

# Análisis de variable compleja

Óscar Riquelme Moya

*Departamento de física aplicada*  
*Universidad de Alicante*

21 de septiembre de 2022



# Índice general

<b>1. El cuerpo de los números complejos.</b>	<b>5</b>
1.1. Los números complejos . . . . .	5
1.2. Analiticidad . . . . .	6
1.3. Algunas funciones elementales . . . . .	7
1.3.1. Función exponencial . . . . .	7
1.3.2. Función Logarítmica . . . . .	8
1.3.3. Funciones potencia . . . . .	9
1.3.4. Funciones trigonométricas e hiperbólicas . . . . .	10
<b>2. Integración en <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>13</b>
2.1. Preliminares topológicos . . . . .	13
2.2. Integración sobre caminos . . . . .	14
2.3. Teoremas de Cauchy para determinadas regiones . . . . .	18
2.4. Formula integral de Cauchy para círculos . . . . .	21
2.5. Aplicaciones de Teoría de Cauchy . . . . .	26
2.6. Principio del módulo máximo . . . . .	28
<b>3. Series de potencias</b>	<b>33</b>
3.1. Convergencia de Series . . . . .	33
3.1.1. Criterios de convergencia para series . . . . .	34

3.2. Series de potencias . . . . .	34
3.3. Teorema de Taylor y de la convergencia analítica . . . . .	36
3.4. Principio de prolongación analítica . . . . .	39
3.5. Series de Laurent . . . . .	40
<b>4. Teoría de residuos</b>	<b>47</b>
4.1. Teorema de los residuos . . . . .	48
4.2. Consecuencias del Teorema de los Residuos . . . . .	49
<b>5. Funciones enteras</b>	<b>55</b>

# Bloque 1

## El cuerpo de los números complejos.

### 1.1. Los números complejos

**Definición 1.1.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ .

Definimos la parte real de  $z$  como  $\Re(z) = \text{Re}(z) = a$  y la parte imaginaria de  $z$  como  $\Im(z) = \text{Im}(z) = b$

$\alpha = \arg z = \arctan(\frac{b}{a})$ : El argumento de un número complejo.

$\text{Arg}F$ : El argumento principal con,  $\text{Arg}z \in (-\pi, \pi]$

**Forma trigonométrica:**  $z = a + bi = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

**Forma exponencial:**  $z = a + bi = |z|e^{i\alpha}$

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0, b > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } a = 0, b < 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) & \text{si } a > 0, b > 0 \\ -\arctan(\frac{-b}{a}) & \text{si } a > 0, b < 0 \\ -\arctan(\frac{b}{-a}) + \pi & \text{si } a < 0, b > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{si } a < 0, b < 0 \\ 0 & \text{si } a > 0, b = 0 \\ \pi & \text{si } a < 0, b = 0 \end{cases}$$

**Fórmula de Moivre:**  $z^n = (re^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha} = r^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$

## 1.2. Analiticidad

$$\text{Sea } \begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

**Definición 1.2** (Límite). Definimos el límite de  $f(z)$  cuando  $z$  tiende a  $z_0$  como:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta / \text{ si } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

**Definición 1.3** (Continuidad).  $f$  es continua en  $z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta / \text{ si } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

**Definición 1.4** (Derivabilidad).  $f$  es derivable en  $z_0 \Leftrightarrow$

$$\exists f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

**Definición 1.5** (Analiticidad). Sea  $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  una función compleja definida en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$ , diremos que  $f$  es analítica en  $U$  cuando exista un entorno de  $U$  donde  $f$  es derivable en todo punto.

**Definición 1.6.** Se dice que una función  $f$  es entera si es analítica en todo  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 1.1** (Ecuaciones de Cauchy-Riemman). Sea  $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  analítica en el abierto  $U$ , entonces se satisface:  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$  y  $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \forall (x_0, y_0) \in U$

**Demostración.** Sea  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U \Rightarrow \exists f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$

Tomamos  $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h + y_0 i) - f(x_0 + y_0 i)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)) + (v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0))i}{h} &= \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)i & \end{aligned}$$

Sea  $k \in \mathbb{R}$ , tomamos  $h = ik$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{h=ik \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + (y_0 + y)i) - f(x_0 + y_0 i)}{ik} &= \\
 \lim_{h=ik \rightarrow 0} \frac{(u(x_0, (y_0 + y)) - u(x_0, y_0 i)) + (v(x_0, (y_0 + y)) - v(x_0, y_0 i)i)}{ik} &= \\
 &= -\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)i + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)i \\
 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)i &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)i \\
 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\quad \square
 \end{aligned}$$

**Teorema 1.2.** Sea  $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$  definida en  $U$  abierto tal que existen las parciales primeras de  $u$  y  $v$  en un entorno de  $(x_0, y_0) \in U$  y son continuas, entonces si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $(x_0, y_0)$  entonces  $f$  es derivable en  $z_0 = x_0 + y_0 i$ .

**Proposición 1.1** (Cauchy-Riemann en coordenadas polares).

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\
 \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0), \quad \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = -\frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0) \\
 \Rightarrow f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)i = \left( \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) + i \frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \right) (\cos \theta - i \sin \theta)
 \end{aligned}$$

## 1.3. Algunas funciones elementales

### 1.3.1. Función exponencial

Sea  $x, y \in \mathbb{R}$  y sea  $z = x + iy$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3!}i + \dots \\
&= (1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \dots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \dots) = \cos y + i \sin y \\
&\Rightarrow e^x + e^{iy} = e^{x+iy} = e^z \\
&\Rightarrow \text{definimos la exponencial compleja } \exp z \equiv e^z = e^x(\cos y + i \sin y)
\end{aligned}$$

### Propiedades

1.  $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$
2.  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x \leq e^{|z|}$
3.  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
4.  $(e^z)^n = e^{nz}$
5.  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
6.  $e^z$  es una función entera.
7.  $e^z = 1 \Leftrightarrow e^x e^{iy} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 2\pi k \Leftrightarrow z = 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$
8.  $\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} e^z$

### 1.3.2. Función Logarítmica

$$e^w = z \Leftrightarrow \log z = w \text{ con } z \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Si } z = 1 \Rightarrow e^w = 1 \Leftrightarrow w = 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}.$$

**Definición 1.7** (Logaritmo principal). Sea  $z \neq 0$ , entonces el logaritmo principal o rama principal del logaritmo de  $z$ , denotado por  $\operatorname{Log}$ , viene definido por  $\operatorname{Log} z = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$  donde  $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ . Denotamos por  $\log(z)$  al conjunto de elementos  $w \in \mathbb{C}$  de forma que  $e^w = z$ .

**Definición 1.8.** Sea  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  Definimos  $\log_{\theta_0} z = \ln |z| + i\theta$  con  $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ .

Podemos ver como  $\operatorname{Log} z = \log_{-\pi} z$ .



**Propiedades**

1.  $w = \log z \Leftrightarrow z = e^w$
2.  $\log(1) = \{2\pi ki, k \in \mathbb{Z}\}$
3.  $\log(-1) = \{(2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$
4.  $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$  pero no siempre se cumple que  $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$ .
5.  $\text{Log} z$  es una función continua en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
6.  $\text{Log} z$  es una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\frac{d}{dz} \text{Log} z = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

7.  $e^{\log_{\theta_0} z} = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
8.  $\log_{\theta_0} e^z = z \quad \forall z \in \{x + iy / \theta_0 \leq y \leq \theta_0 + 2\pi\}$

**1.3.3. Funciones potencia**

**Definición 1.9.** Sea  $z \neq 0$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$  tomaremos por definición  $z^\alpha$ , llamada potencia de exponente arbitrario  $\alpha$ , como el conjunto de todos los valores dados por:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

**Nota:** Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  entonces  $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$ .

**Definición 1.10.** Sea  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , tomaremos por definición  $a^z$ , llamada la función exponencial general, como el conjunto de todos los valores dados por:

$$a^z = e^{z \log a}$$

**Nota:** Para obtener ramas uniformes de la función exponencial basta con fijar uno de los valores del logaritmo. Cuando se toma  $\text{Log} z$  se llama rama principal.

**1.3.4. Funciones trigonométricas e hiperbólicas**

$$\begin{array}{rcl}
e^{it} = \cos t + i \sin t & & \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\
& \implies & \\
e^{-it} = \cos t - i \sin t & & \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{i(e^{it} - e^{-it})} \\
\sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\
\tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{e^{it} - e^{-it}}
\end{aligned}$$

1.  $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$
2.  $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
3.  $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
4.  $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
5.  $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = \pi ki, k \in \mathbb{Z}$
6.  $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}(2k + 1), k \in \mathbb{Z}$
7.  $\sinh z = -\sin(iz)$
8.  $\cosh z = \cos(iz)$

Tomando  $z = x + iy$ :

9.  $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
10.  $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
11.  $|\cos z| \geq |\cos x|$

$$12. |\sin z| \geq |\sin x|$$

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \\ \sin z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} & \sinh z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ \cos z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} & \cosh z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!} \end{aligned}$$

**Definición 1.11.** Se dice que  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica en un dominio  $D$  si tiene derivadas parciales segundas continuas en todo punto de  $D$  y satisface la ecuación de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  en todo punto de  $D$ .

**Definición 1.12.** Se dice que  $v(x, y)$  es una conjugada armónica de  $u(x, y)$  en  $D \subset \mathbb{R}^2$  si ambas son armónicas y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $D$ , es decir, existe una función compleja  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  analítica en  $D$ .

**Proposición 1.2.** Sea  $u(x, y)$  una función armónica en  $D$  y consideremos  $U$  una región rectangular contenida en  $D$  entonces existe una conjugada armónica de  $u(x, y)$  en  $U$ .

**Demostración.** Sea  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  donde  $P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$  y  $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Como  $u(x, y)$  es armónica entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  que es una ecuación diferencial exacta y existe  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$dv = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x}$$

con lo que  $v(x, y)$  es conjugada armónica de  $u(x, y)$ .  $\square$



# Bloque 2

## Integración en $\mathbb{C}$

### 2.1. Preliminares topológicos

**Definición 2.1** (Entorno perforado). Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  llamamos entorno perforado al conjunto abierto definido por  $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$  para algún  $\varepsilon > 0$ .

**Definición 2.2** (Conjunto conexo). Llamamos conjunto conexo al conjunto abierto (cerrado) del plano que no puede ser escrito como unión disjunta de dos conjuntos no vacíos abiertos (cerrados).

**Definición 2.3** (Conjunto poligonalmente conexo). Decimos que  $P$  es un conjunto poligonalmente conexo si cada par de puntos de  $P$  pueden ser unidos mediante un polígono contenido en  $P$ .

**Definición 2.4** (Conjunto estrellado). Decimos que  $E$  es un conjunto estrellado si  $\exists a \in E / [a, z] \subset E \ \forall z \in E$ .

**Definición 2.5** (Conjunto convexo). Decimos que  $C$  es un conjunto convexo si  $[z, w] \subset C \ \forall z, w \in C$ .

**Definición 2.6** (Conjunto simplemente convexo). Decimos que  $S$  es un conjunto simplemente conexo cuando cualquier camino cerrado en  $S$  puede deformarse de forma continua hasta convertirse en un punto sin salirse de  $S$ .

## 2.2. Integración sobre caminos

**Definición 2.7.** Llamamos curva a una aplicación continua  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  con  $a < b$  tal que a un número real  $t$  le corresponde un número complejo.

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

La traza o trayectoria de la curva  $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t), t \in [a, b]\}$  será representado por  $\gamma^*$ .

Cuando  $\gamma(a) = \gamma(b)$  se dice que la curva es cerrada.

**Definición 2.8.** Sea  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  una curva, si  $\gamma(t) \neq \gamma(s) \forall t \neq s$  excepto, a lo sumo, en los extremos, la curva será llamada un arco simple o arco simple de Jordan.

**Definición 2.9.** Sea  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  una curva, se dice que es diferenciable con continuidad,  $\mathcal{C}^1([a, b])$ , cuando  $\gamma$  es diferenciable y presenta derivada continua en  $[a, b]$ . Además,  $\gamma$  es diferenciable con continuidad a trozos cuando  $[a, b]$  se puede descomponer en un número finito de subintervalos sobre los que  $\gamma$  es diferenciable con continuidad.

**Definición 2.10.** Llamaremos camino a una curva diferenciable con continuidad a trozos.

**Definición 2.11.** Sea  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  un camino y  $f(z)$  una función continua en  $\gamma^*$ , definimos la integral compleja de  $f(z)$  a lo largo de  $\gamma$  por:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

### Parametrizaciones comunes

Intervalo  $[z_1, z_2]$ :  $\gamma(t) = (1 - t)z_1 + tz_2$  con  $t \in [0, 1]$ .

Circunferencia de centro  $z_0$  y radio  $r$   $C(z_0, r)$ :  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$

**Proposición 2.1.** Sea  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  un camino y  $f(z), g(z)$  funciones continuas en  $\gamma^*$  entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. La integral sobre un camino es invariante de parametrizaciones.
2.  $\int_{\gamma} (f(z) + g(z))dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma} g(z)dz$
3.  $\int_{\gamma} cf(z)dz = c \int_{\gamma} f(z)dz, c \in \mathbb{C}$
4.  $\int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$  donde  $-\gamma$  es el camino opuesto definido por  $(-\gamma)(t) = \gamma(b + a - t) \forall t \in [a, b]$
5. Si  $\beta$  es otro camino tal que  $\gamma + \beta$  está definido y  $f(z)$  es también continua en  $(\gamma + \beta)^*$  entonces:

$$\int_{\gamma+\beta} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\beta} f(z)dz$$

**Proposición 2.2.** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un camino y  $f(z)$  una función continua en  $\gamma^*$ , entonces:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq M_f(\gamma)L(\gamma)$$

Con  $M_f(\gamma) = \max\{|f(z)|, z \in \gamma^*\}$  y  $L(\gamma)$  la longitud de  $\gamma$ .

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \\ M_f(\gamma) \int_a^b |\gamma'(t)| dt &= M_f(\gamma)L(\gamma) \end{aligned}$$

**Definición 2.12.** Sea  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función definida en un abierto  $U$ , diremos que  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  es una primitiva de  $f$  en  $U$  cuando  $F(z)$  es analítica en  $U$  y  $F'(z) = f(z) \forall z \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 2.1** (Extensión del 2º teorema fundamental del cálculo). Supongamos que  $f(z)$  es una función continua en un conjunto abierto  $U$  y que  $F(z)$  es una primitiva de  $f$  en  $U$ . Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es un camino en  $U$  entonces:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(z) \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$$

En particular, bajo las hipótesis anteriores si  $\gamma$  es un camino cerrado:  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ .

**Demostración.** Sea  $G(t) = F(\gamma(t))$  con  $t \in [a, b]$  entonces  $G(t)$  es continua en  $[a, b]$  y  $G'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$  con lo que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b G'(t)dt = G(t) \Big|_a^b = F(\gamma(t)) \Big|_a^b$$

□

**Colorario 2.1** (Funciones constantes). *Supongamos que  $f(z)$  es analítica en un abierto y conexo  $U$  y además  $F'(z) = 0 \forall z \in U$  entonces  $f(z)$  es constante en  $U$ .*

**Demostración.** Sean  $z_1$  y  $z_2$  en  $U$ . Dado que  $U$  es conexo, existe un camino poligonal  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  que los une tal que  $\gamma(a) = z_1$  y  $\gamma(b) = z_2$ . Por el teorema anterior tenemos que

$$0 = \int_{\gamma} f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1) \Rightarrow f(z_2) = f(z_1) \Rightarrow f \text{ es constante} \quad \square$$

**Teorema 2.2** (Independencia de caminos). *Supongamos que  $f(z)$  es una función continua en el conjunto abierto y conexo  $U$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1.  $\int_{\gamma} f(z)dz$  es independiente de la trayectoria de  $\gamma$ .
2.  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \forall \gamma$  cerrado.
3.  $f(z)$  admite una primitiva en  $U$ .

**Demostración.** 1  $\Leftrightarrow$  2

Sea  $\gamma_1$  un camino en  $U$  que une  $z_1$  y  $z_2$ , sea  $\gamma_2$  otro camino en  $U$  que une  $z_1$  y  $z_2$ .

Consideremos  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  un camino cerrado, entonces:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Si  $\int_{\gamma} f(z)dz$  entonces la integral sobre  $\gamma_1$  es igual a la integral sobre  $\gamma_2$  con lo que es independiente del camino.



De la misma forma, si la integral es independiente del camino entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

3  $\Rightarrow$  1

Por el 2º Teorema fundamental del Cálculo.

1  $\Rightarrow$  3

Fijemos  $z_0 \in \mathbb{C}$  y consideremos  $\gamma_z$  un camino en  $U$  que une  $z_0$  con  $z$ , siendo  $z \in U$ .

Sea  $F(z) = \int_{\gamma_z} f(s)ds$ , por hipótesis  $F(z)$  no depende del camino. Veamos que  $F$  es analítica y  $F' = f \forall z \in U$ .

Dado que  $U$  es abierto, podemos tomar  $w \in U$  suficientemente próximo a  $z$  con  $w \neq z$ . Entonces si consideramos  $\gamma$  al camino que une  $z_0$  consigo mismo pasando por  $\gamma_z$ ,  $[z, w]$  y  $-\gamma_w$ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_z} f(z)dz + \int_{[z,w]} f(z)dz + \int_{-\gamma_w} f(z)dz = 0$$

Por tanto  $F(w) - F(z) = \int_{\gamma_w} f(z)dz - \int_{\gamma_z} f(z)dz = \int_{[z,w]} f(z)dz$  y al ser  $\int_{[z,w]} 1ds = z - w$  se tiene que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f(z)}{w - z} \int_{[z,w]} ds = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} f(z)ds \Rightarrow \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \\ &= \frac{\int_{[z,w]} f(z)ds}{w - z} - \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} f(z)ds = \frac{\int_{[z,w]} (f(s) - f(z))ds}{w - z} \end{aligned}$$

El módulo tiende a 0 por ser  $f$  continua cuando  $w \rightarrow z$ , entonces

$$F'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z)$$

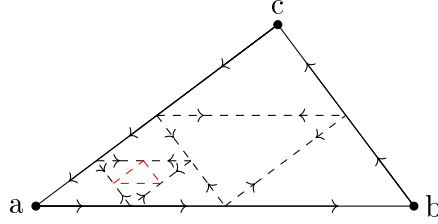
□

### 2.3. Teoremas de Cauchy para determinadas regiones

**Teorema 2.3** (Teorema de Cauchy para triángulos). *Sea  $f(z)$  una función analítica en un abierto  $U$ . Para cualquier triángulo ( $\Delta = \text{int}(\Delta \cup \text{Fr}(\Delta))$ ) contenido en  $U$  se tiene que:*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \text{ donde } \Gamma = \text{Fr}(\Delta)$$

**Demostración.** Sea  $\Gamma_0$  el camino de la frontera del triángulo, podemos subdividir este en 4, teniendo 4 subtriángulos con fronteras  $\Gamma_{0,1}, \dots, \Gamma_{0,4}$ , y este proceso lo podemos repetir las veces que queramos. Podemos verlo gráficamente así:



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z)dz &= \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_{0,j}} f(z)dz \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma_1} f(z)dz \right| \leq \\ &4^2 \left| \int_{\Gamma_2} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Gamma_n} f(z)dz \right| \\ \Gamma_k &= \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \left| \int_{\Gamma_{k,j}} f(z)dz \right| \right\} \end{aligned}$$

Sea  $\bar{V}_n = V_n \cup \Gamma_n$  entonces tenemos que  $\bar{V}_n \subset \bar{V}_{n-1} \subset \dots \subset \bar{V}_1$ . Y por el teorema de Cantor debe existir un  $z_0$  tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{z_0\}$$

### 2.3. TEOREMAS DE CAUCHY PARA DETERMINADAS REGIONES 19

$f$  es analítica en  $U$  entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{ si } |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

$$\forall z \in U, g(z) := f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0), \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$$

$$|g(z)| \leq \varepsilon |z - z_0| \text{ si } |z - z_0| < \delta$$

Dado  $\delta > 0$ ,  $\exists n \in \mathbb{N} / \bar{V}_n \subset D(z_0, \delta)$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_n} z dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2} + \frac{z_3^2 - z_2^2}{2} + \frac{z_1^2 - z_3^2}{2} = 0, \int_{\Gamma_n} C dz = 0, \forall C \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma_n} g(z) dz \right| \leq M_g(\Gamma_n) L(\Gamma_n)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma_n} f(z) dz \right| \leq M_{\varepsilon|z-z_0|}(\Gamma_n) L(\Gamma_n) \leq \varepsilon L(\Gamma_n)^2 \leq \varepsilon \left( \frac{1}{2^n} L(\Gamma) \right)^2$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \varepsilon \left( \frac{1}{2^n} L(\Gamma) \right)^2 = \varepsilon L(\Gamma)^2$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = 0 \text{ porque podemos hacer } \varepsilon \text{ tan pequeño como queramos. } \quad \square$$

**Teorema 2.4** (Teorema de Cauchy para regiones estrelladas). Sea  $f(z)$  una función analítica en un conjunto estrellado y abierto  $U$ . Para cualquier  $\gamma$  camino cerrado en  $U$  se tiene que:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Demostración.** Al ser una región estrellada sabemos que  $\exists z_0 \in U$  tal que  $[z_0, z] \in U \forall z \in U$ .

Sea  $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w) dw$  y veamos que  $F'(z_1) = f(z_1) \forall z_1 \in U$ .

Sea  $z \in U, z \neq z_0, z_1 \neq z \Rightarrow$

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_0, z]} f(w) dw - \int_{[z_0, z_1]} f(w) dw}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_0, z]} f(w) dw + \int_{[z_1, z_0]} f(w) dw}{z - z_1}$$

Por el Teorema de Cauchy para triángulos, tomando  $\Gamma = [z_0, z] \cup [z, z_1] \cup [z_1, z_0]$  vemos que  $\int_{\Gamma} f(w)dw = 0$ . Con lo que

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_1, z]} f(w)dw}{z - z_1}$$

$$\left| \frac{\int_{[z_1, z]} f(w)dw}{z - z_1} - f(z_1) \right| \leq M_f(\gamma) \frac{|z - z_1|}{|z - z_1|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

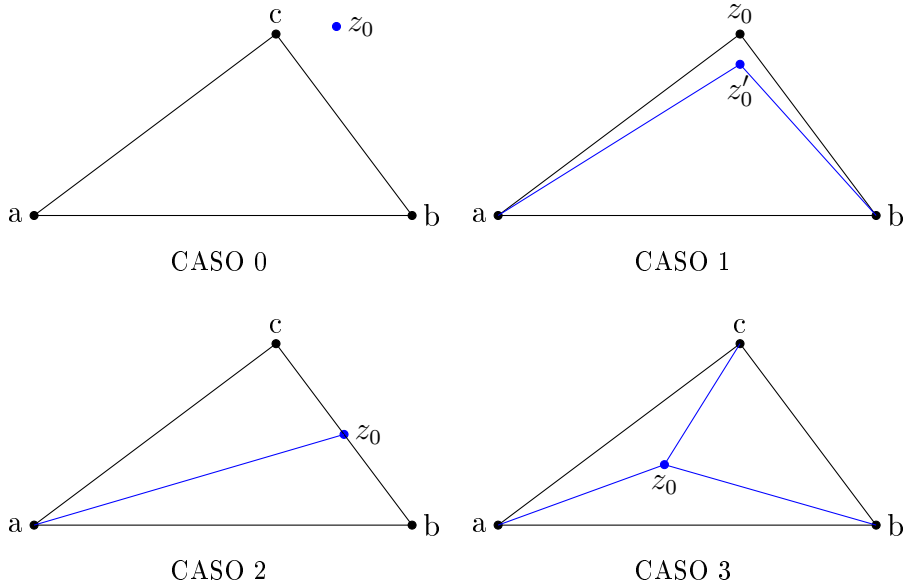
$$\Rightarrow \left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \Rightarrow F'(z_1) = f(z_1)$$

Podemos concluir que  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  para todo  $\gamma$  camino cerrado.  $\square$

**Teorema 2.5** (Teorema de Cauchy extendido para triángulos). *Sea  $f(z)$  una función continua en un abierto  $U$  y analítica en  $U \setminus \{z_0\}$  para algún  $z_0 \in U$ , para cualquier  $\Delta$  contenido en  $U$  se tiene que:*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \text{ donde } \Gamma = Fr(\Delta)$$

**Demostración.** Vamos a dividir la demostración en casos:



CASO 0: Si  $z_0 \notin \Delta$  se aplica el Teorema de Cauchy para triángulos.

CASO 1: Si  $z_0$  es un vértice de  $\Delta$  llamamos  $\Gamma'$  a la frontera del triángulo  $\Delta'$  con la misma base que  $\Delta$  y con vértice  $z'_0$  cercano a  $z_0$ .

Tomando  $U' = U \setminus \{z_0\}$  y aplicando el Teorema de Cauchy para triángulos se tiene que  $\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0$ . Ahora bien,  $\int_{\Gamma'} f(z)dz \xrightarrow{z'_0 \rightarrow z_0} \int_{\Gamma} f(z)dz$  ya que  $f$  es uniformemente continua en el compacto formado por el triángulo así que  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ .

CASO 2: Si  $z_0$  está en un lado del triángulo, podemos subdividirlo en dos de forma que  $z_0$  sea vértice de ambos, pudiendo aplicar el caso 1.

CASO 3: Si  $z_0$  está en el interior del triángulo, subdividimos el triángulo en 3, de tal forma que  $z_0$  sea vértice de los tres y aplicamos el caso 1.  $\square$

**Teorema 2.6** (Teorema de Cauchy extendido para regiones estrelladas). Sea  $f(z)$  una función continua en un conjunto estrellado y abierto  $U$  y analítica en  $U \setminus \{z_0\}$  para algún  $z_0 \in U$ . Para cualquier  $\gamma$  camino cerrado en  $U$  se tiene que  $f(z)$  tiene primitiva y que:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

**Demostración.** Análogo al teorema de Cauchy para regiones estrelladas pero usando el teorema de Cauchy extendido para triángulos.

**Colorario 2.2** (Teorema de Cauchy para convexos). Sea  $U$  un conjunto abierto y convexo,  $f(x)$  continua en  $U$ , analítica en  $U \setminus \{z_0\}$  para algún  $z_0 \in U$  entonces para todo  $\gamma$  camino cerrado:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

## 2.4. Formula integral de Cauchy para círculos

**Teorema 2.7** (Formula integral de Cauchy para círculos). Sea  $f(z)$  analítica en un abierto  $U$  que contiene a un disco  $\overline{D}(z_0, r)$  para  $r > 0$ . Entonces para cualquier  $z \in D(z_0, r)$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Donde  $C := C(z_0, r) = \{z/|z_0 - z| = r\}$ .

**Demostración.** Sea  $V = D(z_0, r)$  tal que  $\bar{D}(z_0, r) \subset V \subset U$  y  $z \in D(z_0, r)$ . Sea  $t > 0$  tal que  $D := D(z, t) \subset D(z_0, r)$ .

(dibujo)

$C_1 \subset V_1$  estrellado entonces tenemos que  $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$ ,  $w \in V_1$  es analítica, por lo que

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= 0 \text{ y análogamente se tiene que } \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0 \\ 0 &= \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_D \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &\Rightarrow \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_D \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) \int_C \frac{dw}{w-z} dz + \int_C \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \\ \int_C \frac{dw}{w-z} &= \int_0^{2\pi} \frac{ite^{it}}{te^{it}} dt = 2\pi i \end{aligned}$$

$f(w)$  es continua en  $z$  con lo que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |w - z| < \delta \Rightarrow f(w) - f(z) < \varepsilon.$$

Tomemos  $0 < t < \delta$

$$\left| \int_D \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \right| \leq 2\pi\varepsilon$$

Y como podemos hacer  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño concluimos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \square$$

**Teorema 2.8** (Formula integral de Cauchy para círculos en derivadas). Sea  $f(z)$  analítica en un abierto  $U$  que contiene a un disco  $\bar{D}(z_0, r)$  para  $r > 0$ . Entonces para cualquier  $z \in D(z_0, r)$   $\exists f^{(n)}(z)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  y se tiene que:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Donde  $C := C(z_0, r)$ .

**Demostración.** Sea  $z_0 \in D(z_0, r)$ . Veamos que  $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$ . Sea  $h \neq 0$  suficientemente pequeño entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad f(z+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-(z+h)} dw \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left( \frac{1}{w-(z+h)} - \frac{1}{w-z} - \frac{h}{(w-z)^2} \right) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C \frac{f(w)h^2}{(w-z-h)(w-z)^2} dw = \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)^2} dw \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Veamos ahora que  $f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw$ .

$$\begin{aligned} \frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} &= \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left( \frac{1}{(w-z-h)^2} - \frac{1}{(w-z)^2} - \frac{2h}{(w-z)^3} \right) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left( \frac{3h^2(w-z) - 2h^2}{(w-z-h)^2(w-z)^3} \right) dw \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Por inducción probemos ahora que  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$ :

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} &= \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \\ &= \frac{k!}{2\pi i h} \int_C f(w) \left( \frac{1}{(w-z-h)^{k+1}} - \frac{1}{(w-z)^{k+1}} - \frac{(k+1)h}{(w-z)^{k+2}} \right) dw = \\ &= \frac{k!}{2\pi i h} \int_C f(w) \left( \frac{h^2(-\binom{k+2}{2} + (k+1)\binom{k+1}{1})(w-z)^k + h^3(\binom{k+1}{2} - \dots)}{(w-z-h)^{k+1}(w-z)^{k+2}} \right) dw \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$ .  $\square$

**Colorario 2.3** (F.I.C). Sea  $z : 0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ ,  $C := C(z_0, r)$  Entonces:

$$\int_C \frac{1}{w-z} dw = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } z \text{ es interior a } C \\ 0 & \text{si } z \text{ es exterior a } C \end{cases}$$

**Demostración.** Si  $z$  es exterior a  $C$  entonces  $f(w) = \frac{1}{w-z}$  es analítica en  $D(z_0, s)$  con  $s > r$  de forma que  $z \notin D(z_0, s)$ . Entonces por el Teorema de Cauchy para convexos  $\int_C \frac{1}{w-z} dw = 0$ .

Si  $z$  es interior a  $C$ ,  $f(w) = 1$  y por F.I.C entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w-z} dw = f(z) = 1 \Rightarrow \int_C \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i$$

**Colorario 2.4** (Analiticidad de las derivadas). Sea  $f(z)$  una función analítica en un punto entonces sus derivadas de todos los ordenes son también funciones analíticas en ese punto. Además si  $f(z)$  tiene primitiva en un abierto  $U$  entonces  $f(z)$  es analítica en  $U$ .

**Demostración.** Si  $f$  es analítica en un punto  $z_0$  entonces  $\exists r > 0$  tal que  $f$  es derivable en todo punto de  $D(z_0, r)$  y por F.I.C. para las derivadas  $f$  es infinitamente derivable sobre  $D(z_0, r)$ . Entonces todas las derivadas son analíticas en  $z_0$ .

Si  $f(z)$  tiene primitiva en  $U$  sabemos que  $\exists F(z)$  analítica en  $U$  tal que  $F'(z) = f(z) \forall z \in U$ .

Por lo anterior, todas las derivadas de  $F$  ejson analíticas en  $U$ , en concreto  $f(x)$  lo es.

**Colorario 2.5.** Si una función  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  es analítica en un punto  $z_0 = u_0 + i v_0$  entonces sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todo orden en ese punto. Las partes reales e imaginarias de una función analítica en un dominio  $D$  son funciones armónicas en  $D$

**Colorario 2.6.** Sea  $f(z)$  continua en un abierto  $U$  y analítica en  $U \setminus \{z_0\}$  para  $z_0 \in U$  entonces  $f(z)$  es analítica en  $U$ .

**Demostración.** Sea  $V = D(z_0, r)$ ,  $r > 0$  tal que  $V \subseteq U$ . SI aplicamos el Teorema de Cauchy para convexos  $\int_\gamma f(z) dz = 0$  para todo camino cerrado en  $V$ . Entonces por el Teorema de independencia de caminos  $\exists F(z)$  primitiva de  $f$  en  $V$ . Con lo que  $f(z)$  es analítica en  $V$  y en consecuencia lo es también en  $U$ .

**Definición 2.13** (Índice de un punto respecto a un camino cerrado).

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$



**Teorema 2.9 (Primer teorema de Cauchy).** Sea  $U$  abierto de  $\mathbb{C}$  y  $\gamma$  un camino cerrado,  $\forall f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  analítica,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow n(\gamma_z) = 0 \quad \forall z \notin U$$

**Teorema 2.10** (Segundo teorema de Cauchy). Sea  $U$  abierto de  $\mathbb{C}$  son equivalentes:

1.  $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$  es conexo.
2.  $n(\gamma, z) = 0 \quad \forall \gamma$  camino cerrado en  $U$  y  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus U$ .
3.  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad \forall f$  analítica en  $U$  y  $\forall \gamma$  camino cerrado en  $U$ .
4. Si  $f$  es analítica entonces tiene primitiva.

**Teorema 2.11** (Fórmula integral de Cauchy general). Sea  $f$  analítica en un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  y  $\gamma$  un camino cerrado en  $U$  tal que  $n(\gamma, z) = 0 \quad \forall z \notin U$  entonces para  $z \in U$ ,  $z \notin \gamma^*$  se cumple que:

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z - w} dw$$

$$f^{(n)}(z)n(\gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(z - w)^{n+1}} dw$$

**Definición 2.14.** Definimos los ciclos como sumas de la forma  $\gamma = \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j$  con  $a_j \in \mathbb{Z}$  y  $\gamma_j$  camino cerrado.

**Teorema 2.12.** Sea  $U$  abierto y  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos caminos cerrados (o ciclos) entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad \forall f \text{ analítica en } U \Leftrightarrow n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$$

## 2.5. Aplicaciones de Teoría de Cauchy

**Lema 2.1.** Sea  $f(z)$  una función continua en  $U$  abierto convexo, supongamos que para todo triangulo  $\Delta \subset U$  se tiene que si  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$  entonces  $f(z)$  tiene primitiva.

**Demostración.** Sea  $z_0 \in U$ , definimos  $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w)dw \quad \forall z \in U$ .

Tomemos  $h \in \mathbb{C}$  tal que  $|h| \ll |z_0 - z|$  entonces:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{\int_{[z_0, z+h]} f(w)dw - \int_{[z_0, z]} f(w)dw}{h} - f(z) \right| = \\ &= \left| \frac{\int_{[z_0, z+h]} f(w)dw}{h} + \frac{\int_{[z+h, z]} f(w)dw}{h} + \frac{\int_{[z, z_0]} f(w)dw}{h} - f(z) \right| = \\ &\Rightarrow \left| \frac{\int_{[z_0, z+h]} f(w)dw}{h} - \frac{\int_{[z, z+h]} f(w)dw}{h} \right| = \left| \frac{\int_{[z, z+h]} f(w)dw}{h} \right| \\ &\leq |f(w) - f(z)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow F'(z) = f(z) \quad \square \end{aligned}$$

**Teorema 2.13** (Teorema de Morera). Sea  $f(z)$  una función continua en  $U$  abierto  $U$ , supongamos que  $\forall \Delta \subset U$  tal que  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$  entonces  $f(z)$  es analítica en  $U$ .

**Demostración.** Sea  $z_0 \in U$  y  $r > 0$  consideramos  $D(z_0, r)$ . Por el lema anterior  $f$  tiene primitiva en  $D$  así que  $f$  es analítica en  $D$ .

Como  $z_0$  es arbitrario deducimos que  $f$  es analítica en todo  $U$ .

**Teorema 2.14** (Principio de reflexión de Schwarz). Sea  $f(z)$  una función analítica en el semiplano abierto  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} / \Im(z) > 0\}$  y continua en  $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ .

Supongamos que  $\Im(f(z)) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$  entonces  $f(z)$  puede ser extendida analíticamente a  $\mathbb{C}$ .

**Demostración.**

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \mathbb{C}^- \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{h}) - f(\bar{z})}}{h} = \overline{f'(w)}$$

El límite existe así que es analítica  $\square$ .

**Lema 2.2** (Estimación de Cauchy). *Sea  $f(z)$  analítica en  $U \supset D(z_0, R)$  y  $M_f(r)$  con  $0 < r < R$  entonces*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M_f(r) \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

**Demostración.** *Por F.I.C para las derivadas*

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(z-w)^{n+1}} dw \Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(z-w)^{n+1}} dw \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi \max \left\{ \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}}, w \in C(z_0, r) \right\} = \frac{n!}{r^n} M_f(z) \quad \square \end{aligned}$$

**Teorema 2.15** (Teorema de Liouville). *Si  $f(z)$  es una función entera y está acotada entonces es constante.*

**Demostración.** *Si  $f(z)$  es acotada entonces  $\exists M > 0 / |f(z)| < M \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Por la estimación de Cauchy para  $n = 1$ :*

$$|f'(z)| \leq \frac{M_f(r)}{r} \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \forall r > 0$$

*Entonces  $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$  como  $\mathbb{C}$  es conexo entonces  $f$  es constante.*  $\square$

**Teorema 2.16** (Teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio  $P(z)$  no constante tiene al menos una raíz, es decir, existe al menos un  $z_0$  tal que  $P(z_0) = 0$ .*

**Demostración.** *Sea  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, n > 1$  Por R.abs., si  $P(z)$  no tuviera raíces entonces  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  es entera. Veamos que  $f$  está acotada:*

*Sabemos que  $|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \exists R > 0 / |P(z)| > 1$  si  $|z| > R \Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < 1$  si  $|z| \leq R$ . En consecuencia  $f(z)$  es acotada en  $\mathbb{C}$  y por el Teorema de Liouville  $f(z) = \text{cte.}$   $\#$*

**Colorario 2.7** (Teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio  $P(z)$  de grado  $n \geq 1$  con coeficientes complejos tiene exactamente  $n$  raíces.*

**Demostración.** *Por el Teorema anterior sabemos que existe  $z_0$  tal que  $P(z_0) = 0$ . Entonces podemos escribir  $P(z) = (z - z_0)P_1(z)$  donde  $P_1$  es un polinomio de grado  $n - 1$ .*

Si  $n = 1$  hemos acabado.

Si  $n > 1$  Aplicamos el proceso anterior a  $P_1$ ,  $P_1(z) = (z - z_1)P_2(z)$

Reiterando obtendremos que  $P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$   $\square$

**Teorema 2.17** (Teorema de Gauss-Lucas). *Sea  $P(z)$  un polinomio no constante con coeficientes complejos, los ceros de  $P'(z)$  están en la clausura convexa de los ceros de  $P(z)$ .*

**Demostración.**  $P(z) = \alpha \prod_{j=1}^n (z - a_j)$ , con  $n$  el grado de  $P$  y  $a_j$  sus raíces.

Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z) \neq 0$  entonces

$$\frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_0 - a_j}$$

Si  $P'(z_0) = 0$  y  $P(z_0) \neq 0$  entonces

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{z_0 - a_j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\bar{z}_0 - \bar{a}_j}{|z_0 - a_j|^2} = 0 \Rightarrow z_0 \sum_{j=1}^n \frac{1}{|z_0 - a_j|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{|z_0 - a_j|^2}$$

Entonces podemos escribir  $z_0$  como  $\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j$  con  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ ,  $\alpha_j > 0$ .  $z_0$  es baricentro de  $a_j$  y entonces  $z_0$  está en la clausura convexa.

Si  $P'(z_0) = 0$  y  $P(z_0) = 0$  entonces  $z_0 = 1 \cdot z_0 + 0 \cdot \sum a_j \Rightarrow z_0$  está en la clausura convexa.  $\square$

## 2.6. Principio del módulo máximo

**Lema 2.3** (Propiedad del valor medio de Gauss). *Sea  $f(z)$  analítica en  $U \supset D(z_0, r)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$  entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

**Demostración.**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad \gamma'(t) = rie^{it}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} re^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

□

**Teorema 2.18** (Principio del módulo máximo local). *Si  $f(z)$  es analítica en un abierto  $U$  y supongamos que  $|f(z)|$  tiene máximo en  $z_0 \in U$ . Entonces  $f(z)$  es constante en un entorno de  $z_0$ .*

**Demostración.** *Por hipótesis sabemos que  $\exists D(z_0, r)$ ,  $r > 0$  tal que  $|f(z)| \leq |f(z_0)| \forall z \in D(z_0, r)$  Entonces se cumple que*

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max\{|f(z_0 + re^{it})| : t \in [0, 2\pi]\} \leq |f(z_0)|$$

$$\Rightarrow |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})| dt = 0$$

$$\Rightarrow |f(z_0)| = |f(z_0 + re^{it})| \forall t \in [0, 2\pi] \Rightarrow |f(z_0)| = \text{cte. en un entorno de } z_0.$$

□

**Colorario 2.8.** *Sea  $f(z_0)$  analítica en un abierto y conexo  $U$ , supongamos que  $|f(z_0)|$  alcanza el máximo absoluto en  $U$ , entonces  $f(z_0)$  tiene valor constante en  $U$ .*

**Demostración.** *Por hipótesis  $\exists z_0 \in U / |f(z)| \leq |f(z_0)| \forall z \in U$ .*

*Sea  $E = \{z \in U / f(z) = f(z_0)\}$  al ser  $f(z)$  continua en  $U$  claramente el conjunto  $E$  es cerrado respecto de  $U$  y  $z_0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$ .*

*Sea  $z \in E \Rightarrow |f(z)| = |f(z_0)| = \max\{|f(z)|\}$  entonces por el resultado anterior  $f$  es constante en un entorno de  $z$ . Con lo que  $\exists r > 0$  tal que  $D(z, r) \subset E \Rightarrow E$  es abierto y entonces  $E = U$ . □*

**Teorema 2.19** (Principio del módulo máximo). *Sea  $f(z)$  analítica en un conjunto abierto, conexo y acotado  $U$  y continua en  $Fr(U)$ .*

*Si  $M = \max\{|f(z)| : z \in Fr(U)\}$ , se cumple que:*

1.  $|f(z)| \leq M \forall z \in U$
2. Si  $|f(z)| = M$  para  $z_0 \in U$  entonces  $f(z) = \text{cte. en } U$ .

**Demostración.**

1. Observamos que  $|f(z)|$  es también continua en  $\bar{U}$  por lo que  $|f(z)|$  alcanza un máximo en  $\bar{U}$ . Si tal máximo se alcanza en  $Fr(U)$  hemos terminado. Si el máximo se alcanza en  $Int(U)$  entonces  $\exists z_0 \in U$  tal que  $|f(z)| \leq |f(z_0)| \forall z \in U$  entonces  $f$  es constante en  $U$ .
2. Si  $\exists z_0 \in U$  tal que  $|f(z_0)| = M$  entonces  $f(z_0)$  es constante.  $\square$

**Teorema 2.20** (Principio del módulo mínimo). Sea  $f(z)$  analítica en un conjunto abierto, conexo y acotado  $U$  y continua en  $Fr(U)$ . Supongamos  $f(z) \neq 0 \forall z \in U$ . Si  $m = \min\{|f(z)|/z \in Fr(U)\}$ , se cumple que:

1.  $|f(z)| \geq m \forall z \in U$
2. Si  $|f(z)| = m$  para  $z_0 \in U$  entonces  $f(z) = cte.$  en  $U$ .

**Demostración.** Sea  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  analítica en  $U$  y continua en  $\bar{U}$ . Vemos que  $g$  cumple las condiciones del módulo máximo con lo que el máximo de  $g$  se alcanza en la frontera y en consecuencia el mínimo de  $f$  también.  $\square$

**Colorario 2.9.** Sea  $f(z)$  analítica no constante en un abierto conexo y acotado  $U$  y continua en  $Fr(U)$ . Si  $u(x, y) = \Re(f(z))$  y  $v(x, y) = \Im(f(z))$  entonces  $u, v$  satisfacen el principio del módulo máximo (mínimo).

**Demostración.** Sea  $g(z) = e^{f(z)}$  analítica en  $U$  y continua en la frontera.  $|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{\Re(f(z))}| |e^{\Im(f(z))i}| = |e^u| |e^{iv}| = e^u$  como  $g$  satisface el principio del módulo máximo (mínimo)  $u$  también los cumple.

Sea  $h(z) = e^{-if(z)}$  entonces  $|h(z)| = e^v$  y como  $h$  satisface el principio del módulo máximo (mínimo)  $v$  también los cumple.  $\square$

**Lema 2.4** (Lema de Schwarz). Sea  $f(z)$  una función analítica en  $D(0, 1)$ . Supongamos que  $f(0) = 0$  y  $|f(z)| \leq 1 \forall z \in D(0, 1)$  entonces  $|f(z)| \leq |z|$  y  $|f'(0)| \leq 1$ .

Además si  $\exists z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}$  tal que  $|f(z_0)| = |z_0|$  o que  $|f'(z_0)| = 1$  entonces  $f(z) = az \forall z \in D(0, 1)$ ,  $a \in \mathbb{C}/|a| = 1$ .

**Demostración.**

$$\text{Sea } g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Si  $z \neq 0$   $g$  es analítica.

Si  $z = 0$  entonces  $g$  es derivable porque

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(h)}{h} - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - hf'(0)}{h^2}$$

El límite existe por analiticidad de  $f$ .

De hecho es claro que  $g$  es continua en  $z = 0$  y por tanto  $g$  es analítica en  $D(0, )$ .

Por el P.M.Máximo  $|g(z)| \leq M = \max\{|g(z)|/z \in FR(U)\}$ ,  $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{z} \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq z \forall z \in D(0, 1)$ .

La segunda parte de la afirmación se cumple por el apartado del P.M.-mínimo.

**Definición 2.15.** Llamaremos núcleo de Poisson a la función

$$P_r(x) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(x)} \text{ siendo } 0 \leq r < R \text{ y } x \in \mathbb{R}$$

**Definición 2.16.** Llamaremos núcleo de Cauchy a la función

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \text{ siendo } z \in D(0, R), t \in \mathbb{R}$$

**Resultado:**  $\Re(Q_z(t)) = P_r(\theta - t)$  con  $z = re^{it} \in D(0, R)$  y  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

**Teorema 2.21** (Fórmula integral de Poisson). Sea  $f(z)$  analítica en  $D(z_0, R)$  y continua en  $\overline{D}(z_0, R)$ , para  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$ ,  $z = z_0 + e^{it} \in D(z_0, R)$ ,  $0 \leq r < R$  se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r/\theta - t) f(z_0 + Re^{it}) dt$$

Si  $u = \Re(f)$  entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r/\theta - t) u(z_0 + Re^{it}) dt$$





# Bloque 3

## Series de potencias

### 3.1. Convergencia de Series

**Definición 3.1.** Una sucesión de números complejos  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  es convergente a  $z \in \mathbb{C}$  si  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / |z_n - z| < \varepsilon$  si  $n > n_0$ .

**Definición 3.2.** Dada una serie de números complejos  $\sum_{n \geq 1} z_n$  diremos que:

- a) Converge a  $z$  si  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / |\sum_{n=1}^m z_n - z| < \varepsilon$  cuando  $m > n_0$ .
- b) Converge absolutamente si  $\sum_{n \geq 1} |z_n| < \infty$ .

**Observación:**

1.  $\sum_{n \geq 1} z_n$  converge si la sucesión de sumas parciales  $\{\sum_{k=1}^n z_k\}_{n \geq 1}$  converge, es decir,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$ .
2. Por la completitud de  $\mathbb{C}$  equivale a que  $\{\sum_{k=1}^n z_k\}_{n \geq 1}$  es de Cauchy.
3. Si  $z_n = x_n + iy_n$  entonces  $\sum_{n \geq 1} z_n$  converge si  $\sum_{n \geq 1} x_n < \infty$  y  $\sum_{n \geq 1} y_n < \infty$ .
4. Una condición necesaria para la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} z_n$  es que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .
5. Convergencia absoluta implica convergencia.

### 3.1.1. Criterios de convergencia para series

1. Algunos criterios en  $\mathbb{R}$ : comparación, cociente y raíz funcionan para  $\mathbb{C}$ .
2. Dada la serie  $\sum_{n \geq 1} P_n$ ,  $P_n \geq 0$ , si consideramos  $A = \limsup (P_n)^{\frac{1}{n}}$  y  $B = \limsup \frac{P_{n+1}}{P_n}$  se tiene que:
  - a) Si  $A < 1$  o  $B < 1$  entonces  $\sum_{n \geq 1} P_n < \infty$
  - b) Si  $A > 1$  o  $B > 1$  entonces  $\sum_{n \geq 1} P_n = \infty$

## 3.2. Series de potencias

**Definición 3.3.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión en  $\mathbb{C}$ . La serie de potencias de coeficientes  $\{a_n\}$  y centro  $z_0$  es la serie funcional dada por

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

**Definición 3.4.** Dada una serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ , diremos que su radio de convergencia viene dado por:

$$r = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$$

**Definición 3.5.** Dada una serie de potencias de números complejos  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ , diremos que:

1. Converge en un punto  $w_0$  si  $\sum_{n \geq 0} a_n (w_0 - z_0)^n$  converge. En caso contrario diremos que no converge a  $w_0$ .
2. Converge absolutamente en un punto  $w_0$  si  $\sum_{n \geq 0} |a_n (w_0 - z_0)^n| < \infty$ .
3. Converge uniformemente sobre un conjunto  $S \subset \mathbb{C}$  a una función  $f(w)$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \left| \sum_{n \geq 0} a_n (w - z_0)^n - f(w) \right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, \quad \forall w \in S$$

La elección de  $n_0$  sólo depende del valor de  $\varepsilon$  y es independiente del punto  $w$  que se tome de  $S$ .

**Teorema 3.1** (Teorema de Abel). *Dada una serie de potencias de números complejos  $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ , supongamos que converge para  $z_1 \in \mathbb{C}$  y llamaremos  $r = |z_1 - z_0|$  entonces la serie converge absolutamente en todo  $D(z_0, r)$  y uniformemente en todo compacto de  $D(z_0, r)$  a la función suma  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ .*

**Demostración.** Sea  $z \in D(z_0, r)$ , entonces

$$\sum_{n \geq 0} |a_n(z - z_0)^n| = \sum_{n \geq 0} \left| a_n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} (z_1 - z_0)^n \right|.$$

Dado que  $\sum_{n \geq 0} a_n(z_1 - z_0)^n$  converge entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z_1 - z_0)^n = 0$  y  $\exists M > 0 / |a_n(z_1 - z_0)^n| < M \forall n \in \mathbb{N}$ .

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} |a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M \sum_{n \geq 0} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$  que converge por ser serie geométrica de razón menor que 1.

Tomemos ahora  $k \subset D(z_0, r)$  un conjunto compacto, y sea  $z' \in D(z_0, r)$  talque  $k \subset \bar{D}(z_0, r') \subset D(z_0, r)$  con  $r' = |z' - z_0|$ . Así si  $z \in k$  tenemos que  $\sum_{n \geq 0} |a_n(z - z_0)^n| < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n < \infty \forall z \in K$ .

Sea ahora  $N_1 \in \mathbb{N}$  y  $w \in k$  entonces:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=0}^{N_1-1} a_j(w - z_0)^j - \sum_{j \geq 0} a_j(w - z_0)^j \right| = \left| \sum_{j \geq N_1} a_j(w - z_0)^j \right| = \\ & = \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=N_1}^{N_2} a_j(w - z_0)^j \right| \leq \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=N_1}^{N_2} |a_j| |w - z_0|^j \leq \\ & \leq \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=N_1}^{N_2} |a_j| |z' - z_0|^j \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| |z' - z_0|^n < \infty \end{aligned}$$

Los restos de la serie cumplen la definición de convergencia uniforme.  $\square$

**Teorema 3.2.** *Consideremos la serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$  y  $r$  su radio de convergencia, consideremos el disco  $D := F(z_0, r)$ .*

1. *La serie converge absolutamente  $\forall z \in D$ .*
2. *La serie converge uniformemente en todo compacto de  $D$ .*

3. La serie no converge sea cual sea  $z$  tal que  $|z - z_0| > r$ .

**Demostración.** Recordemos que  $r = \left( \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$ .

1. Sea  $z \in D$ , observemos que

$$\limsup |a_n(z - z_0)^n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} |z - z_0| = |z - z_0| r^{-1} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

Por criterio de la raíz hay convergencia absoluta con  $z \in D$ .

2. La convergencia uniforme en todo compacto de  $D$  se deduce por el teorema de Abel.

3. Por reducción al absurdo, tomemos que la serie converge para algún  $z'/|z' - z_0| > r$ .

Por el teorema de Abel la serie también convergería en  $z \in D(z_0, r')$  con  $r' = |z' - z_0|$ .

En particular converge  $\forall z/|z - z_0| < r'$ , es decir, también converge en  $z/r < |z - z_0|/|z' - z_0|$  lo que supone una contradicción ya que

$$\limsup |a_n(z - z_0)^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z - z_0|}{r} > 1 \quad \#$$

### 3.3. Teorema de Taylor y de la convergencia analítica

**Teorema 3.3** (Taylor). Sea  $f(z)$  analítica en  $D(z_0, r)$  para  $z_0 \in \mathbb{C}$  t  $r > 0$  entonces para todo  $z \in D(z_0, r)$ ,  $f(z)$  admite la representación en serie:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

**Demostración.** Sea  $r_1/0 < r_1 < r$ ,  $C_1 := \{z/|z - z_0| = r_1\}$ ,  $z \in D(z_0, r_1)$  entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z - (z - z_0)} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} dw \end{aligned}$$

### 3.3. TEOREMA DE TAYLOR Y DE LA CONVERGENCIA ANALÍTICA 37

Para  $s \neq 1$  tenemos que  $\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1} + \frac{s^n}{1-s}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = 1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(w-z_0)^2} + \dots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(w-z_0)^{n-1}} + \frac{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(w-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \frac{1}{w} + \dots + \frac{1}{(w-z_0)^n} (z-z_0)^{n-1} + \frac{1}{(w-z)(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

por F.C.D.  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

$$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z-z_0)^{n-1} + P_n(z)$$

con  $P_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z)(w-z_0)^{n+1}} dw$

Para concluir solo queda demostrar que  $|P_n(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Tomemos  $M = \max_{z \in C_1} \{|f(w)|\}$ ,  $|z-z_0| = r_2 < r_1$ ,  $|w-z| = |w-z_0 - (z-z_0)| \geq r_1 - r_2$ , tenemos que

$$|P_n(z)| \leq \frac{r_2^n}{2\pi r_1^{n+1}(r_1 - r_2)} M = \frac{M}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \square$$

**Teorema 3.4** (Convergencia analítica). Sea  $\{f_n(z)\}_n$  una sucesión de funciones analíticas en un abierto  $U$  tal que  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  uniformemente sobre los compactos de  $U$ , entonces  $f(z)$  es analítica en  $U$  y  $f_n^{(p)}(z)$  converge uniformemente a  $f^{(p)}(z)$  sobre los compactos de  $U$ .

**Demostración.** Veamos que  $f(z)$  es continua:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} / |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3 \quad \forall n > N, \quad \forall z \in U$$

$$\text{Sea } z_0 \in U \Rightarrow \exists \delta > 0 / |f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3 \text{ si } |z - z_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Entonces  $f(z)$  es continua en  $z_0$ . Y si tomamos  $k$  un compacto de  $U$  y  $\Gamma$  la frontera de  $\triangle$  tenemos que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z)dz = 0 \xrightarrow{T^a \text{ Morera}} f(z) \text{ es analítica en } k \Rightarrow \text{ es analítica en } U.$$

Sea  $r > 0$  y  $z_0 \in U$  tal que  $\overline{D(z_0, r)} \subset U$  y  $C := C(z_0, r)$  entonces

$$f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{p+1}} dw, \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $N_1 \in \mathbb{N}$ :  $f_n(z)$  es continua uniformemente en  $\overline{D(z_0, r_1)}$  con  $0 < r_1 < r$  entonces se cumple que  $\forall z \in \overline{D(z_0, r_1)}$

$$|f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)| \leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(r - r_1)^{p+1}} \quad \forall n > N$$

Entonces  $f_n^{(p)}(z)$  tiende a  $f^{(p)}(z)$  sobre los compactos de  $U$ .  $\square$

**Definición 3.6** (Serie de Taylor). Si  $f(z)$  es analítica en  $D(z_0, r)$  para algún  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$  entonces

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

se llama serie de Taylor de  $f$  centrada en  $z_0$ . Si  $z_0 = 0$  se llama serie de MacLaurin.

**Teorema 3.5** (Recíproco del Teorema de Taylor). Sea  $f(z)$  una función definida en  $D(z_0, r)$  para algún  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ , si  $f(z)$  admite un desarrollo en serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  para todo  $z \in D(z_0, r)$  entonces  $f$  es analítica en  $D(z_0, r)$ .

**Demostración.** Es claro que el radio de convergencia de la serie es mayor o igual que  $r$ , entonces la serie converge uniformemente sobre compactos de  $D(z_0, r)$ . con lo que si tomamos  $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$  vemos como el límite uniforme de  $f_n(z)$  es  $f(z)$  y por el teorema de convergencia analítica  $f$  es analítica en  $D(z_0, r)$ .  $\square$

**Teorema 3.6** (Unicidad de coeficientes). Sea  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  una función definida en  $D(z_0, r)$  para algún  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ , entonces

1.  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
2.  $f(z)$  es indefinidamente derivable en  $D(z_0, r)$  y  $f^{(p)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n n(n-1) \dots (n-p+1)(z-z_0)^{n-p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** Dado que  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$  converge uniformemente en todo compacto de  $D(z_0, r)$ , por el teorema de convergencia analítica  $\{f^{(p)}\}$  converge uniformemente en todo compacto de  $D(z_0, r)$  a  $f^{(p)}(z_0)$ .

Ahora para probar 1, hacemos  $z = z_0$  en la igualdad de 2:

$$f^{(p)}(z_0) = \sum_{n \geq 0} a_n n(n-1) \dots (n-p+1)(z_0 - z_0)^{n-p}$$

$$\Rightarrow f^{(p)}(z_0) = a_p p! \Rightarrow a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \quad p \in \mathbb{N}$$

### 3.4. Principio de prolongación analítica

**Definición 3.7.** Sea  $f(z)$  una función definida en  $U$  entonces el conjunto de ceros de  $f(z)$  se denota como  $Z(f) = \{z \in U / f(z) = 0\}$ .

Si  $f(z)$  es analítica en  $z_0$ , diremos que  $f(z)$  tiene un cero de orden  $m \geq 1$  si  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$  con  $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$  y  $a_m \neq 0$ .

También de forma equivalente  $f(z)$  tiene un cero en  $z_0$  de orden  $m \geq 1$  cuando  $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$  con  $g(z)$  analítica en  $z_0$  y  $g(z_0) \neq 0$ .

**Lema 3.1.** Sea  $f(z)$  analítica en un abierto  $U$  y denotamos por  $A$  el conjunto de los puntos de acumulación de  $Z(f)$  en  $U$ , entonces  $A$  es abierto y cerrado en  $U$ .

**Demostración.**

$$A = \{z \in U / \lim z_n = z, z_n \in Z(f), z_n \neq z_m\}$$

Observamos en primer lugar que  $z \in A$  implica que  $z \in Z(f)$ .

Veamos que  $A$  es cerrado. Consideramos  $\{w_n\} \subset A$  tal que  $\{w_n\}_n \rightarrow w$  y probemos que  $w \in A$ . Esto es cierto ya que  $w_n \in Z(f)$  y  $w_n \neq w \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Veamos que  $A$  es abierto, viendo que todo punto de  $A$  es interior. Sea  $z_0 \in A$  y consideramos  $f(z) = \sum_n a_n(z - z_0)^n$  válido para  $D(z_0, r), r > 0$  entonces  $D(z_0, r) \subset U$ .

Como  $z_0 \in A \Rightarrow z_0 \in Z(f)$ ,  $f(z_0) = 0$  y supongamos que  $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$  y  $a_m \neq 0$ , si  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  con  $g$  analítica y  $g(z_0) \neq 0$ .

Entonces  $z_0$  no es un punto aislado de  $Z(f)$ .  $\#$

Concluimos entonces que  $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z) = 0 \forall z \in D(z_0, r) \subset A \Rightarrow A$  es abierto.  $\square$

**Teorema 3.7** (Principio de identidad). Sea  $f(z)$  analítica en un conjunto abierto y conexo  $U$ . Supongamos que existe una sucesión  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  de puntos distintos en  $U$  tal que  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in U$  con  $f(z_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $f(z) = 0 \forall z \in U$ .

**Demostración.** Sea  $A = \{z \in U / \lim z_n = z, z_n \in Z(f), z_n \neq z_m\}$  entonces  $A \neq \emptyset$  y por el lema anterior  $A = U$  y entonces  $f(z) = 0 \forall z \in U$ .

**Colorario 3.1** (Principio de prolongación analítica). Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  analíticas en un abierto  $U$  y conexo.

Si  $f(z) = g(z) \forall z \in S$  y  $S \subset U$  es un conjunto con al menos un punto de acumulación de  $U$  entonces  $f(z) = g(z) \forall z \in U$ .

**Demostración.** Tomemos  $h(z) = f(z) - g(z)$ , analítica en  $U$ .

Vemos que  $h(z) = 0 \forall z \in S$  con lo que  $Z(f)$  tiene punto de acumulación en  $S$ .

Y por el teorema anterior  $h(z) = 0 \forall z \in U$ , es decir,  $f(z) = g(z) \forall z \in U$ .  $\square$ .

### 3.5. Series de Laurent

**Definición 3.8.** DECimos que  $f(z)$  tiene una singularidad en  $z_0$  si  $f(z)$  no es analítica en  $z_0$  pero sí lo es en algún punto de todo entorno de  $z_0$ .

Esta singularidad se dice que es aislada si existe un entorno perforado de  $z_0$  donde  $f(z)$  es analítica. En caso contrario diremos que  $z_0$  es una singularidad no aislada.



**Lema 3.2.** Sea  $f(z)$  analítica en un abierto  $U$ , con  $\{z \in \mathbb{C}/r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\} \subset U$ . Consideremos  $C_j = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| = r_j\}$ ,  $j = 1, 2$  Entonces  $\forall z/r_1 < |z - z_0| < r_2$  tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

**Demostración.** Sea  $\gamma = C_2 - C_1$  un ciclo.

Observamos que si  $z_1 \notin U$  y  $|z_1 - z_0| > r_2$  entonces  $n(\gamma, z_1) = n(C_2, z_1) - n(C_1, z_1) = 0$ . Y si  $z_1 \notin U$  y  $|z_1 - z_0| < r_1$  entonces  $n(\gamma, z_1) = 1 - 1 = 0$ .

Con lo que  $n(\gamma, z) = 0 \forall z \notin U$  y por F.I.C.:

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Y para cualquier  $z_0$  en la corona se tiene que  $n(\gamma, z_0) = n(C_2, z_0) - n(C_1, z_0) = 1 - 0 = 1$ .  $\square$

**Teorema 3.8** (Teorema de Laurent). Sea  $f(z)$  analítica en la corona  $U = \{z \in \mathbb{C}/S_1 \leq |z - z_0| \leq S_2\}$  con  $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \infty$  y algún  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Para todo  $z \in U$  se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Con  $C = (C(z_0, r))$  y  $S_1 < r < S_2$ .

**Demostración.** Consideremos  $C_j = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| = r_j\}$ ,  $j = 1, 2$  con  $S_1 < r_1 < r_2 < S_2$ . Entonces  $\forall z/|z - z_0| < r$  tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

y análogo al teorema de Taylor:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Obtenemos  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$ .

Por el teorema de Abel  $f$  converge absolutamente en  $D(z_0, r_2)$  y uniformemente sobre compactos de  $D$ . Dado que  $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| < 1$  aplicamos lo mismo para  $C_1$ :

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n \geq 0} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Obtenemos  $b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$ .

De esta forma podemos escribir  $f(z)$  como  $\sum_{n \geq 0} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n \geq 0} b_n(z-z_0)^n$  con lo que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in U$$

□

**Proposición 3.1.** Sea  $z_0$  una singularidad aislada de  $f(z)$  entonces

1.  $z_0$  es una singularidad evitable  $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ .
2.  $z_0$  es un polo de orden  $m$   $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0)^m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

**Demostración.**

1.

$$\begin{aligned} z_0 \text{ es evitable} &\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \\ &\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z_0 \text{ es polo de orden } m &\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &\Leftrightarrow g(z) = f(z)(z-z_0)^m = a_{-m} + a_{-m-1}(z-z_0) + \dots \Leftrightarrow \\ &\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_{-m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

**Definición 3.9.**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

*Serie de Laurent centrada en  $z_0$ .*

**Definición 3.10.** Sea  $z_0$  una singularidad de la función  $f(z)$  y  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  su serie de Laurent centrada en  $z_0$ :

1.  $f(z)$  tiene una singularidad evitable en  $z_0$  si  $a_n = 0 \quad \forall n < 0$ .
2.  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z_0$  si  $m$  es el mayor natural de forma que  $a_{-m} \neq 0$ .
3.  $f(z)$  tiene una singularidad esencial si existen infinitos  $a_{-m} \neq 0$ .

**Lema 3.3.** Sea  $z_0$  una singularidad aislada de  $f(z)$  entonces  $z_0$  es una singularidad evitable si y solo si  $f(z)$  está acotada en un entorno perforado de  $z_0$ .

**Demostración.** Primero demostraremos ( $\Rightarrow$ ).

Supongamos que  $z_0$  es singularidad evitable. Entonces podemos redefinir la función para que sea analítica en un entorno de  $z_0$  con lo que  $f$  es acotada en un entorno perforado de  $z_0$ .

Demostremos ahora ( $\Leftarrow$ ).

Supongamos que  $f(z)$  está acotada en un entorno perforado de  $z_0$ . Entonces  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0$  y entonces  $g(z) = f(z)(z - z_0)$  tiene una singularidad evitable en  $z_0$ .

Entonces podemos escribir  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \Rightarrow f(z) = \frac{a_0}{a - a_0} + a_1 + a_2(z - z_0) + \dots$

Por tanto, es o bien polo simple de  $f$  o singularidad evitable de  $f$  (si  $a_0 = 0$ ). Pero como  $f$  está acotada  $z_0$  no puede ser polo de  $f$  así que concluimos que  $z_0$  es singularidad evitable de  $f$ .  $\square$

**Teorema 3.9** (Casorati-Weierstrass). Si  $f(z)$  tiene una singularidad esencial en  $z_0$  entonces  $F(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$  es denso en  $\mathbb{C}$  para todo  $\varepsilon > 0$ , es decir, la imagen de cualquier entorno perforado de  $z_0$  es denso en  $\mathbb{C}$ .

**Demostración.** Sea  $w \in \mathbb{C}$  y  $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$  veamos que  $g(z)$  no está acotada en cualquier entorno perforado.

Supongamos, por reducción al absurdo, que  $g$  está acotada en un  $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  para algún  $r > 0$ . Sabemos que  $g(z)$  tiene una singularidad evitable en  $z_0$  por ser acotada. Entonces podemos definir una función  $g_1(z)$  tal que sea analítica en  $D(z_0, r)$  con  $g_1(z_0) \neq 0$ .

Sea  $m$  el orden del 0 de  $g$  en  $z_0$ :

$$g(z) = (z - z_0)^m g_1(z) = \frac{1}{f(z) - w} \Rightarrow (z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m w + \frac{1}{g_1(z)}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{g_1(z_0)} \Rightarrow z_0 \text{ es polo de orden } m \text{ de } f \neq$$

Vemos como  $g(z)$  no está acotada en ningún entorno perforado de  $z_0$  y en conclusión  $f(z) \rightarrow w \forall w \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Proposición 3.2** (Clasificación de singularidades). Sea  $z_0$  una singularidad aislada de  $f(z)$  entonces:

1.  $z_0$  es evitable  $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ .
2.  $z_0$  es polo de orden  $m \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ .
3.  $z_0$  es esencial  $\Leftrightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ .

**Demostración.** Con anterioridad hemos demostrado 1 y la implicación hacia la derecha de 2, demostremos ahora la implicación hacia la izquierda:

2. ( $\Leftarrow$ ) Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty \Rightarrow f(z)$  no está acotada en un entorno perforado de  $z_0$ , entonces es polo o singularidad esencial y por el Teorema de Casorati-Weierstrass  $z_0$  no es singularidad esencial  $\Rightarrow$  es polo.

Dado que una singularidad solo puede ser evitable, polo o esencial, demostrados 1. y 2. podemos demostrar 3. por descarte.  $\square$

**Definición 3.11.** Diremos que  $f(z)$  tiene una singularidad en  $\infty$  si  $f(z)$  es analítica en  $\{z \in \mathbb{C} / |z| > r\}$  para algún  $r > 0$ . El tipo de singularidad de  $f(z)$  en  $\infty$  se define como el tipo de singularidad de  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  en  $z = 0$ .

**Proposición 3.3.** *Sea  $f(z)$  una función entera entonces:*

1.  $z_0$  es evitable  $\Leftrightarrow f(z)$  es constante.
2.  $z_0$  es un polo  $\Leftrightarrow f(z)$  es un polinomio no constante.
3.  $z_0$  es esencial  $\Leftrightarrow f(z)$  no es un polinomio.

**Demostración.** 1. ( $\Leftarrow$ ) Si  $f(z) = \text{cte.}$  entonces  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \text{cte.}$  y  $z = 0$  es una singularidad evitable de  $g(z) \Rightarrow z = \infty$  es singularidad evitable de  $f(z)$ .

( $\Rightarrow$ ) Si  $\infty$  es evitable en  $f(z)$  entonces  $z = 0$  lo es de  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  por lo que  $g(z)$  es acotada en un entorno perforado de  $z = 0 \Rightarrow f(z)$  es acotada en  $\mathbb{C}$  y por el teorema de Liouville  $f$  es constante.

2.  $\infty$  es un polo de  $f \Leftrightarrow z = 0$  es polo de  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  entonces  $\lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| = \infty$ . Además

$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{z^n} \Leftrightarrow 0$  es polo de  $g \Leftrightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq m, \ m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ .

Por lo que  $f(z)$  es un polinomio, no constante (por 1).

3. Es consecuencia de 1 y 2.



## Bloque 4

### Teoría de residuos

**Definición 4.1.** Sea  $z_0$  una singularidad aislada de una función  $f(z)$  y  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  su desarrollo de Laurent centrada en  $z_0$  entonces decimos que  $a_{-1}$  es el residuo de  $f(z)$  en  $z_0$  y se denota por  $\text{Res}(f, z_0)$ .

**Observación:** Si  $z_0$  es una singularidad evitable entonces  $\text{Res}(f, z_0) = 0$ . Si  $z_0$  es una singularidad aislada de  $f(z)$ ,  $\exists r > 0$  tal que  $f(z)$  es analítica en  $\{z \in \mathbb{C}/0 < |z - z_0| < r\}$  y su desarrollo de Laurent presenta unos coeficientes que vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad C = C(Z_0, r)$$

En particular  $n = -1 \longrightarrow a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w) dw$  y entonces vemos como

$$\int_C f(w) dw = 2\pi i \text{Res}(f, z_0)$$

**Proposición 4.1.** Si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z_0$  entonces  $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z)$  con  $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ .

En particular si  $z_0$  es polo simple  $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

**Demostración.** Sea  $z_0$  un polo de orden  $m \geq 1$  de  $f(z)$  entonces  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Notemos que  $z_0$  es una singularidad evitable de  $g(z)$  entonces podemos escribir  $g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{z - z_0} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots$$

$$\text{Res}(f, z_0) = b_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z)$$

Y para  $m = 1$  tenemos que  $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$ .  $\square$

**Proposición 4.2.** Si  $f(z)$  es analítica en  $z_0$ , no idénticamente constante y tiene un polo de orden  $m$  en el punto  $z_0$  entonces  $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$  tiene un polo simple en  $z_0$  y  $\text{Res}(g, z_0) = m$ .

**Demostración.** Dado que  $z_0$  es cero de orden  $m$  de  $f(z)$  entonces  $f(z) = (z - z_0)^m f_1(z)$  con  $f_1(z_0) \neq 0$  analítica. Y entonces  $f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} f_1(z) + (z - z_0)^m f_1'(z)$ .

$$g(z) = \frac{m(z - z_0)^{m-1} f_1(z) + (z - z_0)^m f_1'(z)}{(z - z_0)^m f_1(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

Y al ser  $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$  analítica,  $z_0$  es un polo simple de  $g$  y  $\text{Res}(g, z_0) = m$ .  $\square$

## 4.1. Teorema de los residuos

**Teorema 4.1** (Teorema de los residuos). Sea  $f(z)$  analítica en un abierto  $U$  excepto, a lo sumo, en  $w_1, \dots, w_n$  que son singularidades aisladas. Entonces para todo  $\gamma$  camino cerrado tal que  $n(\gamma, z_0) \neq 0 \forall z \notin U$  y con  $w_j \notin \gamma^*, j = 1, \dots, n$  se tiene que:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j \geq 1} n(\gamma, w_j) \text{Res}(f, w_j)$$

**Demostración** (por hacer).

**Lema 4.1** (Lema de Jordan). Sea  $f$  analítica en el semicírculo  $\Gamma_R = \{z/Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$  y sea  $M(R) = \max\{|f(z)|/z \in \Gamma_R\}$ . Si  $a > 0 \Rightarrow$

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi M(R)}{a} (1 - e^{-aR})$$



**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Gamma} f(z) e^{iaz} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \int_0^{\pi} \leq \int_0^{\pi} \underset{\leq M(R)}{|f(Re^{i\theta})|} e^{-aR \sin \theta} R d\theta \\
 &\leq RM(R) \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \theta} d\theta = 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta \\
 &\underset{**}{\leq} 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-aR \frac{2}{\pi} \theta} d\theta = \frac{\pi M(R)}{a} (1 - e^{-aR}) \\
 * \left| e^{iaRe^{i\theta}} \right| &= \left| e^{iaR(\cos \theta + i \sin \theta)} \right| = e^{-aR \sin \theta} \left| e^{iaR \cos \theta} \right| = e^{-aR \sin \theta}
 \end{aligned}$$

\*\* Si llamamos  $g(\theta) = \sin \theta - \frac{2}{\pi} \theta$  con  $\theta \in [0, \pi/2]$

Vemos como  $g(0) = g(\pi/2) = 0$ ,  $g'(\theta) = \cos \theta - \frac{2}{\pi}$ ,  $g''(\theta) = -\sin \theta \leq 0$ .

Entonces  $g(\theta) \geq 0 \forall \theta \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow \sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ .  $\square$

**Proposición 4.3.** Sea  $f(z)$  una función analítica en  $\{z/|z| > r, \Im(z) \geq 0\} \forall r > 0$  y consideremos el arco semicircular de centro 0 y radio  $R$  positivamente orientado dado por  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C}/z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ .  
[falta completar]

## 4.2. Consecuencias del Teorema de los Residuos

**Proposición 4.4** (Principio del argumento). Sea  $f(z)$  una función analítica en un abierto  $U$  y no idénticamente nula en ninguna componente conexa de  $U$ , si  $\gamma$  es el camino cerrado en  $U \setminus Z(f)$  tal que  $n(\gamma, z) = 0 \forall z \notin U \Rightarrow$

$$n(f \circ \gamma, 0) = \sum_{w \in Z(f)} m(f, w) n(\gamma, w)$$

Con  $m(f, w)$  el orden del cero de  $w$ .

**Demostración.**

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

La función  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  analítica en  $U$  excepto en  $Z(f)$ . Así por el teorema de los residuos, obtenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{w \in Z(f)} n(\gamma, w) \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, w\right) = 2\pi i \sum_{w \in Z(f)} n(\gamma, w) m(f, w)$$

Por otra parte sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , por definición de índice

$$\begin{aligned} n(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \square \end{aligned}$$

>

**Teorema 4.2** (Teorema de Rouché). Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  dos funciones analíticas en un abierto  $U$  y no idénticamente nulas en ninguna componente conexa de  $U$ , consideramos  $\gamma$  un camino cerrado en  $U$  tal que  $n(\gamma, z) = 0$   $\forall z \notin U$ .

$$\begin{aligned} \text{Si } |f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma^* \Rightarrow \\ \sum_{w \in Z(f)} m(f, w) n(\gamma, w) &= \sum_{w \in Z(g)} m(g, w) n(\gamma, w) \end{aligned}$$

**Demostración.** Por la desigualdad supuesta observamos en primer lugar que  $\gamma$  no pasa por ningún cero de  $Ff$ . Así podemos definir  $h(z) = 1 + \frac{g(z) - f(z)}{f(z)}$  en un cierto entorno de  $\gamma^*$ .

Además si  $z \in \gamma^*$  entonces  $|h(z) - 1| = \frac{|g(z) - f(z)|}{|f(z)|} < 1 \quad \forall z \in \gamma^*$ .

Es decir, la curva  $h \circ \gamma$  está incluida en  $D(1, 1)$  y, por tanto, no le da vueltas al origen,  $n(h \circ \gamma, 0) = 0$ .

Por otra parte  $h(z)f(z) = g(z)$  por lo tanto

$$\begin{aligned} n(g \circ \gamma, 0) &= n((h \cdot f) \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(h(z)f(z))'}{h(z)f(z)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = \underbrace{n(h \circ \gamma, 0)}_{=0} + n(f \circ \gamma, 0) = n(f \circ \gamma, 0) \end{aligned}$$

Entonces por el principio del argumento podemos concluir que

$$\sum_{w \in Z(f)} m(f, w) n(\gamma, w) = \sum_{w \in Z(g)} m(g, w) n(\gamma, w).$$

□

**Teorema 4.3** (Teorema de Hurwitz). *Supongamos que  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones analíticas en un abierto  $U$  que converge uniformemente sobre los compactos de  $U$  a una función  $f(z)$ .*

*Consideremos  $\overline{D(z_0, r)} \subset U$  y asumimos que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z$  tal que  $|z - z_0| = r$ , entonces*

*$\exists N \in \mathbb{N}/f_n(z)$  tiene el mismo número de ceros que  $f(z)$  en  $D(z_0, r) \forall n \geq N$*

**Demostración.** *Observemos que  $f$  es analítica en  $U$ .*

*Consideremos  $\varepsilon = \min\{|f(z)| / |z - z_0| = r\} > 0$ .*

*Por la convergencia uniforme,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|$ ,  $\forall z \in \overline{D(z_0, r)}$ .*

*Por el teorema de Rouché, tomando  $g(z) = f_n(z)$  vemos como  $f_n$  y  $f$  tienen el mismo número de ceros en  $D(z_0, r)$ . □*

**Proposición 4.5.** *Sea  $f(z)$  una función analítica no constante en cada componente conexa de un abierto  $U$  y con un cero de orden  $m$  en  $z_0$  entonces*

1.  *$\exists \varepsilon > 0$  tal que  $\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subset U$  tal que  $f(z)$  y  $f'(z)$  no se anulan en  $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ .*
2. *Si  $p = \min\{|f(z)| / |z - z_0| = r\}$  con  $\varepsilon > 0$  verificando el apartado anterior y con  $w$  tal que  $0 < |w| < p$  entonces existen  $m$  puntos distintos en  $D(z_0, \varepsilon)$  de imagen  $w$ .*
3. *Existe un abierto  $V$  con  $z_0 \in V$  tal que si  $z \in V \setminus \{z_0\} \subset U$  entonces  $f(z) \neq 0$  y existe exactamente  $m$  puntos  $w_k \in V \setminus \{z_0\}$  tal que  $f(w_k) = f(z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .*

**Demostración. 1.** *Por reducción al absurdo supongamos que no existe  $\varepsilon > 0$  tal que se cumplan las condiciones.*

Entonces  $z_0$  es punto de acumulación de ceros de  $f(z)$  o  $f'(z)$  y por el principio de identidad  $f(z) = 0$  o  $f'(z) = 0$  con lo que  $f$  es constante.  $\sharp$

2. Sea  $p = \min\{|f(z)|/|z - z_0| = r\}$ ,  $w \in \mathbb{C}/0 < |w| < p$  y sea  $g(z) = f(z) - w$

Entonces  $|w| < p \leq |f(z)| \quad \forall z \in \gamma = C(z_0, \varepsilon)$ ,  $|w| = |f(z) - g(z)|$ .

Por el teorema de Rouché,  $f$  y  $g$  tienen el mismo número de ceros en  $D(z_0, \varepsilon)$  si  $f(z) = w$  tiene exactamente  $m$  ceros.

Además todos estos ceros son distintos ya que en caso contrario  $f' = 0$ .

3. Tomemos  $\varepsilon$  y  $p$  de los apartados anteriores. Entonces, sea  $V = D(z_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(D(0, p)) \ni z_0$  y  $V \subset D(z_0, \varepsilon)$ .

Por la elección de  $\varepsilon$ ,  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\}$ .

Además, si  $z \in V \setminus \{z_0\}$  entonces se tiene que  $0 < |f(z)| < p$  y por el apartado 2.  $w = f(z)$  y existen  $m$  puntos  $w_0, \dots, w_m$  en  $D(z_0, \varepsilon)$  de imagen  $w$  con  $0 < |w| < p$  y entonces, por definición de  $V$ , los puntos  $w_k$  están en  $V$  para  $k = 1, 2, \dots, m$ .  $\square$

**Teorema 4.4** (Teorema de la aplicación abierta). Sea  $f(z)$  una función analítica en un abierto  $U$  y no idénticamente constante en ninguna componente conexa de  $V$ . Si  $V$  es un abierto de  $U$  entonces  $f(V)$  es un abierto de  $\mathbb{C}$ .

**Demostración.** Sea  $V$  un abierto de  $U$  y  $z_0 \in V$  veamos que  $f(z_0)$  es interior a  $f(V)$ .

Consideremos  $g(z) = f(z) - z_0$  analítica en  $U$  y no idénticamente constante en ninguna componente conexa y con  $g(z_0) = 0$ , y sea  $m \geq 1$  el orden del cero de  $g$ .

Tomemos  $\varepsilon > 0$  y por la proposición anterior, con  $D(z_0, \varepsilon) \subset V$ .

Entonces  $\forall w \in D(0, p) \setminus \{0\} \exists m$  puntos  $w_1, w_2, \dots, w_m$  en  $D(0, p)$  tal que  $g(w_k) = w$ .

Por tanto  $D(0, p) \subset g(V)$  o equivalentemente  $D(f(z_0), p) \subset f(V)$  con lo que  $f(z_0)$  es interior a  $f(V)$  y  $f(V)$  es abierto.  $\square$

**Proposición 4.6.** Sea  $f(z)$  una función analítica en  $z_0$

- Si  $f'(z_0) \neq 0$  entonces existe un entorno donde  $f(z)$  es inyectiva.

- Si  $f'(z_0) = 0$  entonces  $f(z)$  no es inyectiva en ningún entorno de  $z_0$ .

**Demostración. 1.** Supongamos  $f'(z_0) \neq 0$  y consideremos  $g(z) = f(z) - f(z_0)$  analítica en  $z_0$  con  $g(z_0) = 0$  y  $g'(z_0) \neq 0$ .

Así por el apartado 3 de la proposición anterior existe un abierto  $V \ni z_0$  tal que  $\forall z \in V \setminus \{z_0\}$  existe un único  $w \in V \setminus \{z_0\}$  de imagen  $g(z)$  entonces  $f$  es inyectiva en  $V$ .

2. Supongamos que  $f'(z_0) = 0$  entonces  $g(z) = f(z) - f(z_0)$  analítica en  $z_0$  y  $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ . Es decir  $z_0$  es un cero de orden mayor que 2. Y por el apartado anterior  $g$  no es inyectiva y por lo tanto  $f$  tampoco.  $\square$

**Teorema 4.5.** Sea  $f(z)$  una función analítica e inyectiva en un abierto  $U$  entonces  $f^{-1}(z)$  es analítica en el abierto  $f(U)$ .

**Demostración.** Por el teorema de la función abierta,  $f(U)$  es un conjunto abierto si  $U$  es abierto, por tanto  $f^{-1} : f(U) \longleftrightarrow U$  está bien definida en un conjunto abierto.

Veamos que  $f^{-1}$  es analítica en  $f(U)$ . Veamos que  $f^{-1}$  es derivable en todo punto de  $f(U)$ .

Sea  $w_0 \in f(U)$ :

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

$$\left[ \begin{array}{ll} f(z) = w & \Rightarrow f^{-1}(w) = z \\ f(z_0) = w_0 & \Rightarrow f^{-1}(w_0) = z_0 \\ f^{-1}(z) & = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \end{array} \right]$$



# Bloque 5

## Funciones enteras

**Definición 5.1** (Convergencia de productos infinitos). Sea  $z_1, z_2, \dots, z_n$  una sucesión de números complejos no nulos. Consideremos  $p_n = \prod_{k=1}^n z_k$ . Si existe

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$  con  $p \neq 0$  diremos que el producto infinito  $\prod_{n \geq 1} z_n$  converge a  $p$ . En caso contrario diremos que el producto no converge.

Si un producto infinito tiene una cantidad finita de términos iguales a 0 y el resto verifica la definición anterior, también diremos que  $\prod_{n \geq 1} z_n$  converge. De hecho, si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\prod_{n \geq m+1} z_n$  verifica la definición inicial, se dice que el producto  $\prod_{n \geq 1} z_n$  es convergente a  $p = z_1 z_2 \cdots z_m \prod_{n \geq m+1} z_n$ .

**Definición 5.2.** Llamaremos factores canónicos o elementales a las funciones

$$E_0(z) = 1 - z$$

y

$$E_m(z) = (1 - z) \exp \left( z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m} \right), \quad m \in \mathbb{N}$$

### Propiedades

- $E_m(z)$  es una función entera para cada  $m = 0, 1, 2, \dots$
- $E_m(z)$  tiene un único cero simple en  $z = 1$  para cada  $m = 0, 1, 2, \dots$
- si  $|z| < 1$  entonces  $\lim_{m \rightarrow \infty} E_m(z) = (1 - z) \exp(-\log(1 - z)) = 1$ .

■ Para todo  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se cumple que

$$|1 - E_m(z)| \leq |z|^{m_1} \text{ para } z \text{ tal que } |z| \leq 1.$$

**Teorema 5.1.** Sea  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de números complejos no nulos tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ . Si  $m_n \geq 1$ , el producto  $f(z) = \prod_{n \geq 1} E_{m_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)$  es una función entera cuyos ceros vienen dados por  $a_1, a_2, \dots$ .

**Definición 5.3.** Sea  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de números complejos no nulos tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ . El coeficiente

$$\mu = \inf \left\{ k > 0 / \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^k} < \infty \right\}$$

se conoce como exponente de convergencia de la sucesión  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ .

**Teorema 5.2.** Sea  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de números complejos no nulos tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  y su exponente de convergencia sea  $\mu < \infty$ . Si  $h$  es un entero no negativo tal que  $h > \mu - 1$ , entonces el producto infinito  $\prod_{n=1}^{\infty} E_h \left( \frac{z}{a_n} \right)$  define una función entera cuyos ceros vienen dados por  $a_1, a_2, \dots$ .

Cuando  $\mu$  es entero y  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} < \infty$  podemos tomar  $h = \mu - 1$ .

**Teorema 5.3** (Factorización de Weierstrass). Sea  $f(z)$  una función entera no idénticamente nula con un cero en  $z = 0$  de orden  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  (tomamos  $m=0$  si  $f(0) \neq 0$ ) y otros ceros  $a_1, a_2, \dots$  repetidos según su multiplicidad. Entonces

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n \geq 1} E_{m_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)$$

para una cierta función entera  $g(z)$  y enteros  $m_n \geq n - 1$ .

En general, si el exponente de convergencia es finito podemos tomar  $m_n = h > \mu - 1$ .

**Definición 5.4.** Diremos que una función  $f(z)$  es meromorfa en un abierto  $U$  cuando  $F(z)$  es analítica en  $U$  excepto posiblemente en singularidades aisladas que son polos.



**Colorario 5.1.** Una función  $f(z)$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  si, y solo si,  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  con  $g(z)$  y  $h(z)$  funciones enteras y siendo  $h(z)$  no idénticamente nula.

**Demostración.** Si  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  con  $g(z)$  y  $h(z)$  funciones enteras y siendo  $h(z)$  no idénticamente nula, entonces  $f(z)$  es meromorfa donde los polos de  $f(z)$  son los ceros de la función  $h(z)$ .

Recíprocamente, si  $f(z)$  es meromorfa, denotemos por  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  a sus polos. Utilizando el teorema de factorización de Weierstrass, construimos una función entera  $h(z)$  cuyos ceros sean justamente los polos  $b_n$ . En tal caso, la función  $g(z) := f(z)h(z)$  presenta singularidades evitables en los puntos  $b_n$  y al eliminarlas se consigue una función entera. Luego  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ .  $\square$

**Definición 5.5.** dada  $f(z)$  una función entera, denotaremos orden ( u orden de crecimiento) de  $f(z)$  al valor  $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$  donde

$$\lambda_1 = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r}$$

y

$$\lambda_2 = \inf\{a \geq 0 / \exists r > 0 \text{ tal que } |f(z)| \leq e^{|z|^a} \forall z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r)\}$$

**Demostración.** Veamos que efectivamente  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Primero demostremos que  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ : Si  $\lambda_1 = \infty$  es trivial por lo que supondremos  $\lambda_1 < \infty$ .

Por definición de  $\lambda_1$ , dado  $\varepsilon > 0 \exists r_0 > 0 / \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \leq \lambda_1 + \varepsilon \forall r \geq r_0$ .

$$\Rightarrow \ln \ln M_f(r) \leq (\lambda_1 + \varepsilon) \ln r \Rightarrow \ln \ln M_f(r) \leq \ln r^{(\lambda_1 + \varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \ln M_f(r) \leq r^{(\lambda_1 + \varepsilon)} \Rightarrow M_f(r) \leq e^{r^{\lambda_1 + \varepsilon}}$$

$$\text{si } |z| = r \Rightarrow |f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda_1 + \varepsilon}}$$

Y como podemos escoger  $\varepsilon$  de forma arbitraria,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ .

Primero demostremos que  $\lambda_2 \geq \lambda_1$ : Si  $\lambda_2 = \infty$  es trivial por lo que supondremos  $\lambda_2 < \infty$ .

Por la definición de  $\lambda_2$  dado  $\varepsilon > 0, \exists r > 0$  suficientemente grande tal que  $|f(z)| \geq e^{|z|^{\lambda_2 + \varepsilon}} \forall z \in \mathbb{C} \setminus D(0, r)$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln |f(z)| &\leq |z|^{\lambda_2 + \varepsilon} \Rightarrow \ln \ln |f(z)| \leq (\lambda_2 + \varepsilon) \ln |z| \\ \text{si } |z| = r &\Rightarrow \ln \ln M_f(r) \leq (\lambda_2 + \varepsilon) \ln r \Rightarrow \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \leq \lambda_2 + \varepsilon \end{aligned}$$

Y como podemos escoger  $\varepsilon$  de forma arbitraria,  $\lambda_2 \geq \lambda_1$ .

Con lo que concluimos que  $\lambda_1 = \lambda_2$ .  $\square$

### Nota

Sea  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  una función entera no constante, entonces el orden de  $f(z)$  viene también dado por

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{-\ln |a_n|^{1/n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \left( \frac{1}{|a_n|} \right)}$$

### Ejemplos

- El orden de un polinomio es 0.
- El orden de  $e^{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}$  con  $a_n \neq 0$  es  $n$ .
- El orden de  $e^{e^z}$  es  $\infty$ .
- El orden de  $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$  es 1.

**Proposición 5.1.** Sea  $f(z)$  una función entera no constante de orden finito  $\lambda$ . Sean  $a_1, a_2, \dots$  los ceros de  $f(z)$  repetidos según su multiplicidad. Entonces  $\mu \leq \lambda$ , donde  $\mu$  es el exponente de convergencia asociado a esta sucesión.

**Teorema 5.4** (Factorización de Hadamard). Sea  $f(z)$  una función entera de orden finito  $\lambda$  con un cero en  $z = 0$  de orden  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y otros ceros  $a_1, a_2, \dots$  repetidos según su multiplicidad. Entonces

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n \geq 1} E_{m_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)$$

donde  $P(z)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $\lambda$  y

$$h = \begin{cases} \mu - 1 & \text{si } \mu \in \mathbb{Z}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} < \infty \\ \mu & \text{si } \mu \in \mathbb{Z}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} = \infty \\ [\mu] & \text{si } \mu \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Siendo  $\mu$  el exponente de convergencia asociado a  $\{a_n\}$ .