Tema 3:
Diferenciación de funcións de varias variables.

Definicións e conceptos

Cálculo

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Grao en Enxeñería Mecánica e Grao en Tecnoloxías Industriais
Escola Politécnica de Enxeñería de Ferrol

Índice

Índice

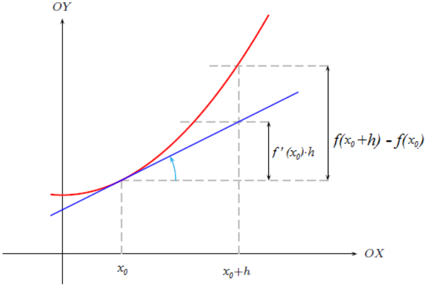
Derivada dunha función real de unha variable

Sexa $U \subset \mathbb{R}$ un conxunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}$. Sexa $x_0 \in U$. A derivada de f en x_0 (en caso de existir) é o límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Equivalentemente, unha función é diferenciable se existe un número $f'(x_0)$ tal que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$



Observación. Segundo o debuxo, a recta tanxente vén dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)h$$

ou, equivalentemente,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

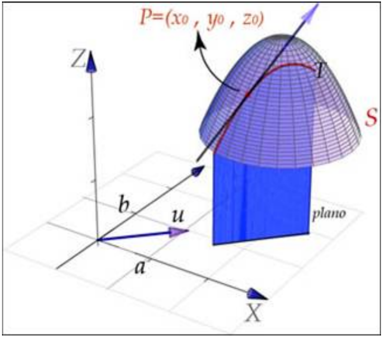
Dicimos que unha función é diferenciable se é diferenciable en todos os puntos do seu dominio.

A derivada direccional

Definición: derivada direccional

Sexa $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$. Sexa $(x_0, y_0) \in U$ e $\mathrm{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario. A derivada direccional de f na dirección do vector u no punto (x_0, y_0) é

$$D_{\mathrm{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(a, b)) - f(x_0, y_0)}{h}.$$



A derivada direccional. Exemplo

Exemplo. Dada $f(x,y) = x^2 + y^2$, calcular

- $$\begin{aligned} D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left((0,0) + h\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0 \end{aligned}$$

A derivada direccional. Exemplo

Exemplo. Dada $f(x,y) = x^2 + y^2$, calcular

- $$\begin{aligned} D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left((0,0) + h\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0 \end{aligned}$$

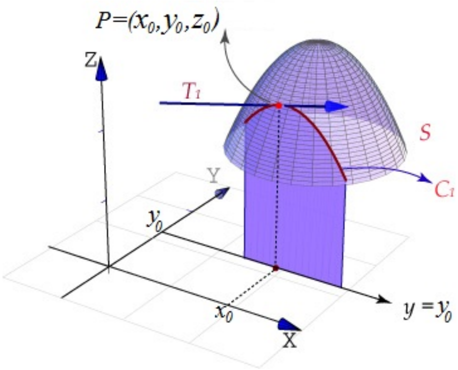
- $$\begin{aligned} D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left((1,1) + h\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1,1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}},1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1,1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{2}h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2\sqrt{2} + h = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Derivadas parciais en $\mathbb{R}^2$

Para un aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e unha función $f : U \to \mathbb{R}$, definimos:

- a derivada parcial con respecto a x: $\frac{\partial f}{\partial x}$ é a derivada direccional na dirección do vector $(1, 0)$, é dicir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$



Derivadas parciais en $\mathbb{R}^2$

Exemplo. Calculamos a derivada parcial con respecto a x da función $f(x, y) = x^2 + y^2$ no punto $(2, 1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,1) - f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 1^2 - 2^2 - 1^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 4 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4 + h = 4
\end{aligned}$$

Agora ben, cando temos funcións polinómicas coma esta, que son diferenciables, podemos aplicar as regras de derivación:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

e substituír no punto $(2, 1)$:

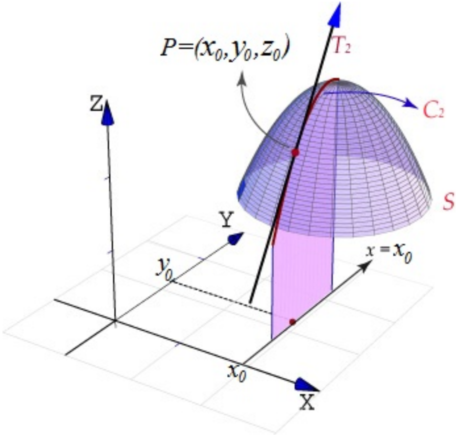
$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 4.$$

Derivadas parciais en $\mathbb{R}^2$

Para un aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e unha función $f : U \to \mathbb{R}$, definimos:

- a derivada parcial con respecto a y: $\frac{\partial f}{\partial y}$ é a derivada direccional na dirección do vector $(0, 1)$, é dicir,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$



Derivadas parciais en $\mathbb{R}^2$

Exemplo. Calculamos a derivada parcial con respecto a y da función $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy+y)$ no punto $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(0h+h)-\operatorname{sen}(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.\end{aligned}$$

Veremos máis adiante que esta función é diferenciable e que podemos calcular a súa derivada parcial derivando:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+1)\cos(xy+y)$$

e substituíndo no punto $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = (0+1)\cos(0) = 1.$$

Derivadas parciais

Derivadas parciais

Sexa $U \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto aberto e sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función escalar de n variables $(x_1, \ldots, x_n)$.
Se o seguinte límite existe, dicimos que é a derivada parcial i-ésima $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ con respecto á i-ésima variable:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{x} + h\mathrm{e}_i) - f(\mathrm{x})}{h},\end{aligned}$$

onde $1 \leq i \leq n$ e e_i é o i-ésimo vector da base canónica $\mathrm{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ co 1 situado na posición i.

Exemplo. Calculamos a derivada parcial da función $f(x, y, z) = 3x - 2zy$ con respecto á variable y nun punto xenérico (x_0, y_0, z_0).

Derivadas parciais. Exemplo

Exemplo. Calculamos a derivada parcial da función $f(x,y,z) = 3x - 2zy$ con respecto á variable y nun punto xenérico (x_0, y_0, z_0).

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x_0 - 2(y_0 + h)z_0 - 3x_0 + 2y_0 z_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2hz_0}{h} = -2z_0.
\end{aligned}$$

Ou derivando directamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2z, \text{ polo que } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = -2z_0.$$

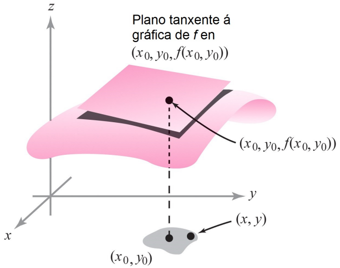
Índice

O plano tanxente a unha función nun punto

Plano tanxente

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in U$. Se existe o plano tanxente á gráfica de f no punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, este está determinado pola ecuación

$$z = P_{(x_0,y_0)}f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y - y_0)$$



A definición de diferenciabilidade para unha función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está motivada pola idea de que o plano tanxente sería unha boa aproximación á gráfica da función preto do punto de tanxencia.

Diferenciabilidade dunha función escalar de 2 variables

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unha función escalar de 2 variables. Definimos a aplicación diferencial:

$$(\mathfrak{D}_{(x_0,y_0)}f)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)y$$

de xeito que $P_{(x_0,y_0)}f(x,y) = f(x_0,y_0) + (\mathfrak{D}_{(x_0,y_0)}f)(x-x_0, y-y_0)$.

Diferenciabilidade

A función $f(x,y)$ é diferenciable en (x_0,y_0) se as derivadas parciais existen en (x_0,y_0) e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + (\mathfrak{D}_{(x_0,y_0)}f)(x-x_0,y-y_0)\right]}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Así que teriamos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - P_{(x_0,y_0)}f(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Diferenciabilidade dunha función escalar de 2 variables

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unha función escalar de 2 variables. Definimos a aplicación diferencial:

$$(\mathfrak{D}_{(x_0,y_0)} f)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) y$$

de xeito que $P_{(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) + (\mathfrak{D}_{(x_0,y_0)} f)(x-x_0, y-y_0)$.

Diferenciabilidade

A función $f(x,y)$ é diferenciable en (x_0,y_0) se as derivadas parciais existen en (x_0,y_0) e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + (\mathfrak{D}_{(x_0,y_0)} f)(x-x_0, y-y_0)\right]}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Así que teriamos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - P_{(x_0,y_0)} f(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Observación. Que existan as derivadas parciais non é suficiente para que a función sexa diferenciable.

Exemplo: $\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exemplo: diferenciabilidade e derivadas parciais

Exemplo: Estudamos as derivadas parciais e a diferenciabilidade da seguinte función no punto $(0,0)$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exemplo: diferenciabilidade e derivadas parciais

Exemplo: Estudamos as derivadas parciais e a diferenciabilidade da seguinte función no punto $(0,0)$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0.$$

Exemplo: diferenciabilidade e derivadas parciais

Exemplo: Estudamos as derivadas parciais e a diferenciabilidade da seguinte función no punto $(0,0)$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0.$$

Entón, en caso de que exista o plano tanxente, será:

$$z = f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) y$$

Exemplo: diferenciabilidade e derivadas parciais

Exemplo: Estudamos as derivadas parciais e a diferenciabilidade da seguinte función no punto $(0,0)$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0.$$

Entón, en caso de que exista o plano tanxente, será:

$$z = f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) y = 0.$$

Exemplo: diferenciabilidade e derivadas parciais

Exemplo: Estudamos as derivadas parciais e a diferenciabilidade da seguinte función no punto $(0,0)$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0.$$

Entón, en caso de que exista o plano tanxente, será:

$$z = f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) y = 0.$$

Agora estudamos o seguinte límite para ver se a función é diferenciable:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-0}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3 \cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi}{\rho^3}$$

Obtemos o $\lim_{\rho\to 0^+} \cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi$, que non existe, xa que para $\varphi = 0$ vale 0, pero para $\varphi = \frac{\pi}{4}$ vale $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Gradiente e diferenciabilidade dunha función escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gradiente dunha función

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función escalar. Se existen as derivadas parciais nun punto $\vec{x_0} \in U$ definimos o vector gradiente en $\vec{x_0}$ como

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x_0}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \right)$$

Gradiente e diferenciabilidade dunha función escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gradiente dunha función

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función escalar. Se existen as derivadas parciais nun punto $\vec{x_0} \in U$ definimos o vector gradiente en $\vec{x_0}$ como

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x_0}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \right)$$

Defínese a **diferencial** de f nun punto $\vec{x_0}$ como a aplicación seguinte:

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{x} & \rightsquigarrow & (\mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f)(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{x} \end{array}$$

que é unha aplicación linear de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Gradiente e diferenciabilidade dunha función escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gradiente dunha función

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función escalar. Se existen as derivadas parciais nun punto $\vec{x_0} \in U$ definimos o vector gradiente en $\vec{x_0}$ como

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x_0}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \right)$$

Defínese a **diferencial** de f nun punto $\vec{x_0}$ como a aplicación seguinte:

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{x} & \rightsquigarrow & (\mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f)(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{x} \end{array}$$

que é unha aplicación linear de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Diferenciabilidade dunha función escalar

Unha función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciable en $\vec{x_0}$ se existen as derivadas parciais en $\vec{x_0}$ e

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - \nabla f(\vec{x_0}) \cdot (\vec{x} - \vec{x_0})}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0$$

Propiedades da diferencial

Propiedades da diferencial

1. **Multiplicación por constantes:** Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ e $c \in \mathbb{R}$, entón cf é diferenciable e

$$\nabla(cf)(\vec{x_0}) = c\nabla f(\vec{x_0}).$$

Propiedades da diferencial

1. Multiplicación por constantes: Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ e $c \in \mathbb{R}$, entón cf é diferenciable e

$$\nabla(cf)(\vec{x_0}) = c\nabla f(\vec{x_0}).$$

2. Suma de funcións diferenciables: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{x_0} \in U$, entón $f + g$ é diferenciable e

$$\nabla(f + g)(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) + \nabla g(\vec{x_0}).$$

Propiedades da diferencial

1. Multiplicación por constantes: Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ e $c \in \mathbb{R}$, entón cf é diferenciable e
$$\nabla(cf)(\vec{x_0}) = c\nabla f(\vec{x_0}).$$
2. Suma de funcións diferenciables: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{x_0} \in U$, entón $f + g$ é diferenciable e
$$\nabla(f+g)(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) + \nabla g(\vec{x_0}).$$
3. Regra de Leibniz ou do produto: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\mathrm{x}_0 \in U$, entón fg é diferenciable e
$$\nabla(fg)(\vec{x_0}) = g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) + f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0}).$$

Propiedades da diferencial

1. Multiplicación por constantes: Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ e $c \in \mathbb{R}$, entón cf é diferenciable e
$$\nabla(cf)(\vec{x_0}) = c\nabla f(\vec{x_0}).$$
2. Suma de funcións diferenciables: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{x_0} \in U$, entón $f + g$ é diferenciable e
$$\nabla(f + g)(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) + \nabla g(\vec{x_0}).$$
3. Regra de Leibniz ou do produto: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in U$, entón fg é diferenciable e
$$\nabla(fg)(\vec{x_0}) = g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) + f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0}).$$
4. Regra do cociente: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{x_0} \in U$ con $g(\vec{x}) \neq 0$ en U, entón $\frac{f}{g}$ é diferenciable e
$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x_0}) = \frac{g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) - f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0})}{g(\vec{x_0})^2}.$$

Propiedades da diferencial

1. Multiplicación por constantes: Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ e $c \in \mathbb{R}$, entón cf é diferenciable e
$$\nabla(cf)(\vec{x_0}) = c\nabla f(\vec{x_0}).$$

2. Suma de funcións diferenciables: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{x_0} \in U$, entón $f + g$ é diferenciable e
$$\nabla(f+g)(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) + \nabla g(\vec{x_0}).$$

3. Regra de Leibniz ou do produto: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in U$, entón fg é diferenciable e
$$\nabla(fg)(\vec{x_0}) = g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) + f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0}).$$

4. Regra do cociente: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{x_0} \in U$ con $g(\vec{x}) \neq 0$ en U, entón $\frac{f}{g}$ é diferenciable e
$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x_0}) = \frac{g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) - f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0})}{g(\vec{x_0})^2}.$$

Exemplo. Os polinomios son funcións diferenciables.

Propiedades do gradiente

Relación entre o gradiente e as derivadas direccionais

Teorema. Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciable, entón todas as derivadas direccionais existen e veñen dadas por

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v}$$

Propiedades do gradiente

Relación entre o gradiente e as derivadas direccionais

Teorema. Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciable, entón todas as derivadas direccionais existen e veñen dadas por

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v}$$

Exemplo. Calculamos a derivada direccional da función $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ no punto $(1,0)$ e na dirección do vector $(1,1)$.

Propiedades do gradiente

Relación entre o gradiente e as derivadas direccionais

Teorema. Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciable, entón todas as derivadas direccionais existen e veñen dadas por

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v}$$

Exemplo. Calculamos a derivada direccional da función $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ no punto $(1, 0)$ e na dirección do vector $(1, 1)$.

A partir da expresión anterior vemos que se $\|\vec{v}\| = 1$ e se α é o ángulo que forman $\nabla f(\vec{x_0})$ e $\vec{v}$ entón

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(\vec{x_0})\| \cos \alpha.$$

Polo tanto, o máximo valor da derivada direccional acádase con $\alpha = 0$ e o mínimo con $\alpha = \pi$.

Propiedades do gradiente

Relación entre o gradiente e as derivadas direccionais

Teorema. Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciable, entón todas as derivadas direccionais existen e veñen dadas por

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v}$$

Exemplo. Calculamos a derivada direccional da función $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ no punto $(1,0)$ e na dirección do vector $(1,1)$.

A partir da expresión anterior vemos que se $\|\vec{v}\| = 1$ e se α é o ángulo que forman $\nabla f(\vec{x_0})$ e $\vec{v}$ entón

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(\vec{x_0})\| \cos \alpha.$$

Polo tanto, o máximo valor da derivada direccional acádase con $\alpha = 0$ e o mínimo con $\alpha = \pi$.

Dirección de máximo crecemento dende un punto

Corolario. Se $\nabla f(\vec{x_0}) \neq 0$ entón $\nabla f(\vec{x_0})$ indica a dirección de máximo crecemento da función f en $\vec{x_0}$.

Índice

Diferenciabilidade dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Matriz xacobiana

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función vectorial con $f = (f_1, \dots, f_m)$. Se existen as derivadas parciais de $f_1, \dots, f_m$ en $\vec{x_0} \in U$ entón defínese a **matriz xacobiana** de f en $\vec{x_0}$ como

$$J_f(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Matriz xacobiana

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función vectorial con $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Se existen as derivadas parciais de $f_1, \ldots, f_m$ en $\vec{x_0} \in U$ entón defínese a **matriz xacobiana** de f en $\vec{x_0}$ como

$$J_f(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

Diferenciabilidade

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función vectorial. A función f é diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ se existe a matriz xacobiana de f en $\vec{x_0}$ e

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - J_f(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0})\|}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Matriz xacobiana

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función vectorial con $f = (f_1, \dots, f_m)$. Se existen as derivadas parciais de $f_1, \dots, f_m$ en $\vec{x_0} \in U$ entón defínese a **matriz xacobiana** de f en $\vec{x_0}$ como

$$J_f(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

Diferenciabilidade

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función vectorial. A función f é diferenciable en $\vec{x_0} \in U$ se existe a matriz xacobiana de f en $\vec{x_0}$ e

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - J_f(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0})\|}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0$$

Que unha función sexa diferenciable é equivalente a que todas as súas funcións compoñente sexan diferenciables.

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2}, \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) \text{ se } x+y \neq 0 \\ (0,0) \text{ se } x+y = 0 \end{cases}$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2}, \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) \text{ se } x+y \neq 0 \\ (0,0) \text{ se } x+y=0 \end{cases}$$

Consideramos as funcións compoñentes

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} \text{ se } x+y \neq 0 \\ 0 \text{ se } x+y=0 \end{cases}, \quad f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y} \text{ se } x+y \neq 0 \\ 0 \text{ se } x+y=0 \end{cases}$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2},\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) \text{ se } x+y\neq 0\\ (0,0) \text{ se } x+y=0\end{cases}$$

Consideramos as funcións compoñentes

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2} \text{ se } x+y\neq 0\\ 0 \text{ se } x+y=0\end{cases},\ f_2(x,y)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y} \text{ se } x+y\neq 0\\ 0 \text{ se } x+y=0\end{cases}$$

Achamos as derivadas parciais de f_1 e f_2:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(h,0)-f_1(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0^3}{h^2}-0}{h}=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(0,h)-f_1(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3}=1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h^2}=\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)^2=1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_2(0,h)-f_2(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 0}{h}-0}{h}=0.$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2},\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) \text{ se } x+y\neq 0\\ (0,0) \text{ se } x+y=0\end{cases}$$

Consideramos as funcións compoñentes

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2} \text{ se } x+y\neq 0\\ 0 \text{ se } x+y=0\end{cases}, \quad f_2(x,y)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y} \text{ se } x+y\neq 0\\ 0 \text{ se } x+y=0\end{cases}$$

Polo tanto a matriz xacobiana vén dada por

$$J_f(0,0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2}, \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) \text{ se } x+y\neq 0 \\ (0,0) \text{ se } x+y=0 \end{cases}$$

Agora estudamos a diferenciabilidade comprobando se o seguinte límite é 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left\| f(x,y)-f(0,0)-J_f(0,0)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2}, \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) \text{ se } x+y \neq 0 \\ (0,0) \text{ se } x+y = 0 \end{cases}$$

Agora estudamos a diferenciabilidade comprobando se o seguinte límite é 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left\| f(x,y) - f(0,0) - J_f(0,0)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

se $x+y \neq 0$, entón

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left\| \left(\frac{y^3}{x^2+y^2}, \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) - (0,0) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|}{\|(x,y)\|}$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2},\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) & \text{se } x+y\neq 0\\ (0,0) \text{ se } x+y=0\end{cases}$$

Agora estudamos a diferenciabilidade comprobando se o seguinte límite é 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left\|f(x,y)-f(0,0)-J_f(0,0)\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)\right\|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

se $x+y\neq 0$, entón

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left\|\left(\frac{y^3}{x^2+y^2},\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right)-(0,0)-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|}{\|(x,y)\|}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left\|\left(\frac{y^3}{x^2+y^2}-y,\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}-x\right)\right\|}{\|(x,y)\|}$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{y^3}{x^2+y^2}, \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) \text{ se } x+y \neq 0 \\ (0,0) \text{ se } x+y=0 \end{cases}$$

Agora estudamos a diferenciabilidade comprobando se o seguinte límite é 0:

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left\|\left(\frac{y^3}{x^2+y^2} - y, \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y} - x\right)\right\|}{\|(x,y)\|}$$

Calculamos o límite restrinxido a $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left\|\left(\frac{x^3}{2x^2} - x, \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2x} - x\right)\right\|}{\|(x,x)\|} = \lim_{x\to 0} \frac{\left\|\left(-\frac{x^2}{2x}, \frac{\operatorname{sen}^2 x - 2x^2}{2x}\right)\right\|}{\sqrt{2}x}$$

Diferenciabilidade dunha función vectorial. Exemplo

Exemplo. Estudamos a diferenciabilidade en $(0,0)$ da función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2},\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}\right) \text{ se } x+y\neq 0\\ (0,0) \text{ se } x+y=0\end{cases}$$

Agora estudamos a diferenciabilidade comprobando se o seguinte límite é 0:

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left\|\left(\frac{y^3}{x^2+y^2}-y,\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+y}-x\right)\right\|}{\|(x,y)\|}$$

Calculamos o límite restrinxido a $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x=y\}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left\|\left(\frac{x^3}{2x^2}-x,\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2x}-x\right)\right\|}{\|(x,x)\|}=\lim_{x\to 0}\frac{\left\|\left(-\frac{x^2}{2x},\frac{\operatorname{sen}^2 x-2x^2}{2x}\right)\right\|}{\sqrt{2}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x^4+\operatorname{sen}^4 x-2x^2\operatorname{sen}^2 x}}{2\sqrt{2}x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

Polo que a función f non é diferenciable.

Diferencial dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diferencial dunha función nun punto

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función diferenciable. A **diferencial** de f no punto $\vec{x_0}$ defínese como

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \rightsquigarrow & \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f(\vec{x}) := J_f(\vec{x_0})(\vec{x}) \end{array}$$

onde $(\vec{x})$ é a matriz columna formada coas compoñentes do vector $\vec{x}$.

Diferencial dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diferencial dunha función nun punto

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función diferenciable. A **diferencial** de f no punto $\vec{x_0}$ defínese como

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \rightsquigarrow & \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f(\vec{x}) := J_f(\vec{x_0})(\vec{x}) \end{array}$$

onde $(\vec{x})$ é a matriz columna formada coas compoñentes do vector $\vec{x}$.

A diferencial é unha aplicación linear con matriz asociada a matriz xacobiana.

Diferencial dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diferencial dunha función nun punto

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función diferenciable. A **diferencial** de f no punto $\vec{x_0}$ defínese como

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \rightsquigarrow & \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f(\vec{x}) := J_f(\vec{x_0})(\vec{x}) \end{array}$$

onde $(\vec{x})$ é a matriz columna formada coas compoñentes do vector $\vec{x}$.

A diferencial é unha aplicación linear con matriz asociada a matriz xacobiana.

Observacións. Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función.

Diferencial dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diferencial dunha función nun punto

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función diferenciable. A **diferencial** de f no punto $\vec{x_0}$ defínese como

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \rightsquigarrow & \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f(\vec{x}) := J_f(\vec{x_0})(\vec{x}) \end{array}$$

onde $(\vec{x})$ é a matriz columna formada coas compoñentes do vector $\vec{x}$.

A diferencial é unha aplicación linear con matriz asociada a matriz xacobiana.

Observacións. Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función.

- Se f é diferenciable en $\vec{x_0}$, entón f é continua en $\vec{x_0}$.

Diferencial dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diferencial dunha función nun punto

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función diferenciable. A **diferencial** de f no punto $\vec{x_0}$ defínese como

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \rightsquigarrow & \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f(\vec{x}) := J_f(\vec{x_0})(\vec{x}) \end{array}$$

onde $(\vec{x})$ é a matriz columna formada coas compoñentes do vector $\vec{x}$.

A diferencial é unha aplicación linear con matriz asociada a matriz xacobiana.

Observacións. Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función.

- Se f é diferenciable en $\vec{x_0}$, entón f é continua en $\vec{x_0}$.
- Se existen as derivadas parciais de f en $\vec{x_0}$ e son continuas nunha veciñanza de $\vec{x_0}$, entón f é diferenciable en $\vec{x_0}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Der. parciais}\\ \text{continuas en } B_r(\vec{x_0})\end{array}} \Rightarrow \boxed{f \text{ diferenciable}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{f continua}} \\ \boxed{\text{Existen der. parc.}} \end{array} \right.$$

Diferencial dunha función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diferencial dunha función nun punto

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función diferenciable. A **diferencial** de f no punto $\vec{x_0}$ defínese como

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \rightsquigarrow & \mathfrak{D}_{\vec{x_0}} f(\vec{x}) := J_f(\vec{x_0})(\vec{x}) \end{array}$$

onde $(\vec{x})$ é a matriz columna formada coas compoñentes do vector $\vec{x}$.

A diferencial é unha aplicación linear con matriz asociada a matriz xacobiana.

Observacións. Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ unha función.

- Se f é diferenciable en $\vec{x_0}$, entón f é continua en $\vec{x_0}$.
- Se existen as derivadas parciais de f en $\vec{x_0}$ e son continuas nunha veciñanza de $\vec{x_0}$, entón f é diferenciable en $\vec{x_0}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Der. parciais} \\ \text{continuas en } B_r(\vec{x_0})\end{array}} \nLeftarrow \boxed{f \text{ diferenciable}} \nLeftarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{f \ \text{ continua}} \\ \boxed{\text{Existen der. parc.}} \end{array} \right.$$

Ollo: existen funcións diferenciables que non teñen derivadas parciais continuas.

Propiedades da diferencial

1. Multiplicación por constantes: Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ e $c \in \mathbb{R}$, entón cf é diferenciable e

$$J_{cf}(\vec{x}_0) = cJ_f(\vec{x}_0).$$

2. Suma de funcións diferenciables: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $\vec{x}_0 \in U$, entón $f + g$ é diferenciable e

$$J_{f+g}(\vec{x}_0) = J_f(\vec{x}_0) + J_g(\vec{x}_0).$$

3. Regra de Leibniz ou do produto: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{x}_0 \in U$, entón fg é diferenciable e

$$J_{fg}(\vec{x}_0) = g(\vec{x}_0)J_f(\vec{x}_0) + f(\vec{x}_0)J_g(\vec{x}_0).$$

4. Regra do cociente: Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{x}_0 \in U$ con $g(\vec{x}) \neq 0$ en U, entón f/g é diferenciable e

$$J_{f/g}(\vec{x}_0) = \frac{g(\vec{x}_0)J_f(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)J_g(\vec{x}_0)}{[g(\vec{x}_0)]^2}.$$

Propiedades da diferencial

Regra da cadea

Sexan $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ conxuntos abertos. Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funcións tales que $f(U) \subset V$, de xeito que $g \circ f$ está ben definida.

Sexa f diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ e g diferenciable en $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in V$. Entón $g \circ f$ é diferenciable en $\vec{x}_0$ e ademais

$$J_{g\circ f}(\vec{x}_0) = J_g(\vec{y}_0)\, J_f(\vec{x}_0).$$

Propiedades da diferencial

Regra da cadea

Sexan $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ conxuntos abertos. Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funcións tales que $f(U) \subset V$, de xeito que $g \circ f$ está ben definida.

Sexa f diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ e g diferenciable en $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in V$. Entón $g \circ f$ é diferenciable en $\vec{x}_0$ e ademais

$$J_{g \circ f}(\vec{x}_0) = J_g(\vec{y}_0)\, J_f(\vec{x}_0).$$

Exemplo. Sexan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x, y) = (3x, x + y)$ e $g(u, v) = -u + v$.

Propiedades da diferencial

Regra da cadea

Sexan $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ conxuntos abertos. Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funcións tales que $f(U) \subset V$, de xeito que $g \circ f$ está ben definida.
Sexa f diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ e g diferenciable en $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in V$. Entón $g \circ f$ é diferenciable en $\vec{x}_0$ e ademais

$$J_{g\circ f}(\vec{x}_0) = J_g(\vec{y}_0)\, J_f(\vec{x}_0).$$

Exemplo. Sexan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x, y) = (3x, x + y)$ e $g(u, v) = -u + v$. Calculamos

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } J_g(u, v) = (-1, 1)\,.$$

Propiedades da diferencial

Regra da cadea

Sexan $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ conxuntos abertos. Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funcións tales que $f(U) \subset V$, de xeito que $g \circ f$ está ben definida.
Sexa f diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ e g diferenciable en $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in V$. Entón $g \circ f$ é diferenciable en $\vec{x}_0$ e ademais

$$J_{g \circ f}(\vec{x}_0) = J_g(\vec{y}_0)\, J_f(\vec{x}_0).$$

Exemplo. Sexan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x, y) = (3x, x + y)$ e $g(u, v) = -u + v$. Calculamos

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } J_g(u, v) = (-1, 1)\,.$$

Se compoñemos $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, temos $g(f(x, y)) = g(3x, x + y) = -2x + y$.

Propiedades da diferencial

Regra da cadea

Sexan $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ conxuntos abertos. Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funcións tales que $f(U) \subset V$, de xeito que $g \circ f$ está ben definida.

Sexa f diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ e g diferenciable en $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in V$. Entón $g \circ f$ é diferenciable en $\vec{x}_0$ e ademais

$$J_{g\circ f}(\vec{x}_0) = J_g(\vec{y}_0)\, J_f(\vec{x}_0).$$

Exemplo. Sexan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x, y) = (3x, x + y)$ e $g(u, v) = -u + v$. Calculamos

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } J_g(u, v) = (-1, 1)\,.$$

Se compoñemos $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, temos $g(f(x, y)) = g(3x, x + y) = -2x + y$. Polo tanto

$$J_{g\circ f}(x, y) = (-2, 1)$$

Propiedades da diferencial

Regra da cadea

Sexan $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ conxuntos abertos. Sexan $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funcións tales que $f(U) \subset V$, de xeito que $g \circ f$ está ben definida.
Sexa f diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ e g diferenciable en $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0) \in V$. Entón $g \circ f$ é diferenciable en $\vec{x}_0$ e ademais

$$J_{g \circ f}(\vec{x}_0) = J_g(\vec{y}_0)\, J_f(\vec{x}_0).$$

Exemplo. Sexan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x, y) = (3x, x + y)$ e $g(u, v) = -u + v$. Calculamos

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } J_g(u, v) = (-1, 1)\,.$$

Se compoñemos $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, temos $g(f(x, y)) = g(3x, x + y) = -2x + y$. Polo tanto

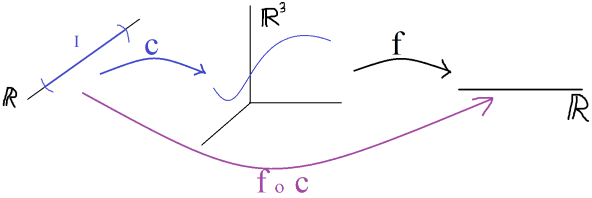
$$J_{g \circ f}(x, y) = (-2, 1)$$

e cúmprese

$$J_g(f(x, y))\, J_f(x, y) = (-1, 1) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2, 1) = J_{g \circ f}(x, y).$$

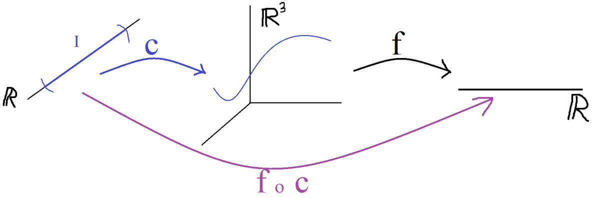
A diferencial en curvas parametrizadas

Sexa $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ unha curva parametrizada e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. A función $h = f \circ c$ é unha función real de unha variable.



A diferencial en curvas parametrizadas

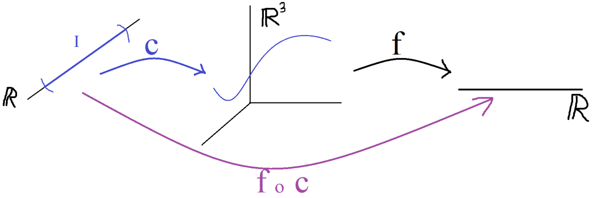
Sexa $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ unha curva parametrizada e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. A función $h = f \circ c$ é unha función real de unha variable.



A derivada da composición verifica:

A diferencial en curvas parametrizadas

Sexa $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ unha curva parametrizada e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. A función $h = f \circ c$ é unha función real de unha variable.

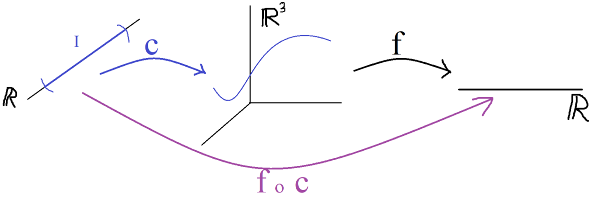


A derivada da composición verifica:

$$h'(t) \quad = \quad (f \circ c)'(t) =$$

A diferencial en curvas parametrizadas

Sexa $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ unha curva parametrizada e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. A función $h = f \circ c$ é unha función real de unha variable.

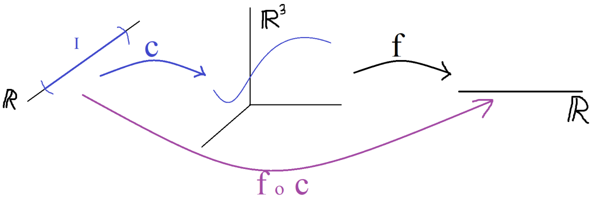


A derivada da composición verifica:

$$h'(t) \quad = \quad (f \circ c)'(t) = \underbrace{J_f(c(t))}_{\mathcal{M}_{\mathbf{1}\times\mathbf{3}}} \underbrace{J_c(t)}_{\mathcal{M}_{\mathbf{3}\times\mathbf{1}}}$$

A diferencial en curvas parametrizadas

Sexa $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ unha curva parametrizada e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. A función $h = f \circ c$ é unha función real de unha variable.

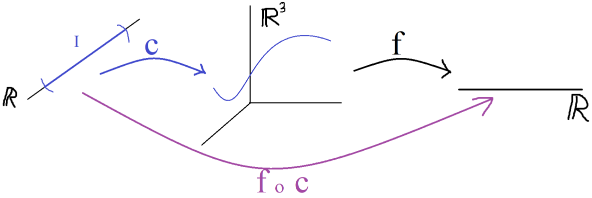


A derivada da composición verifica:

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= (f \circ c)'(t) = \underbrace{J_f(c(t))}_{\mathcal{M}_{\mathbf{1}\times\mathbf{3}}}\,\underbrace{J_c(t)}_{\mathcal{M}_{\mathbf{3}\times\mathbf{1}}} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

A diferencial en curvas parametrizadas

Sexa $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ unha curva parametrizada e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. A función $h = f \circ c$ é unha función real de unha variable.



A derivada da composición verifica:

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= (f \circ c)'(t) = \underbrace{J_f(c(t))}_{\mathcal{M}_{\mathbf{1}\times\mathbf{3}}}\,\underbrace{J_c(t)}_{\mathcal{M}_{\mathbf{3}\times\mathbf{1}}} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)
\end{aligned}
$$

Gradiente e conxuntos de nivel

Teorema

Sexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función de clase C^1 e sexa $\vec{x}_0$ un punto no conxunto de nivel S definido por $f(\vec{x}) = k$, para $k \in \mathbb{R}$. Entón, se $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$, $\nabla f(\vec{x}_0)$ é perpendicular á superficie de nivel S en $\vec{x}_0$, é dicir, se $\vec{v}$ é un vector tanxente a S en $\vec{x}_0$ entón

$$\nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = 0$$

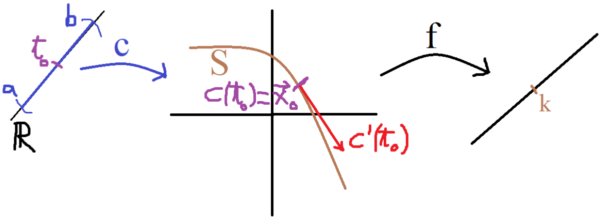
Gradiente e conxuntos de nivel

Teorema

Sexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función de clase C^1 e sexa $\vec{x}_0$ un punto no conxunto de nivel S definido por $f(\vec{x}) = k$, para $k \in \mathbb{R}$. Entón, se $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$, $\nabla f(\vec{x}_0)$ é perpendicular á superficie de nivel S en $\vec{x}_0$, é dicir, se $\vec{v}$ é un vector tanxente a S en $\vec{x}_0$ entón

$$\nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = 0$$

Idea da proba cando o conxunto de nivel é unha curva no plano.
Parametrizamos unha curva de nivel S por $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$, de modo que $c(t_0) = \vec{x}_0$. Temos entón que $f(c(t)) = k$.



Gradiente e conxuntos de nivel

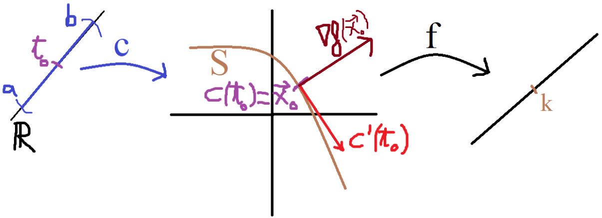
Teorema

Sexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función de clase C^1 e sexa $\vec{x}_0$ un punto no conxunto de nivel S definido por $f(\vec{x}) = k$, para $k \in \mathbb{R}$. Entón, se $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$, $\nabla f(\vec{x}_0)$ é perpendicular á superficie de nivel S en $\vec{x}_0$, é dicir, se $\vec{v}$ é un vector tanxente a S en $\vec{x}_0$ entón

$$\nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = 0$$

Idea da proba cando o conxunto de nivel é unha curva no plano.
Parametrizamos unha curva de nivel S por $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$, de modo que $c(t_0) = \vec{x}_0$. Temos entón que $f(c(t)) = k$. Derivamos aplicando a regra da cadea:

$$0 = (f \circ c)'(t_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot c'(t_0)$$



Gradiente e conxuntos de nivel

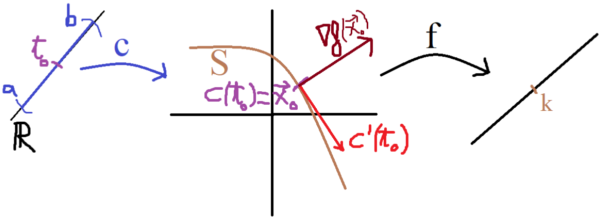
Teorema

Sexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función de clase C^1 e sexa $\vec{x}_0$ un punto no conxunto de nivel S definido por $f(\vec{x}) = k$, para $k \in \mathbb{R}$. Entón, se $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$, $\nabla f(\vec{x}_0)$ é perpendicular á superficie de nivel S en $\vec{x}_0$, é dicir, se $\vec{v}$ é un vector tanxente a S en $\vec{x}_0$ entón

$$\nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = 0$$

Idea da proba cando o conxunto de nivel é unha curva no plano.
Parametrizamos unha curva de nivel S por $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$, de modo que $c(t_0) = \vec{x}_0$. Temos entón que $f(c(t)) = k$. Derivamos aplicando a regra da cadea:

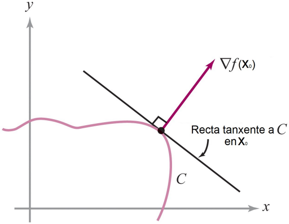
$$0 = (f \circ c)'(t_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot c'(t_0)$$

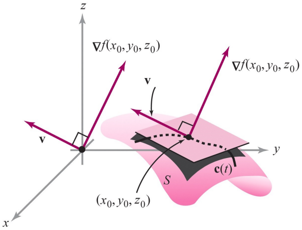


polo que $\nabla f(c(t_0))$ é perpendicular a $c'(t_0)$.

Gradiente e conxuntos de nivel

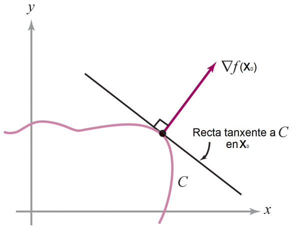
O gradiente corta perpendicularmente aos conxuntos de nivel:

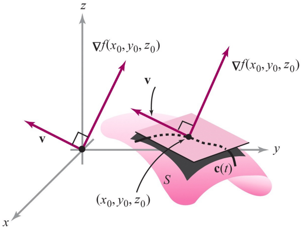




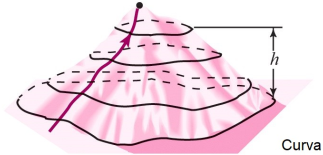
Gradiente e conxuntos de nivel

O gradiente corta perpendicularmente aos conxuntos de nivel:

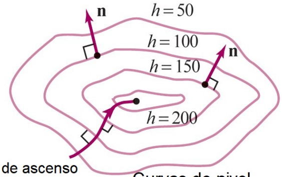




Exemplo. Se pretendemos subir unha montaña seguindo en todo momento o camiño máis pendente, entón seguiremos a dirección marcada polo vector gradiente e avanzaremos cortando perpendicularmente as curvas de nivel.



(a)



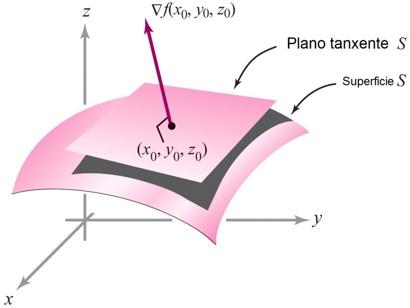
Curva de ascenso con máxima pendente.

Curvas de nivel nunha montaña de 250 metros de altura.

(b)

Plano tanxente a unha superficie de nivel de nivel

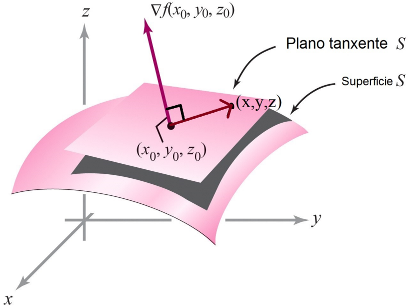
Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unha función escalar diferenciable. Sexa S a superficie de nivel para o valor $k \in \mathbb{R}$. Se $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,



Plano tanxente a unha superficie de nivel de nivel

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unha función escalar diferenciable. Sexa S a superficie de nivel para o valor $k \in \mathbb{R}$. Se $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entón o plano tanxente a S no punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está definido pola ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$



Índice

Derivadas parciais de orde superior

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función diferenciable en U. Podemos definir a función derivada parcial i-ésima:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : & U \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \to & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Derivadas parciais de orde superior

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función diferenciable en U. Podemos definir a función derivada parcial i-ésima:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \to & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Exemplo. Sexa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y, z) = x + \cos(y - z)$. Entón as funcións derivadas parciais son funcións:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que veñen dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\operatorname{sen}(y - z), \ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \operatorname{sen}(y - z).$$

Derivadas parciais de orde superior

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función diferenciable en U. Podemos definir a función derivada parcial i-ésima:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \to & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Exemplo. Sexa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y, z) = x + \cos(y - z)$. Entón as funcións derivadas parciais son funcións:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que veñen dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\operatorname{sen}(y - z),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \operatorname{sen}(y - z).$$

En xeral, podemos estudar

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Así defínense as parciais de orde 2 e seguindo este proceso defínense as parciais de orde 3, 4, 5 etc.

Derivadas parciais de orde 2. Teorema de Schwarz

Exemplo. No exemplo anterior, temos, entre outras parciais segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \cos(y - z), \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -\cos(y - z).$$

Derivadas parciais de orde 2. Teorema de Schwarz

Exemplo. No exemplo anterior, temos, entre outras parciais segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)=\cos(y-z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=-\cos(y-z).$$

Definición. Se f é diferenciable ata orde n e as súas parciais de orde n son continuas, entón dise que f é de clase n ($f \in \mathcal{C}^n$).

Derivadas parciais de orde 2. Teorema de Schwarz

Exemplo. No exemplo anterior, temos, entre outras parciais segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \cos(y-z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -\cos(y-z).$$

Definición. Se f é diferenciable ata orde n e as súas parciais de orde n son continuas, entón dise que f é de clase n ($f \in \mathcal{C}^n$).

Teorema de Schwarz

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función de clase 2 ($f \in \mathcal{C}^2$), entón

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n).$$

Derivadas parciais de orde 2. Teorema de Schwarz

Exemplo. No exemplo anterior, temos, entre outras parciais segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \cos(y - z), \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -\cos(y - z).$$

Definición. Se f é diferenciable ata orde n e as súas parciais de orde n son continuas, entón dise que f é de clase n ($f \in \mathcal{C}^n$).

Teorema de Schwarz

Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función de clase 2 ($f \in \mathcal{C}^2$), entón

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n).$$

Exemplo. Así, no exemplo anterior temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \cos(y - z).$$

Tema 3:
Diferenciación de funcións de varias variables.

Definicións e conceptos

Cálculo

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Grao en Enxeñería Mecánica e Grao en Tecnoloxías Industriais
Escola Politécnica de Enxeñería de Ferrol