“MÉTODO DE RUNGRE KUTTA” MÉTODOS NUMÉRICOS

SANCHEZ GONZÁLEZ OSCAR EDUARDO

LIC. INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

304987

INTRODUCCIÓN:

- En el análisis numérico, los métodos de Runge-Kutta forman una familia de métodos iterativos implícitos y explícitos para la resolución de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. En términos mas simples, los métodos numéricos corresponden a un conjunto de herramientas o métodos usados para obtener la solución de problemas matemáticos de forma aproximada, que se aplican a problemas que no presentan un solución exacta.
- En 1900 aparece un método numérico planteado por los matemáticos Carl Tolme Runge y Martin Wilhelm Kutta que consiste en resolver ecuaciones diferenciales de primer orden sin necesidad de realizar integrales.

MARCO TEÓRICO:

Los métodos de Runge-Kutta logran la exactitud del procedimiento de un serie de Taylor sin requerir del calculo de derivadas superiores. Existen muchas variaciones, pero todos se pueden denotar en una forma general de la ecuación:

$$y_i + 1 = y_i + f(x_i, y_i, h)h$$

Donde $f(x_i, y_i, h)$ se conoce como la función incremento la cual puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo. La función incremento se describe en la forma general como:

$$f = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

Donde:

a=constante y k:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Cada coeficiente k es un evaluación funcional, esta recurrencia hace que los métodos Runge-Kutta sean eficientes. Existen varios tipos de métodos, al emplear diferentes números de términos en la función incremento como la especificada por n.

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA SE SEGUNDO ORDEN

La versión del segundo orden es:

$$y_i + 1 = y_i + (a_1 k_1 + a_a k_2)$$

Donde:

$$k_1 = f(t_i + y_i)$$
$$k_2 = f(t_i + p_i h y_i + q_1 k_1 h)$$

Los valores a_1, a_2, p_1, q_1se evalúan al igualar la ecuación con la expansión de la serie de Taylor hasta el termino de segundo orden. Al hacerlo, desarrollamos 3 ecuaciones para evaluar las 4 contantes desconocidas:

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 q_1 = \frac{1}{2}$$

MÉTODO RUNGE-KUTTA DE TERCER ORDEN:

Para n=3 es posible efectuar un desarrollo similar al método de segundo orden, el resultado de tal desarrollo genera 6 ecuaciones con ocho incógnitas. Por lo tanto, se deben dar priori los valores de dos de las incógnitas con la finalidad de establecer los parámetros restantes.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

Donde:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f(t_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

Si la EDO esta en función solo de t, este método de tercer orden se reduce a la regla de Simpson 1/3.

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN:

Un miembro de la familia de los método Runge-Kutta es usado tan comúnmente que a menudo es referenciado como “RK4” o como “Método Runge-Kutta”.

Definamos un problema de valor inicial como:

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Promediando las pendientes:

$$p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

Entonces para hallar y_{i+i}:

$$y_{i+i} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

Esta forma del método de Runge-Kutta, es un método de cuarto orden lo cual significa que el error por paso es de orden $O(h^5)$, mientras que el error acumulado tiene el orden $O(h^4)$.

EJERCICIO MANUAL:

Con el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden con h=0.5 resuelva el siente problema con valor inicial con el intervalo de x=0 a 2:

$$\frac{dx}{dy} = yx^2 - 1.2y, \qquad y_0 = 1$$

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y) = yx^2 - 1.2y$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}h[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = hf(x, y) = yx^2 - 1.2y = (1)(0)^2 - 1.2(1) = -1.2$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) = (y_1 + 0.5k_1 h)(0.0625) - 1.2(y_1 + 0.5k_1 h = -0.79625)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$= (1 + 0.5 + \big(-0.79625(0.5)\big)(0 + 0.5(0)^2) - 1.2\big(1 + 0.5(-0.79625)(0.5)\big)$$

$$= -0.91106641$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

$$= (1 + (-0.901106641)(0.5)(0 + 0.5)^2 + 1.2(1 + \big(-0.9110641(05)\big) = -0.51724346$$

$$y_2 = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$= 1 + \frac{1}{6(-1.2 + 2(-0.79625) + 2(-0.91106641) - 0.517243)(0.5)} = \mathbf{0.57234364}$$

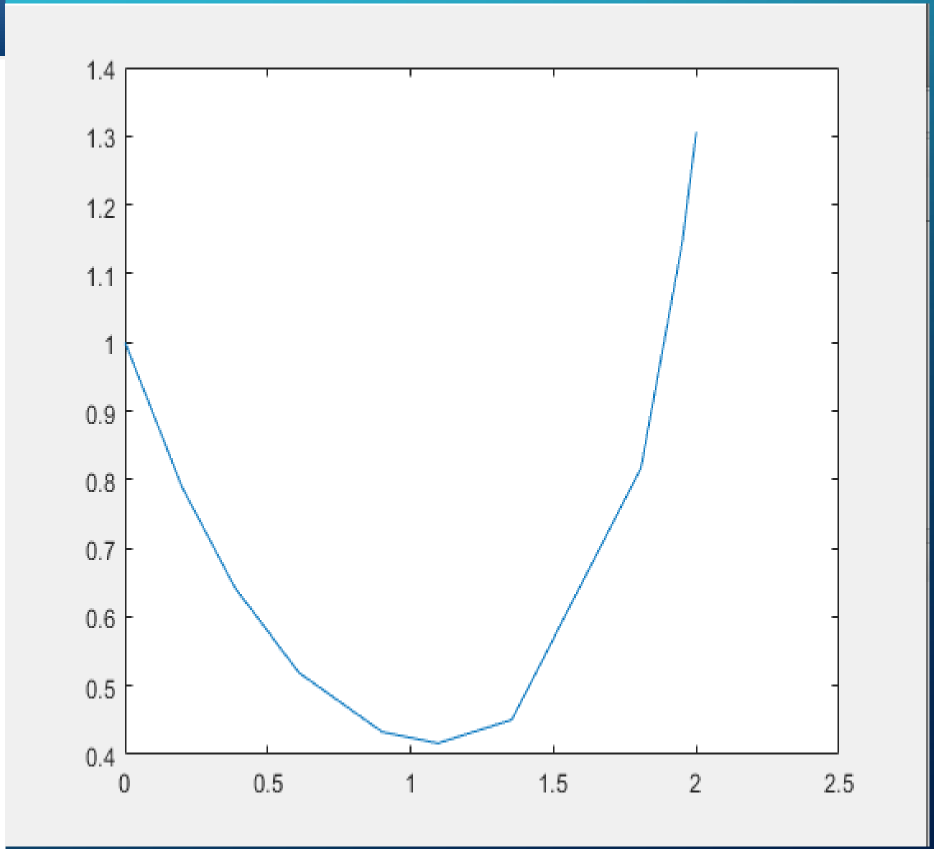
RESOLVIENDO MEDIANTE MATLAB POR PASO VARIABLE:

Command Window

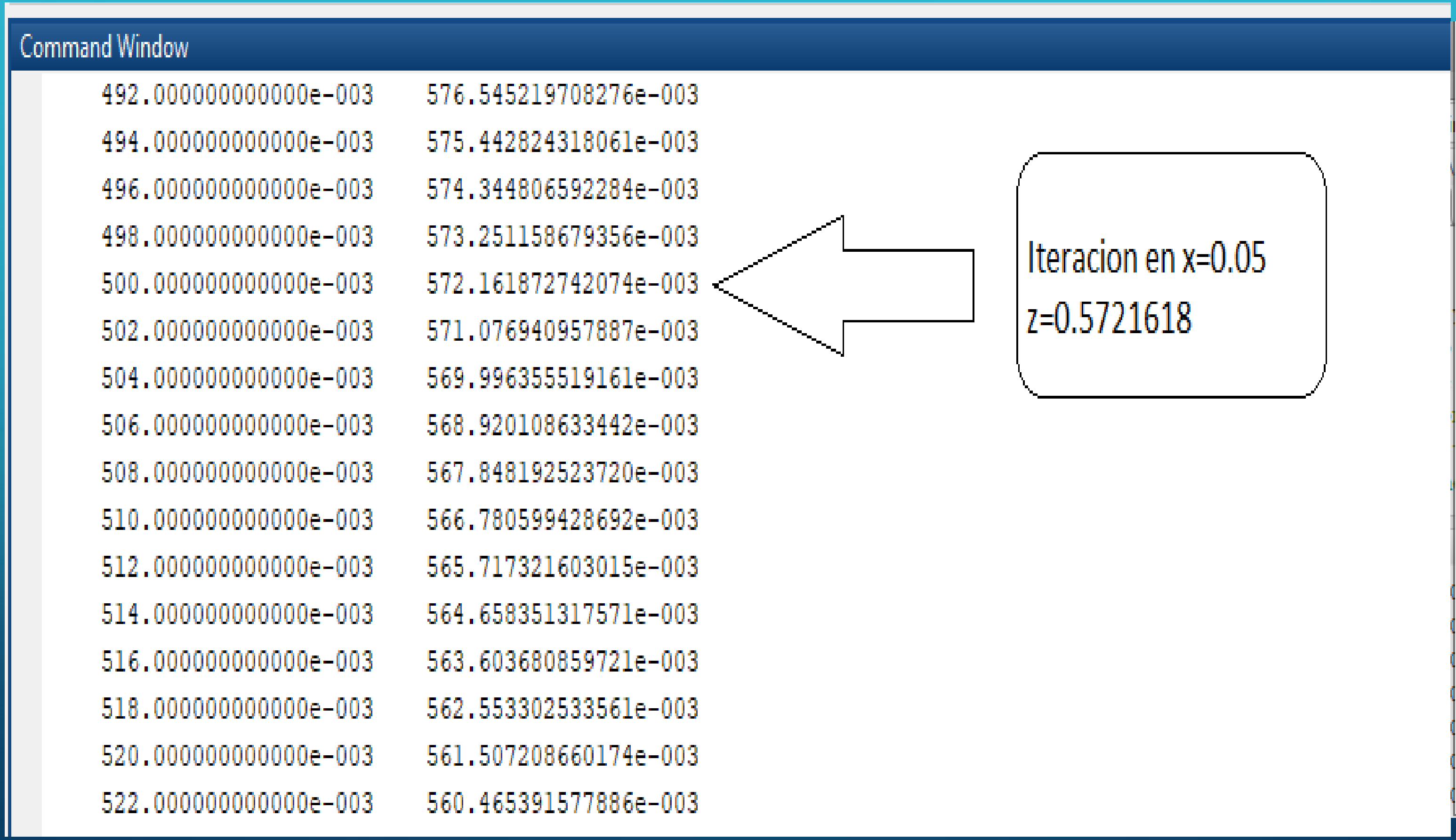
```
z =

   0.00000000000000e+000    1.00000000000000e+000
   200.000000000000e-003    788.727816467636e-003
   385.423836209295e-003    641.834839895925e-003
   609.544242811398e-003    518.942880429538e-003
   899.940537384244e-003    433.022754530146e-003
   1.09452836150790e+000    416.302696881521e-003
   1.35414870199912e+000    450.564917305132e-003
   1.80633607849320e+000    816.632538435837e-003
   1.95173276091407e+000    1.14634838342405e+000
   2.00000000000000e+000    1.30618139329901e+000
```

intervalo de solucion entre 0.385 y 0.609

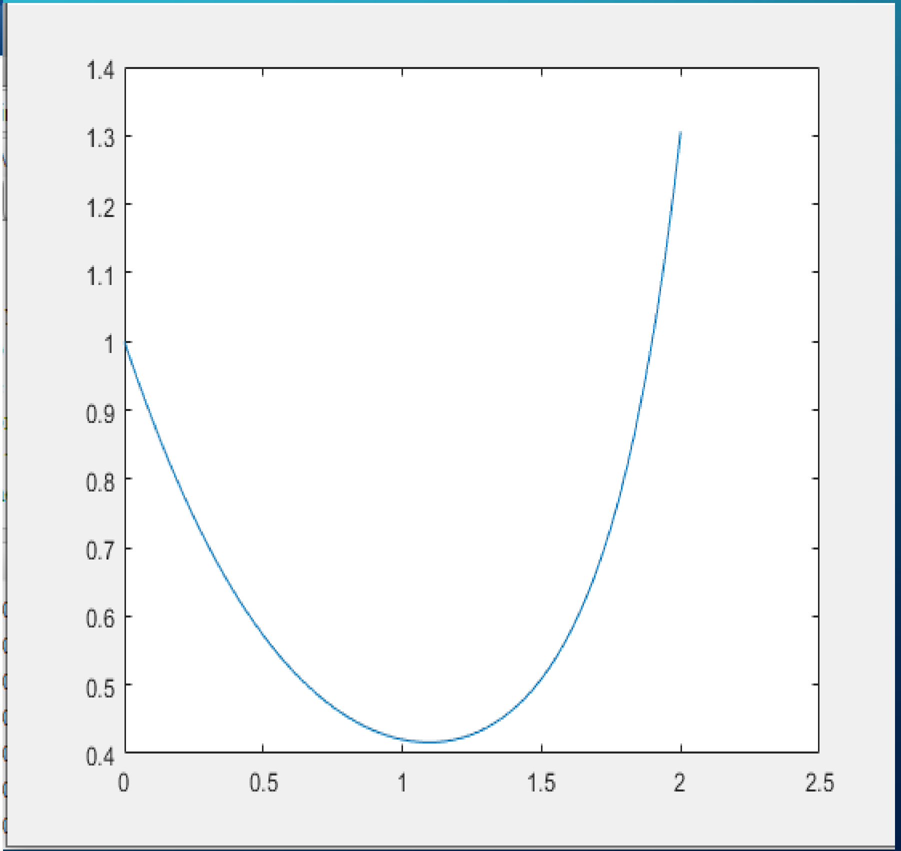


RESOLVIENDO MEDIANTE MATLAB POR PASO FIJO:


Command Window

492.000000000000e-003	576.545219708276e-003
494.000000000000e-003	575.442824318061e-003
496.000000000000e-003	574.344806592284e-003
498.000000000000e-003	573.251158679356e-003
500.000000000000e-003	572.161872742074e-003
502.000000000000e-003	571.076940957887e-003
504.000000000000e-003	569.996355519161e-003
506.000000000000e-003	568.920108633442e-003
508.000000000000e-003	567.848192523720e-003
510.000000000000e-003	566.780599428692e-003
512.000000000000e-003	565.717321603015e-003
514.000000000000e-003	564.658351317571e-003
516.000000000000e-003	563.603680859721e-003
518.000000000000e-003	562.553302533561e-003
520.000000000000e-003	561.507208660174e-003
522.000000000000e-003	560.465391577886e-003

Iteracion en x=0.05
z=0.5721618



CÓDIGO UTILIZADO

- clear all;
- clc;
- dydt=@(t,y) y*t.^2-1.2*y; %introducir funcion
- a=0; %inicio de simulacion
- b=2; %fin de simulacion
- yinit=1; %conducion incial
- n=5; %pasos totales;
- %elegir el metodo de Rungekutta para resolver
- metodo=3;
- %1 para un Rungekutta de cuarto orden
- %2 para un Rungekutta RKF45 con paso fijo
- %2 para un Rungekutta RKF45 con paso variable

```
if metodo == 1
    dt=((b-a)/n);
    x = 0:dt:10;
    y = zeros(1,length(x));
    y(1) = yinit;
    for i=1:(length(x)-1)
        k_1 = dydt(x(i),y(i));
        k_2 = dydt(x(i)+0.5*dt,y(i)+0.5*dt*k_1);
        k_3 = dydt((x(i)+0.5*dt),(y(i)+0.5*dt*k_2));
        k_4 = dydt((x(i)+dt),(y(i)+k_3*dt));
        y(i+1) = y(i) + (1/6)*(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)*dt;
    end

   plot(x,y)
end
```

```
if metodo == 2
    yinit=1; %conducion incial
    n=1000;
    Y=yinit;
    Yn = yinit;
    T=a;
    t = T(1);
    dt=((b-a)/n);
    for i=1:n
        K1 = dt * dydt(t, Yn);
        K2 = dt * dydt(t+dt/4,Yn+K1/4);
        K3 = dt * dydt(t+3*dt/8, Yn+(3*K1/32) + (9*K2/32));
        K4 = dt * dydt(t+12*dt/13,Yn+(1932*K1/2197)-
(7200*K2/2197)+(7296*K3/2197));
        K5 = dt * dydt(t+dt,Yn+(439*K1/216)-
8*K2+(3680*K3/513)-(845*K4/4104));
        K6 = dt * dydt(t+dt/2,Yn-(8*K1/27)+2*K2-
(3544*K3/2565)+(1859*K4/4104)-(11*K5/40));
        t = t + dt;
        Yn = Yn + ((25 * K1 / 216) + (1408 * K3 / 2565) + (2197
* K4 / 4104) - (K5 / 5));
        T = [T;t];
        Y = [Y;Yn];
    end
    plot(T,Y)
    z=[T,Y];
    z
end
```

```
if metodo == 3
    trange=[a b];
    tol = 1e-6;
    dtmax = diff(trange)/10;
    dt = dtmax;
    Y = yinit;
    T = a;
    Yn = yinit';
    t = T(1);
    stop = 0;
    while(~stop)
        K1 = dt * dydt(t, Yn);
        K2 = dt * dydt(t+dt/4,Yn+K1/4);
        K3 = dt * dydt(t+3*dt/8, Yn+(3*K1/32) + (9*K2/32));
        K4 = dt * dydt(t+12*dt/13,Yn+(1932*K1/2197)-
(7200*K2/2197)+(7296*K3/2197));
        K5 = dt * dydt(t+dt,Yn+(439*K1/216)-
8*K2+(3680*K3/513)-(845*K4/4104));
        K6 = dt * dydt(t+dt/2,Yn-(8*K1/27)+2*K2-
(3544*K3/2565)+(1859*K4/4104)-(11*K5/40));
        res =norm((K1/360)-(128*K3/4275)-
(2197*K4/75240)+(K5/50)+(2*K6/55));
        t = t + dt;
        Yn = Yn + ((25 * K1 / 216) + (1408 * K3 / 2565) + (2197
* K4 / 4104) - (K5 / 5));
        T = [T;t];
        Y = [Y;Yn];
        s=0.84 * (tol /res)^0.25;
        dt=s*dt;
        if (t >= trange(2))
            stop = 1;
        elseif(t+dt>trange(2))
            dt = trange(2)-t;
        end
    end
    plot(T,Y)
    z=[T,Y];
    z
end
```

CONCLUSIONES:

- Este método es muy interesante ya que existen muchas ecuaciones que su resolución algebraica es muy extensa y complicada, se debe tener mucho cuidado al momento de estar sustituyendo las formulas en forma manual, aunque en el scrip solo se debe de tener cuidado al precargar la ecuación y tomar en cuenta que T es el sustituto de x ya que te lo tomar como un periodo de tiempo de cambio.