Topoloxía en $\mathbb{R}^n$

Cálculo

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Grao en Enxeñería Mecánica e Grao en Tecnoloxías Industriais
Escola Politécnica de Enxeñería de Ferrol

Índice

1. Os espazos vectoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
2. Produto escalar
3. Produto vectorial en $\mathbb{R}^3$
4. Aplicacións dos produtos escalar e vectorial
5. Coordenadas
6. Topoloxía en $\mathbb{R}^n$

O plano $\mathbb{R}^2$ e o espazo $\mathbb{R}^3$

Definimos os seguintes conxuntos:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

O plano $\mathbb{R}^2$ e o espazo $\mathbb{R}^3$

Definimos os seguintes conxuntos:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Estes conxuntos están dotados das seguintes operacións:

Consideramos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Suma de vectores:
  En $\mathbb{R}^2$: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
  En $\mathbb{R}^3$: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
- Produto por un escalar:
  En $\mathbb{R}^2$: $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
  En $\mathbb{R}^3$: $\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

O plano $\mathbb{R}^2$ e o espazo $\mathbb{R}^3$

Definimos os seguintes conxuntos:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Estes conxuntos están dotados das seguintes operacións:

Consideramos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Suma de vectores:
  En $\mathbb{R}^2$: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
  En $\mathbb{R}^3$: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
- Produto por un escalar:
  En $\mathbb{R}^2$: $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$
  En $\mathbb{R}^3$: $\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

Aos elementos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ chamámoslles **vectores** e aos do corpo $\mathbb{R}$ chamámoslles **escalares**.

Correspondencia xeométrica

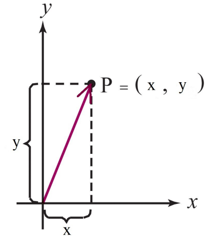
Identificación xeométrica: coordenadas cartesianas

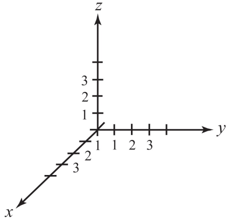
Identificamos os vectores con segmentos de recta orientados, é dicir, con segmentos de recta cunha frecha no seu extremo.

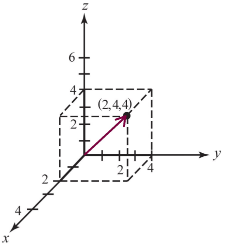
Correspondencia xeométrica

Identificación xeométrica: coordenadas cartesianas

Identificamos os vectores con segmentos de recta orientados, é dicir, con segmentos de recta cunha frecha no seu extremo.



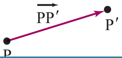




Propiedades:

- Se un vector ten a súa base na orixe, entón as coordenadas do seu extremo son as súas compoñentes.
- O vector que une os puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $P' = (x_2, y_2, z_2)$ represéntase polo segmento que une eses puntos e ten coordenadas

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



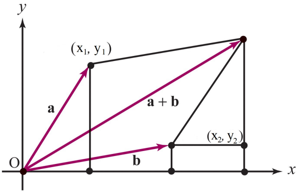
Operacións con vectores

A suma e o produto por escalares xeométricas correspóndense coas mesmas operacións alxébricas.

Operacións con vectores

A suma e o produto por escalares xeométricas correspóndense coas mesmas operacións alxébricas.

Os vectores súmanse pola regra do paralelogramo:

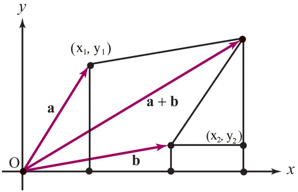


$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Operacións con vectores

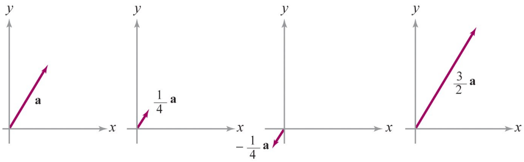
A suma e o produto por escalares xeométricas correspóndense coas mesmas operacións alxébricas.

Os vectores súmanse pola regra do paralelogramo:



$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

O produto por un escalar "estira" ou "encolle" o vector pola medida do escalar e cambia o sentido do vector se o escalar é negativo:

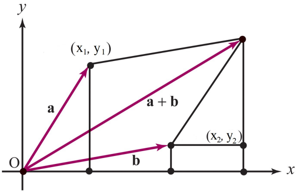


$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}(x, y) &= \left(\tfrac{x}{4}, \tfrac{y}{4}\right), \\ -\tfrac{1}{4}(x, y) &= \left(-\tfrac{x}{4}, -\tfrac{y}{4}\right), \\ \tfrac{3}{2}(x, y) &= \left(\tfrac{3x}{2}, \tfrac{3y}{2}\right). \end{aligned}$$

Operacións con vectores

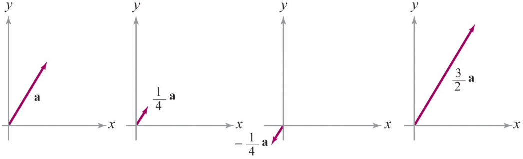
A suma e o produto por escalares xeométricas correspóndense coas mesmas operacións alxébricas.

Os vectores súmanse pola regra do paralelogramo:



$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

O produto por un escalar "estira" ou "encolle" o vector pola medida do escalar e cambia o sentido do vector se o escalar é negativo:

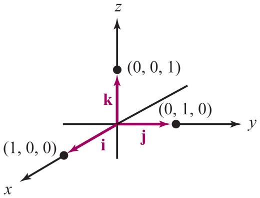


$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}(x,y) &= \left(\tfrac{x}{4}, \tfrac{y}{4}\right), \\ -\tfrac{1}{4}(x,y) &= \left(-\tfrac{x}{4}, -\tfrac{y}{4}\right), \\ \tfrac{3}{2}(x,y) &= \left(\tfrac{3x}{2}, \tfrac{3y}{2}\right). \end{aligned}$$

Para pensar: Como se restan dous vectores? Hai relación entre a resta e a diagonal do paralelogramo?

Os vectores *i*, *j*, *k*

Introducimos os vectores **i**, **j** e **k** nas direccións dos eixes coordenados:

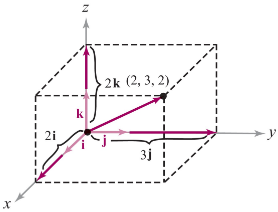


- $\mathbf{i} = (1,0,0)$
- $\mathbf{j} = (0,1,0)$
- $\mathbf{k} = (0,0,1)$

Estes vectores permiten escribir calquera vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ da forma

$$\boldsymbol{v} = v_1\,\boldsymbol{i} + v_2\,\boldsymbol{j} + v_3\,\boldsymbol{k}.$$

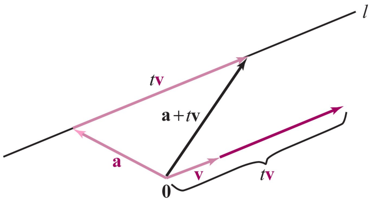
Exemplo: representamos o vector $(2,3,2)$



Ecuacións paramétricas da recta

- A ecuación da recta a través do punto **a** e na dirección do vector **v** é:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t\ \boldsymbol{v}.$$



- As ecuacións da recta a través dos puntos (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) son:

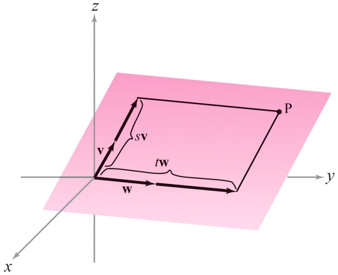
$$\begin{aligned} x &= a_1 + t(a_2 - a_1) \\ y &= b_1 + t(b_2 - b_1) \\ z &= c_1 + t(c_2 - c_1) \end{aligned}$$

Ecuación paramétrica do plano

O plano a través da orixe que contén aos vectores **v** e **w** está formado polos puntos da forma

$$\boldsymbol{p}(s,t) = s\,\boldsymbol{v} + t\,\boldsymbol{w},$$

onde s e t son parámetros que percorren os números reais.



Se o plano non pasa pola orixe e pasa polo punto **a**, entón calquera punto do plano é da forma

$$\boldsymbol{p}(s,t) = \mathrm{a} + s\,\boldsymbol{v} + t\,\boldsymbol{w},$$

onde s e t son parámetros que percorren os números reais.

Índice

1. Os espazos vectoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
2. Produto escalar
3. Produto vectorial en $\mathbb{R}^3$
4. Aplicacións dos produtos escalar e vectorial
5. Coordenadas
6. Topoloxía en $\mathbb{R}^n$

Produto escalar de vectores

Definición

O **produto escalar** dos vectores $\boldsymbol{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{w} = (x_2, y_2, z_2)$ defínese por:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2.$$

O produto escalar chámase así porque o resultado do produto é un escalar, é dicir, un número real.

Produto escalar de vectores

Definición

O **produto escalar** dos vectores $\boldsymbol{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{w} = (x_2, y_2, z_2)$ defínese por:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2.$$

O produto escalar chámase así porque o resultado do produto é un escalar, é dicir, un número real.

Propiedades: Para vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ e un número real α cúmprese:

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$
- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
- $(\alpha \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$

- Dous vectores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ son perpendiculares ou ortogonais se $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$.

Produto escalar de vectores

Definición

O **produto escalar** dos vectores $\boldsymbol{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{w} = (x_2, y_2, z_2)$ defínese por:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2.$$

O produto escalar chámase así porque o resultado do produto é un escalar, é dicir, un número real.

Propiedades: Para vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ e un número real α cúmprese:

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$
- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
- $(\alpha \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
- Dous vectores $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ son perpendiculares ou ortogonais se $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$.

Exemplo: os vectores $(1, -2, 3)$ e $(5, 1, -1)$ son perpendiculares, xa que $(1, -2, 3) \cdot (5, 1, -1) = 0$.

Norma dun vector

Norma dun vector

A lonxitude ou **norma** dun vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vén dada por:

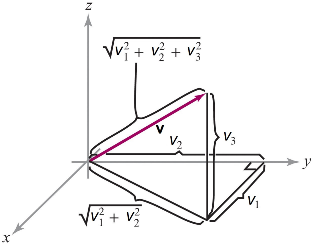
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Norma dun vector

Norma dun vector

A lonxitude ou **norma** dun vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vén dada por:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

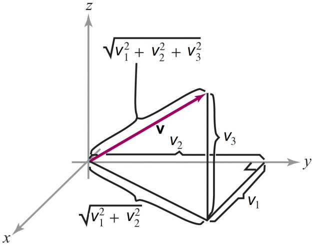


Norma dun vector

Norma dun vector

A lonxitude ou **norma** dun vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vén dada por:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$



Propiedades:

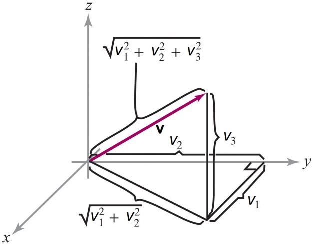
- A norma dun vector sempre é positiva ou cero: $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$. Ademais, se $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ entón $\boldsymbol{v} = (0, 0, 0)$.
- $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|$

Norma dun vector

Norma dun vector

A lonxitude ou **norma** dun vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vén dada por:

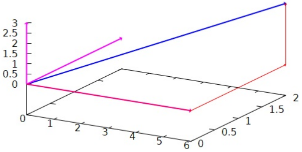
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$



Propiedades:

- A norma dun vector sempre é positiva ou cero: $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$. Ademais, se $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ entón $\boldsymbol{v} = (0, 0, 0)$.
- $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|$

Exemplo:
Calculamos a norma do vector $(6, 2, 3)$ como segue:
$\|(6, 2, 3)\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$



Distancias e ángulos

Distancia: A norma dos vectores permítenos medir a distancia entre 2 puntos.

- a distancia entre os puntos P e Q vén dada pola norma do vector que une $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancias e ángulos

Distancia: A norma dos vectores permítenos medir a distancia entre 2 puntos.

- a distancia entre os puntos P e Q vén dada pola norma do vector que une $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ángulos: A seguinte relación permítenos calcular o ángulo que forman dous vectores usando a súa norma e produto escalar.

Teorema

Sexan **v** e **w** dous vectores no espazo e sexa θ o ángulo entre eles. Entón:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\| \cos\theta, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Distancias e ángulos

Distancia: A norma dos vectores permítenos medir a distancia entre 2 puntos.

- a distancia entre os puntos P e Q vén dada pola norma do vector que une $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ángulos: A seguinte relación permítenos calcular o ángulo que forman dous vectores usando a súa norma e produto escalar.

Teorema

Sexan **v** e **w** dous vectores no espazo e sexa θ o ángulo entre eles. Entón:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\| \cos\theta, \; 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Desigualdade triangular

Para dous vectores calquera $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ cúmprese:

$$\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$$

Distancias e ángulos

Distancia: A norma dos vectores permítenos medir a distancia entre 2 puntos.

- a distancia entre os puntos P e Q vén dada pola norma do vector que une $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ángulos: A seguinte relación permítenos calcular o ángulo que forman dous vectores usando a súa norma e produto escalar.

Teorema

Sexan **v** e **w** dous vectores no espazo e sexa θ o ángulo entre eles. Entón:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\| \cos\theta, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Desigualdade triangular

Para dous vectores calquera $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ cúmprese:

$$\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$$

Para pensar: demostrar a Desigualdade triangular.

Índice

1. Os espazos vectoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
2. Produto escalar
3. Produto vectorial en $\mathbb{R}^3$
4. Aplicacións dos produtos escalar e vectorial
5. Coordenadas
6. Topoloxía en $\mathbb{R}^n$

Produto vectorial

Produto vectorial

O produto vectorial de $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ é o vector:

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}.$$

Ou, simbolicamente,

$$v \times w = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Produto vectorial

Produto vectorial

O produto vectorial de $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathrm{w} = (w_1, w_2, w_3)$ é o vector:

$$\mathrm{v} \times \mathrm{w} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}.$$

Ou, simbolicamente,

$$\mathrm{v} \times \mathrm{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedades:

- $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{v} = 0 \text{ ou } \boldsymbol{w} = 0 \text{ ou } \boldsymbol{v} \| \boldsymbol{w})$.
- $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$.
- $\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$.
- $(\alpha \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \alpha(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

Produto vectorial

Produto vectorial

O produto vectorial de $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ é o vector:

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}.$$

Ou, simbolicamente,

$$v \times w = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedades:

- $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{v} = 0 \text{ ou } \boldsymbol{w} = 0 \text{ ou } \boldsymbol{v} \| \boldsymbol{w})$.
- $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$.
- $\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$.
- $(\alpha \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \alpha(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

Comprobamos que

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0.$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Produto mixto

Produto mixto

Dados 3 vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$, defínese o seu produto mixto como o número real seguinte:

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

Produto mixto

Produto mixto

Dados 3 vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$, defínese o seu produto mixto como o número real seguinte:

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

Da expresión dos produtos escalar e vectorial deducimos que se $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entón

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Produto mixto

Produto mixto

Dados 3 vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$, defínese o seu produto mixto como o número real seguinte:

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

Da expresión dos produtos escalar e vectorial deducimos que se $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entón

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Desta expresión podemos deducir que $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$. Por outro lado, séguese tamén que se $\boldsymbol{u}$ está no plano xerado por $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, é dicir, $\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}$, entón

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 0.$$

Polo tanto, temos que $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ é perpendicular ao plano xerado por $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

Interpretación xeométrica do produto vectorial

Para coñecer a lonxitude do produto vectorial $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ calculamos:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|^2 &= \left\| \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \right\|^2 \\
&= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2 \\
&= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 \cos^2 \theta \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta
\end{aligned}$$

Interpretación xeométrica do produto vectorial

Para coñecer a lonxitude do produto vectorial $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ calculamos:

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|^2 &= \left\| \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \right\|^2 \\
&= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2 \\
&= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 \cos^2 \theta \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta
\end{aligned}
$$

Teorema

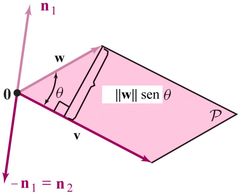
Sexan $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ dous vectores no espazo e sexa θ o ángulo entre eles. Entón:

$$\|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\| \operatorname{sen} \theta, \; 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Esta cantidade representa a área do paralelogramo determinado por $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

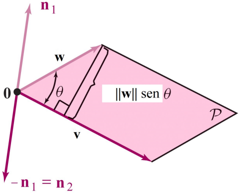
Propiedades do produto vectorial

O produto vectorial $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ é perpendicular a $\boldsymbol{v}$ e a $\boldsymbol{w}$ e ten lonxitude igual a $\|\boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{w}\|$ sen θ:

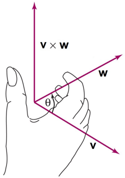


Propiedades do produto vectorial

O produto vectorial $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ é perpendicular a $\boldsymbol{v}$ e a $\boldsymbol{w}$ e ten lonxitude igual a $\|\boldsymbol{v}\|\;\|\boldsymbol{w}\|$ sen θ:

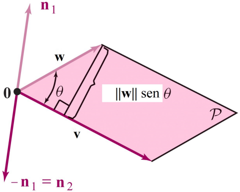


Pero hai 2 posibles eleccións, así que aplicamos a *regra da man dereita* para facer esta escolla.

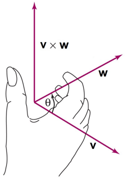


Propiedades do produto vectorial

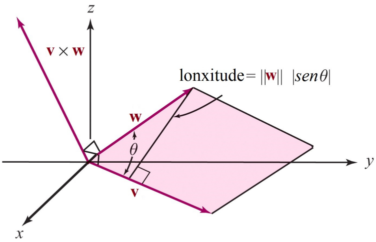
O produto vectorial $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ é perpendicular a $\boldsymbol{v}$ e a $\boldsymbol{w}$ e ten lonxitude igual a $\|\boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{w}\| \operatorname{sen}\theta$:



Pero hai 2 posibles eleccións, así que aplicamos a *regra da man dereita* para facer esta escolla.



Na seguinte figura representamos o vector $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$, que é perpendicular ao plano xerado por $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, está orientado segundo a *regra da man dereita* e ten lonxitude igual á área do paralelogramo que determinan $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$:



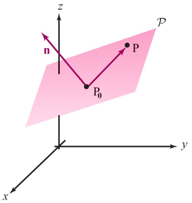
Index

1. Os espazos vectoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
2. Produto escalar
3. Produto vectorial en $\mathbb{R}^3$
4. Aplicacións dos produtos escalar e vectorial
5. Coordenadas
6. Topoloxía en $\mathbb{R}^n$

Ecuación do plano

Ecuación do plano:

Se un plano contén o punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ é un vector normal ao plano, entón un punto $P = (x, y, z)$ estará no plano se $\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n} = 0$,



de onde se deduce a ecuación do plano

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

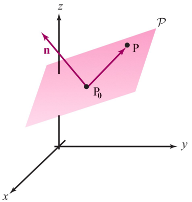
ou, escribindo $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$,

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ecuación do plano

Ecuación do plano:

Se un plano contén o punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ é un vector normal ao plano, entón un punto $P = (x, y, z)$ estará no plano se $\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n} = 0$,



de onde se deduce a ecuación do plano

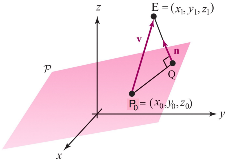
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

ou, escribindo $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$,

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Distancia de un punto a un plano:

Para calcular a distancia do punto $E = (x_1, y_1, z_1)$ ao plano anterior, proxectamos o vector $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_0E}$ sobre o vector normal unitario **n** e calculamos a súa lonxitude:



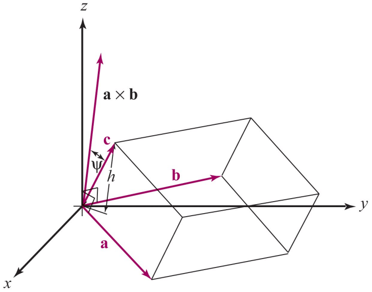
$$\frac{|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

ou

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Volume dun paralelepípedo

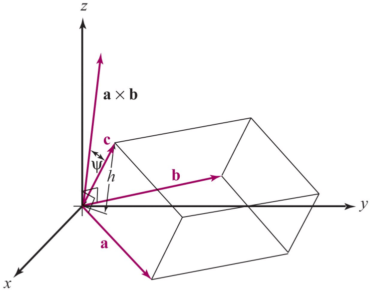
Dado un paralelepípedo determinado por vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, como o da seguinte figura,



calculamos o seu volume achando a área da base determinada por $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e multiplicándoa pola altura h:

Volume dun paralelepípedo

Dado un paralelepípedo determinado por vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, como o da seguinte figura,



calculamos o seu volume achando a área da base determinada por $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e multiplicándoa pola altura h:

Área da base determinada por $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$: $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \operatorname{sen}\theta = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$.

Altura h: $\|\boldsymbol{c}\| \cos\psi = \frac{\|\boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| \cos\psi}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}$.

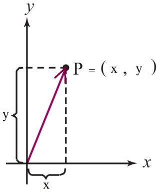
Volume do paralelepípedo: $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \frac{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|} = \boxed{\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}$.

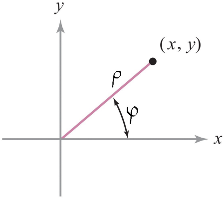
Index

1. Os espazos vectoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
2. Produto escalar
3. Produto vectorial en $\mathbb{R}^3$
4. Aplicacións dos produtos escalar e vectorial
5. Coordenadas
6. Topoloxía en $\mathbb{R}^n$

Coordenadas polares

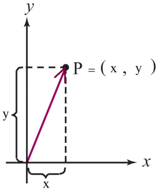
As coordenadas cartesianas permiten identificar un punto do plano mediante as súas proxeccións nos eixes OX e OY, pero este non é o único xeito de facelo:

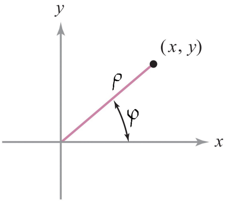




Coordenadas polares

As coordenadas cartesianas permiten identificar un punto do plano mediante as súas proxeccións nos eixes OX e OY, pero este non é o único xeito de facelo:





Coordenadas polares

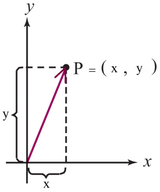
As **coordenadas polares** (ρ, φ) dun punto (x, y) no plano están dadas por:

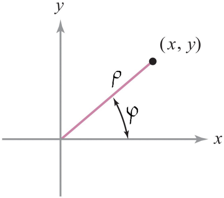
$$x = \rho \cos \varphi, \;\; y = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

onde $\rho \in [0, \infty)$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$. Polo tanto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$.

Coordenadas polares

As coordenadas cartesianas permiten identificar un punto do plano mediante as súas proxeccións nos eixes OX e OY, pero este non é o único xeito de facelo:





Coordenadas polares

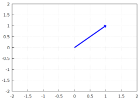
As **coordenadas polares** (ρ, φ) dun punto (x, y) no plano están dadas por:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

onde $\rho \in [0, \infty)$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$. Polo tanto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$.

Exemplo:

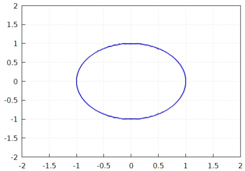
O punto $(1, 1)$ en coordenadas cartesianas correspóndese co punto $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ en coordenadas polares.



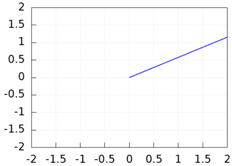
Coordenadas polares. Exemplos

Consideramos coordenadas polares (ρ, φ) e analizamos que sucede se $\rho = \textit{constante}$ ou $\varphi = \textit{constante}$.

$\rho = \textit{constante}$



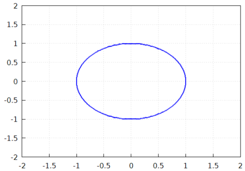
$\varphi = \textit{constante}$



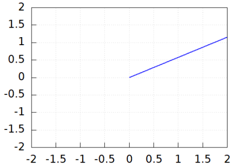
Coordenadas polares. Exemplos

Consideramos coordenadas polares (ρ, φ) e analizamos que sucede se $\rho = constante$ ou $\varphi = constante$.

$\rho = constante$



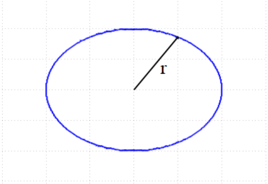
$\varphi = constante$



As coordenadas polares son moi axeitadas para describir conxuntos con simetría circular. Así, unha circunferencia C con centro na orixe e raio r, descríbese en coordenadas polares como:

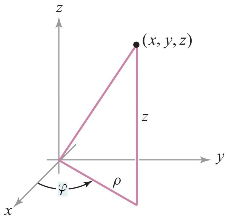
$\varphi = constante$

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2\} \\ &= \{(\rho, \varphi) \in [0, \infty) / \rho = r\} \end{aligned}$$



Coordenadas cilíndricas

Cando traballamos no espazo temos distintas formas de determinar un punto. Unha delas é utilizando as coordenadas cilíndricas:



Coordenadas cilíndricas

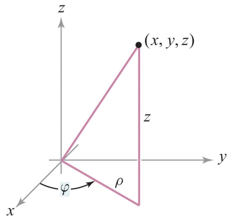
As **coordenadas cilíndricas** (ρ, φ, z) dun punto (x, y, z) no espazo están dadas por:

$$x = \rho \cos\varphi, \;\; y = \rho \operatorname{sen}\varphi, \;\; z = z.$$

Onde $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$.

Coordenadas cilíndricas

Cando traballamos no espazo temos distintas formas de determinar un punto. Unha delas é utilizando as coordenadas cilíndricas:



Coordenadas cilíndricas

As **coordenadas cilíndricas** (ρ, φ, z) dun punto (x, y, z) no espazo están dadas por:

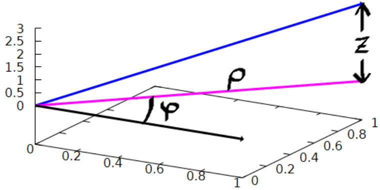
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = z.$$

Onde $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Para achar as coordenadas cilíndricas do punto $(1, 1, 3)$, proxectamos o punto no plano XY e utilizamos neste as coordenadas polares:

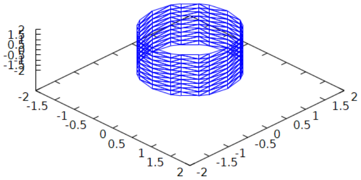
$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi &= \arctan 1 = \tfrac{\pi}{4} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

O punto $(1, 1, 3)$ escríbese en coordenadas cilíndricas $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 3)$.



Coordenadas cilíndricas

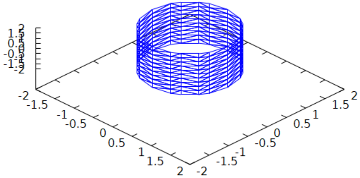
Tomamos coordenadas cilíndricas con $\rho = \textit{constante}$:



A superficie que obtemos é un cilindro, por esta razón estas coordenadas se denominan cilíndricas e resultan axeitadas para traballar con rexións que teñen simetría circular ao redor do eixe OZ.

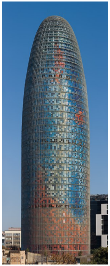
Coordenadas cilíndricas

Tomamos coordenadas cilíndricas con $\rho = constante$:



A superficie que obtemos é un cilindro, por esta razón estas coordenadas se denominan cilíndricas e resultan axeitadas para traballar con rexións que teñen simetría circular ao redor do eixe OZ.

Exemplos de edificios que poden ser descritos con coordenadas cilíndricas:



Fontes: es.wikipedia.org/wiki/Torre-Agbar

es.wikipedia.org/wiki/Estructura_hiperboloide

Coordenadas esféricas

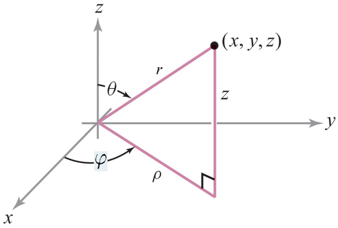
Outra alternativa para traballar con puntos ou rexións no espazo son as coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas

As **coordenadas esféricas** (r, φ, θ) dun punto (x, y, z) do espazo están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{aligned}$$

con $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.



Coordenadas esféricas

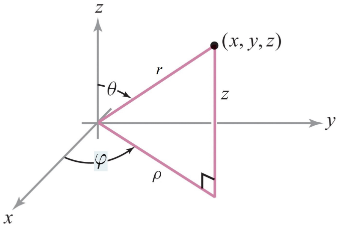
Outra alternativa para traballar con puntos ou rexións no espazo son as coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas

As **coordenadas esféricas** (r, φ, θ) dun punto (x, y, z) do espazo están dadas por:

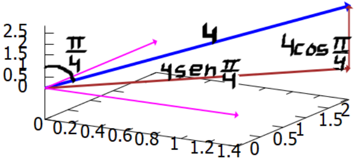
$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

con $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.



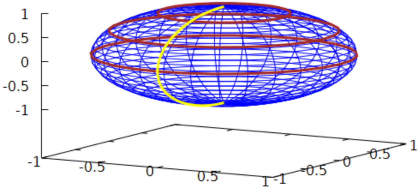
Exemplo: o punto $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2})$ ten coordenadas esféricas $(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 4 \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{4} \cos \tfrac{\pi}{3} = 4 \tfrac{\sqrt{2}}{2} \tfrac{1}{2}, \\ \sqrt{6} &= 4 \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{4} \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{3} = 4 \tfrac{\sqrt{2}}{2} \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ 2\sqrt{2} &= 4 \cos \tfrac{\pi}{4} = 4 \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$



Coordenadas esféricas

Cando fixamos a coordenada $r = constante$, a rexión que describimos é unha esfera:

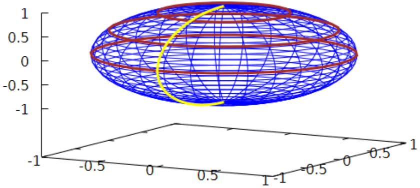


Para describir os puntos dunha esfera de raio r, só precisamos as coordenadas (φ, θ) para determinar un punto. Por este motivo se utilizan as coordenadas xeográficas *lonxitude* e *latitude*.

Aínda que habitualmente a lonxitude pode ser leste ou oeste e varía de 0 a 180 graos, esta coordenada mide o ángulo arredor do eixe OZ, como o fai φ nas coordenadas esféricas. Tamén a latitude pode ser norte ou sur e varía entre 0 e 90 graos, pero mide o ángulo con respecto ao plano XY, que en esencia coincide con medir o ángulo con respecto ao eixe OZ, como a coordenada θ.

Coordenadas esféricas

Cando fixamos a coordenada $r = constante$, a rexión que describimos é unha esfera:



Para describir os puntos dunha esfera de raio r, só precisamos as coordenadas (φ, θ) para determinar un punto. Por este motivo se utilizan as coordenadas xeográficas *lonxitude* e *latitude*.

Aínda que habitualmente a lonxitude pode ser leste ou oeste e varía de 0 a 180 graos, esta coordenada mide o ángulo arredor do eixe OZ, como o fai φ nas coordenadas esféricas. Tamén a latitude pode ser norte ou sur e varía entre 0 e 90 graos, pero mide o ángulo con respecto ao plano XY, que en esencia coincide con medir o ángulo con respecto ao eixe OZ, como a coordenada θ.

As coordenadas esféricas son moi axeitadas para describir rexións con simetría esférica, é dicir, rexións onde todos os puntos distan o mesmo da orixe de coordenadas.

Índice

1. Os espazos vectoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
2. Produto escalar
3. Produto vectorial en $\mathbb{R}^3$
4. Aplicacións dos produtos escalar e vectorial
5. Coordenadas
6. Topoloxía en $\mathbb{R}^n$

Topoloxía en $\mathbb{R}$: intervalos

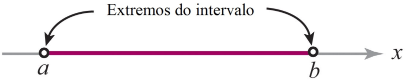
Definicións. Sexan $a, b \in \mathbb{R}$.

- Defínese o **intervalo aberto** (a, b) como o subconxunto de $\mathbb{R}$ dado por:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

- Defínese o **intervalo pechado** $[a, b]$ como o subconxunto de $\mathbb{R}$ dado por:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



a e b son os **extremos** do intervalo.

- Defínense os **intervalos abertos** (a, ∞) e $(-\infty, a)$ como

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} / a < x\}, \qquad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

e os correspondentes **intervalos pechados** $[a, \infty)$ e $(-\infty, a]$ como

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}, \qquad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$

Cotas, máximo e mínimo, supremo e ínfimo

Cotas de $A \subset \mathbb{R}$

- a é unha **cota superior** de A se $a \geq x$ para todo $x \in A$.
- a é unha **cota inferior** de A se $a \leq x$ para todo $x \in A$.

Un conxunto dise **acoutado** se ten unha cota superior e unha cota inferior.

Exemplo: 

$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$

Cotas, máximo e mínimo, supremo e ínfimo

Cotas de $A \subset \mathbb{R}$

- a é unha **cota superior** de A se $a \geq x$ para todo $x \in A$.
- a é unha **cota inferior** de A se $a \leq x$ para todo $x \in A$.

Un conxunto dise **acoutado** se ten unha cota superior e unha cota inferior.

Máximo e mínimo de $A \subset \mathbb{R}$: $max(A)$ e $min(A)$

- O **máximo** de A é un punto $x \in A$ tal que $x \geq y$ para todo $y \in A$.
- O **mínimo** de A é un punto $x \in A$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in A$.

Exemplo:

$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$

Cotas, máximo e mínimo, supremo e ínfimo

Cotas de $A \subset \mathbb{R}$

- a é unha **cota superior** de A se $a \geq x$ para todo $x \in A$.
- a é unha **cota inferior** de A se $a \leq x$ para todo $x \in A$.

Un conxunto dise **acoutado** se ten unha cota superior e unha cota inferior.

Máximo e mínimo de $A \subset \mathbb{R}$: $max(A)$ e $min(A)$

- O **máximo** de A é un punto $x \in A$ tal que $x \geq y$ para todo $y \in A$.
- O **mínimo** de A é un punto $x \in A$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in A$.

Supremo e ínfimo de $A \subset \mathbb{R}$: $sup(A)$ e $inf(A)$

- O **supremo** de A é a menor das cotas superiores, é dicir, é o menor punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq y$ para todo $y \in A$.
- O **ínfimo** de A é a maior das cotas inferiores, é dicir, é o maior punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in A$.

Exemplo:

$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$

Topoloxía de $\mathbb{R}^n$: bólas abertas.

Definición

Sexa $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Definimos a **bóla aberta** de centro x_0 e raio r como o conxunto:

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$$

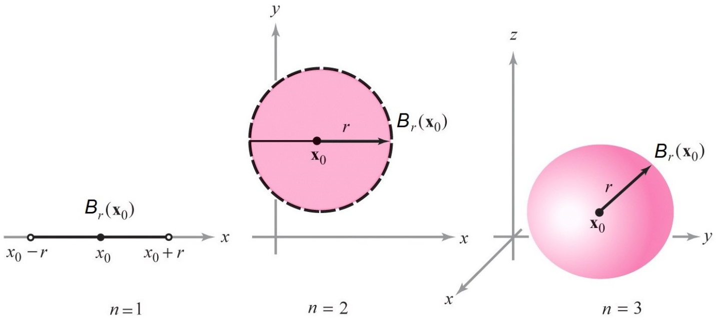
Topoloxía de $\mathbb{R}^n$: bólas abertas.

Definición

Sexa $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Definimos a **bóla aberta** de centro x_0 e raio r como o conxunto:

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$$

Exemplos:



Clasificación de puntos: puntos interiores

Puntos interiores

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\boldsymbol{x}_0$ é un punto **interior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{x}_0) \subset A$.

Clasificación de puntos: puntos interiores

Puntos interiores

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x}_0$ é un punto **interior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x}_0) \subset A$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$

Clasificación de puntos: puntos interiores

Puntos interiores

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$.

- $\boldsymbol{x_0}$ é un punto **interior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{x_0}) \subset A$.

Exemplos:

$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$

$\mathring{A} = (-1, 2)$

Notación: ao conxunto de puntos interiores de A chamámolo o *interior* de A e denotámolo por $\mathring{A}$.

Clasificación de puntos: puntos interiores

Puntos interiores

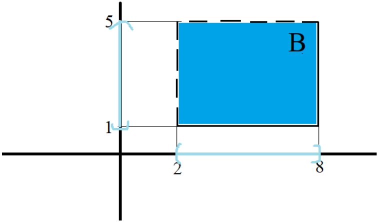
Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x_0}$ é un punto **interior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x_0}) \subset A$.

Exemplos:

$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$

$\overset{\circ}{A} = (-1, 2)$



$B = (2, 8] \times [1, 5)$

Notación: ao conxunto de puntos interiores de A chamámolo o *interior* de A e denotámolo por $\overset{\circ}{A}$.

Clasificación de puntos: puntos interiores

Puntos interiores

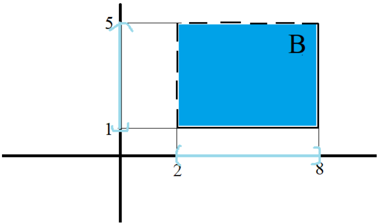
Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x_0}$ é un punto **interior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x_0}) \subset A$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$

$$\mathring{A} = (-1, 2)$$



$$B = (2, 8] \times [1, 5)$$

$$\mathring{B} = (2, 8) \times (1, 5)$$

Notación: ao conxunto de puntos interiores de A chamámolo o *interior* de A e denotámolo por $\mathring{A}$.

Clasificación de puntos: puntos adherentes

Puntos adherentes

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\boldsymbol{x}_0$ é un punto **adherente** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap A \neq \emptyset$.

Clasificación de puntos: puntos adherentes

Puntos adherentes

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x}_0$ é un punto **adherente** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A \neq \emptyset$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$

Clasificación de puntos: puntos adherentes

Puntos adherentes

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\boldsymbol{x}_0$ é un punto **adherente** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap A \neq \emptyset$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$
$$\bar{A} = [-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$

Notación: ao conxunto de puntos adherentes de A chamámolo a *adherencia* de A e denotámolo por $\bar{A}$.

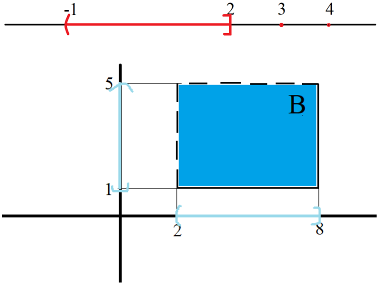
Clasificación de puntos: puntos adherentes

Puntos adherentes

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\boldsymbol{x}_0$ é un punto **adherente** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap A \neq \emptyset$.

Exemplos:



$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$
$$\bar{A} = [-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$

$$B = (2, 8] \times [1, 5)$$

Notación: ao conxunto de puntos adherentes de A chamámolo a *adherencia* de A e denotámolo por $\bar{A}$.

Clasificación de puntos: puntos adherentes

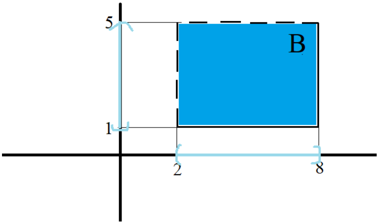
Puntos adherentes

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x}_0$ é un punto **adherente** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A \neq \emptyset$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$
$$\bar{A} = [-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$



$$B = (2, 8] \times [1, 5)$$

$$\bar{B} = [2, 8] \times [1, 5]$$

Notación: ao conxunto de puntos adherentes de A chamámolo a *adherencia* de A e denotámolo por $\bar{A}$.

Clasificación de puntos: puntos fronteira

Puntos fronteira

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\boldsymbol{x}_0$ é un punto **fronteira** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset$.

Clasificación de puntos: puntos fronteira

Puntos fronteira

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x}_0$ é un punto **fronteira** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(\mathbf{x}_0) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$

Clasificación de puntos: puntos fronteira

Puntos fronteira

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x}_0$ é un punto **fronteira** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\mathbf{x}_0) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(\mathbf{x}_0) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$
$$Fr(A) = \{-1, 2, 3, 4\}$$

Notación: ao conxunto de puntos fronteira de A chamámolo *fronteira* de A e denotámolo por $Fr(A)$.

Clasificación de puntos: puntos fronteira

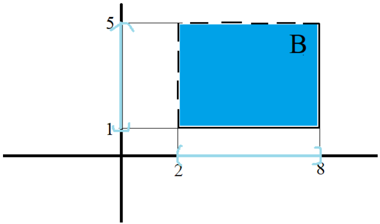
Puntos fronteira

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x_0}$ é un punto **fronteira** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\mathbf{x_0}) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(\mathbf{x_0}) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$
$$Fr(A) = \{-1, 2, 3, 4\}$$



$$B = (2, 8] \times [1, 5)$$

Notación: ao conxunto de puntos fronteira de A chamámolo *fronteira* de A e denotámolo por $Fr(A)$.

Clasificación de puntos: puntos fronteira

Puntos fronteira

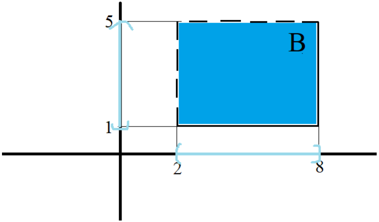
Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- x_0 é un punto **fronteira** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset$.

Exemplos:

$$A = (-1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$$

$$Fr(A) = \{-1, 2, 3, 4\}$$



$$B = (2, 8] \times [1, 5)$$

$$Fr(B) = [2, 8] \times \{1\} \cup \{8\} \times [1, 5] \cup [2, 8] \times \{5\} \cup \{2\} \times [1, 5]$$

Notación: ao conxunto de puntos fronteira de A chamámolo *fronteira* de A e denotámolo por $Fr(A)$.

Topoloxía de $\mathbb{R}^n$: clasificación de puntos

Clasificación de puntos

Sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{x_0}$ é un punto **interior** se existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x_0}) \subset A$.
- $\mathrm{x_0}$ é un punto **adherente** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\mathbf{x_0}) \cap A \neq \emptyset$.
- $\mathbf{x_0}$ é un punto **fronteira** se para todo $r > 0$ se cumpre $B_r(\mathbf{x_0}) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(\mathbf{x_0}) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A) \neq \emptyset$.

Notación:

- ao conxunto de puntos interiores de A chamámolo o *interior* de A e denotámolo por $\overset{\circ}{A}$,
- ao conxunto de puntos adherentes de A chamámolo a *adherencia* de A e denotámolo por $\bar{A}$,
- ao conxunto de puntos fronteira de A chamámolo *fronteira* de A e denotámolo por $Fr(A)$.

Temos as seguintes relacións:

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}, \quad \bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A) = A \cup Fr(A), \quad \overset{\circ}{A} = \bar{A} \backslash Fr(A) = A \backslash Fr(A).$$

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos abertos

Conxuntos abertos

Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus puntos son interiores, é dicir, se para todo punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{x}_0) \subset A$.

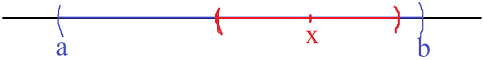
Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos abertos

Conxuntos abertos

Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus puntos son interiores, é dicir, se para todo punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{x}_0) \subset A$.

Exemplos:

- Os intervalos abertos son conxuntos abertos de $\mathbb{R}$.



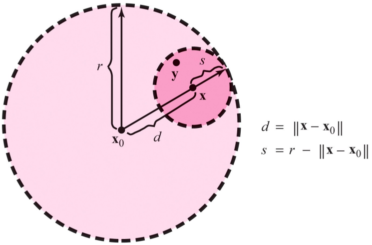
Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos abertos

Conxuntos abertos

Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus puntos son interiores, é dicir, se para todo punto $x_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$.

Exemplos:

- Os intervalos abertos son conxuntos abertos de $\mathbb{R}$.
- As bolas abertas son conxuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.



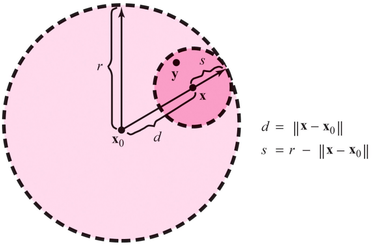
Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos abertos

Conxuntos abertos

Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus puntos son interiores, é dicir, se para todo punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{x}_0) \subset A$.

Exemplos:

- Os intervalos abertos son conxuntos abertos de $\mathbb{R}$.
- As bolas abertas son conxuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos abertos.



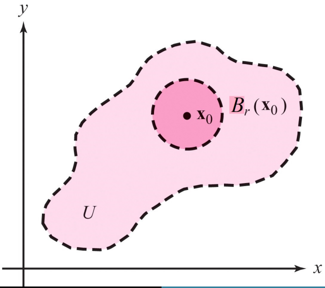
Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos abertos

Conxuntos abertos

Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus puntos son interiores, é dicir, se para todo punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{x}_0) \subset A$.

Exemplos:

- Os intervalos abertos son conxuntos abertos de $\mathbb{R}$.
- As bolas abertas son conxuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos abertos.



Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos abertos

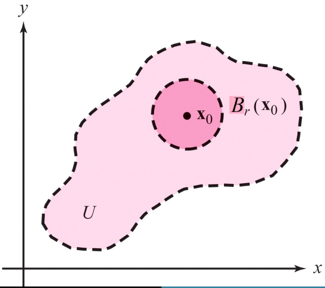
Conxuntos abertos

Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus puntos son interiores, é dicir, se para todo punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{x}_0) \subset A$.

Exemplos:

- Os intervalos abertos son conxuntos abertos de $\mathbb{R}$.
- As bolas abertas son conxuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos abertos.

Unha **veciñanza** dun punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ é un conxunto aberto que contén a $\boldsymbol{x}$.



Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos abertos

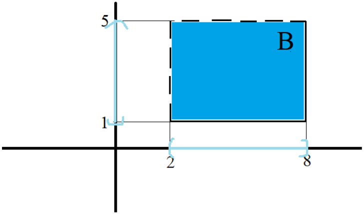
Conxuntos abertos

Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus puntos son interiores, é dicir, se para todo punto $\boldsymbol{x}_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{x}_0) \subset A$.

Exemplos:

- Os intervalos abertos son conxuntos abertos de $\mathbb{R}$.
- As bolas abertas son conxuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos abertos.

Unha **veciñanza** dun punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ é un conxunto aberto que contén a $\boldsymbol{x}$.



Este conxunto non é aberto!

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos abertos

Propiedades:

- A unión dunha colección arbitraria de conxuntos abertos é un aberto.
- A intersección dun número finito de conxuntos abertos é un aberto.
- Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se e só se $A = \overset{\circ}{A}$. En particular, o interior dun conxunto sempre é aberto.
- Sexa $A \subset \mathbb{R}^n$. O interior de A é a unión de todos os conxuntos abertos contidos en A.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \backslash B$ é un conxunto aberto.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \backslash B$ é un conxunto aberto. **Exemplos:**

- Os intervalos pechados son conxuntos pechados de $\mathbb{R}$.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \backslash B$ é un conxunto aberto. **Exemplos:**

- Os intervalos pechados son conxuntos pechados de $\mathbb{R}$.
- O complementario dunha bóla aberta é un conxunto pechado de $\mathbb{R}^n$.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \backslash B$ é un conxunto aberto. **Exemplos:**

- Os intervalos pechados son conxuntos pechados de $\mathbb{R}$.
- O complementario dunha bóla aberta é un conxunto pechado de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos pechados.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \backslash B$ é un conxunto aberto. **Exemplos:**

- Os intervalos pechados son conxuntos pechados de $\mathbb{R}$.
- O complementario dunha bóla aberta é un conxunto pechado de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos pechados.

Propiedades:

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \backslash B$ é un conxunto aberto. **Exemplos:**

- Os intervalos pechados son conxuntos pechados de $\mathbb{R}$.
- O complementario dunha bóla aberta é un conxunto pechado de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos pechados.

Propiedades:

- A unión dun número finito de conxuntos pechados é un pechado.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \backslash B$ é un conxunto aberto. **Exemplos:**

- Os intervalos pechados son conxuntos pechados de $\mathbb{R}$.
- O complementario dunha bóla aberta é un conxunto pechado de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos pechados.

Propiedades:

- A unión dun número finito de conxuntos pechados é un pechado.
- A intersección dunha familia arbitraria de conxuntos pechados é un pechado.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \backslash B$ é un conxunto aberto. **Exemplos:**

- Os intervalos pechados son conxuntos pechados de $\mathbb{R}$.
- O complementario dunha bóla aberta é un conxunto pechado de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos pechados.

Propiedades:

- A unión dun número finito de conxuntos pechados é un pechado.
- A intersección dunha familia arbitraria de conxuntos pechados é un pechado.
- Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se e só se $B = \bar{B}$. En particular a adherencia dun conxunto sempre é un pechado.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$: conxuntos pechados

Conxuntos pechados

Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se o seu complementario $\mathbb{R}^n \setminus B$ é un conxunto aberto. **Exemplos:**

- Os intervalos pechados son conxuntos pechados de $\mathbb{R}$.
- O complementario dunha bóla aberta é un conxunto pechado de $\mathbb{R}^n$.
- O conxunto baleiro $\emptyset$ e o total $\mathbb{R}^n$ son conxuntos pechados.

Propiedades:

- A unión dun número finito de conxuntos pechados é un pechado.
- A intersección dunha familia arbitraria de conxuntos pechados é un pechado.
- Un conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é pechado se e só se $B = \bar{B}$. En particular a adherencia dun conxunto sempre é un pechado.
- Sexa $B \subset \mathbb{R}^n$. A adherencia de B é a intersección de todos os conxuntos pechados que conteñen a B.

Conxuntos acoutados e compactos

Conxuntos acoutados

Dicimos que un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ está acoutado se existe un raio $r > 0$ e un punto $\boldsymbol{x}_0$ tal que $A \subset B_r(\boldsymbol{x}_0)$.

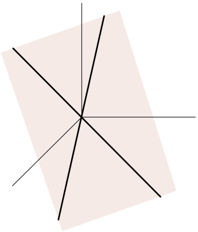
Conxuntos acoutados e compactos

Conxuntos acoutados

Dicimos que un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ está acoutado se existe un raio $r > 0$ e un punto $\boldsymbol{x}_0$ tal que $A \subset B_r(\boldsymbol{x}_0)$.

Exemplos:

- Unha bóla aberta $B_s(\boldsymbol{y}_0)$ está acoutada.
- Un plano non está acoutado.



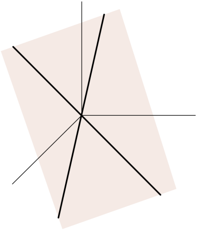
Conxuntos acoutados e compactos

Conxuntos acoutados

Dicimos que un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ está acoutado se existe un raio $r > 0$ e un punto $\boldsymbol{x}_0$ tal que $A \subset B_r(\boldsymbol{x}_0)$.

Exemplos:

- Unha bóla aberta $B_s(\boldsymbol{y}_0)$ está acoutada.
- Un plano non está acoutado.



Conxuntos compactos

Dicimos que un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se é pechado e acoutado.

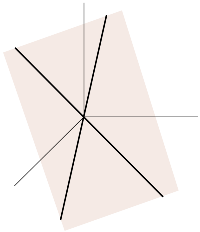
Conxuntos acoutados e compactos

Conxuntos acoutados

Dicimos que un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ está acoutado se existe un raio $r > 0$ e un punto $\mathbf{x}_0$ tal que $A \subset B_r(\mathbf{x}_0)$.

Exemplos:

- Unha bóla aberta $B_s(\mathbf{y}_0)$ está acoutada.
- Un plano non está acoutado.



Conxuntos compactos

Dicimos que un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se é pechado e acoutado.

Exemplos:

- Un intervalo da forma $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, é un compacto.
- A adherencia dunha bóla aberta $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0)$ é un compacto.

Bibliografía

- J. de Burgos; *Álgebra Lineal*, Ed. McGrawHill, 1993.
- C. Gómez Bermúdez; *Problemas de Álxebra linear*, Ed. Andavira, 2015.
- S. I. Grossman; *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Ed. McGrawHill, 1992.
- R. Larson, B. H. Edwards, D. C. Calvo; *Álgebra lineal*, Pirámide Ediciones, 2004.
- Marsden, J., Tromba, A. (2010). Cálculo vectorial. Addison-Wesley.
- D. C. Lay; Álgebra lineal y sus aplicaciones. Addison-Wesley, 2007.

Topoloxía en $\mathbb{R}^n$

Cálculo

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Grao en Enxeñería Mecánica e Grao en Tecnoloxías Industriais
Escola Politécnica de Enxeñería de Ferrol