Método Krylov

Aplicar el método de las sucesiones de Krylov para determinar el polinomio característico de una matriz: $(-1)^n a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1}$+…+$a_1A^1$+$a_0 I = 0$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{Vector propuesto } x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Se hace una multiplicación sucesiva de matrices de acuerdo con la fórmula:

$$a_2A^2x + a_1Ax + a_0x = -(-1)^3A^3x$$

$$A \cdot X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} \qquad A^2 \cdot X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\6\\3\end{bmatrix}$$

$$A^3 \cdot X = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\18\\6\end{bmatrix}$$

Sustituyendo:

$$a_2\begin{bmatrix}4\\6\\3\end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + a_0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = -(-1)^3\begin{bmatrix}18\\36\\18\end{bmatrix}$$

Teniendo el sistema de ecuaciones con vector solución:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13\\18\\6\end{bmatrix}$$

Resolvemos con Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 13\\ 0 & 0 & 6 & 18\\ 0 & 3 & 3 & 6\end{bmatrix}$$

Pivotamos primero las filas

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 13\\ 0 & 3 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 6 & 18\end{bmatrix}$$

Obteniendo

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz es:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \ a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

$$\boldsymbol{P(\lambda) = -\lambda^3 + \ 3\lambda^2 - 1\lambda + 2}$$

Sánchez González Oscar Eduardo

Métodos Numéricos