

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA  
MÁSTER EN ASTROFÍSICA  
Atmósferas Estelares

---

# Opacidades en modelos de atmósferas

**Carlota Méndez Lápido**  
**Oscar Soler Pérez**

---

---

Supervisor: Artemio Herrero Davó  
Fecha: 8 de enero de 2024

---

## Resumen

Se toman tres modelos de atmósferas unidimensionales, hidrostáticos y plano-paralelos para estrellas a 4000, 6000 y 8000K, con composición química de tipo solar. A partir de un código desarrollado en `python` se calculan las poblaciones y opacidades del conjunto de iones de hidrógeno ( $H^-$ , HI y HII) presentes en las atmósferas consideradas a diferentes profundidades ópticas de Rosseland y asumiendo ETL. Se tiene que en términos generales, la densidad de iones neutros del hidrógeno domina sobre el resto, excepto para el caso de mayor temperatura y profundidad, que lo hace el HII por cuestiones de ionización. El proceso de absorción atómico que más contribuye a la opacidad de las líneas es ligado-libre del HI; destaca además la absorción por parte de las líneas de hidrógeno en el rango espectral considerado 500-20000 Å.

# Índice general

1.	Introducción . . . . .	3
2.	Metodología . . . . .	5
2.1.	Cálculo de poblaciones . . . . .	5
2.2.	Cálculo de opacidades . . . . .	6
3.	Resultados y discusión . . . . .	8
3.1.	Análisis del modelo . . . . .	8
3.2.	Cálculo de poblaciones . . . . .	10
3.3.	Cálculo de opacidades . . . . .	11
4.	Conclusión . . . . .	15
	<b>Bibliografía</b>	<b>16</b>

## 1. Introducción

Las estrellas cuentan con una capa superficial gaseosa denominada atmósfera; esta suele componerse de hidrógeno y helio (ya que son los elementos más abundantes en el Universo), aunque es común encontrar trazas de otros elementos. En general, estrellas de diferentes masas y tamaños comparten características fundamentales de sus atmósferas.

Estas capas externas de las estrellas son responsables de la emisión de la luz que percibimos desde la Tierra; al observar la radiación electromagnética que llega a nuestros detectores, es posible inferir información sobre la composición química, temperatura, densidad y otros parámetros físicos de las estrellas.

El estudio de las atmósferas estelares requiere de modelos teóricos, computacionales y de observaciones, que en conjunto permiten comprender cómo la luz interactúa con los elementos presentes en las atmósferas. La temperatura y la densidad en estas capas afectan a la distribución de partículas en diversos niveles energéticos, de manera que los electrones pueden absorber o emitir fotones al cambiar de nivel, influyendo así en la radiación proveniente de la estrella. El análisis de la probabilidad de encontrar átomos en un determinado estado de ionización y estado excitado permite obtener las poblaciones de cada nivel de energía para cada elemento, y con ello conocer la contribución que tendrán a la emisión o absorción de radiación; este cómputo se denomina **cálculo de poblaciones**. Asumiendo equilibrio termodinámico local, es decir, que las leyes de la termodinámica son válidas para temperaturas locales, se definen dos ecuaciones fundamentales para el cálculo de poblaciones en un sistema con cierta temperatura  $T$ : La **ecuación de Saha** (Ecuación 2) permite conocer la fracción de átomos que hay en cada nivel de ionización como función de la temperatura. Asimismo, la **ecuación de Boltzmann** revela la distribución de los niveles de energía en un estado de ionización concreto (Ecuación 3) (expresiones extraídas de Herrero Davó 2023 y Gray 2005).

- La distribución de poblaciones atómicas en diferentes estados de ionización descritas por la ecuación de Saha para un sistema en ETL sigue la siguiente relación:

$$n_{ijk} = n_{0,j+1,k} \cdot n_e \cdot \phi_{ijk}(T) \quad ; \quad \phi(T) = \left( \frac{h^2}{2\pi m_e k_B} \right)^{3/2} \frac{g_{ijk}}{g_{0,j+1,k}} \cdot T^{-3/2} \cdot e^{\chi_{ijk}/k_B T} \quad (1)$$

Aludiendo ahora al número total de átomos en un estado ionizado  $N_j$  y el consecutivo  $N_{j+1}$ , se obtiene una expresión más compacta en términos de la función de partición  $U$  de cada estado de ionización  $U_{jk} = \sum_i g_{ijk} \cdot e^{-\chi_{ijk}/k_B T}$ . Por otro lado,  $\chi_{jk}$  se refiere a la energía de ionización y  $N_e$  al número de electrones; este es el cociente entre la presión electrónica en cada capa de la atmósfera y  $k_B$  por la temperatura en ese punto:  $N_e = \frac{P_e}{k_B T}$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. En el Sistema Cegesimal de Unidades toma el valor de  $k_B = 1,380649 \times 10^{-16}$  erg/K:

$$\frac{N_{jk}}{N_{j+1,k}} = 2,07 \times 10^{-16} \cdot N_e \cdot \frac{U_{jk}}{U_{j+1,k}} \cdot T^{-3/2} \cdot e^{\chi_{ijk}/k_B T} \quad (2)$$

- La distribución de niveles de energía  $i$  en un estado de ionización  $j$  de un elemento  $k$  para un sistema en ETL por la ecuación de Boltzmann resulta:

$$\left( \frac{n_{ijk}}{N_{jk}} \right) = \frac{g_{ijk}}{U_{jk}(T)} \cdot e^{-\chi_{ijk}/k_B T} \quad (3)$$

donde  $N_{jk}$  indica la población del estado ionizado  $j$ ;  $g_{ijk}$  se refiere al peso estadístico del nivel  $i$ , mientras que  $\chi_{ijk}$  es la energía del nivel excitado  $i$  en relación al estado fundamental. De nuevo,  $U_{jk}$  es la función de partición del estado de ionización  $j$ .

El cociente entre un nivel de energía menor ( $l$  por su inicial en inglés) frente a otro superior ( $u$ ) se extrae de la Ecuación 3:

$$\frac{n_l}{n_u} = \frac{g_l}{g_u} \cdot e^{-\chi_{lu}/k_B T} \quad (4)$$

De forma paralela, se define la **opacidad** como la capacidad que tiene un medio para absorber y dispersar la radiación electromagnética. En términos de las atmósferas estelares, estas serán más o menos opacas dependiendo de la presencia de elementos o compuestos que haya. Una atmósfera opaca absorberá gran parte de la luz emitida por la estrella, luego la temperatura efectiva variará, y con ella su color y tipo espectral. Atendiendo al tipo de proceso atómico que se de, se tendrán diferentes situaciones en lo que a la opacidad respecta. Se tiene por un lado la absorción de átomos por emisión espontánea o estimulada, así como entre dos tipos de niveles diferentes: ligados o libres. En cualquier caso, la absorción dará lugar a un cambio en la opacidad de la estrella que se traduce en características de las propiedades espectrales del objeto (véase Herrero Davó 2023).

■ **Absorción ligado-libre (*bound-free*):**

Este proceso atómico implica la absorción de un fotón por un electrón ligado a un átomo, liberando de esta manera un electrón y dando lugar a un ion del mismo elemento. Este procedimiento se rige por un umbral de energía, por debajo del cual los fotones no tendrán suficiente energía para desligar al electrón, lo que se conoce como energía de ionización. Es especialmente relevante en las atmósferas más calientes, donde los electrones están fuertemente ligados a los átomos.

■ **Absorción libre-libre (*free-free*):**

Supone la absorción de un fotón a partir de la interacción entre un electrón libre con un ion. Este tipo de procesos es frecuente también en atmósferas con temperaturas entre  $10^4 - 10^8$  K, ya que el gas estará parcialmente ionizado y habrá electrones libres.

■ **Absorción ligado-ligado (*bound-bound*):**

Un fotón es absorbido por un átomo en un nivel energético concreto, por lo que el sistema transiciona a otro nivel de energía. Este proceso atómico contribuye a la formación de líneas espectrales características asociadas con transiciones entre niveles de energía específicos.

■ **Dispersión de electrones (*electron scattering*):**

En este caso, los fotones interactúan con electrones libres, cambiando así su dirección pero no su energía. Este proceso domina en las estrellas más masivas, donde la contribución a la opacidad por otras fuentes es mucho menor.

La forma de estudiar la interacción de la luz con los elementos de la atmósfera es a partir del coeficiente de absorción ( $\kappa$ ), que dependerá por tanto, del tipo de proceso atómico que se de en las capas exteriores de la estrella (véase Ecuación 5). En términos generales se define el coeficiente de absorción como el producto de la sección eficaz por la densidad del número de átomos (resultante de la Ecuación de Saha 2). Concretamente, la sección eficaz ( $\sigma$ ) se define como la probabilidad de que un átomo o molécula interactúe con un fotón incidente en un área concreta, por lo que tiene unidades de  $\text{cm}^2$ .

$$\kappa = \sigma \cdot N \quad (5)$$

## 2. Metodología

El presente trabajo se basa en el análisis de tres modelos de atmósfera elaborados con el programa *MARCS* (Model Atmospheres with a Radiative and Convective Scheme) [Gustafsson et al. 2008], un modelo de atmósferas unidimensional, hidrostático y plano-paralelo. Se seleccionan los correspondientes a estrellas a 4000 K, 6000 K y 8000 K, todos con  $\log g = 4,5$ , y composición química solar.

Todo el tratamiento de datos y representación de gráficos se encuentra en un código de **Python** disponible [aquí](#) [Soler Pérez y Méndez Lápido 2024].

De los modelos se extraen 56 puntos a diferente profundidad, caracterizados por el logaritmo de la profundidad óptica de Rosseland ( $\log \tau_{\text{Ross}}$ ), la profundidad geométrica [cm], temperatura [K], presión electrónica [dyn/cm<sup>2</sup>], presión del gas [dyn/cm<sup>2</sup>] y presión de radiación [dyn/cm<sup>2</sup>]. Con ello, se analizará en primer lugar el comportamiento de cada modelo a diferentes profundidades (ver Sección 3.1), y en segundo lugar se realizará el cálculo de poblaciones y opacidades a  $\tau_{\text{Ross}} = 1$  y  $\tau_{\text{Ross}} = 10$  para los modelos de 6000 y 8000 K (Secciones 3.2 y Sección 3.3 respectivamente).

Para el cálculo de poblaciones y opacidades se considerará que la atmósfera está exclusivamente compuesta por hidrógeno, presente en los siguientes estados:  $\text{H}^-$ ,  $\text{HI}$  y  $\text{HII}$ . Se considerará que el  $\text{H}^-$  posee un único estado energético, mientras que el  $\text{HI}$  poseerá tres: el fundamental ( $n = 1$ ) y dos estados excitados ( $n = 2, 3$ ).

### 2.1. Cálculo de poblaciones

Con el objetivo de determinar la opacidad entre 500 y 20000 Å, en primer lugar se calcularán las poblaciones totales de  $\text{H}^-$ ,  $\text{HI}$ ,  $\text{HII}$  y electrones, así como de los diferentes niveles excitados del  $\text{HI}$ .

#### Poblaciones de iones

Para calcular las poblaciones correspondientes a los diferentes iones del hidrógeno se emplea la ecuación de Saha (2) introduciendo los valores específicos para cada caso:

$$\begin{cases} \frac{N_{\text{H}^-}}{N_{\text{HI}}} = 2,07 \times 10^{-16} \cdot N_e \cdot \frac{U_{\text{H}^-}}{U_{\text{HI}}} \cdot T^{-3/2} \cdot e^{\chi_{\text{H}^-, \text{HI}}/k_B T} \\ \frac{N_{\text{HI}}}{N_{\text{HII}}} = 2,07 \times 10^{-16} \cdot N_e \cdot \frac{U_{\text{HI}}}{U_{\text{HII}}} \cdot T^{-3/2} \cdot e^{\chi_{\text{HI}, \text{HII}}/k_B T} \end{cases} \quad (6)$$

donde  $U_{\text{H}^-} = 1$ ,  $U_{\text{HI}} = 2$ ,  $U_{\text{HII}} = 1$ ,  $\chi_{\text{H}^-, \text{HI}} = 13,6$  eV,  $\chi_{\text{HI}, \text{HII}} = 0,765$  eV [Herrero Davó 2023], y  $k_B$  se escribe en unidades de [eV/K]. El número de electrones  $N_e$  se calcula a partir de la presión electrónica aportada por el modelo. En este instante se tiene un sistema de dos ecuaciones (6) y tres incógnitas:  $N_{\text{H}^-}$ ,  $N_{\text{HI}}$  y  $N_{\text{HII}}$ . La atmósfera estudiada se considera como exclusivamente compuesta por hidrógeno, lo cual implica que se puede incluir la ecuación de conservación de la carga:

$$N_e + N_{\text{H}^-} = N_{\text{HII}} \quad (7)$$

Esta ecuación permite cerrar el sistema, y estableciendo  $N_{\text{H}^-}/N_{\text{HI}} = A$  y  $N_{\text{HI}}/N_{\text{HII}} = B$ , el sistema se resuelve con:

$$N_{\text{H}^-} = \frac{AB}{1 - AB} N_e; \quad N_{\text{HI}} = \frac{N_{\text{H}^-}}{A}; \quad N_{\text{HII}} = \frac{N_{\text{HI}}}{B} \quad (8)$$

Para comprobar que el cálculo de poblaciones da valores correctos se contrasta con otro método. El modelo de atmósfera no está hecho exclusivamente de hidrógeno, si no que ha sido asumido para este trabajo. Entonces, la presión del gas tabulada en el modelo:

$$P_g = P_e + P_H + P_{\text{others}} \quad (9)$$

donde  $P_{\text{others}}$  es la presión del gas debido al resto de elementos que componen la atmósfera. Por la ley de los gases ideales se tendrá:

$$P_{\text{others}} = N_{\text{others}} \cdot k_B T = k_B T \cdot \sum_{i=2}^x N_i = k_B T \cdot N_H \cdot \sum_{i=2}^x \frac{N_i}{N_H} \quad (10)$$

La abundancia relativa de elementos respecto del hidrógeno se puede extraer de las abundancias químicas logarítmicas aportadas por el modelo:

$$A_i = \log \left( \frac{N_i}{N_H} \right) + 12 \quad (11)$$

De esta manera se puede calcular la población total de hidrógeno

$$N_{H, A_i} = \frac{P_g - P_e}{k_b T \cdot \sum_{i=2}^x A_i} \quad (12)$$

y comparar este valor con el obtenido por el método anterior

$$N_H = N_{H^-} + N_{HI} + N_{HII} \quad (13)$$

La tabla 2 en la Sección 3.2 contiene los valores numéricos obtenidos a partir de esta verificación.

### Poblaciones de estados excitados

Al considerar tres estados excitados del ion  $N_{HI}$  ( $n = 1, 2, 3$ ), se emplea la ecuación de Boltzmann (3), que permite establecer la población de cada estado excitado a partir de la correspondiente a la especie. Para el caso del átomo de hidrógeno se puede sustituir el peso estadístico del nivel  $n$  por  $g_n = 2 \cdot n^2$ , y las energías de cada nivel excitado con respecto al fundamental serán  $\chi_{n=1} = 0$ ;  $\chi_{n=2} = 10,206$ ;  $\chi_{n=3} = 12,095$  en eV [Herrero Davó 2023]. Una vez se realizan los cálculos se comprueba que la suma de las poblaciones en los estados excitados considerados corresponde prácticamente con la población total del ion (Tabla 2).

## 2.2. Cálculo de opacidades

Una vez las poblaciones han sido calculadas, se elabora una rutina que las emplea como datos iniciales para el cálculo de opacidades.

### Opacidad debida al HI

Se deben considerar los tres procesos diferentes: *free-free*, *bound-free* y *bound-bound*:

- *free-free*: esta opacidad para el HI viene dada por:

$$\kappa_\nu = \sigma_{ff}(\nu) n_e n_k \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \right) [\text{cm}^{-1}] \quad (14)$$

donde  $\sigma_{ff}(\nu)$  es la sección eficaz,  $n_e$  el número de electrones libres,  $n_k$  el de átomos en el siguiente estado de ionización ( $N_{\text{HII}}$  en este caso), y  $\nu$  la frecuencia de la luz. Esta opacidad es considerada para todas las longitudes de onda (todas las frecuencias). En el caso del hidrógeno, la sección eficaz viene dada por  $\sigma_{ff}(\nu) = 3,7 \times 10^8 \frac{Z^2}{T^{1/2}\nu^3} \cdot g_{ff}$  [cm<sup>2</sup>], donde  $Z$ , el número atómico, es 1 y

$$g_{ff} = 1 + \frac{0,3456}{(\lambda\mathcal{R})^{1/3}} \left( \frac{\lambda k_B T}{hc} + \frac{1}{2} \right) \quad (15)$$

el factor de Gaunt correspondiente al hidrógeno [Gray 2005], donde  $\mathcal{R} = 1,0968 \times 10^5$  cm<sup>-1</sup> es la constante de Rydberg y la longitud de onda  $\lambda$  se escribe en cm.

- *bound-free*: esta opacidad será considerada para longitudes menores que una longitud de onda umbral  $\lambda_0$  específica para cada nivel inicial del HI

$$\lambda_0 = n^2 / \mathcal{R} \quad (16)$$

La opacidad del nivel  $n = i$  es dada por:

$$\kappa_{i,\nu} = \sigma_{i,bf}(\nu) \cdot n_i \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \right) \text{ [cm}^{-1}\text{]} \quad (17)$$

donde la sección eficaz es  $\sigma_{i,bf}(\nu) = 2,818 \times 10^{29} \frac{Z^4}{n^5 \nu^3} \cdot g_{bf}$  [cm<sup>2</sup>], con factor de Gaunt dado por [Gray 2005]:

$$g_{bf} = 1 + \frac{0,3456}{(\lambda\mathcal{R})^{1/3}} \left( \frac{\lambda\mathcal{R}}{n^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (18)$$

- *bound-bound*: esta opacidad será de interés exclusivo a las longitudes de onda correspondientes con las transiciones entre los estados considerados:

- $n = 1 \longrightarrow n = 2$ ,  $\lambda_{\text{Ly}\alpha} = 1215,66\text{\AA}$  ; conocida como Lyman  $\alpha$
- $n = 1 \longrightarrow n = 3$ ,  $\lambda_{\text{Ly}\beta} = 1025,83\text{\AA}$  ; conocida como Lyman  $\beta$
- $n = 2 \longrightarrow n = 3$ ,  $\lambda_{\text{H}\alpha} = 6562,81\text{\AA}$  ; primera de la serie de Balmer y conocida como H $\alpha$

La opacidad de cada línea estará dada por:

$$\kappa_\nu = \sigma_{lu}(\nu) \left( 1 - e^{-h\nu/k_B T} \right) \text{ [cm}^{-1}\text{]} \quad (19)$$

tras usar la aproximación de equilibrio termodinámico local, y donde  $l$  y  $u$  son los números correspondientes a los niveles inferior y superior respectivamente, la sección eficaz es  $\sigma_{lu} = \frac{\pi e^2}{mc} f$ , donde  $e$  es la carga del electrón [statC],  $m$  [g] la masa del electrón y  $f$  la llamada fuerza del oscilador, específico para cada línea. Para el átomo de hidrógeno se tiene

$$f = \frac{2^5}{2^{3/2}\pi} \frac{g_{bb}}{l^5 u^3} \left( \frac{1}{l^2} - \frac{1}{u^2} \right)^{-3} \quad (20)$$

donde el factor de Gaunt  $g_{bb}$  se puede aproximar como  $g_{bb} = 0,869 - \frac{3}{u^2}$  para la serie de Balmer (véase Tema 11 de Gray 2005), mientras que para las líneas de la serie de Lyman se utilizan los valores  $g_{bb, \text{Ly}\alpha} = 0,717$  y  $g_{bb, \text{Ly}\beta} = 0,765$ , tabulados por Baker y Menzel 1938.

### Opacidad debida al $H^-$

El ion negativo del hidrógeno tendrá opacidad *free-free* y *bound-free*, y se sabe que puede dominar en estrellas de tipo solar. Su opacidad vendrá dada por:

- *free-free*: esta opacidad sigue la relación:  $\kappa_{ff} = P_e \cdot \sigma_{ff} \cdot N_{H^-}$ , donde la sección eficaz corresponde con:

$$\sigma_{ff} = 10^{-26} \cdot 10^{f_0 + f_1 \log \theta + f_2 \log^2 \theta} \quad (21)$$

donde  $\theta = 5040/T$  y las expresiones de  $f_i$  (polinomios dependientes de la longitud de onda) se pueden encontrar en el Tema 8 de Gray 2005.

- *bound-free*: la fórmula de la opacidad es:

$$\kappa_{bf} = 4,158 \times 10^{-10} \sigma_{bf} P_e \theta^{5/2} \cdot 10^{0,754\theta} \quad (22)$$

donde la sección eficaz es

$$\sigma_{bf} = (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_6 \lambda^6) 10^{-18} \quad (23)$$

con las constantes  $a_i$  tabuladas y la longitud de onda en Å (véase Tema 8 Gray 2005).

### Opacidad debida a la dispersión de electrones

Es la última opacidad a considerar, independiente de la longitud de onda, se define como:

$$\kappa_e = N_e \cdot \sigma_e \quad (24)$$

con  $\sigma_e = 6,25 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ .

## 3. Resultados y discusión

### 3.1. Análisis del modelo

Se presentan en esta sección un estudio de las características de los modelos de atmósferas desarrollados por Gustafsson et al. 2008 para el conjunto de temperaturas: 4000, 6000 y 8000K.

En primer lugar se muestra en la Figura 1 un diagrama del logaritmo de la profundidad óptica de Rosseland frente a la profundidad geométrica para los tres modelos de temperaturas.

Se observa que a medida que la profundidad geométrica es mayor, es decir, que la distancia que recorre la luz en la línea de visión entre el emisor (un punto interno de la atmósfera) y el exterior de la misma, el logaritmo de la profundidad óptica aumenta. Valores altos de  $\tau_{\text{Ross}}$  implican capas más internas de la atmósfera. Este resultado es coherente, ya que la profundidad óptica se relaciona con la interacción de la radiación emergente con los átomos presentes en la atmósfera, luego, si la luz que nos llega proviene de capas más profundas de la atmósfera, los fotones habrán interactuado con más elementos. Sin embargo, solo los emitidos a profundidad óptica menor que la unidad ( $\tau_{\text{Ross}} < 1$ ,  $\log \tau_{\text{Ross}} < 0$ ), podrán escapar de la atmósfera; el resto, quedarán atrapados dentro de las capas más internas y serán absorbidos por el medio. De esta



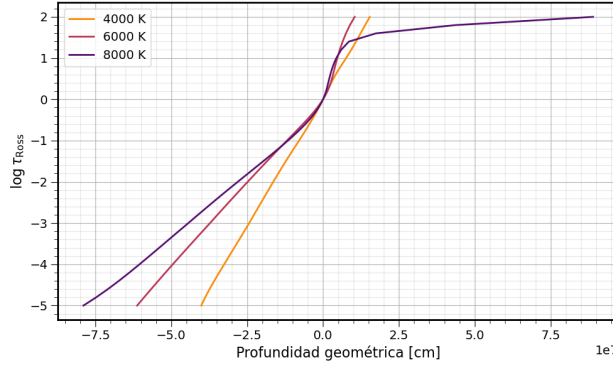


Figura 1: Diagrama del logaritmo de la profundidad óptica de Rosseland ( $\log \tau_{\text{Ross}}$ ) frente a la profundidad geométrica ( $r$ ) para los tres modelos de temperaturas considerados en este estudio:  $T=4000\text{K}$  en color naranja,  $T=6000\text{K}$  en rosado, y finalmente el modelo de una estrella con  $T=8000\text{K}$  en morado.

manera, una pendiente pronunciada en el diagrama implica efectos de absorción mayor.

Por otro lado, se estudia la variación de diferentes parámetros con la profundidad óptica: se trata de la temperatura, la presión electrónica así como el cociente entre la presión de electrones y la del gas o bien la presión de radiación entre la presión del gas.

La Figura 2a muestra que la temperatura aumenta gradualmente con el logaritmo de la profundidad óptica; esto implica que a mayor temperatura el número de absorciones atómicas incrementa. Al representar el logaritmo de  $\tau_{\text{Ross}}$  frente a la presión electrónica en escala logarítmica en la Figura 2b se observa un comportamiento prácticamente lineal, es decir,  $P_e - \tau_{\text{Ross}}$  siguen una relación exponencial. Cuanto más interna es la capa de la atmósfera considerada, mayor es la densidad de electrones libres y con ello la presión electrónica.

La forma de la relación entre la presión electrónica y la del gas parece ser independiente de la temperatura del modelo de estrella, tal y como se observa en la Figura 2c. Para las capas más externas de la atmósfera el ratio de las presiones se mantiene constante y no es hasta cierto valor de profundidad óptica ( $\log \tau_{\text{Ross}} \sim -1$ ) que aumenta considerablemente. Coincide a su vez con el incremento en la pendiente en la Figura 2a, por lo que a mayor temperatura local, los átomos están ionizados y por tanto el número de electrones libres aumenta, contribuyendo notablemente a la presión del gas. Tal es el caso del modelo de la estrella de 8000 K, en el que, a  $\log \tau_{\text{Ross}} \sim 2$  la presión electrónica supone la mitad de la presión del gas, por lo que la atmósfera se calienta (Figura 2a) y se vuelve más densa. Sin embargo, el ratio entre la presión de radiación y la del gas (véase Figura 2d) muestra un comportamiento diferente: En un primer tramo ( $\log \tau_{\text{Ross}} < -1$ ) se tiene que para las capas más externas de la atmósfera, la presión de radiación cobra importancia respecto a la del gas; a medida que se va adentrando en la atmósfera el ratio disminuye exponencialmente. Para valores de  $\log \tau_{\text{Ross}} > -1$  aumenta el cociente.

En general se aprecia que para las cuatro relaciones anteriores, el modelo de estrella a mayor temperatura alcanza valores más altos que los de 4000 K y 6000 K. En cualquier caso, se tiene un comportamiento análogo para el conjunto de los modelos; concretamente se ha apreciado una variación en la pendiente de los diagramas entre  $-1 < \log \tau_{\text{Ross}} < 0$ . Los fotones emitidos en regiones de la atmósfera con valores más negativos de profundidad óptica, es decir, capas más externas, escapan directamente. Sin embargo, los de capas más profundas son bloqueados por la opacidad de la atmósfera, calentando de esta manera el medio y

por ende aumentando la ionización de los átomos que lo componen.

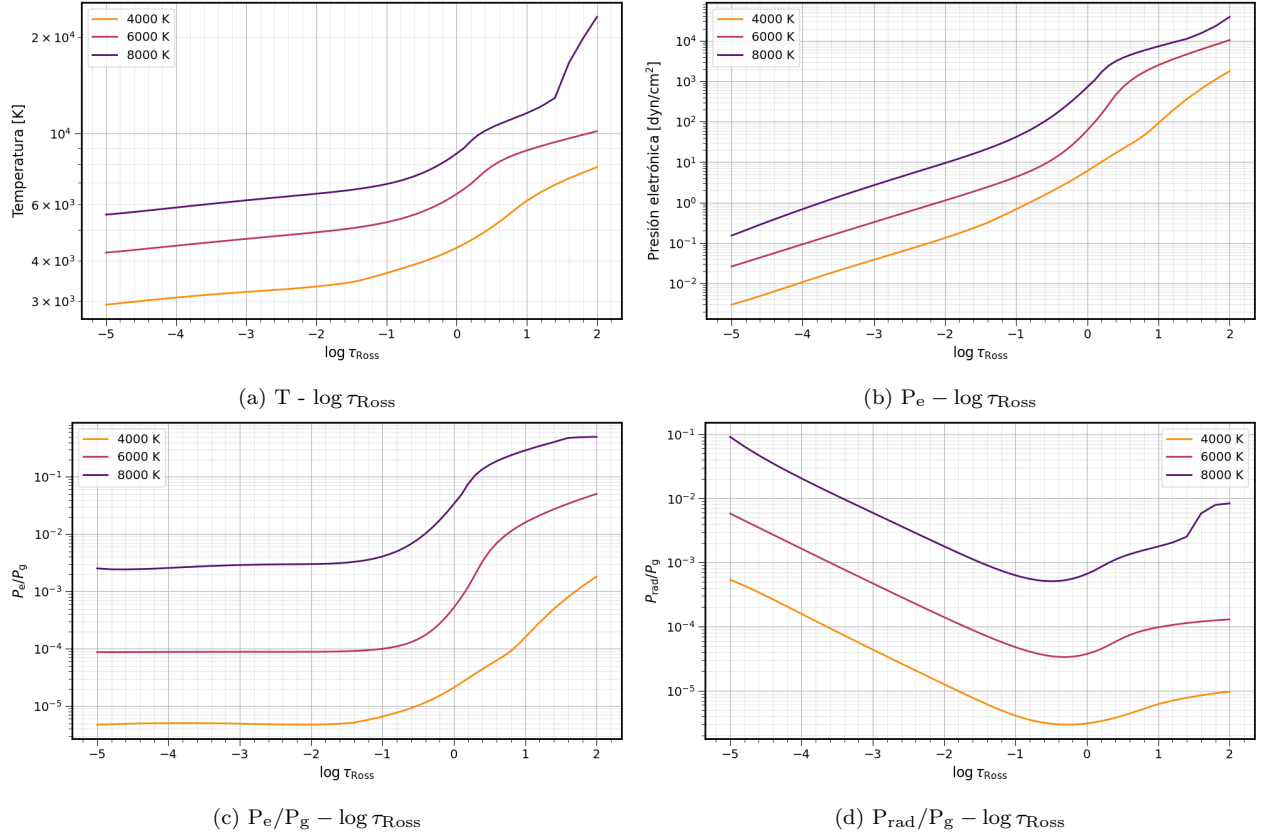


Figura 2: Variación del logaritmo de la profundidad óptica de Rosseland con la (a) temperatura, (b) presión electrónica, (c) cociente entre la presión electrónica y la presión del gas y (d) cociente entre la presión de radiación y la del gas. El eje vertical de las subfiguras se encuentra en escala logarítmica, mientras que el eje horizontal representa en escala lineal los valores de  $\log \tau_{\text{Ross}}$ . Se representan los valores correspondientes a los tres modelos de atmósferas diseñados para tres estrellas con temperaturas: 4000K, 6000K y 8000K en color naranja, rosado y morado respectivamente.

### 3.2. Cálculo de poblaciones

Se recogen en esta sección los resultados obtenidos de las poblaciones de  $\text{H}^-$ ,  $\text{HI}$ ,  $\text{HII}$  y de electrones en los modelos de estrellas de temperaturas 6000 K y 8000 K considerando profundidad óptica de Rosseland 1 y 10 (Tabla 1). Cabe destacar que el modelo de 4000 K se ha descartado para este análisis ya que la suposición que se ha realizado en este trabajo de que la atmósfera solo se compone de hidrógeno, da lugar a valores negativos en el cálculo de poblaciones.

En el primer bloque de la Tabla 1 se recogen los valores numéricos obtenidos a partir del código de `python` [Soler Pérez y Méndez Lápido 2024] de las poblaciones de los iones. Se observa que la población del ion negativo del hidrógeno toma valores de entre 6-8 órdenes de magnitud inferiores respecto al resto de iones, por lo que su contribución a la opacidad de la atmósfera estelar será despreciable. Por otro lado, el ion neutro del hidrógeno ( $\text{HI}$ ) domina para los modelos excepto para el caso de temperatura 8000 K y profundidad óptica 10 donde se tiene igual cantidad que de iones positivos de hidrógeno ( $\text{HII}$ ). Este hecho reafirma que a mayor

profundidad (y por ende temperatura) el grado de ionización es mayor, tal y como se comentó en la Sección anterior (3.1). Atendiendo a la población de los electrones presentes en las diferentes atmósferas modeladas, se observa que la densidad de los mismos aumenta con la profundidad óptica y con la temperatura. Nótese que los valores de  $N_e$  coinciden con las poblaciones de HII por conservación de carga. En la segunda fila de la Tabla 2 se presenta a modo de verificación el error relativo resultante de dicha ecuación (7), cuyos valores son despreciables en todos los casos.

En el último bloque de la Tabla 1 se estudian las poblaciones de los niveles excitados del hidrógeno neutro. Se aprecia que domina el nivel fundamental en todos los casos.

	T=6000K		T=8000K	
	$\tau_{Ross} = 1$	$\tau_{Ross} = 10$	$\tau_{Ross} = 1$	$\tau_{Ross} = 10$
$N_{H-}$	8.14e+09	8.30e+10	3.39e+09	4.88e+09
$N_{HI}$	1.50e+17	1.19e+17	1.56e+16	5.93e+15
$N_{HII}$	6.88e+13	2.06e+15	6.04e+14	4.59e+15
$N_e$	6.88e+13	2.06e+15	6.04e+14	4.59e+15
$N_{HI}, n = 1$	1.50e+17	1.19e+17	1.56e+16	5.93e+15
$N_{HI}, n = 2$	6.67e+09	7.28e+11	7.12e+10	8.45e+11
$N_{HI}, n = 3$	5.05e+08	1.37e+11	1.27e+10	2.85e+11

Tabla 1: Poblaciones atómicas de los átomos e iones de hidrógeno presentes en el modelo de atmósfera considerado, así como del número de electrones. Se calcula para diferentes profundidades ( $\tau_{Ross} = 1$  y 10) para las estrellas de temperaturas 6000 y 8000 K.

Aludiendo de nuevo a la Tabla 2, se muestra en la primera fila, que la suposición de que la atmósfera solo contiene hidrógeno en lugar de estar poblado por más elementos supone un error relativo en la población total de H del 1 %. Se obtiene el mismo resultado en la tercera fila al comparar las poblaciones de los estados excitados de HI frente a la población total de dicho ion (error despreciable).

	T=6000K		T=8000K	
	$\tau_{Ross} = 1$	$\tau_{Ross} = 10$	$\tau_{Ross} = 1$	$\tau_{Ross} = 10$
$\frac{N_{H, A_i} - (N_{H-} + N_{HI} + N_{HII})}{N_{H, A_i}}$	-4.98e-02	1.31e-01	1.42e-01	1.49e-01
$\frac{N_e - (N_{HII} + N_{H-})}{N_e}$	0	-1.21e-16	-2.07e-16	2.18e-16
$\frac{(N_{HI, n=1} + N_{HI, n=2} + N_{HI, n=3}) - N_{HI}}{N_{HI}}$	4.77e-08	7.30e-06	5.36e-06	1.91e-04

Tabla 2: Verificación de los cálculos de poblaciones a partir de dos métodos diferentes (véase Sección 2.1).

### 3.3. Cálculo de opacidades

Se presenta en esta sección el cálculo de las opacidades para los modelos de 6000 K y 8000 K y asumiendo para ambos  $\tau_{Ross} = 1$ . Para ello, se muestran en la Figura 3 las secciones eficaces frente a la longitud de onda computadas para el conjunto de iones que pueblan las atmósferas estelares modeladas en escala logarítmica. Los paneles izquierdos recogen el proceso de absorción atómico libre-libre, el superior lo hace para el ion neutro del hidrógeno y el inferior para el negativo. Se observa que el comportamiento es similar en ambos casos: creciente con la longitud de onda como una ley exponencial. Atendiendo ahora al proceso ligado-libre en el panel derecho de la figura, se aprecia que la sección eficaz es independiente de la temperatura. Para los

tres estados excitados considerados del hidrógeno neutro,  $\sigma_{bf}$  aumenta con la longitud de onda hasta alcanzar cierto valor límite (obtenido a partir de 16), donde se hace cero. Este comportamiento se verá reflejado en el cálculo de las opacidades totales (véase a continuación). Destaca el caso de  $\sigma_{bf}(\text{H}^-)$  para el que la forma de la sección eficaz es diferente con un máximo en 8500 Å y una longitud de onda límite de  $\lambda = 16421\text{Å}$  [Gray 2005].

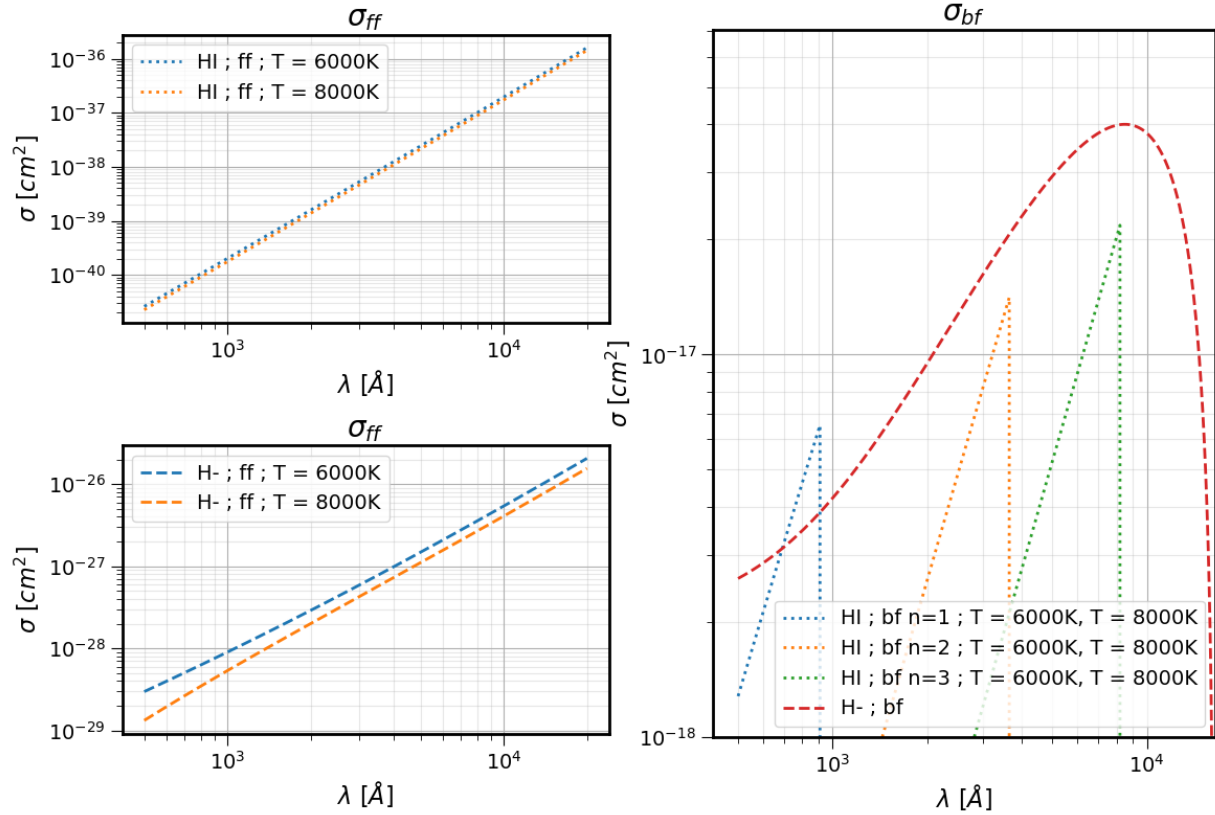


Figura 3: Sección eficaz ( $\sigma$ ) frente a la longitud de onda ( $\lambda$ ) para los procesos libre-libre ( $ff$ ) en los paneles de la izquierda y ligado-libre ( $bf$ ) en la derecha de los iones que pueblan las atmósferas modeladas. Con línea punteada se representan los perfiles correspondientes al ion neutro del hidrógeno, mientras que con línea rayada los de  $\text{H}^-$ .

En la Figura 4 se muestra la opacidad específica de cada proceso para todos los iones considerados junto a la total. En términos generales, el modelo de 8000 K presenta valores superiores de  $\kappa$ , excepto para el caso de  $\lambda < 911\text{Å}$  que corresponde con la longitud de onda límite o canto del hidrógeno neutro en el caso de ligado-libre desde el nivel fundamental (16). Este proceso domina la opacidad de la atmósfera hasta llegar al canto del ion de HII, a partir de esta  $\lambda_3$ , dominará el proceso libre-libre del ion neutro del hidrógeno. De esta manera se observa en  $\kappa_{tot}$  (la suma de las contribuciones de todos los iones al coeficiente de opacidad) una forma escalonada. Los saltos en torno a cada longitud de onda límite quedan recogidos en las Tablas 3 y 4 para los modelos de 6000 y 8000 K respectivamente.

En el primer bloque de ambas tablas se presentan los coeficientes de opacidad del proceso libre-libre; viéndose que  $\kappa_{ff}$  de HI es superior a la contribución de  $\text{H}^-$  por aproximadamente cinco órdenes de magnitud; sin embargo atendiendo a la Figura 4 se observa que tiene un comportamiento creciente con la longitud de onda, de modo que si se considerara un rango de espectral mayor (hacia el infrarrojo), la contribución podría

ser significativa. En el segundo bloque se recogen los valores asociados al proceso ligado-libre; en este caso dominan los coeficientes de opacidad correspondientes a los niveles de excitación del hidrógeno neutro. El nivel fundamental ostenta el valor máximo para estos modelos en  $\lambda_1 - \Delta\lambda$ , a la izquierda del canto en el perfil de su sección eficaz. Para longitudes de onda mayores que  $\lambda_1$ , se tienen valores nulos porque los fotones no poseen suficiente energía para ionizar el átomo. Este comportamiento es análogo para el segundo y tercer nivel de excitación en torno a sus longitudes de onda límite:  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ . De nuevo, la opacidad debida al ion negativo del hidrógeno es despreciable. Finalmente se observa que  $\kappa_e$  es constante a todas las longitudes de onda y no alcanza un papel relevante en la opacidad total.

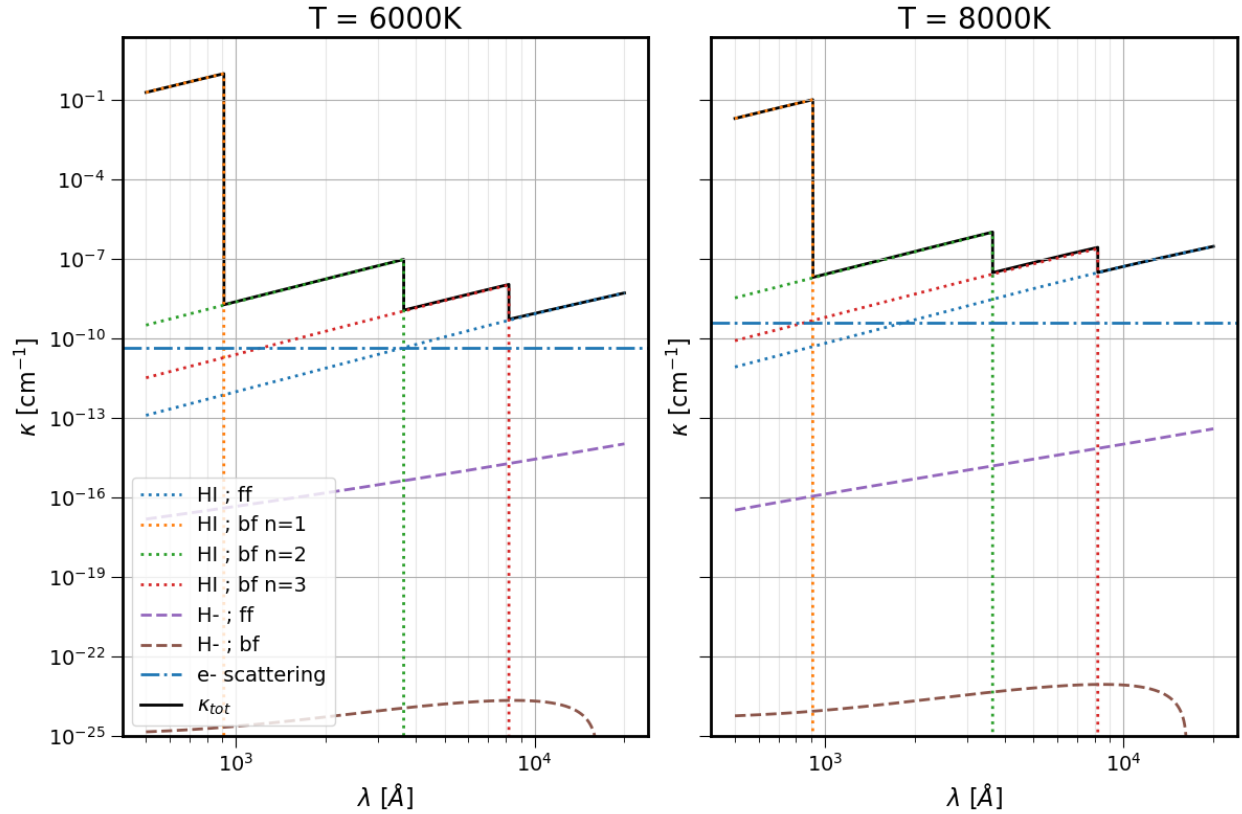


Figura 4: A la izquierda, opacidades específicas de cada proceso para todos los iones considerados para modelo de estrella de 6000 K, y a la derecha para 8000 K. Con línea punteada la opacidad del hidrógeno neutro; línea rayada para el ion negativo del H; línea-punto para la opacidad producida por la dispersión de electrones. La suma de las contribuciones ( $\kappa_{tot}$ ) en línea negra continua.

Para concluir el estudio de las opacidades, se muestra en la Tabla 5 el coeficiente de opacidad asociado al proceso ligado-ligado del hidrógeno. Concretamente se estudian las dos primeras líneas de la serie de Lyman ( $Ly\alpha$  y  $Ly\beta$ ) y la primera de la serie de Balmer  $H\alpha$ . En términos generales, los resultados alcanzan valores numéricos muy superiores (10-15 órdenes de magnitud) a los obtenidos para el resto de procesos discutidos anteriormente. Dicho contraste es una característica fundamental reflejada en el espectro de estrellas de estas temperaturas (asociadas a clase espectral F), teniendo estas líneas una presencia notable. El valor máximo es alcanzado por la transición  $n = 1 \rightarrow n = 2$  ( $Ly\alpha$ ) en ambos modelos de atmósfera.

$\tau_{Ross} = 1, T=6000K$							
Opacidad	Elemento	$\lambda_1 - \Delta\lambda$	$\lambda_1 + \Delta\lambda$	$\lambda_2 - \Delta\lambda$	$\lambda_2 + \Delta\lambda$	$\lambda_3 - \Delta\lambda$	$\lambda_3 + \Delta\lambda$
$\kappa_{ff}$	H <sup>-</sup>	3.85e-17	3.87e-17	4.17e-16	4.18e-16	1.86e-15	1.86e-15
	HI	7.23e-13	7.28e-13	4.47e-11	4.48e-11	4.77e-10	4.77e-10
$\kappa_{bf}$	H <sup>-</sup>	2.05e-25	2.05e-25	1.09e-24	1.09e-24	2.12e-24	2.12e-24
	HI, $n = 1$	9.81e-01	0	0	0	0	0
	HI, $n = 2$	1.78e-09	1.79e-09	9.37e-08	0	0	0
	HI, $n = 3$	1.86e-11	1.87e-11	1.06e-09	1.06e-09	1.03e-08	0
$\kappa_e$	e	4.30e-11					

Tabla 3: Opacidades en torno a las frecuencias de ionización del hidrógeno para el modelo a T=6000 K. El cálculo de  $\kappa_{ff}$  se hace para un rango de longitud de onda entre 500-20000 Å; para el proceso de absorción ligado-libre, se consideran las longitudes de onda límite para los iones de hidrógeno según la Ecuación (16):  $\lambda_1 = 911,74\text{Å}$ ,  $\lambda_2 = 3646,9\text{Å}$  y  $\lambda_3 = 8205,7\text{Å}$ .

$\tau_{Ross} = 1, T=8000K$							
Opacidad	Elemento	$\lambda_1 - \Delta\lambda$	$\lambda_1 + \Delta\lambda$	$\lambda_2 - \Delta\lambda$	$\lambda_2 + \Delta\lambda$	$\lambda_3 - \Delta\lambda$	$\lambda_3 + \Delta\lambda$
$\kappa_{ff}$	H <sup>-</sup>	1.09e-16	1.09e-16	1.50e-15	1.50e-15	6.86e-15	6.86e-15
	HI	4.84e-11	4.87e-11	2.99e-09	2.99e-09	3.01e-08	3.01e-08
$\kappa_{bf}$	H <sup>-</sup>	8.25e-25	8.27e-25	4.40e-24	4.41e-24	8.52e-24	8.52e-24
	HI, $n = 1$	1.02e-01	0	0	0	0	0
	HI, $n = 2$	1.90e-08	1.91e-08	9.92e-07	0	0	0
	HI, $n = 3$	4.67e-10	4.70e-10	2.65e-08	2.66e-08	2.40e-07	0
$\kappa_e$		3.78e-10					

Tabla 4: Opacidades en torno a las frecuencias de ionización del hidrógeno para el modelo a T=8000 K. El cálculo de  $\kappa_{ff}$  se hace para un rango de longitud de onda entre 500-20000 Å; para el proceso de absorción ligado-libre, se consideran las longitudes de onda límite para los iones de hidrógeno según la Ecuación (16):  $\lambda_1 = 911,74\text{Å}$ ,  $\lambda_2 = 3646,9\text{Å}$  y  $\lambda_3 = 8205,7\text{Å}$ .

$\kappa_{bb}(\lambda_0)$	Ly $\alpha$	Ly $\beta$	H $\alpha$
T=6000 K	1.67e+15	1.40e+07	8.31e+06
T=8000 K	1.73e+14	1.50e+08	1.99e+08

Tabla 5: Opacidad correspondiente a las líneas de absorción Lyman  $\alpha$ , Lyman  $\beta$  y H $\alpha$  en sus respectivas longitudes de onda ( $\lambda_0$ ): 1215,7Å, 1025,8Å, 6562,8Å.

## 4. Conclusión

En el presente trabajo se ha realizado un análisis de tres modelos de atmósfera extraídos de la base de datos *MARCS* [Gustafsson et al. 2008], unidimensionales, hidrostáticos y plano-paralelos, que asumen además una composición química solar. Se ha supuesto también que la atmósfera está únicamente compuesta por hidrógeno y que se puede aplicar equilibrio termodinámico local. A pesar de la severidad de las consideraciones, se ha verificado que el error inducido es despreciable para los objetivos de este estudio.

En primer lugar, se destaca la correlación positiva de la temperatura local en la atmósfera con la profundidad óptica, y consecuentemente se encuentra un mayor grado de ionización de las especies en capas más profundas. Respecto a los distintos modelos, se obtiene el mismo comportamiento de diferentes parámetros de la atmósfera, con valores más altos de presiones, temperatura local y grado de ionización para el modelo de mayor temperatura estudiado.

Atendiendo a las poblaciones atómicas, se obtuvo para los dos modelos considerados que dominaba el ion neutro del hidrógeno, excepto para el caso de temperatura 8000 K y profundidad óptica 10. Este último resultado es coherente con el hecho de que a mayor  $\tau_{\text{Ross}}$ , mayor temperatura local y, por ende, mayor grado de ionización.

El que la población de H I domine sobre el resto es esperable para modelos en estos rangos de temperatura (6000-8000 K); estrellas similares a tipo espectral F, que no son estrellas calientes.

En lo que al cálculo de opacidades respecta, el perfil de la opacidad total está principalmente modelado por la contribución de los procesos atómicos ligado-libre del ion neutro del hidrógeno hasta la longitud de onda del canto del H II; a partir de dicha  $\lambda_3$ , domina el proceso libre-libre en el ion neutro del hidrógeno. Análogamente al caso de las poblaciones, los coeficientes de opacidad son mayores para el modelo de atmósfera más caliente.

El código de `python` realizado para el presente trabajo supone una herramienta general y potente para cálculos de poblaciones y opacidades, por lo que se podría aplicar en futuros trabajos que consideren modelos de diferentes temperaturas y así obtener resultados más robustos.

# Bibliografía

- Baker, James G. y Donald H. Menzel (jul. de 1938). «Physical Processes in Gaseous Nebulae. III. The Balmer Decrement.» En: 88, pág. 52. DOI: [10.1086/143959](https://doi.org/10.1086/143959).
- Gray, D.F. (2005). *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*. Cambridge University Press. ISBN: 9780521851862. URL: <https://books.google.es/books?id=LfNCXBqZab0C>.
- Gustafsson, B. et al. (ago. de 2008). «A grid of MARCS model atmospheres for late-type stars. I. Methods and general properties». En: 486.3, págs. 951-970. DOI: [10.1051/0004-6361:200809724](https://doi.org/10.1051/0004-6361:200809724). arXiv: [0805.0554](https://arxiv.org/abs/0805.0554) [[astro-ph](#)].
- Herrero Davó, Artemio (2023). *Stellar atmospheres course notes*.
- Soler Pérez, Oscar y Carlota Méndez Lápido (2024). *Code to analyze atmospheric models*. [https://github.com/Oscar-Soler/Entregable-2-Atm-sferas-Estelares/blob/17894df0320bcb5e8d874ccbc4a52c27957cd8fd/entregable2\\_AE.py](https://github.com/Oscar-Soler/Entregable-2-Atm-sferas-Estelares/blob/17894df0320bcb5e8d874ccbc4a52c27957cd8fd/entregable2_AE.py) [Accessed: (08/01/2024)].