Curso 0
Sesión 1

Departamento de Matemáticas

Escola Politécnica de Enxeñaría de Ferrol

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Curso 2025-2026

Índice

Conxuntos e subconxuntos

Conxuntos

Entendemos por *conxunto* unha colección de obxectos ben definidos e diferenciados entre si. A estes obxectos chámaselles *elementos* do conxunto.

Así, se A é un conxunto e x é un elemento de A, dicimos que x pertence a A e escribímolo

$$x \in A.$$

Se, pola contra, x non pertence a A entón

$$x \notin A.$$

- Dous conxuntos son iguais se teñen exactamente os mesmos elementos.
- Ó conxunto que non ten elementos chamámoslle *conxunto baleiro*, e denotámolo por $\emptyset$.

Definición de conxuntos

Un conxunto pódese definir de dous xeitos:

1. Por *extensión*: enuméranse todos os elementos.

   Exemplos:

   - $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.
   - O conxunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
   - O conxunto dos números enteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

2. Por *comprensión*: dáse a propiedade ou propiedades que definen os elementos do conxunto.

   Exemplos:

   - O conxunto formado polos números $2, 3, 4, 5, 6$ podémolo definir por comprensión do seguinte xeito: $\{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x \leq 6\}$.
   - O conxunto dos números racionais: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$.

Subconxuntos

Dados dous conxuntos A e B, dise que A é un *subconxunto* de B se todo elemento de A tamén pertence a B. Que A é subconxunto de B escribímolo:

$$A \subset B.$$

Exemplo: Os números naturais constitúen un subconxunto dos números enteiros, que á súa vez constitúen un subconxunto dos números racionais:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Na seguinte táboa amósanse a notación que usaremos en teoría de conxuntos:

Notación	Terminoloxía	Significado
$A \subset B$	A contido en B	$x \in A \Rightarrow x \in B$
$A = B$	A igual a B	$x \in A \Leftrightarrow x \in B$
$A \cup B$	Unión de A e B	$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$
$A \cap B$	Intersección de A e B	$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$
$A \setminus B$	Complementario de B en A	$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B$

Dous conxuntos A e B dinse *disxuntos* se $A \cap B = \emptyset$, Lembramos tamén

$\exists$	Existe
$\exists^{\bullet}$	Existe un único
$\forall$	Para todo

Produto cartesiano

Produto cartesiano

Sexan A e B dous conxuntos arbitrarios. Defínese o *produto cartesiano* de A e B (denótase $A \times B$) como o conxunto de pares ordenados seguinte:

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplos:

- Sexa $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$, entón

  $$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}.$$

- Se facemos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ temos o conxunto de pares ordenados de números reais, que chamamos

  $$\mathbb{R}^2 = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{R}\}$$

  e que identificamos habitualmente co plano cartesiano.

Subconxuntos de $\mathbb{R}$. Intervalos

Intervalo aberto

Un intervalo aberto é un subconxunto da recta real ($\mathbb{R}$) da forma:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} .$$

Os extremos non están incluídos no conxunto. Se queremos incluír algún extremo, escribímolo cun corchete en vez de paréntese, por exemplo:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} .$$

Observación:
Non debemos confundir o intervalo aberto cun punto de $\mathbb{R}^2$. Aínda que se escriben da mesma forma, son moi distintos, pois $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é un elemento do conxunto $\mathbb{R}^2$, mentres que $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é un intervalo, isto é, un subconxunto de $\mathbb{R}$.

Aplicacións

Aplicacións

Sexan A e B dous conxuntos non baleiros. Unha *aplicación* f de A en B é unha correspondencia entre os elementos de A e os de B, de xeito que a cada elemento $a \in A$ lle corresponde un único elemento $b \in B$.
Este chámase imaxe de a (pola aplicación f) e denótase $f(a)$.

Habitualmente as aplicacións represéntanse así:

$$\begin{array}{rl} f: & A \longrightarrow B \\ & a \rightsquigarrow f(a) = b \end{array}$$

O conxunto A chámase *conxunto inicial* e o B *conxunto final*.

Se A e B son conxuntos numéricos entón é usual empregar o nome de *función* para unha aplicación entre eles e *dominio* para o conxunto inicial A.

Aplicacións

Imaxe

Sexa $C \subset A$, chámase *imaxe por* f *do conxunto* C ó seguinte subconxunto de B:

$$f(C) = \{f(a)/a \in C\}.$$

Chamamos *imaxe de* f, sen explicitar conxunto ningún, a $f(A)$, é dicir, á imaxe do conxunto inicial.

Imaxe recíproca

Sexa $D \subset B$, chámase *imaxe recíproca por* f *do conxunto* D ó subconxunto de A:

$$f^{-1}(D) = \{a \in A/f(a) \in D\}.$$

Restricción

Para un subconxunto $C \subset A$, chámase *restrición* de f a C, e denótase $f_{|C}$, á aplicación f restrinxida ó conxunto C, isto é, a f definida só nos elementos de C.

Tipos de aplicacións

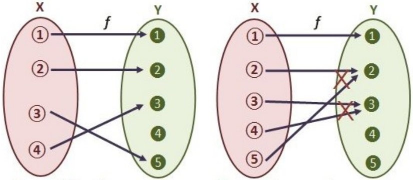
Dada unha aplicación $f : A \longrightarrow B$, dise que f é:

- **Inxectiva** se cada dous elementos distintos de A teñen distinta imaxe en B, é dicir,

$$\forall a_1, a_2 \in A \text{ tense } a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

  Exemplos:

  - A función exponencial: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ é unha función inxectiva, pois se $e^x = e^y$ entón necesariamente $x = y$.
  - A función seno: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$ non é inxectiva, xa que, por exemplo, sen $0 =$ sen π.



Tipos de aplicacións

Dada unha aplicación $f : A \longrightarrow B$, dise que f é:

- **Sobrexectiva** se todo elemento de B é imaxe dalgún elemento de A, é dicir,

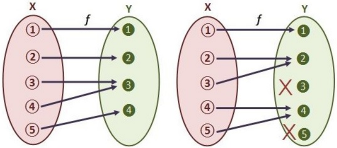
$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b.$$

Polo tanto,

$$f \text{ é sobrexectiva } \Leftrightarrow f(A) = B.$$

Exemplos:

- A función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é unha función sobrexectiva, porque para todo valor $y \in \mathbb{R}$ existe x tal que $f(x) = y$. Neste caso x sería $x = \sqrt[3]{y}$.
- A función seno: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$ non é sobrexectiva, porque só toma valores no intervalo $[-1, 1]$. Así, por exemplo, non hai ningún número real x tal que $\text{sen } x = 2$.



Tipos de aplicacións

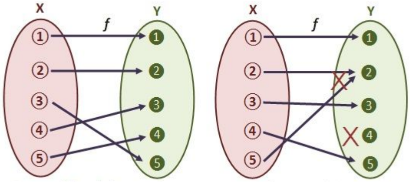
Dada unha aplicación $f : A \longrightarrow B$, dise que f é:

- **Bixectiva** (ou *biunívoca*) se é inxectiva e sobrexectiva, é dicir,

$$\forall b \in B, \exists^{\bullet} a \in A \text{ tal que } f(a) = b.$$

Exemplos:

- A función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é unha función inxectiva e sobrexectiva, polo tanto é unha función bixectiva.
- As funcións seno e exponencial: $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = e^x$ respectivamente, non son bixectivas.



Composición de aplicacións.

Consideremos unha aplicación $f : A \longrightarrow B$ e outra aplicación $g : C \longrightarrow D$. Se tomamos un elemento $x \in A$, entón $f(x) \in B$. Se se cumpre que $f(x) \in C$ entón podemos aplicar g a $f(x)$, de modo que fariamos $g(f(x))$.

A isto chámaselle compoñer f con g e pódese facer se a imaxe de f está no conxunto inicial de g. Así que:

Composición

Se $f(A) \subset C$, definimos a *composición de f e g*, que se denota por $g \circ f$, como a aplicación

$$\begin{aligned} g \circ f : \quad & A \longrightarrow D \\ & a \rightsquigarrow (g \circ f)(a) = g(f(a)). \end{aligned}$$

Dado un conxunto A, unha aplicación de especial relevancia definida nel é a *aplicación identidade*, que aplica un elemento en si mesmo:

$$\begin{aligned} I_A : \quad & A \longrightarrow A \\ & a \rightsquigarrow I_A(a) = a. \end{aligned}$$

Obsérvese que para calquera aplicación $f : A \longrightarrow B$ se verifica $f \circ I_A = f = I_B \circ f$.

Aplicación inversa.

Aplicación inversa.

Sexan A e B dous conxuntos e $f : A \longrightarrow B$ unha aplicación entre eles. Chámase *aplicación inversa* de f, e denótase por f^{-1}, a unha aplicación $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

A aplicación inversa de f non sempre existe, de feito existe se e só se f é bixectiva.

Se unha aplicación f ten inversa, entón a inversa da inversa é a propia aplicación, é dicir, $(f^{-1})^{-1} = f$. Ademais, obsérvese que se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ son dúas aplicacións invertibles tamén o é a súa composición $g \circ f$, e ademais $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exemplo:

- A función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ ten inversa $g(y) = \sqrt[3]{y}$, xa que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$.

Operacións con binomios

- Para sumar e restar binomios (ou polinomios) súmanse ou réstanse os termos do mesmo grao.
  Exemplos:
  - $(4x^3 + x^2) + (-4x^3 + 6x) = x^2 + 6x.$
  - $(4x^2 + 3x) - (x^2 - 5x) = 3x^2 + 8x.$
- Para multiplicar binomios, multiplícase cada monomio do primeiro binomio por cada monomio do segundo binomio.
  Exemplos:
  - $(2x - 3)(3x + 4) = 6x^2 + 8x - 9x - 12 = 6x^2 - x - 12.$
  - $(4x^2+3x)(x-5) = 4x^3-20x^2+3x^2-15x = 4x^3-17x^2-15x.$
- Igualdades notables:
  - $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$
  - $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$

Ollo!: Non podemos confundir $(a + b)^2$ con $a^2 + b^2$ nin $\sqrt{a^2 + b^2}$ con $a + b$ ou $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$. De feito tense que $|a + b| = \sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}$.

Curso 0
Sesión 1

Departamento de Matemáticas

Escola Politécnica de Enxeñaría de Ferrol
UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Curso 2025-2026