Curso 0
Sesión 4

Departamento de Matemáticas

Escola Politécnica de Enxeñaría de Ferrol
UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Curso 2025-2026

Índice

Función primitiva. Integral indefinida

Función primitiva

Unha función $F(x)$ dise *primitiva* dunha función $f(x)$ sobre un intervalo (a, b), se en calquera punto do intervalo (a, b), a función é diferenciable e $F'(x) = f(x)$.

Observación

Se $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón calquera primitiva $G(x)$ de $f(x)$ é da forma $G(x) = F(x) + C$, onde C é unha constante.

Integral indefinida

O conxunto de todas as primitivas dunha función dada $f(x)$ sobre o intervalo (a, b) denomínase *i*ntegral indefinida da función $f(x)$ e denótase polo símbolo:

$$\int f(x)dx.$$

Táboa de supervivencia de primitivas

1. $\displaystyle\int a\,dx = ax + C.$
2. $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \; (\alpha \neq -1).$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log(|x|) + C \; (x \neq 0).$
4. $\displaystyle\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\log(a)} + C \; (0 < a \neq 1).$
5. $\displaystyle\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + C.$
7. $\displaystyle\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + C.$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cos(x))^{2}} = \int (1 + (\tan(x))^{2})dx = \tan(x) + C \; (x \neq \tfrac{\pi}{2} + n\pi,$ **onde** $n \in \mathbb{Z}).$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{sen}(x))^{2}} = \int (1 + (\cot(x))^{2})dx = -\cot(x) + C \; (x \neq \pi n,$ **onde** $n \in \mathbb{Z}).$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \operatorname{arcsen}(x) + C$ (**con** $- < 1 < x < 1$).
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \arctan(x) + C.$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^{2}} = \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C \; (|x| \neq 1).$

Técnicas básicas de integración

Integración por partes:

Se aplicamos a regra do produto para a derivación de funcións a $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos:

$$d(u\,v) = du\,v + u\,dv$$

Integrando e reorganizando chegamos a que se cumpre a seguinte relación:

$$\int u \; dv = u \; v - \int v \; du.$$

Polo tanto, para unha integral definida:

$$\int_a^b u \; dv = u \; v\Big]_a^b - \int_a^b v \; du.$$

Preferencia para a elección da "u": $\left\{\begin{array}{ll} A & rcsen \\ L & ogaritmo \\ P & olinomios \\ E & xponencial \\ S & eno \end{array}\right.$

Técnicas básicas de integración

Cambio de variable:

Sexan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcións, G unha primitiva de g, entón pola regra da cadea temos que

$$(G \circ f)'(x) = G'(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x).$$

Así, se facemos o cambio de variable $t = f(x)$, $dt = f'(x)dx$ obtemos a integral seguinte:

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(f(x)) + C$$

Se a integral é definida, entón:

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt.$$

Regra de Barrow

Regra de Barrow.

Sexa $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ e sexa $F(x)$ unha primitiva de f en $[a,b]$, entón:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Observación A Regra de Barrow permítenos calcular a integral definida dunha función f, empregando unha primitiva de dita función.

Cálculo de áreas

Área entre a gráfica dunha función e o eixo OX.

Sexa $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función real de variable real. A área da rexión delimitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = f(x)$ ven determinada pola seguinte integral definida:

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Área entre a gráfica dunha función e o eixo OX.

Dadas dúas funcións $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reais de variable real, a área da rexión delimitada polas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ ven determinada pola seguinte integral definida:

$$A = \int_{c_1}^{d_1} |f(x) - g(x)|\, dx,$$

Curso 0
Sesión 4

Departamento de Matemáticas

Escola Politécnica de Enxeñaría de Ferrol
UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Curso 2025-2026