Introducción

Oscar Sanchez Buendia

Mayo 2022

En los últimos años ha venido creciendo un tema muy interesante en el mundo, en este trabajo se planea tratar de predecir el precio de las 5 criptomonedas mas importantes, Bitcoin, Litecoin, Bitcoin Cash, Ether y Ripple. A través de series de tiempo y los conocimientos adquiridos durante la carrera.
Primero que nada, analizaremos los conceptos de las cripto, que son: Blockchain, cómo funciona, características principales, beneficios y casos de uso. Después seguiremos con los conceptos de las herramientas que utilizaremos.

Blockchain

Es una tecnología que permite la transferencia de datos de una manera completamente segura gracias a una codificación muy sofisticada. Se suele comparar con un libro de contabilidad de una empresa donde están registradas todas la entradas y salidas de dinero. Claro que, en este caso, hablaríamos de un libro de acontecimientos digitales.

Función de una red de Blockchain

Hasta ahora siempre habíamos necesitado de un tercero en el que las dos partes confiaran para garantizar la autenticidad de la transacción ya sea un banco, un auditor, un notario o Paypal, por ejemplo, que tuviese un registro o sello de veracidad. La Blockchain soluciona este problema de doble gasto al combinar la tecnología P2P de intercambio entre pares con la criptografía y así crear una nueva forma de comunicación e intercambio digital. Las transacciones incluidas en los bloques son creadas por los integrantes del sistema. Todas las transacciones son registradas y transmitidas a todos los nodos (Un nodo es un ordenador conectado a la red que utiliza un software para almacenar y distribuir una copia actualizada en tiempo real de la cadena de bloques) de red. Así, todos los integrantes tienen la información contantemente actualizada con todas las transacciones.

Características principales de Blockchain:

- Es un sistema seguro dado que su tecnología se basa en la criptografía de datos.
- Las transacciones se concentran en bloques, en dichos bloques la información se almacena cronológicamente.
- Una vez aceptada, la información no se puede borrar ni modificar, y puede ser consultada en cualquier momento.
- Una Blockchain puede ser pública o privada, inclusive puede permitir ciertas consultas con un permiso especial.
- La confianza, dada por la descentralización y no disponer de un nodo central donde se aglutine toda la información, hace que las partes intervinientes confíen plenamente en esta tecnología.
- Transacciones en tiempo real: Su inmediatez minimiza el riesgo de contra-parte producido en otro tipo de transacciones, donde el compromiso de pago tarda varios días en ejecutarse (evitando riesgos de impago, concursos de acreedores y fraudes durante el proceso de pago).

Beneficios y casos de uso de Blockchain:
Blackchain tiene el potencial de hacer el intercambio de moneda e información más seguro en variedad de industrias, consiguiendo transferencias de datos más sencillas entre entidades. Podemos valorar su uso en varios sectores o industrias.
En el sector financiero: Hoy en día las transacciones interbancarias pueden tardar en muchos casos días en ser

aprobadas y finalmente ingresadas, especialmente fuera del horario de oficina. Con Blockchain son procesadas a cualquier hora, y el tiempo en ser completadas puede reducirse a minutos.
Firmas y contratos: Una de las principales problemáticas asociadas a la firma de contratos es la posible manipulación de los documentos para intentar alguna estafa o fraude legal. Sin embargo, estos temores a una potencial conspiración en nuestra contra se disipan de base al incorporar el blockchain a la ecuación, ya que la información que se guarde en la cadena de bloques no se puede alterar de ninguna forma.

Posterior a esto, vamos a definir conceptos fundamentales con lo que vamos a trabajar, como lo son las series de tiempo, las componentes de una serie de tiempo y qué es un modelo de serie de tiempo, El análisis de series de tiempo desempeña un papel importante en el análisis requerido para el pronóstico de eventos futuros. Existen varias formas o métodos de calcular cual va a ser la tendencia del comportamiento del proceso en estudio.

Series de Tiempo:
Una serie de tiempo es una secuencia de observaciones, medidos en determinados momentos del tiempo, ordenadas cronológicamente y, especiados entre sí de manera uniforme, así los datos usualmente son dependientes entre sí. El principal objetivo de una serie de tiempo es su análisis para hacer pronóstico. Formalmente se tiene la siguiente definición.

Def. Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones X_t, cada una registrada a un tiempo específico t.
El análisis clásico de las series de tiempo se basa en la suposición de que los valores que toma la variable de observación es la consecuencia de tres componentes, cuya actuación conjunta da como resultado los valores medidos, estos componentes son:

- **Tendecia:**Se puede definir como un cambio a lo largo plazo que se produce en la relación al nivel medio, o el cambio a largo plazo de la media. La tendencia se identifica con un movimiento suave de la serie a largo plazo.
- **Estacional:** Muchas series de tiempo presentan cierta periodicidad o, dicho de otro modo, variación de cierto periodo (semestral, mensual, etc.). Por ejemplo, las ventas al detalle en Puerto rico aumentan por los meses de noviembre y diciembre por las festividades navideñas. Estos efectos son fáciles de entender y se pueden medir explícitamente o incluso se pueden eliminar de la serie de datos, a este proceso se le llama desestacionalización de la serie.
- **Aleatoria:** Esta componente no responde a ningún patrón de comportamiento, sino que es el resultado de factores fortuitos o aleatorios que inciden de forma aislada en una seri de tiempo. De los tres componentes anteriores los dos primeros son componentes determinísticos, mientras que la última es aleatoria. Así, se puede denotar la serie de tiempo como:

$$X_t = T_t + E_t + \epsilon_t \tag{1}$$

Donde T_t es la tendencia, E_t es el comportamiento estacional y ϵ_t es la componente aleatoria.

Modelos estadísticos para series de tiempo.

El principal objetivo en el análisis de Series de tiempo es de desarrollar modelos matemáticos que provean una descripción apropiada para los datos muestrales, en principio utilizaremos la definición de series de tiempo.

Def. Un *Proceso estocastico* es una familia de variables aleatorias indexadas $x(w, t)$ ó $x_t(w)$ donde t pertenece a un conjunto de índices T y w pertenece a un espacio muestral ω. Si t=$t*$ fijo, $x(w, t*)$ es un variable aleatoria. Si w=w* fijo, x(w*,t) es una función de t, y se llama una realización del proceso. Una *serie de tiempo* es la realización de un proceso estocástico.

Ejemplos:

- **Ruido blanco:** Una manera sencilla de generar series de tiempo, puede ser considerando una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas, w_t con media 0 y varianza σ_w^2. Las series de tiempo generadas de esta manera son usadas como modelos para ruido en aplicaciones de ingeniería, donde ella son llamadas **ruido**

blanco, denotaremos este proceso como $w_t \sim wn(0, \sigma_w^2)$. La designación blanco se origina de la analogía con luz blanca e indica que todos los posibles períodos de oscilación están presente con igual intensidad.

- **Promedio móvil:** Un promedio móvil se construye sustituyendo cada valor de una serie por la media obtenidad con esa observación y algunos de los valores inmediatamente anteriores y posteriores.

$$v_t = \frac{1}{3}(w_{t-1} + w_t + w_{t+1}) \tag{2}$$

Medidas de dependencia: Autocorrelación y Correlación cruzada
Def. La función de media está definida como:

$$\mu_{xt} = E(x_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx, \tag{3}$$

en caso de que exista, E denota el operador usual de esperanza. Ahora escribiremos μ_{xt} como μ_t. Es relevante entender que μ_t consiste en que es una media teórica para la serie de tiempo en un punto particular, en donde la media se calcula sobre todos los posibles eventos que podrian haber producido X_t.
Def. La función de autocovarianza es definida como producto del segundo momento.

$$\gamma_x(s,t) = E[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)] \tag{4}$$

para todo t y s. cuando no haya confusión en la existencia sobre a que serie nos referimos, escribiremos $\gamma_x(s,t) = \gamma(s,t)$.
Def. La función de autocorrelación (ACF) se define como:

$$\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)\gamma(t,t)}} \tag{5}$$

La ACF mide la predictibilidad lineal de una serie de tiempo en tiempo t, digamaos x_t usando solo el valor x_s, si podemos predecir x_t exactamente de x_s a través de la relación lineal $x_t = \beta_0 + \beta_1 x_s$ entonces la correlación sera 1 cuando $\beta_1 > 0$ y cuando $\beta < 0$.
Series de Tiempo Estacionarias
Las series temporales se pueden clasificar en:

- *Estacionarias:* Una serie es estacionaria cuando es estable a lo largo del tiempo, es decir, cuando la media y varianza son constantes en el tiempo. Esto se refleja gráficamente en que los valores de la series tienden a oscilar alrededor de una media constante y la variabilidad con respecto a esa media también permanece constante en el tiempo.
- *No estacionarias:* Son series en las cuales la tendencia y/o movilidad cambian en el tiempo. Los cambios en la media determinan una tendencia a crecer o decrecer a largo plazo, por lo que la serie no oscila alrededor de un valor constante.

Def. Una serie de tiempo estrictamente estacionaria es una serie para la cual el comportamiento probabilístico de cada sucesión de valores

$$x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tk}$$

es idéntico a la seriie trasladada en el tiempo

$$x_{t1+h}, x_{t2+h}, ..., x_{tk+h}$$

Esto es,

$$P x_{t1} \leq c_1, ..., x_{tk} \leq c_k = P x_{t_1+h} \leq c_1, ..., x_{t_k+h} \leq c_k \tag{6}$$

para todo k=1,2,..., todo puntos de tiempo $t_1, t_2, ..., t_k$ y números reales $c_1, c_2, ..., c_k$ y todo salto $h = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Esta versión de estacionalidad es muy fuerte para la mayoría de aplicacione. Más aún, es dificil conseguir estricta estacionalidad en un conjunto sencillo de datos.

Def. Una serie de tiempo débilmente estacionaria X_t, es un proceso de varianza finita tal que

- La función de media μ_t, definidad en (2) es constante y no depende del tiempo t,y
- La función de covarianza, $\gamma(s,t)$, definidad en (3) depende solo de las diferencias de s y t, s-t

Por consiguiente, usaremos el término estacionaridad para referirnos a estacionaridad débil; si un proceso es estacionario en el sentido estricto usaremos el término estrictamente estacionario.

Es claro que la definición de estrictamente estacionario que una serie de tiempo estrictamente estacionaria con varianza finita, también es una series estacionaria.

Def. La función de aotucovarianza de una serie de tiempo estacionaria se escribirá como

$$\gamma(h) = E[(x_{t+h} - \mu)(x_t - \mu)] \tag{7}$$

Def. La función de autocorrelación (ACF) de una serie de tiempo estacionaria será escrita, usando (4) como:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(t+h,t)}{\sqrt{\gamma(t+h,t+h)\gamma(t,t)}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \tag{8}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarts tenemos que -1 $\leq \rho(h) \leq$ 1 para todo h.

Estimadores de Correlación

Def. Sea $x_1, x_2, ..., x_n$ una muestra de una serie de tiempo. La *media muestral* de $x_1, x_2, ..., x_n$ es

$$\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t \tag{9}$$

con $\gamma)(-h)\hat{} = \hat{}(h)$ para h=0,1,...,n-1.

Def. La función de autocorrelación muestral se define como:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \tag{10}$$

Modelos ARMA
Los modelos ARMA deben su nombre a sus siglas en inglés, Auto Regressive Moving Avarage, ó Modelos Autoregresivos de Promedio Móvil.
Los modelos Autoregresivos AR
Los modelos autoregresivos están basados en la idea de que el valor actual de la serie xt se peude explicar como función de p valores pasados $x_{t-1}, x_{t-2}, ..., x_{t-p}$ donde p determina el número de pasos necesarios para predecir el valor actual.

Def. Un modelo autoregresivo de orden p, abreviado AR(p), es de la forma.

$$x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \Phi_2 x_{t-2} + \cdots + \Phi_p x_{t-p} + w_t \tag{11}$$

donde x_t es estacionario, $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_p$ son constantes $(\Phi \neq 0)$. A menos que se declare lo contrario, se asume que w_t es un ruido blanco gaussiano de media cero y varianza σ_w^2. La media de x_t en (11) es cero. Si la media μ de x_t no es cero, reemplazamos x_t por $x_t - \mu$ en (11), es decir:

$$x_t - \mu = \Phi_1(x_{t-1} - \mu) + \Phi_2(x_{t-2} - \mu) + \cdots + \Phi_p(x_{t-p} - \mu) + \omega_t, \tag{12}$$

o escribimos

$$x_t = \alpha + \Phi_1 x_{t-1} + \Phi_2 x_{t-2} + \cdots + \Phi_p x_{t-p} + \omega_t \tag{13}$$

donde $\alpha = \mu(1 - \Phi_1 + \cdots + \Phi_p)$.

Def. El operador autoregresivo se define como

$$\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \cdots - \Phi_p B^p \tag{14}$$

Iniciaremos el estudio de los modelos AR considerando el modelo de primer orden AR(1), el cual es dado por $x_t = \Phi x_{t-1} + \omega_t$. Iterando el operador de cambio k veces, obtenemos

$$x_t =_{t-1} + \omega_t = \Phi(_{t-2} + \omega_{t-1}) + \omega_t = \phi^2 x_{t-2} + \Phi\omega_{t-1} + \omega_t ... = \Phi^k x_{t-k} + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \omega_{t-k} \tag{15}$$

Este método sugiere que por iteración continua del operador de cambio, siempre que Φ ¡1 y x_t sea estacionario, podemos representar un modelo AR(1) como un proceso lineal dado por

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \omega_{t-j} \tag{16}$$

El proceso AR(1) definido en (14) es estacionario on media

$$E(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} E(w_{t-j}) = 0 \tag{17}$$

y función de autocovarianza

$$\gamma(h) = cov(x_{t+h}, x_t) = E[(\sum_{j=o}^{\infty} \Omega^j \omega_{t+h-j})(\sum_{k=0}^{\infty} \Phi^k \omega_{t-k})] \tag{18}$$

$$= \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \Phi^{j+h} = \sigma_w^2 \Phi^h \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^{2j} = \frac{\sigma_w^2 \Phi^h}{1 - \Phi^2}, h \geq 0. \tag{19}$$

Recuerde que $\sigma(h) = \sigma(-h)$ de modo que sólo presentamos la función de autocovarianza para $h \geq 0$.
De la ACF de un modelo AR(1) es

$$\rho(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma(0)} = \Phi^h, h \geq 0, \tag{20}$$

Y $\rho(h)$ satisface la recursión

$$\rho(h) = \Phi\rho(h-1), con\, h = 1, 2, ... \tag{21}$$

Los modelos de promedio móvil MA
Como una alternativa a la representación autoregresiva en la cual x_t del lado izquierdo de la ecuación se asume como una combinación lineal, en los modelos de promedio móvil de orden q abreviados $MA(q)$ asumimos el ruido blanco ω_t del lado derecho de la ecuación que los define como una combinación lineal de las dotos observado.

Def. El modelo de promedio móvil de orden q o modelo $MA(q)$, se define como

$$x_t = \omega_t + \theta_1 \omega_{t-1} + \theta_2 \omega_{t-2} + \cdots + \theta_q \omega_{t-q} \tag{22}$$

donde hay q pasos en el promedio móvil y $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ ($\theta_q \neq 0$) son parámetros

El ruido ω_t se asume como un ruido blanco gaussiano.
Podemos también escribir el proceso $MA(q)$ en la forma equivalente

$$x_t = \theta(B)\omega_t$$

usando la siguiente definición.

Def. El operador de promedio móvil es

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q \tag{23}$$

En contraste con el proceso autoregresivo, el proceso de promedio móvil es estacionario para cada valor de los pa´rametros $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$.

Modelos Autoregresivos de Promedio Móvil: ARMA

Dada una serie temporal de datos X_t, el modelo ARMA es una herramiento para entender y, aún más para predecir futuros valores de la serie. El modelo está formado por dos partes, una parte autoregresiva (AR) y otra de media móvil (MA). El modelo se conoce con el nombre de modelo $ARMA(p, q)$, donde p es el orden de la parte autoregresiva y q es el orden de la parte de media móvil.

Def. Una serie de tiempo $x_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ es un *proceso autoregresivo de promedio móvil*, denotado $ARMA(p, q)$, si es estacionario y

$$x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \cdots + \Phi_p x_{t-p} + \omega_t + \theta_1 \omega_{t-1} + \cdots + \theta_q \omega_{t-q} \tag{24}$$

con $\Phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$ y $\sigma_\omega^2 > 0$. Los parámetros p y q son llamados ordenes autoregresivos y de promedio móvil respectivamente. Si x_t tiene media μ distinta de cero, hacemos $\alpha = \mu(1 - \Phi_1 - ... - \Phi_p)$ y escribimos el modelo como

$$x_t = \alpha + \Phi_1 x_{t-1} + \cdots + \Phi_p x_{t-p} + \omega_t + \theta_1 \omega_{t-1} + \cdots + \theta_q \omega_{t-q} \tag{25}$$

A menos que se declare lo contrario, $w_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ es una sucesión de ruido blanco gaussiano.

Como ayuda en la investigación de los modelos $ARMA$, será útil escribir estos usando el operador AR y el opreador MA. En particular el modelo $ARMA(p, q)$ se puede escribir en forma concisa como

$$\Phi(B)x_t = \theta(B)\omega_t \tag{26}$$

Def. Los polinomios AR y MA se definen como:

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p, \Phi_p \neq 0. \tag{27}$$

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 x + \cdots + \theta_p z^p, \theta_p \neq 0. \tag{28}$$

respectivamente, donde z es un número complejo.

Def. Un modelo $ARMA(p, q)$, $\sigma(B)x_t = \theta(B)\omega_t$, se dice que es casual si la serie de tiempo $x_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ se puede escribir como un proceso lineal de un lado.

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j} = \psi(B)\omega_t \tag{29}$$

donde $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j < \infty$; haciendo $\psi_0 = 1$

Def. Un modelo $ARMA(p,q)$, $\phi(B)x_t = \theta(B)\omega_t$ se dice invertible si la serie de tiempo $x_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ se puede escribir como

$$\pi(B)x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j x_{t-j} = \omega_t \tag{30}$$

donde $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \infty$; hacemos $\pi_0 = 1$.

Modelos ARIMA

Los modelos econompetricos contemplan de forma explicíta la información que aportan las variables causales del fenómeno de interés, de acuerdo con una determinada teoría económica. Una ventaja de este modelo consiste en que los resultados que se generan son más eficientes y posees ,ayor poder explicativo que los medelos univariados. Sin embargo, en estos modelos, cuando se desea realizar predicciones, el desconocimiento de los valores de las variables explicativas en el futuro, determina la necesidad de utilizar predicciones para éstas, lo cual incrementa el nivel de incertidumbre con que se realiza la predcción econométrica. POr otra parte, cuando el futuro puede suponer una alteración de tendencias de comportamiento respecto al pasado reciente, es recomendable utilizar estos modelos para predecir a mediano plazo (a a 5 años), por lo cual nos resultarán de gran ayuda. Ya hemos deicutido la importancia de los modelos *ARMA* para representar series estacionarias. Una generalización de estos modelos, que incorporan un amplio rango de series no estacionarias, es proporcionado por los procesos *ARIMA*, es decir, procesos que se reducen a procesos *ARMA* cuando se los diferencia infinitamnete muchas veces. Terminológicamente hablando: decimos que Y_t está integrado de orden 1, I(1), porque tiene que ser diferenciado una vez para obtener una serie temporal estacionaria. En general, una serie puede ser I(d), si debe ser diferenciada "d"veces para obtener una serie estacionaria.

Def. Si d es un entero no negativo, entonces X_t es un proceso $ARIMA$(p,d,q) si

$$Y_t = (1 - B)^d X_t, \tag{31}$$

es un proceso *ARMA* causal(p,q).

Esta denición significa que X_t satisface una ecuación en diferencia de la forma

$$\phi(B)X_t \equiv \phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)Z_t, \tag{32}$$

donde $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $\phi(z) y \theta(z)$ son polinomios de grados p y q, respectivamnete, y $\phi(z) \neq 0$ para $z \leq 1$. El polinomio $\phi(z)$ tiene un cero de orden d en $z = 1$. El proceso de X_t es estacionario si y solo si d=0, en cuyo caso se reduce a un proceso *ARMA*(p,q). Tenga en cuenta que si $d \leq 1$, podemos agragar una tendencia polinómica arbitraria de grado (1-d) a X_t sin violar la ecuación de diferencia (34). Los modelos *ARIMA* son, por lo tanto, útiles para representar datos con tendencia. Sin embargo, los procesos *ARIMA* también pueden ser apropiados para modelas series sin tendencia.

NOTA: Para trabajar con los modelos *ARMA* Y *ARIMA* nuestra serie de tiempo necesariamente debe ser estacionaria.

Def. Suavizado Logarítmico: Consta de tomarle el Logaritmo en base 10 o logarítmo neperiano o por la función de utocorrelación de muestra o ambos.

Las desviaciones de la estacionariedad pueden ser sugeridas de la serie misma o por la función de autocorrelación de muestra o ambos.

Prueba de Dickey-Fuller:

La prueba de Dickey-Fuller busca detemrinar la existencia o no de raíces unitarias en una serie de tiempo.
La hipótesis nula de esta prueba es que existe una raíz unitaria en la serie.
Esta prueba contrasta la hipótesis nula de existencia de una raíz unitaria contra la alternativa de que no existen raíces unitarias. Para verificar la existencia de una raiz unitarua en un proceso *Ar(p)*, se lleva a cabo la siguiente prueba:

$$H_0 : \rho = 1 \qquad versus \qquad H_a : \rho < 1 \tag{33}$$

aplicando la regresión

$$X_t = c_t + \rho X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Phi_{it-i} + \epsilon_t, \tag{34}$$

donde c_t es una función determinista del tiempo t y $\Delta X_t = X_j - X_{j-1}$ es la serie de diferencias de X_t usada para aproxima la estructura **ARMA** de los errores, y el valor de ρ se fija de modo que el error ϵ_t sea correlacionado serialmente. En la práctica, c_t puede ser cero o una constante o bien $c_t = \omega_0 + \omega_1 t$. **El ADF** se basa en las estimaciones de mínimos cuadrados y esta dado por

$$ADF - Test = \frac{\hat{\rho} - 1}{std(\rho)} \tag{35}$$

donde $\hat{\rho}$ denota el valor estimado por mínimos cuadrados de ρ y $std(\rho)$ su deviación estandar. Fundamento econométrico de la prueba: En un simple modelo autorregresivo de orden (1):

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t \tag{36}$$

Donde X_t es la variable de interés, t es el índice de tiempo, ρ es un coeficiente, y ϵ_t es el término de error. La raíz unitaria está presente si $\rho = 1$. En este caso, el modelo no sería estacionario. Mientras el valor de ρ sea más cercano a cero se considerará más estacionaria la serie.

Funciones de Autocorrelación (ACF) y Autocorrelación Parcial (PACF)

Funciones de Autocorrelación (ACF)
Iniciemos mostrando la ACF de un proceso MA(q) $x_t = \theta(B)\omega_t$, donde $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$. Dado que x_t es una combinación lineal de términos de ruido blanco, el proceso es estacionario con media

$$E(x_t) = \sum_{j=0}^{q} \theta_j E(\omega_{t-j} = 0),$$

donde podemos escribir $\theta_0 = 1$, y la función de autocovarianza es

$$\gamma(h) = cov(x_{t+h}, x_t) = E[(\sum_{j=0}^{q} \theta_j \omega_{t+h-j})(\sum_{k=0}^{q} \theta_k \omega_{t-k})]$$

$$\begin{cases} \sigma_\omega^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}, & si \quad 0 \leq h \leq q \\ 0, & si \quad h > q. \end{cases} \tag{37}$$

La ACF de una MA(g):

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2}, & si \quad 1 \leq h \leq q \\ 0, & si \quad h > q. \end{cases} \tag{38}$$

Para un modelo **ARMA(p,q)** causal $\phi(B)\mathrm{x}_t = \theta(B)\omega_t$, donde los ceros de $\phi(z) están fuera del cítculo unitario, podemos escribir$

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j}$$

Se sigue inmediatamente que $E(x_t) = 0$. También, la función de autocavarianza de x_t se puede escribir como:

$$\gamma(h) = cov(x_{t-h}, x_t) = \sigma_\omega^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}, \qquad h \leq 0. \tag{39}$$

Una ecuación general homogénea para la ACF de un proceso ARMA causal:

$$\gamma(h) - \phi_1\gamma(h-1) - \cdots - \phi_p\gamma(h-p) = 0, \qquad h \geq máx(p, q+1) \tag{40}$$

con condiciones iniciales

$$\gamma(h) - \sum_{j=1}^{p} \phi_j\gamma(h-j) = \sigma_\omega^2 \sum_{j=h}^{q} \theta_j\psi_{j-h}, \qquad 0 \leq h < máx(p, q+1) \tag{41}$$

Dividiendo (40) y (41) por $\gamma(0)$ nos pormeti resolver la ACF $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$

Función de Autocorrelación Parcial (PACF)

Vimos que para un modelo MA(q) la ACF será cero para pasos mayores que q. Más aún, dado que $\theta_q \neq 0$, la ACF no es cero en paso q. Por lo tanto, ACF proporciona una cantidad considerable de información sobre el orden de dependecia, cuando el proceso es un proceso de promedio móvil. Si el proceso, sin embargo, es ARMA o AR, la ACF solo nos dice un poco sobre el orden de dependencia. Por lo tanto, vale la pena buscar una función que se comporte como la ACF de los modelos MA, pero para los modelos AR, esta será la función de autocorrelación parcial.

Def. La función de autocorrelación parcial (PACF) de un proceso estacionario x_t denotada ϕ_{hh}, para $h = 1, 2, ...$, es

$$\phi_{11} = corr(x_1, x_0) = \rho(1) \tag{42}$$

y

$$\psi_{hh} = corr(x_h - x_h^{h-1}, x_0 - x_0^{h-1}) \qquad parah \geq 2. \tag{43}$$

Tanto $(x_h - x_h^{h-1})$ como $(x_0 - x_0^{h-1})$ son no-correlacionados $x_1, x_2, ..., x_{h-1}$.
Por estacionaridad, la PACFϕ_{hh} es la correlación entre x_t y x_{t-h} con la dependecia lineal $x_1, x_2, ..., x_{h-1}$ removida en cada uno.
Si el proceso x_t es gaussiano, entonces $\phi_{hh} = corr(x_t, x_{t-h}|x_{t-1}, ..., x_{t-(h-1)})$. Esto es, ϕ_{hh} es el coeficiente de correlación entre x_t y x_{t-h} en la distribución bivariada de (x_t, x_{t-h}) condiconada por $x_{t-1}, ..., x_{t-h-1}$.
En la siguente sección discutiremos los métodos para calcular la PACF. La PACF para los modelos MA se comporta como el ACF para los modelos AR. También, la PACF para modelos AR se comporto cmo la ACF para modelos MA. Debido a que un modelo ARMA invertible tiene una repesentación AR infinita, la PACEno tendra corte. Resumimos estos resultdaos en el siguiente cuadro.

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
ACF	Dismunición gradual	Corte después de paso q	Disminución gradual
PACF	Corte después de paso q	Disminución gradual	Disminución gradual

Cuadro 1: Comportamiento de la ACF y la PACF para modelos ARMA causal e invertible

Modelos SARIMA

La media móvil integrada autoregresiva, o ARIMA, es uno d elos métodos de pronóstico más utilizados para la prediccón de datos de series de tiempo univariadas. Aunque el método puede manejar datos con una tendencia, no admite series de tiempo con un comportamiento estacional. Una extensión de ARIMA que admite el modelado directo del componente estacional de la serie se llama SARIMA (Seadonal AUTOREGRESSIVE iNTEGRATED Moving Avarage) o ARIMA estacional (seasonal ARIMA).

Def. Si d y D son enteros no negativos, entonves X$_t esuna SARIMA(p, d, q)$x(P,D,Q)$_s$ proceso con el período s si las series diferenciadas $Y_t = (1-b)^d(1-B^s)^D X_t$ Es un proceso causal ARMA definido por

$$\phi(B)\Phi(B^s)Y_t = \theta(B)\Theta(B^s)Z_t, \qquad Z_t \sim WN(0, \sigma^2) \tag{44}$$

donde $\phi(z) = 1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p, \Phi(z) = 1-\Phi_1 z-\cdots-\Phi_p z^p, \theta(z) = 1+\theta_1 z+\cdots+\theta_q z^q \;\; y \;\; \Theta(z) = 1+\Theta_1 z+\cdots+\Theta_q z^q$

Elementos de tendencia
Hay tres elementos de tendencia que requieren configuración. Son los mimos que el modelos ARIMA; específicamente:

- p : orden de autoregresión de la tendencia.
- d: orden de diferencia de tendencia.
- q: Tendencia media móvil de orden

Elemtos estacionales
Hay cuatro elementos estacionales que no forman parte de ARIMA que deben configurarse; son:

- P: Orden autoregresivo estacional
- D: Orden de diferencia estacional
- Q: orden de media móvil estacional
- s: El número de pasos de tiempo para un solo perído estacional