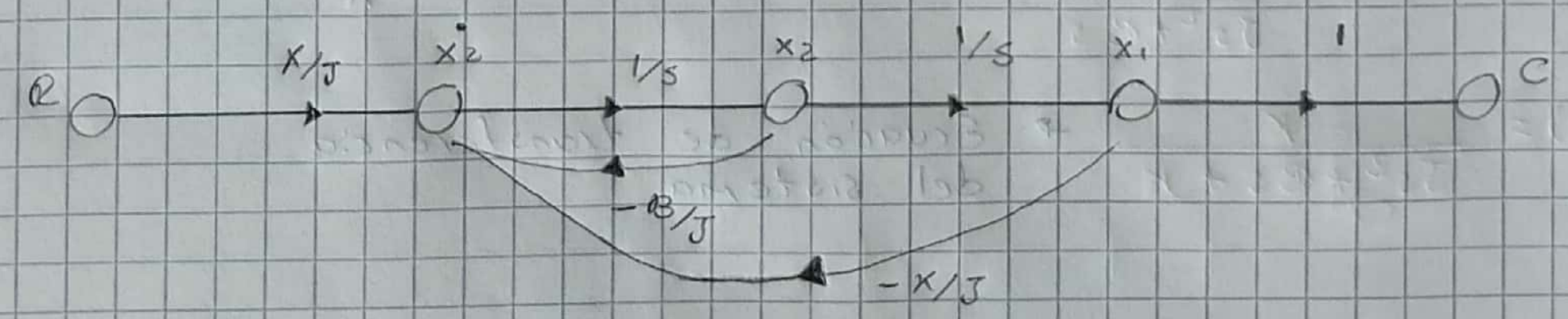
$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{J}x_2 - \frac{K}{J}x_1 + \frac{K}{J}R \qquad (7)$$

$$c = x_1$$

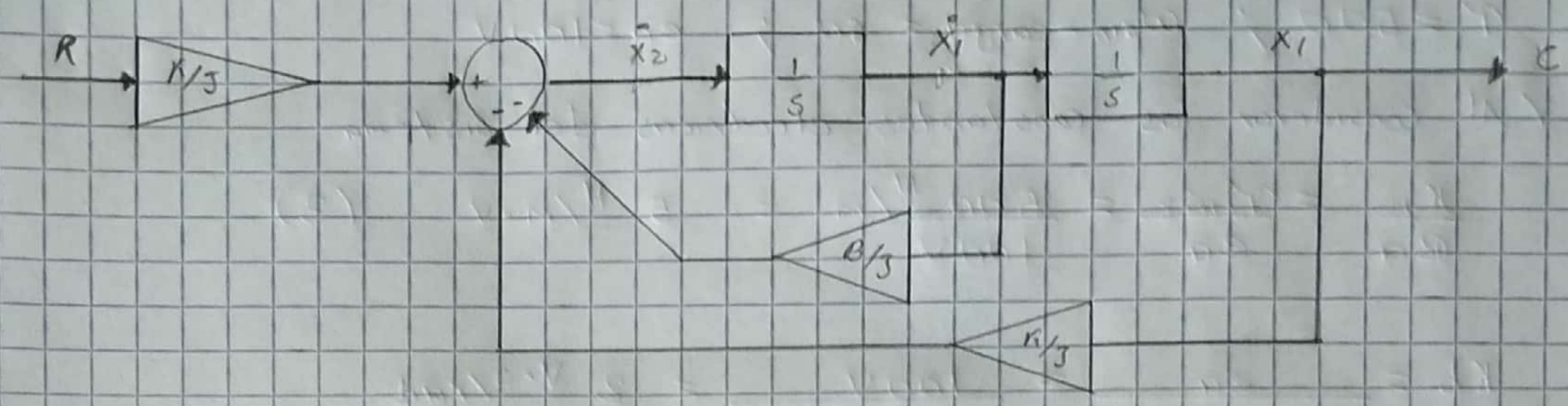
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/J & -B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/J \end{bmatrix} R$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

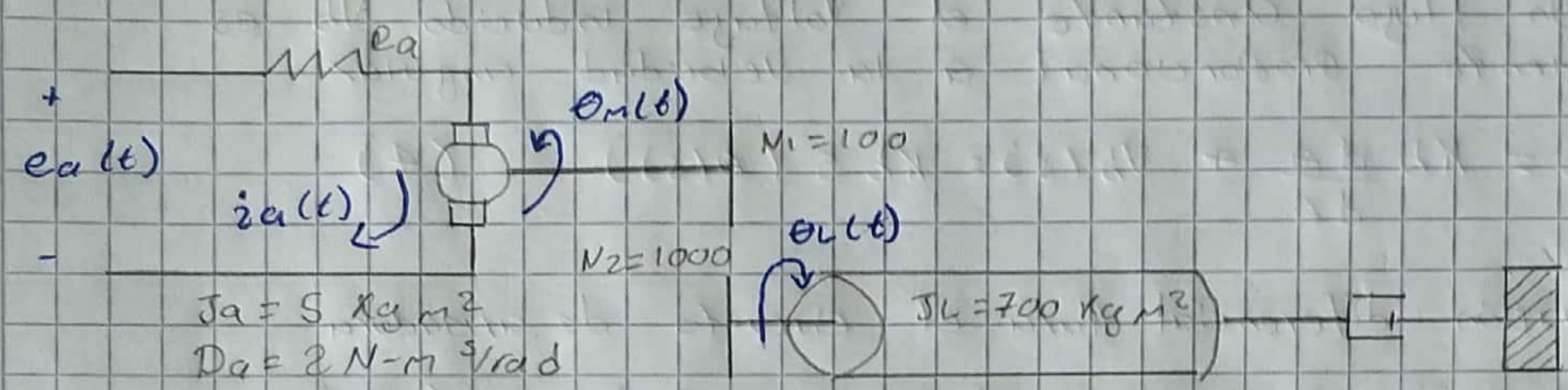
✓ El diagrama de flujo del sistema es

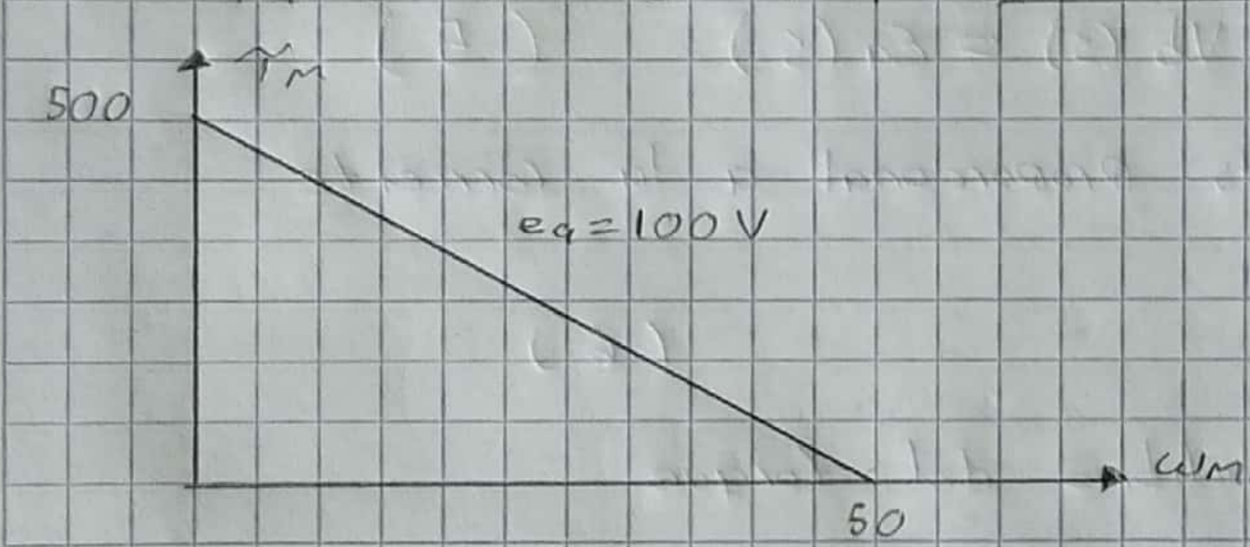


✓ Para el diagrama de bloques del sistema



3) Ejercicio 2-23 Norman Nise





Curva torque-Velocidad

✓ Considerando la inercia total en el motor

$$J_m = J_a + J_L \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

✓ si J_a → inercia del eje del motor y J_L es la inercia de la carga; entonces

$$J_m = (5\ kg\,m^2) + (700\ kg\,m^2)\left(\frac{100}{1000}\right)^2 = 12\ kg\,m^2 \qquad (1)$$

✓ considerando el factor de amortiguamiento del sistema

$$D_m = D_a + D_L \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

- D_a amortiguamiento eje motor
- D_L amortiguamiento carga

$$D_m = (2\ N\text{-}m\ s/rad) + (800\ N\text{-}m\ s/rad)\left(\frac{100}{1000}\right)^2 = 10\ N\text{-}m\ s/rad$$

✓ Considerando la curva torque - Velocidad se sabe que

$\tau = 500$; $\omega_{sin-carga} = 50$; $e_a = 100V$

✓ Al considerar las constantes electricas del sistema

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{\tau_{máx}}{e_a} = \frac{500\ N/m}{100V} = 5\ N/m \cdot V \qquad (3)$$

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{sin-carga}} = \frac{100V}{50\ rad/s} = 2\ V \cdot s/rad$$

✓ Para un flujo constante el Voltaje inducido V_b es directamente proporcional a la velocidad angular

$$V_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \rightarrow V_b(s) = K_b\, s\, (\theta(s)) \qquad (4)$$

✓ La ecuación diferencial para el circuito de armadura

$$s(L_a\, i_a(s)) + R_a\, i_a(s) + V_b(s) = E_a(s) \qquad (5)$$

✓ El torque en el motor es proporcional a la corriente de armadura

$$\tau_m(s) = K_t\, i_a(s) \qquad (6)$$

✓ La ecuación para el equilibrio del torque

$$(J_m s^2 + D_m s)\, \theta_m(s) = \tau_m(s) \qquad (7)$$

✓ Reemplazando (7) en (5) y considerando La muy pequeño siendo así despreciable

$$\left(\frac{R_a}{K_t}(J_m s + D_m) + K_b\right) s\, \theta_m(s) = E_a(s)$$

✓ Al simplificar y despejar $\theta_m(s)/E_a(s)$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t / R_a J_m}{s\left(s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right)} \qquad (8)$$

Ecuación transfe.

✓ Reemplazando los valores conocidos

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{5/12}{s\left(s + \frac{1}{12}(10 + (5)(2))\right)} = \frac{0{,}417}{s(s + 1{,}667)}$$

✓ Si se considera el radio de los engranajes $N_1/N_2 = 1/10$

$$\frac{\theta_l(s)}{E_a(s)} = \frac{0{,}417\,(N_1/N_2)}{s(s + 1{,}667)} = \frac{0{,}0417}{s(s + 1{,}667)} \qquad (9)$$

Ecuación transferencia con radio engranajes

✓ Al considerar las variables de estado

$$\frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0{,}0417}{s^2 + 1{,}667\,s}$$

$$\theta_L(s)\,(s^2 + 1{,}667\,s) = 0{,}0417\,E_a(s)$$

$$\theta_L(s)\,s^2 + 1{,}667\,\theta(s)(s) = 0{,}0417\,E_a(s)$$

✓ Realizando transformada inversa de Laplace

$$\ddot{\theta} + 1{,}667\,\dot{\theta} = 0{,}0417\,E_a \qquad (10)$$

✓ Al considerar las variables de estado así

$$x_1 = \theta \;;\; x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta} \;;\; \dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

✓ Reemplazando en (10)

$$\dot{x}_2 + 1{,}667\,x_2 = 0{,}0417\,E_a$$

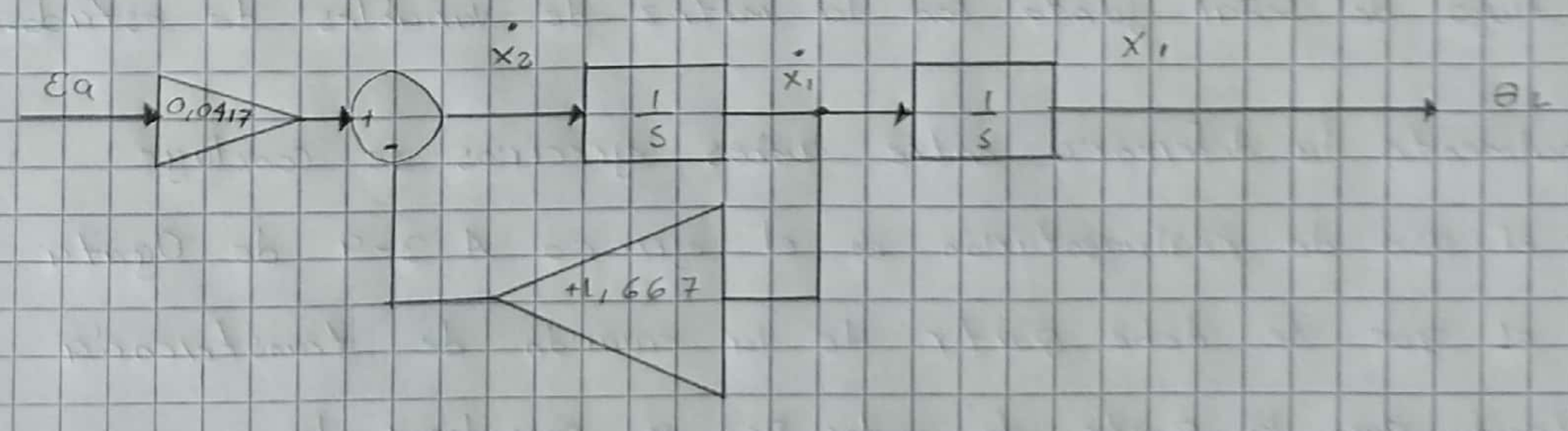
$$\dot{x}_2 = 0{,}0417\,E_a - 1{,}667\,x_2$$

✓ La matriz de variables de estado es así

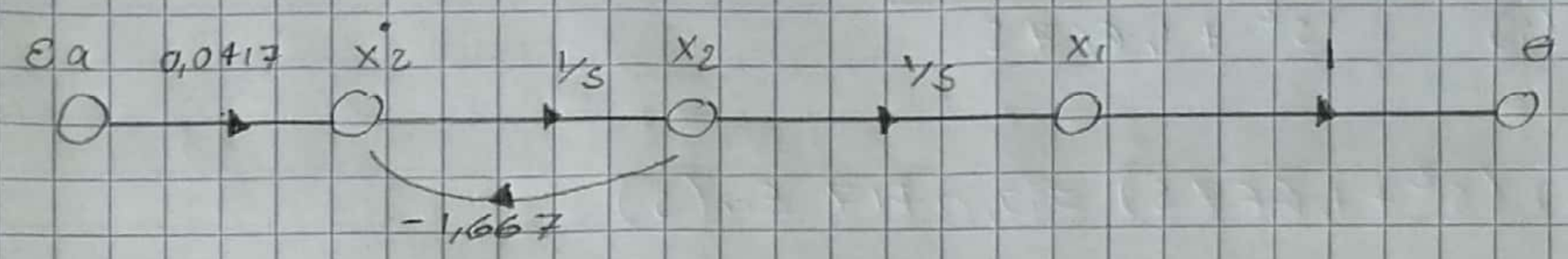
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0417 \end{bmatrix} E_a$$

$$\theta_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

✓ El diagrama de Bloque es



✓ El diagrama de flujo de señal



4) Comparación

En los ejercicios 2-23 de Norman Nise y A 3-a de Ogata se tiene un análisis similar respecto a las consideraciones mecanicas y electricas del sistema. Sin embargo, en el ejercicio 2-23 de Norman Nise se tiene un sistema únicamente compuesto por un motor DC que a diferencia del servomotor no posee el sistema de engranajes que realimentan el estado del potenciometro de control el cual modifica la realimentación del sistema y cambia la posición de la carga según sea necesario.

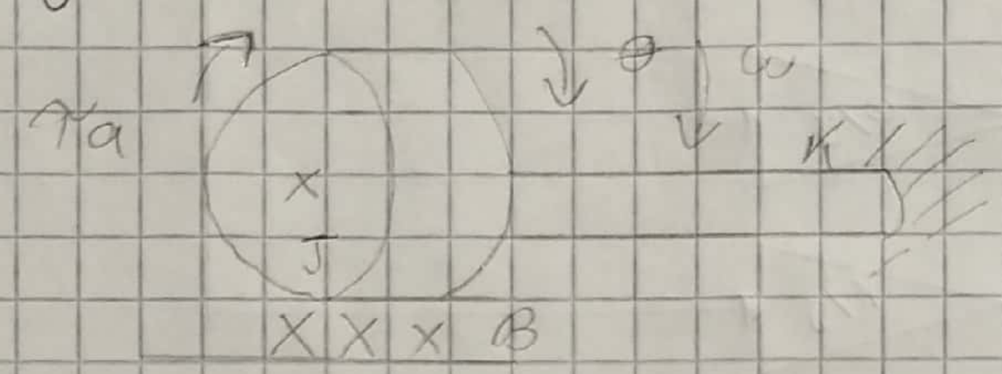
De esta forma, la ausencia de la parte de realimentación del sistema en el ejercicio de Norman Nise se refleja directamente con la ecuación de transferencia final de cada sistema que a su vez modifica los diagramas de bloque y flujo de señal junto con la matriz de variables de estado.

Finalmente, la diferencia entre ambos ejercicios se concluye en el uso de realimentación en el ejercicio A 3-a de Ogata en el que se debe partir de la ecuación de transferencia obtenida para la parte de motor DC y considerar la realimentación del sistema.

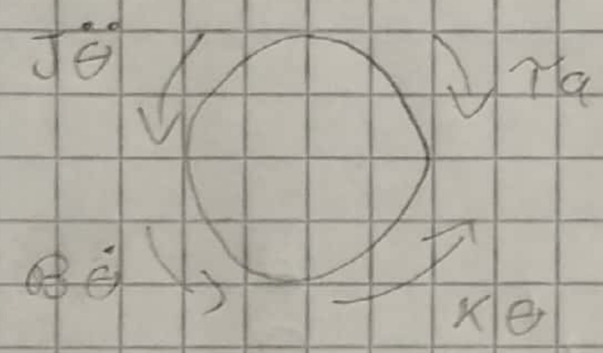
Nombre Oscar David Poblador Parra
Código 202110055116

Parte 2 - Parcial 2

2) Para el siguiente sistema



✓ Considerando el diagrama de cuerpo libre



$$Ta - J\ddot{\theta} - B\dot{\theta} - K\theta = 0 \quad // \quad \sum F = ma$$

✓ Despejando $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{Ta}{J} - \frac{B}{J}\dot{\theta} - \frac{K}{J}\theta \qquad (1)$$

a) Al considerar las variables de estado así

$$x_1 = \theta \;;\; x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta} \;;\; \dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

✓ Reemplazando en (1)

$$\ddot{x}_2 = \frac{Ta}{J} - \frac{B}{J}x_2 - \frac{K}{J}x_1 \qquad (2)$$

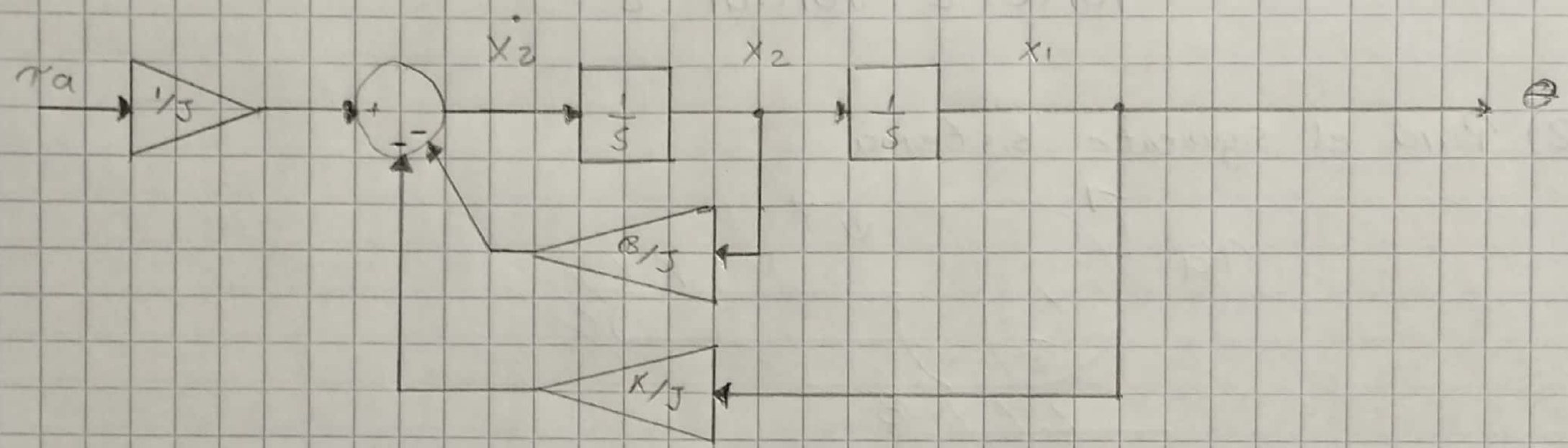
✓ Al realizar la matriz de variables de estado se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/J & -B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} Ta$$

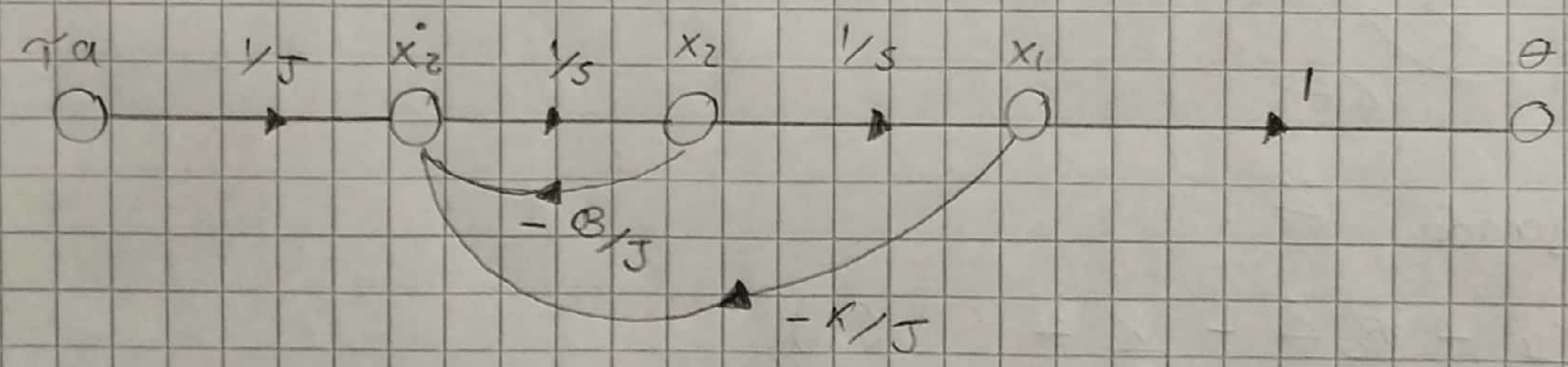
$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Powered by CamScanner

b) Para el diagrama de bloques se tiene lo siguiente



c) Para el diagrama de flujo de señal se tiene



d) Considerando la ecuación de transferencia se realiza transformada de laplace en (1)

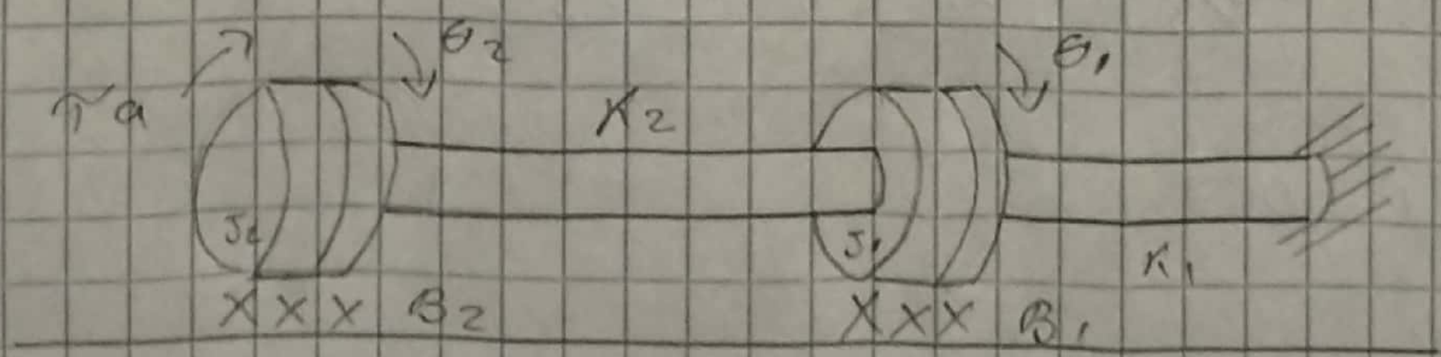
$$\ddot{\theta} = \frac{\tau a}{J} - \frac{B}{J}\dot{\theta} - \frac{K}{J}\theta \rightarrow \tau a - B\dot{\theta} - K\theta - J\ddot{\theta} = 0$$

$$\tau a(s) - \theta(s)(Js^2 + Bs + K) = 0$$

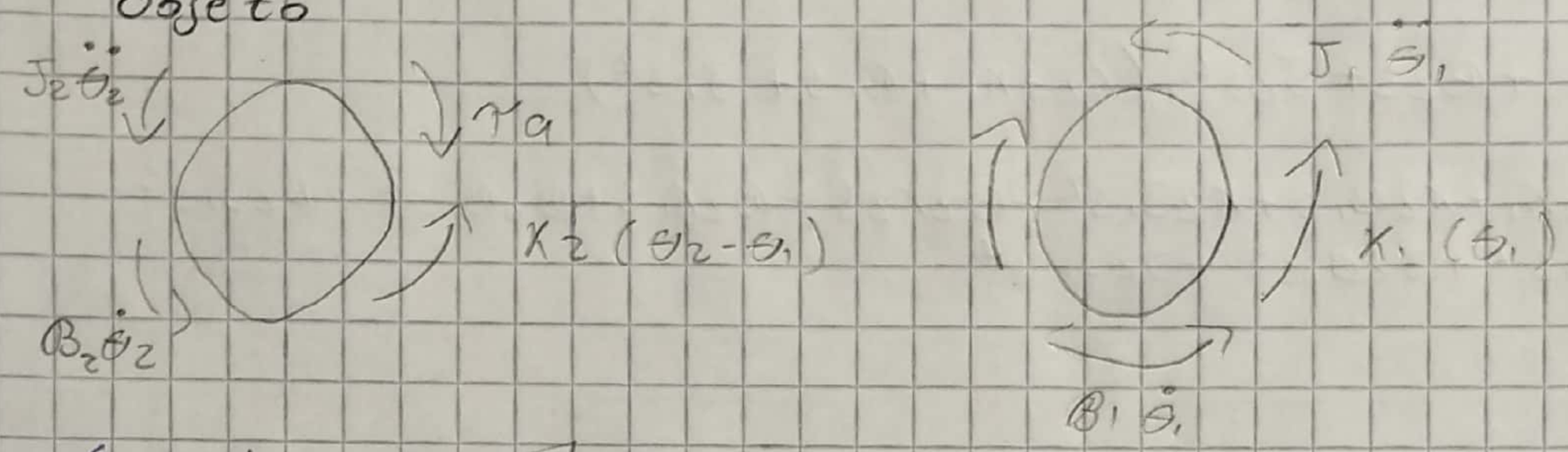
$$\tau a(s) = \theta(s)(Js^2 + Bs + K)$$

$$\frac{\theta(s)}{\tau a(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K} \rightarrow \text{Ecuación de transferencia}$$

3) Para el sistema rotacional asuma $\theta_2 > \theta_1$



✓ Considerando el diagrama de cuerpo libre sobre cada objeto



✓ realizando $\sum F = ma$

- Para la masa rotacional 1

$$K_2(\theta_2-\theta_1) - J_1\ddot{\theta}_1 - K_1\theta_1 - B\dot{\theta}_1 = 0$$

$$K_2\theta_2 - K_2\theta_1 - J_1\ddot{\theta}_1 - K_1\theta_1 - B\dot{\theta}_1 = 0$$

$$-J_1\ddot{\theta}_1 - B_1\dot{\theta}_1 - (K_2+K_1)\theta_1 + K_2\theta_2 = 0 \qquad (1)$$

- Para la masa rotacional 2

$$\tau a - K_2(\theta_2-\theta_1) - B_2\dot{\theta}_2 - J_2\ddot{\theta}_2 = 0$$

$$\tau a - K_2\theta_2 - B_2\dot{\theta}_2 - J_2\ddot{\theta}_2 + K_2\theta_1 = 0 \qquad (2)$$

a) Para la función de transferencia se tiene

✓ Al realizar la transformada de Laplace en (1)

$$J_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 + (K_1+K_2)\theta_1 - K_2\theta_2 = 0$$

$$\theta_1(s)\left(J_1s^2 + B_1s + (K_1+K_2)\right) - K_2\theta_2(s) = 0$$

$$\theta_1(s) = \frac{K_2\theta_2(s)}{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2} \qquad (3)$$

✓ Reemplazando (3) en (4)

$$\tau a - \theta_2(s)(K_2 + B_2s + J_2s^2) + K_2\theta_1(s) = 0 \qquad (4)$$

$$\tau a - \theta_2(s)(K_2 + B_2s + J_2s^2) + K_2\left(\frac{K_2\theta_2(s)}{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2}\right) = 0$$

$$\tau a - \theta_2(s)\left(\frac{-(K_2)^2}{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2} + K_2 + B_2s + J_2s^2\right) = 0$$

$$\tau a = \theta_2(s)\left(\frac{(K_2)^2 + (K_2 + B_2s + J_2s^2)(J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2)}{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2}\right)$$

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau a(s)} = \frac{J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2}{-(K_2)^2 + (K_2 + B_2s + J_2s^2)(J_1s^2 + B_1s + K_1 + K_2)}$$

✓ Considerando el denominador

$$\rightarrow -(K_2)^2 + (K_2 + B_2 s + J_2 s^2)(K_2 + K_1 + B_1 s + J_1 s^2)$$

$$-(K_2)^2 + (K_2)^2 + K_2 K_1 + K_2 B_1 s + K_2 J_1 s^2 + B_2 K_2 s + B_2 K_1 s + B_2 B_1 s^2 + B_2 J_1 s^3 + J_2 K_2 s^2 + J_2 K_2 s^2 + J_2 B_1 s^3 + J_2 J_1 s^4$$

✓ Factorizando

$$\rightarrow 0 + s^4(J_2 J_1) + s^3(J_2 B_1 + B_2 J_1) + s^2(J_2(K_2 + K_1) + B_2 B_1 + J_1 K_2) + s(B_1 K_2 + B_2 K_2 + B_2 K_1) + K_2 K_1$$

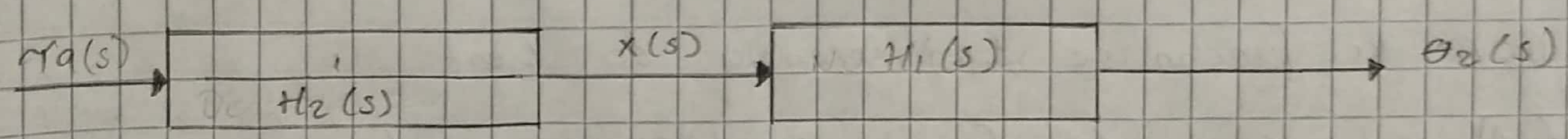
✓ Reorganizando

$$s^4(J_1 J_2) + s^3(J_1 B_2 + J_2 B_1) + s^2(J_2(K_2 + K_1) + J_1 K_2 + B_2 B_1) + s(B_1 K_2 + B_2(K_2 + K_1)) + K_2 K_1$$

✓ Para la ecuación de transferencia se tiene

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2}{s^4(J_1 J_2) + s^3(J_1 B_2 + J_2 B_1) + s^2(J_2(K_2 + K_1) + J_1 K_2 + B_2 B_1) + s(B_1 K_2 + B_2(K_1 + K_2)) + K_1 K_2}$$

b) Considerando el sistema así



✓ Al realizar la transformada inversa sobre $H_2(s)$

- $$\tau_a(s) = \frac{1}{s^4(J_1 J_2) + s^3(J_1 B_2 + J_2 B_1) + s^2(J_2(K_2 + K_1) + J_1 K_2 + B_2 B_1) + s(B_1 K_2 + B_2(K_1 + K_2)) + K_1 K_2}$$

$$\tau_a(s) = \ddddot{x}(J_1 J_2) + \dddot{x}(J_1 B_2 + J_2 B_1) + \ddot{x}(J_2(K_2 + K_1) + J_1 K_2 + B_2 B_1) + \dot{x}(B_1 K_2 + B_2(K_1 + K_2)) + x K_1 K_2$$

✓ Despejando $\ddddot{x}$

$$\ddddot{x} = \frac{\tau_a(t)}{J_1 J_2} - \frac{\dddot{x}(J_1 B_2 + J_2 B_1)}{J_1 J_2} - \frac{\ddot{x}(J_2(K_2 + K_1) + J_1 K_2 + B_2 B_1)}{J_1 J_2} - \frac{\dot{x}(B_1 K_2 + B_2(K_1 + K_2))}{J_1 J_2} - \frac{x(K_1 K_2)}{J_1 J_2}$$

✓ Para el numerador $H_1(s)$

- $$\theta_2(s) = J_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2$$

$$\theta_2(t) = J_1 \ddot{x} + B_1 \dot{x} + x(K_1 + K_2)$$

✓ Si se consideran las variables de estado así

$$x_1 = x \; ; \; x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} \; ; \; x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x} \; ; \; x_4 = \dot{x}_3 = \dddot{x} \; ; \; \dot{x}_4 = \ddddot{x}$$

✓ Al realizar la matriz de variables de estado se tiene

$$\rightarrow \dot{x}_4 = \frac{v_a(t)}{J_1 J_2} - x_4\frac{(J_1 B_2 + J_2 B_1)}{J_1 J_2} - x_3\frac{(J_2(K_1+K_2) + J_1 K_2 + B_1 B_2)}{J_1 J_2} - x_2\frac{(B_1 K_2 + B_2(K_1+K_2))}{J_1 J_2} - x_1\frac{(K_1 K_2)}{J_1 J_2}$$

$$\rightarrow \theta_2(t) = J_1 x_3 + B_1 x_2 + x_1(K_1+K_2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(K_1 K_2)/J_1 J_2 & -(B_1 K_2 + B_2(K_1+K_2))/J_1 J_2 & -(J_2(K_1+K_2) + J_1 K_2 + B_1 B_2)/J_1 J_2 & -(J_1 B_2 + J_2 B_1)/J_1 J_2 \end{bmatrix}$$

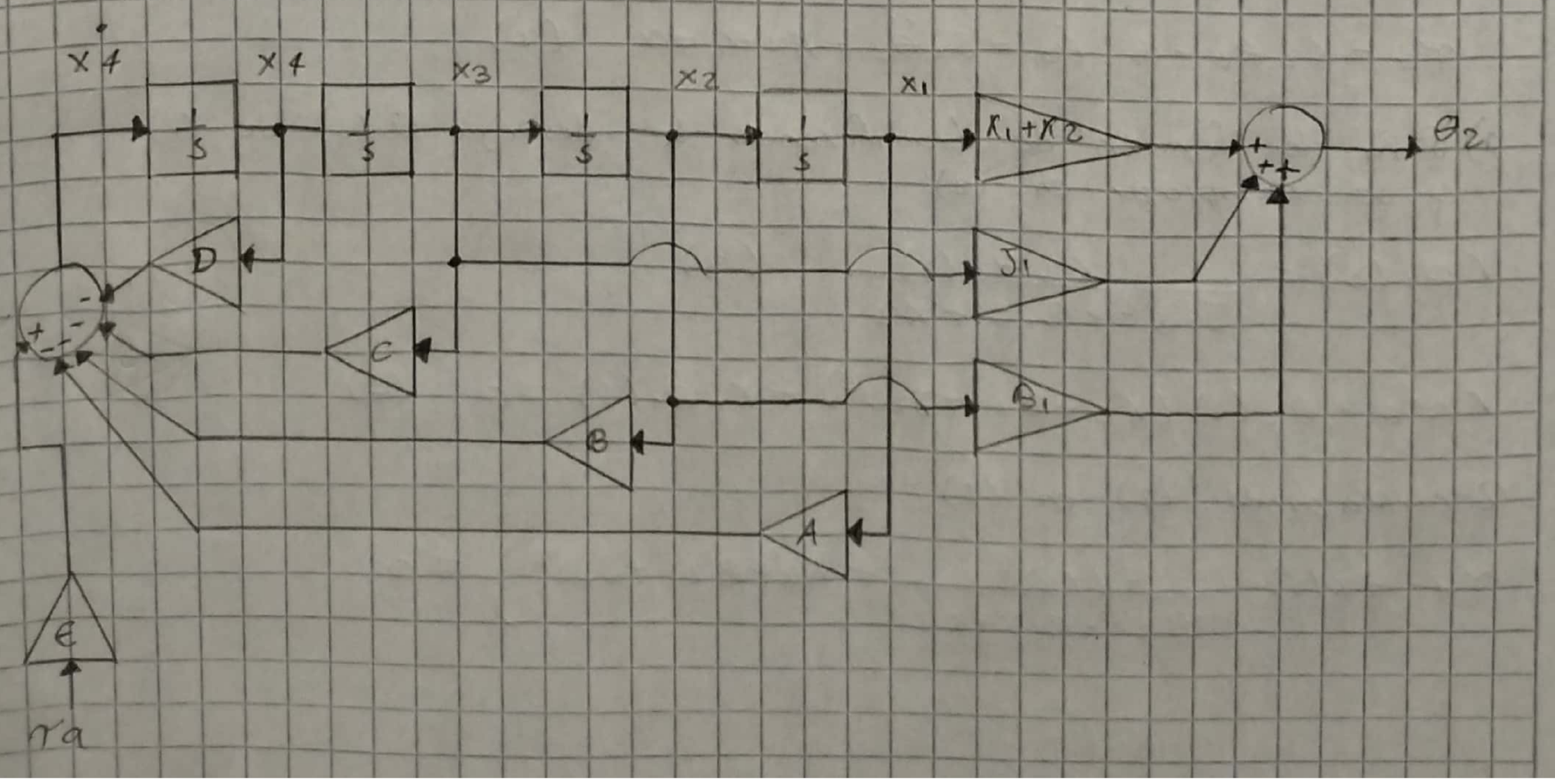
$$* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_1 J_2 \end{bmatrix} v_a(t)$$

$$\theta_2(t) = \begin{bmatrix} (K_1+K_2) & B_1 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

c) Para el diagrama de bloques considere las siguientes magnitudes

$$A = \frac{(K_1 K_2)}{J_1 J_2} \quad ; \quad B = \frac{B_1 K_2 + B_2(K_1+K_2)}{J_1 J_2}$$

$$C = \frac{J_2(K_1+K_2) + J_1 K_2 + B_1 B_2}{J_1 J_2} \quad ; \quad D = \frac{J_1 B_2 + J_2 B_1}{J_1 J_2} \quad ; \quad E = \frac{1}{J_1 J_2}$$

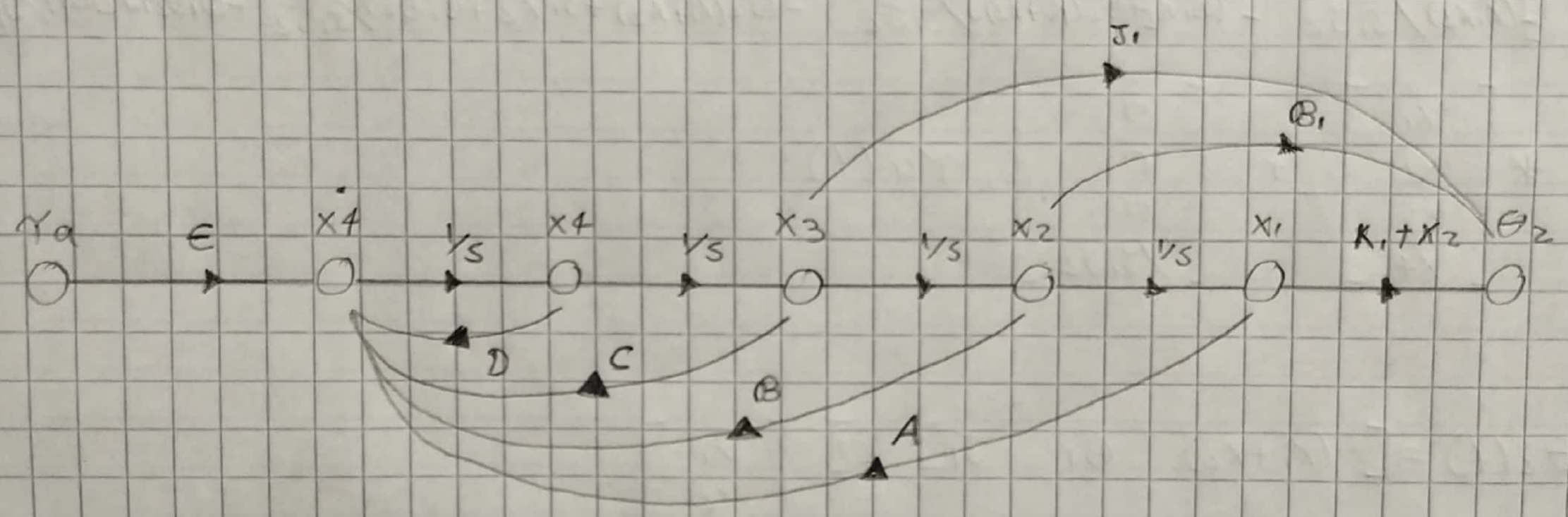


d) Para el diagrama de flujo de señal se deben considerar las siguientes magnitudes

$$A = \frac{-(K_1 K)}{J_1 J_2} \quad ; \quad B = \frac{-(B_1 K_2 + B_2 (K_1 + K_2))}{J_1 J_2}$$

$$C = \frac{-(J_2 (K_1 + K_2) + J_1 K_2 + B_1 B_2)}{J_1 J_2} \quad ; \quad D = \frac{-(J_1 B_2 + J_2 B_1)}{J_1 J_2}$$

$$E = \frac{1}{J_1 J_2}$$



4) Para el sistema anterior considere $K_1 = 0$

✓ Con $K_1 = 0$ se tienen las siguientes ecuaciones

- Para la masa rotacional 1

$$K_2(\theta_2 - \theta_1) - J_1 \ddot{\theta}_1 - B_1 \dot{\theta}_1 = 0$$

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + B_1 \dot{\theta}_1 + K_2 \theta_1 - K_2 \theta_2 = 0 \qquad (1)$$

- Para la masa rotacional 2

$$T_a - K_2(\theta_2 - \theta_1) - B_2 \dot{\theta}_2 - J_2 \ddot{\theta}_2 = 0$$

$$T_a - K_2 \theta_2 - B_2 \dot{\theta}_2 - J_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 \theta_1 = 0 \qquad (2)$$

a) Para la función de transferencia se despeja $\theta_1(s)$ de (1) y se reemplaza en (2)

✓ $$\theta_1(s) = \frac{K_2 \theta_2(s)}{J_1 s^2 + B_1 s + K_2} \qquad (3)$$

✓ $$T_a - \theta_2(s)(K_2 + B_2 s + J_2 s^2) + K_2 \theta_1(s) = 0 \qquad (4)$$

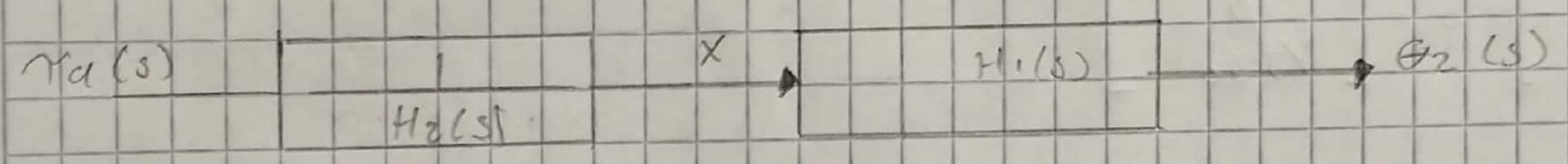
Reemplazando (3) en (4)

$$T_a - \theta_2(s)\left(\frac{-(K_2)^2}{J_1 s^2 + B_1 s + K_2} + K_2 + B_2 s + J_2 s^2\right) = 0$$

✓ Realizando $\theta_2(s)/\tau_a(s)$ factorizando y despejando al igual que el Punto 2 se obtiene que

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + K_2}{s^4(J_1 J_2) + s^3(J_1 B_2 + J_2 B_1) + s^2(J_2 K_2 + J_1 K_2 + B_2 B_1) + s(B_1 K_2 + B_2 K_2)}$$

b) Considerando el sistema así



✓ Al realizar transformada inversa sobre $H_2(s)$

- $$\tau_a = \frac{1}{s^4(J_1 J_2) + s^3(J_1 B_2 + J_2 B_1) + s^2(J_2 K_2 + J_1 K_2 + B_2 B_1) + s(B_1 K_2 + B_2 K_2)}$$

$$\tau_a = \ddddot{x}(J_1 J_2) + \dddot{x}(J_1 B_2 + J_2 B_1) + \ddot{x}(J_2 K_2 + J_1 K_2 + B_2 B_1) + \dot{x}(B_1 K_2 + B_2 K_2)$$

✓ Despejando $\ddddot{x}$

$$\ddddot{x} = \frac{\tau_a}{J_1 J_2} - \frac{(J_1 B_2 + J_2 B_1)}{J_1 J_2}\dddot{x} - \frac{(J_2 K_2 + J_1 K_2 + B_1 B_2)}{J_1 J_2}\ddot{x} - \frac{(B_1 K_2 + B_2 K_2)}{J_1 J_2}\dot{x} \quad (5)$$

✓ Para $H_1(s)$

- $\theta_2(s) = J_1 s^2 + B_1 s + K_2 \rightarrow \theta_2 = J_1 \ddot{x} + B_1 \dot{x} + K_2 X$

✓ Si se consideran las variables de estado así

$$x_1 = x \; ; \; x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} \; ; \; x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x} \; ; \; x_4 = \dot{x}_3 = \dddot{x} \; ; \; \dot{x}_4 = \ddddot{x} \quad (6)$$

✓ Reemplazando en (5) y (6)

$$\dot{x}_4 = \frac{\tau_a}{J_1 J_2} - \frac{(J_1 B_2 + J_2 B_1)}{J_1 J_2} x_4 - \frac{(J_2 K_2 + J_1 K_2 + B_1 B_2)}{J_1 J_2} x_3 - \frac{(B_1 K_2 + B_2 K_2)}{J_1 J_2} x_2 \quad (7)$$

$$\theta_2 = J_1 x_3 + B_1 x_2 + K_2 x_1 \quad (8)$$

✓ Al realizar la matriz de variables de estado con (7) y (8)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(B_1K_2+B_2K_2)/J_1J_2 & -(J_2K_2+J_1K_2+B_1B_2)/J_1J_2 & -(J_1B_2+J_2B_1)/J_1J_2 \end{bmatrix}$$

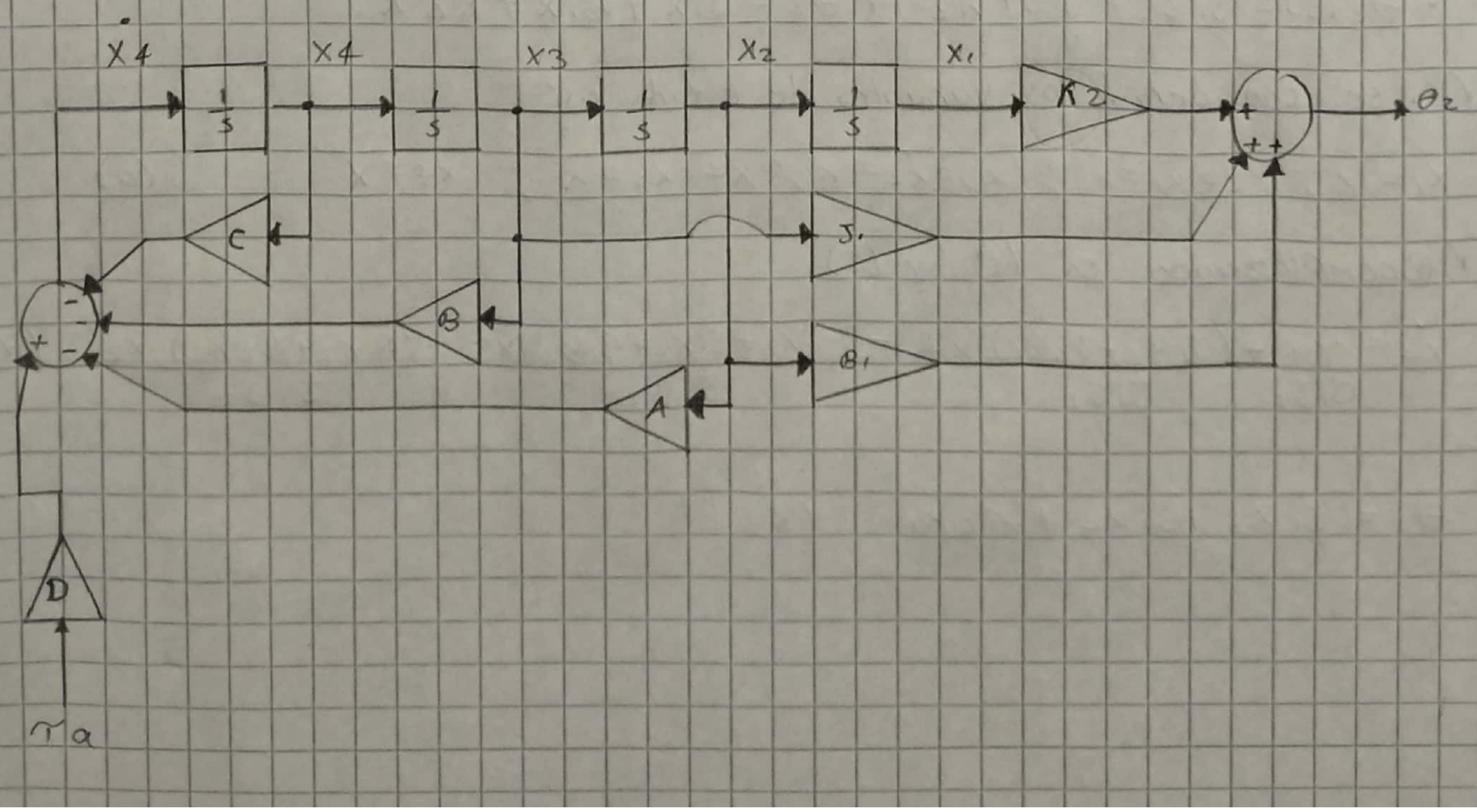
$$* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_1J_2 \end{bmatrix} \tau_a$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} K_2 & B_1 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

c) Para el diagrama de bloques considere las siguientes magnitudes

$$A = \frac{B_1K_2+B_2K_2}{J_1J_2} \quad ; \quad B = \frac{J_2K_2+J_1K_2+B_1B_2}{J_1J_2}$$

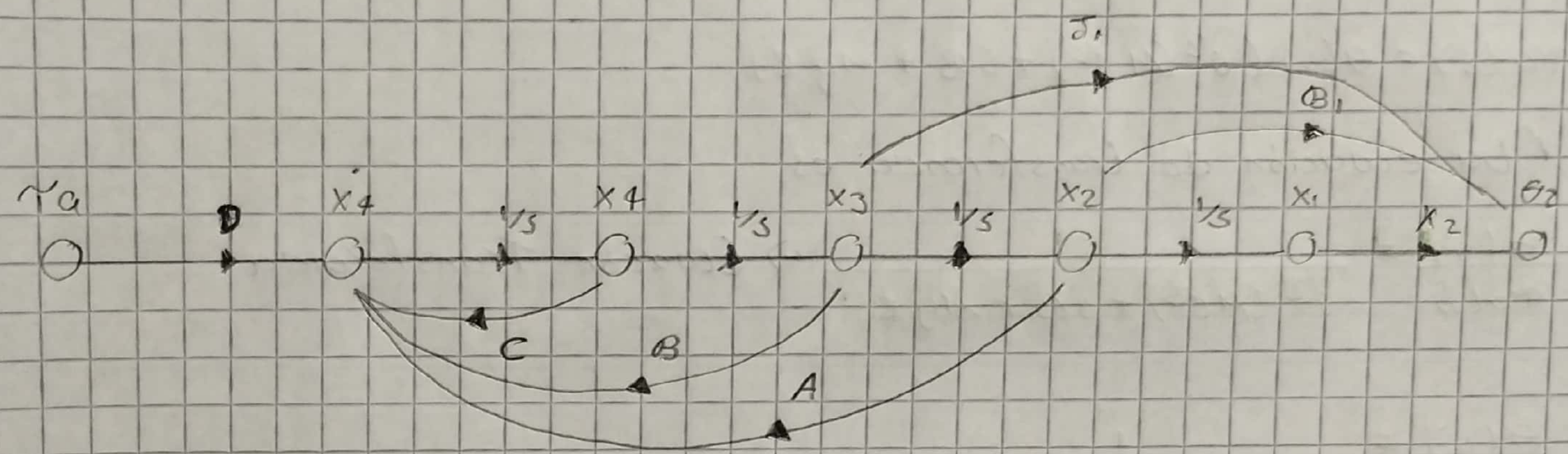
$$C = \frac{J_1B_2+J_2B_1}{J_1J_2} \quad ; \quad D = \frac{1}{J_1J_2}$$



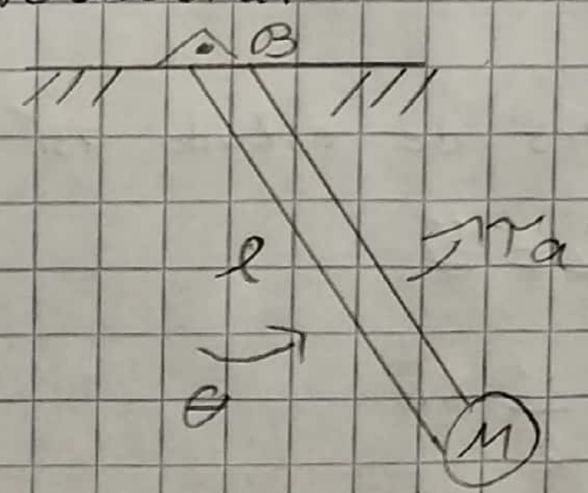
d) Para el diagrama de flujo de señal se deben considerar las siguientes magnitudes

$$A = \frac{-(B_1 K_2 + B_2 K_2)}{J_1 J_2} \quad ; \quad B = \frac{-(J_2 K_2 + J_1 K_2 + B_1 B_2)}{J_1 J_2}$$

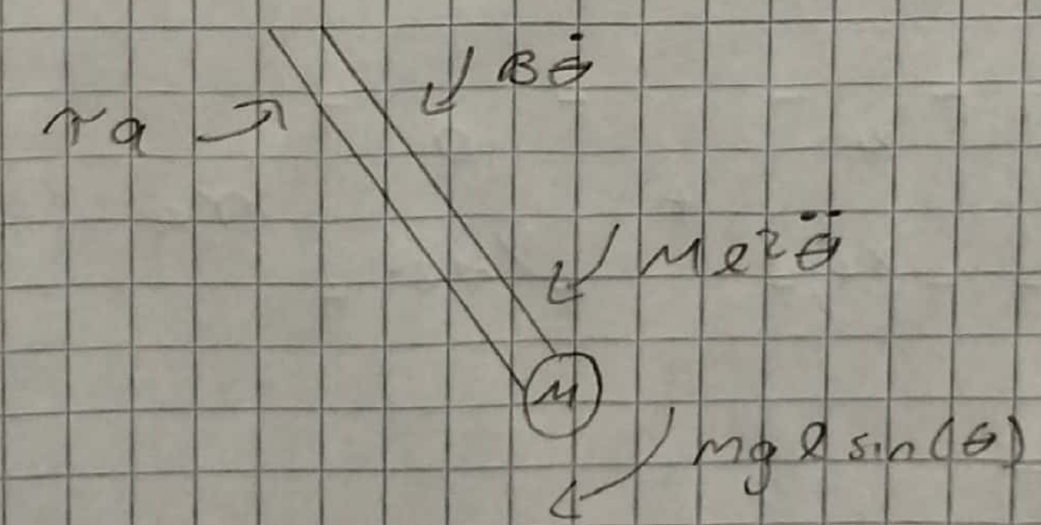
$$C = \frac{-(J_1 B_2 + J_2 B_1)}{J_1 J_2} \quad ; \quad D = \frac{1}{J_1 J_2}$$



5) Para el sistema rotacional



✓ considerando el diagrama de cuerpo libre



$$\tau_a = B\dot{\theta} + M\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin(\theta) \qquad (1)$$

✓ Al despejar $\ddot{\theta}$ de (1) se tiene

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_a}{M\ell^2} - \frac{B}{M\ell^2}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin(\theta) \qquad (2)$$

✓ Si el cambio θ es un ángulo pequeño $\sin(\theta) \approx \theta$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_a}{M\ell^2} - \frac{B}{M\ell^2}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\theta \qquad (3)$$

a) Partiendo de la ecuación 3 se tiene

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau a}{M\ell^2} - \frac{B}{M\ell^2}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\theta \rightarrow \ddot{\theta}(M\ell^2) = \tau a - B\dot{\theta} - Mg\ell\theta$$

$$\tau a = \ddot{\theta}(M\ell^2) + B\dot{\theta} + Mg\ell\theta$$

✓ Al realizar la transformada de Laplace

$$\tau a(s) = \theta(s)\left(s^2(M\ell^2) + sB + Mg\ell\right)$$

✓ La ecuación de transferencia es

$$\frac{\theta(s)}{\tau a(s)} = \frac{1}{s^2(M\ell^2) + sB + Mg\ell} \rightarrow \text{Ecuación Transferencia}$$

$$\frac{\theta(s)}{\tau a(s)} = \frac{1}{s^2 + s\left(\frac{B}{M\ell^2}\right) + \frac{g}{\ell}}$$

b) Al considerar las variables de estado así

$$x_1 = \theta \; ; \; x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta} \; ; \; \dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

✓ $\dot{x}_2 = \frac{\tau a}{M\ell^2} - \frac{B}{M\ell^2}x_2 - \frac{g}{\ell}x_1$

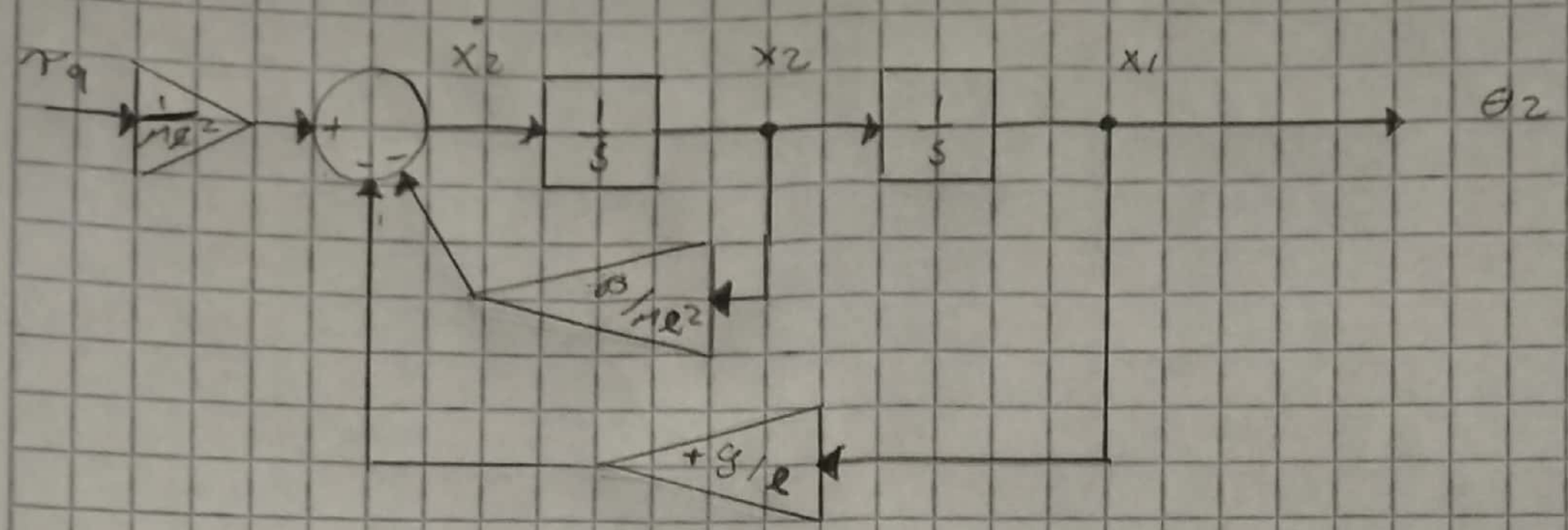
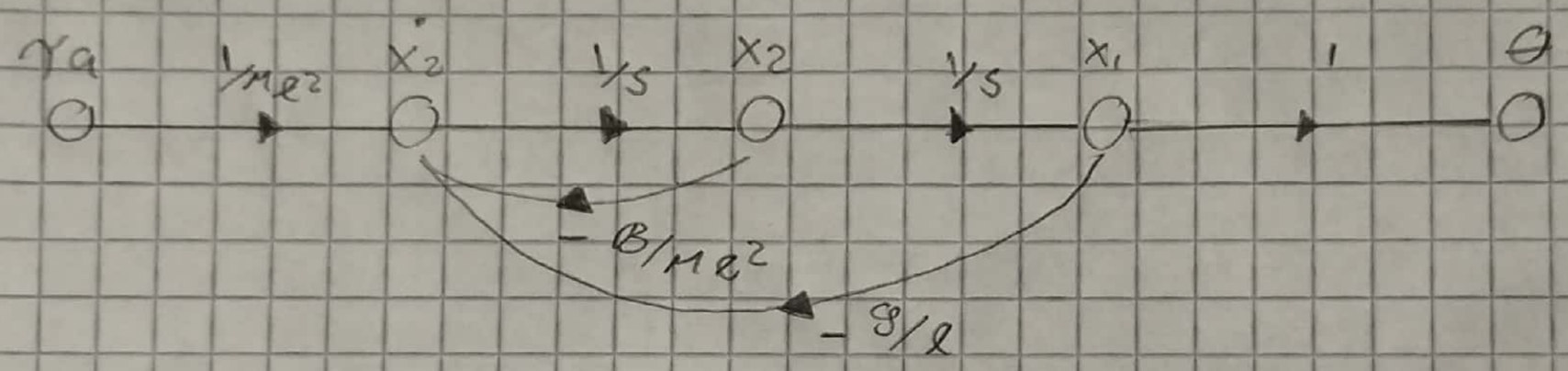
✓ $\theta = x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & -B/M\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M\ell^2 \end{bmatrix} \tau a$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Powered by CamScanner

c) Para el diagrama de bloques se tiene que



d) Para el diagrama de flujo de señal