Análisis de variable compleja

Óscar Riquelme Moya

Departamento de física aplicada
Universidad de Alicante

2 de febrero de 2022

Índice general

Preámbulo

Estos apuntes están destinados a complementar los apuntes tomados por los estudiantes de la asignatura homónima perteneciente al tercer año del Grado en Física de la Universidad de Alicante. Es un texto realizado fundamentalmente a partir de las notas tomadas durante las lecciones impartidas por el profesor Juan Matías Sepulcre Martínez, del departamento de Análisis Matemático, durante el curso académico 2021-22022, destinado exclusivamente a estudiantes y sin ánimo de lucro. No está exento de erratas. La edición de estos apuntes se remite a la fecha de compilación que aparece en la portada. El último tema es el que menos horas hemos echado por falta de las mismas.

Para obtener una copia del código fuente o para comunicar posibles erratas, o colaborar de cualquier forma para mejorar estos apuntes se ruega contactar a: orm13@alu.ua.es

Bloque 1
El cuerpo de los números complejos.

1.1. Los números complejos

Definición 1.1. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *entonces* $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Definimos la parte real de z *como* $\Re(z) = Re(z) = a$ *y la parte imaginaria de* z *como* $\Im(z) = Im(z) = b$

$\alpha = \arctan(\frac{b}{a}) \longrightarrow$ Argumento principal: $(-\pi, \pi)$

Forma trigonométrica: $z = a + bi = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Forma exponencial: $z = a + bi = |z|e^{i\alpha}$

$$Arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si \quad a = 0, b > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & si \quad a = 0, b < 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) & si \quad a > 0, b > 0 \\ -\arctan(\frac{-b}{a}) & si \quad a > 0, b < 0 \\ -\arctan(\frac{b}{-a}) + \pi & si \quad a < 0, b > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & si \quad a < 0, b < 0 \\ 0 & si \quad a > 0, b = 0 \\ \pi & si \quad a < 0, b = 0 \end{cases}$$

Formula de Moivre: $z^n = (re^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha} = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

1.2. Analiticidad

$$\text{Sea} \quad \begin{array}{rcl} f:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

Definición 1.2 (Límite)**.** *Definimos el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 como:*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta/ \ si\ |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)-w_0| < \varepsilon$$

Definición 1.3 (Continuidad)**.** *f es continua en $z_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta/\ si\ |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$.*

Definición 1.4 (Derivavilidad)**.** *f es derivable en $z_0 \Leftrightarrow$*

$$\exists f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

Definición 1.5 (Analiticidad)**.** *Sea $f: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, diremos que f es analítica en U cuando exista un entorno de U donde f es derivable en todo punto.*

Definición 1.6. *Se dice que una función f es entera si es analítica en todo $\mathbb{C}$.*

Teorema 1.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemman)**.** *Sea $f: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ analítica n el abierto U, entonces se satisface: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\ \forall(x_0,x_y) \in U$*

Demostración. *Sea $z_0 = x_0+iy_0 \in U \Rightarrow \exists f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$*

Tomamos $h \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h+y_0i)-f(x_0+y_oi)}{h} = \\ \lim_{h\to 0}\frac{(u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_o))+(v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_o))i}{h} = \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Sea $k \in \mathbb{R}$, tomamos $h = ik$:

$$\lim_{h=ik\to 0}\frac{f(x_0+(y_0+y)i)-f(x_0+y_oi)}{ik} = \\ \lim_{h=ik\to 0}\frac{(u(x_0,(y_0+y))-u(x_0,y_oi))+(v(x_0,(y_0+y))-v(x_0,y_oi)i)}{ik} = \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)i+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)i = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \square$$

Teorema 1.2. *Sea $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ definida en U abierto tal que existen las parciales primeras de u y v en un entorno de $(x_0, y_0) \in V$ y son continuas, entonces si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0) entonces f es derivable en $z_0 = x_0 + y_0 i$.*

Proposición 1.1 (Cauchy-Riemann en coordenadas polares)**.**

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0),\ \ \frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = -\frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0)$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)i = (\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) + i\frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0))(\cos\theta - i\sin\theta)$$

1.3. Algunas funciones elementales

1.3.1. Función exponencial

Sea $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $z = x + iy \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{iy} = \sum n = 0^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3!}i + \cdots$$

$$= (1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots) = \cos y + i\sin y$$

$$e^x + e^{iy} = e^{x+iy} \Rightarrow e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Propiedades

1. $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$
2. $|e^z| = e^{Rez}$
3. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
4. $(e^z)^n = e^{zn}$
5. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} z^{z_2}$
6. $e^z = 1 \Leftrightarrow e^x e^{iy} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 2\pi k \Leftrightarrow z = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}$
7. $\nexists \lim_{z\to 0} e^z$

1.3.2. Función Logarítmica

$e^w = z \Leftrightarrow \log z = w$ con $z \neq 0 \in \mathbb{C}$.

Si $z = 1 \Rightarrow e^w = 1 \Leftrightarrow w = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.7 (Logaritmo principal)**.** *Sea $z \neq 0$, entonces el logaritmo principal de z, denotado por* Log*, viene definido por* $\text{Log}z = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z)$ *donde* $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$*. Denotamos por* $\log(z)$ *al conjunto de elementos $w \in \mathbb{C}$ de forma que $e^w = z$.*

Definición 1.8. *Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ Definimos $\log_{\theta_0} z = \ln|z| + i\theta$ con $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$.*

Podemos ver como $\text{Log}z = \log_{-\pi} z$*.*

Propiedades

1. $\log(1) = \{2\pi k i, k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\log(-1) = \{(2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$
3. $\log(z_1 z_2) = log(z_1) + \log(z_2)$ pero no siempre se cumple que $Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(Z_2)$.
4. $Logz$ es una función continua en $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$
5. $Logz$ es una función analítica en $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$
$$\frac{d}{dz} Logz = \frac{1}{z} \; \forall z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$$
6. $e^{log_{\theta_0} z} = z \; \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$
7. $log_{\theta_0} e^z = z \; \forall z \in \{x + iy / \theta_0 \leq y \leq \theta_0 + 2\pi\}$

1.3.3. Funciones potencia

Definición 1.9. *Sea $z \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tomaremos por definición z^α, llamada potencia de exponente arbitrario α, como el conjunto de todos los valores dados por:*
$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

Nota: *Si alpha $\in \mathbb{R}$ entonces $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$.*

Definición 1.10. *Sea $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, tomaremos por definición a^z, llamada la función exponencial general, como el conjunto de todos los valores dados por:*

$$a^z = e^{z \log a}$$

Nota: *Para obtener ramas uniformes de la función exponencial basta con fijar uno de los valores del logaritmo. Cuando se toma* Log$z$ *se llama rama principal.*

1.3.4. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

$$\begin{array}{lcl} e^{it} = \cos t + i \sin t & & \cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ & \Longrightarrow & \\ e^{-it} = \cos t - i \sin t & & \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \end{array}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{i(e^{it} - e^{-it})}$$
$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{e^{it} - e^{-it}}$$

1. $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$
2. $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$
3. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
4. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
5. $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = \pi k i, k \in \mathbb{Z}$
6. $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}(2k+1)\, k \in \mathbb{Z}$
7. $\sinh z = -\sin(iz)$
8. $\cosh z = \cos(iz)$

   Tomando $z = x + iy$:
9. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x sinhy$
10. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
11. $|\cos z| \geq |\cos x|$
12. $|\sin z| \geq |\sin x|$

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

$$\sin z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} \qquad \sinh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} \qquad \cosh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!}$$

Definición 1.11. *Se dice que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica en un dominio D si tiene derivadas parciales segundas continuas en todo punto de D y satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en todo punto de D.*

Definición 1.12. *Se dice que $v(x, y)$ es una conjugada armónica de $u(x, y)$ en $D \subset \mathbb{R}^2$ si ambas son armónicas y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D, es decir, existe una función compleja $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ analítica en D.*

Proposición 1.2. *Sea $u(x, y)$ una función armónica en D y consideremos U una región rectangular contenida en D entonces existe una conjugada armónica de $u(x, y)$ en U.*

Demostración. *Sea $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ donde $P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$ y $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$. Como $u(x, y)$ es armónca entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ que es una ecuación diferencial exacta y existe $v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$dv = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x}$$

con lo que $v(x, y)$ es conjugada armónica de $u(x, y)$. $\square$

Bloque 2
Integración en $\mathbb{C}$

2.1. Preliminares topológicos

Definición 2.1 (Entorno perforado). *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ llamamos entorno perforado al conjunto abierto definido or $\{z \in \mathbb{C}/0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ para algún $\varepsilon > 0$.*

Definición 2.2 (Conjunto conexo). *LLamamos conjunto conexo al conjunto abierto (cerrado) del plano que no puede ser escrito como unión disjunta de dos conjuntos no vacíos abiertos (cerrados).*

Definición 2.3 (Conjunto poligonalmente conexo). *Decimos que P es un conjunto poligonalmente conexo si cada par de puntos de P pueden ser unidos mediante un polígono contenido en P.*

Definición 2.4 (Conjunto estrellado). *Decimos que E es un conjunto estrellado si $\exists a \in E/[a, z] \subset E \ \forall z \in E$.*

Definición 2.5 (Conjunto convexo). *Decimos que C es un conjunto convexo si $[z, w] \subset C \ \forall z, w \in C$*

Definición 2.6 (Conjunto simplemente convexo). *Decimos que S es un conjunto simplemente conexo cuando cualquier camino cerrado en S puede deformarse de forma continua hasta convertirse en un punto sin salirse de S.*

2.2. Integración sobre caminos

Definición 2.7. *LLamamos curva a una aplicación continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $a < b$ tal que a un número real t le corresponde un número complejo.*

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

La traza o trayectoria de la curva $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t), t \in [a, b]\}$ será representado por γ^*.

Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva es cerrada.

Definición 2.8. *Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva, si $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ $\forall t \neq s$ excepto, a lo sumo, en los extremos, la curva será llamada un arco simple o arco simple de Jordan.*

Definición 2.9. *Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva, se dice que es diferenciable con continuidad, $\mathcal{C}^1([a,b])$, cuando γ es diferenciable y presenta derivada continua en $[a,b]$. Además, γ es diferenciable con continuidad a trozos cuando $[a,b]$ se puede descomponer en un número finito de subintervalos sobre los que γ es diferenciable con continuidad.*

Definición 2.10. *Llamaremos camino a una curva diferenciable con continuidad a trozos.*

Definición 2.11. *Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f(z)$ una función continua en γ^*, definimos la integral compleja de $f(z)$ a lo largo de γ por:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Parametrizaciones comunes

Intervalo $[z_1, z_2]$: $\gamma(t) = (1-t)z_1 + t\,z_2$ con $t \in [0,1]$.

Circunferencia de centro z_0 y radio r $C(z_0, r)$: $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$

Proposición 2.1. *Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f(z), g(z)$ funciones continuas en γ^* entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *La integral sobre un camino es invariante de parametrizaciones.*
2. $\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$
3. $\int_\gamma cf(z)dz = c\int_\gamma f(z)dz, c \in \mathbb{C}$
4. $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$ *donde $-\gamma$ es el camino opuesto definido por* $(-\gamma)(t) = \gamma(b+a-t)$ $\forall t \in [a,b]$
5. *Si β es otro camino tal que $\gamma + \beta$ está definido y $f(z)$ es tambien con tinua en $(\gamma+\beta)^*$ entonces:*

$$\int_{\gamma+\beta} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\beta f(z)dz$$

Proposición 2.2. *Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f(z)$ una función continua en γ^*, entonces:*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M_f(\gamma)L(\gamma)$$

Con $M_f(\gamma) = \text{máx}\{|f(z)|, z \in \gamma^*\}$ y $L(\gamma)$ la longitud de γ.

Demostración.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \leq M_f(\gamma)\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M_f(\gamma)L(\gamma)$$

Definición 2.12. *Sea $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un abierto U, diremos que $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una primitiva de f en U cuando $F(z)$ es analítica en U y $F'(z) = f(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$.*

Teorema 2.1 (Extensión del 2° teorema fundamental del cálculo)**.** *Supongamos que $f(z)$ es una función continua en un conjunto abierto U y que $F(z)$ es una primitiva de f en U. Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un camino en U entonces:*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z)\Big|_{\gamma(a}^{\gamma(b)}$$

En particular, bajo las hipótesis anteriores si γ es un camino cerrado: $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Demostración. *Sea $G(t) = F(\gamma(t)$ con $t \in [a,b]$ entonces $G(t)$ es continua en $[a,b]$ y $G'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$ con lo que*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)\gamma'(t)dt = \int_a^b G'(t)dt = G(t)\Big|_a^b = F(\gamma(t)\Big|_a^b$$

□

Colorario 2.1 (Funciones constantes)**.** *Supongamos que $f(z)$ es analítica en un abierto y conexo U y además $F'(z) = 0\ \forall z \in U$ entonces $f(z)$ es constante en U.*

Demostración. *Sean z_1 y z_2 en U. Dado que U es conexo, existe un camino poligonal $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ que los une tal que $\gamma(a) = z_1$ y $\gamma(b) = z_2$. Por el teorema anterior tenemos que*

$$0 = \int_\gamma f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1) \Rightarrow f(z_2) = f(z_1) \Rightarrow f \text{ es constante} \quad \square$$

Teorema 2.2 (Independencia de caminos)**.** *Supongamos que $f(z)$ es una función continua en el conjunto abierto y conexo U. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ *es independiente de la trayectoria de γ.*
2. $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0\ \forall\gamma$ *cerrado.*
3. *$f(z)$ admite una primitiva en U.*

Demostración. $\underline{1 \Leftrightarrow 2}$

Sea γ_1 *un camino en* U *que une* z_1 *y* z_2*, sea* γ_2 *otro camino en* U *que une* z_1 *y* z_2*.*

Consideremos $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ *un camino cerrado, entonces:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Si $\int_\gamma f(z)dz$ *entonces la integral sobre* γ_1 *es igual a la integral sobre* γ_2 *con lo que es independiente del camino.*

De la misma forma, si la integral es independiente del camino entonces $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$.

$\underline{3 \Rightarrow 1}$

Por el 2º Teorema fundamental del Cálculo.

$\underline{1 \Rightarrow 3}$

Fijemos $z_0 \in \mathbb{C}$ *y consideremos* γ_z *un camino en* U *que une* z_0 *con* z*, siendo* $z \in U$*.*

Sea $F(z) = \int_{\gamma_z} f(s)ds$*, por hipótesis* $F(z)$ *no depende del camino. Veamos que* F *es analítica y* $F' = f$ $\forall z \in U$*.*

Dado que U *es abierto, podemos tomar* $w \in U$ *suficientemente próximo a* z *con* $w \neq z$*. Entonces si consideramos* γ *al camino que une* z_0 *consigo mismo pasando por* γ_z*,* $[z,w]$ *y* $-\gamma_w$*. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_z} f(z)dz + \int_{[z,w]} f(z)dz + \int_{\gamma_z} f(z)dz = 0$$

Por tanto $F(w) - F(z) = \int_{\gamma_w} f(z)dz - \int_{\gamma_z} f(z)dz = \int_{[z,w]} f(z)dz$ *y al ser* $\int_[z,w]1ds = z - w$ *se tiene que:*

$$f(z) = \frac{f(z)}{w-z}\int_{[z,w]} ds = \frac{1}{w-z}\int_{[z,w]} f(z)ds \Rightarrow \frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) =$$
$$\frac{\int_{[z,w]} f(z)ds}{w-z} - \frac{1}{w-z}\int_{[z,w]} f(z)ds = \frac{\int_{[z,w]}(f(s)-f(z))ds}{w-z}$$

El módulo tiende a 0 *por ser* f *continua cuando* $w \to z$*, entonces*

$$F'(z) = \lim_{w\to z} \frac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z)$$

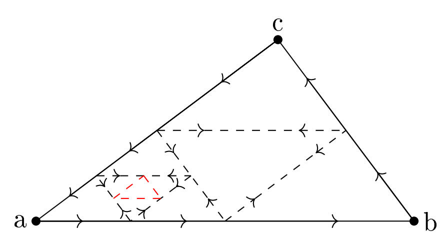
□

2.3. Teoremas de Cauchy para determinadas regiones

Teorema 2.3 (Teorema de Cauchy para triángulos). *Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto U. Para cualquier triangulo ($\triangle = int(\triangle \cup Fr(\triangle))$) contenido en U se tiene que:*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \text{ donde } \Gamma = Fr(\triangle)$$

Demostración. *Sea Γ_0 el camino de la frontera del triangulo, podemos subdividir este en 4, teniendo 4 subtriángulos con fronteras $\Gamma_{0,1}, \ldots, \Gamma_{0,4}$, y este proceso lo podemos repetir las veces que queramos. Podemos verlo gráficamente así:*



$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_{0,j}} f(z)dz \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z)dz) \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma_1} f(z)dz \right| \leq$$

$$4^2 \left| \int_{\Gamma_2} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Gamma_n} f(z)dz \right|$$

$$\Gamma_k = \max_{j=1,\ldots,n} \left\{ \left| \int_{\Gamma_{k,j}} f(z)dz \right| \right\}$$

Sea $\bar{V_n} = V_n \cup \Gamma_n$ entonces tenemos que $\bar{V_n} \subset \bar{V}_{n-1} \subset \cdots \subset \bar{V_1}$. Y por el teorema de Cantor debe existir un z_0 tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{z_0\}$$

f es analítica en U entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \ si \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

$$\forall z \in U, \ g(z) := f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0), \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$$
$$|g(z)| \leq \varepsilon |z - z_0 \ si \ |z - z_0| < \delta|$$

$$Dado \delta > 0, \ \exists n \in \mathbb{N} \ / \ \bar{V}_n \subset D(z_0, \delta)$$
$$\Rightarrow \int_{\Gamma_n} z dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2} + \frac{z_3^2 - z_2^2}{2} + \frac{z_1^2 - z_3^2}{2} = 0, \ \int_{\Gamma_n} C dz = 0, \ \forall C \in \mathbb{C}$$
$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma_n} g(z) dz \right| \leq M_g(\Gamma_n) L(\Gamma_n)$$
$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma_n} f(z) dz \right| \leq M_{\varepsilon |z - z_0|}(\Gamma_n) L(\Gamma_n) \leq \varepsilon L(\Gamma_n)^2 \leq \varepsilon (\frac{1}{2^n} L(\Gamma)^2$$
$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \varepsilon (\frac{1}{2^n} L(\Gamma)^2 = \varepsilon L(\gamma)^2$$
$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = 0 \ porque \ podemos \ hacer \ \varepsilon \ tan \ pequeño \ como \ queramos. \quad \square$$

Teorema 2.4 (Teorema de Cauchy para regiones estrelladas)**.** *Sea $f(z)$ una función analítica en un conjunto estrellado y abierto U. Para cualquier γ camino cerrado en U se tiene que:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Demostración. *Al ser una región estrellada sabemos que $\exists z_0 \in U$ tal que $[z_0, z] \in U \ \forall z \in U$.*

Sea $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w) dw$ y veamos que $F'(z_1) = f(z_1) \ \forall z_1 \in U$.

Sea $z \in U, \ \neq z \neq z_0, \ z_1 \neq z \Rightarrow$

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_0, z]} f(w) dw - \int_{[z_0, z_1]} f(w) dw}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_0, z]} f(w) dw + \int_{[z_1, z_0]} f(w) dw}{z - z_1}$$

Por el Teorema de caucy para triángulos, tomando $\Gamma = [z_0, z] \cup [z, z_1] \cup [z_1, z_0]$ vemos que $\int_{\Gamma} f(w) dw = 0$. Con lo que

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_1, z]} f(w) dw}{z - z_1}$$

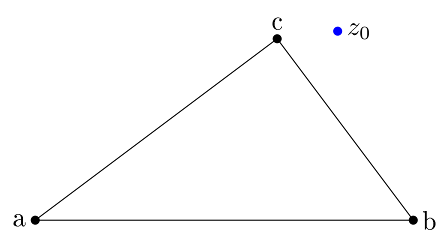
$$\left| frac \int_{[z_1, z]} f(w) dw z - z_1 \right| \leq M_f(\gamma) \frac{|z - z_1|}{z - z_1} \xrightarrow[z \to z_0]{} f(z)$$
$$\Rightarrow \left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \xrightarrow[z \to z_0]{} 0 \Rightarrow F'(z_1) = f(z_1)$$

Podemos concluir que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo γ camido cerrado. $\square$

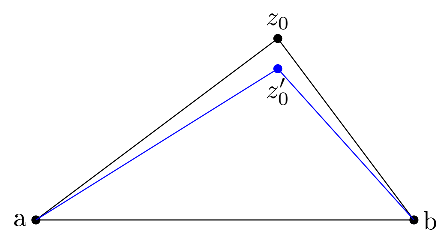
Teorema 2.5 (Teorema de Cauchy extendido para triángulos). *Sea $f(z)$ una función continua en un abierto U y analítica en $U \backslash \{z_0\}$ para algún $z_0 \in U$, para cualquier $\triangle$ contenido en U se tiene que:*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \ donde\ \Gamma = Fr(\triangle)$$

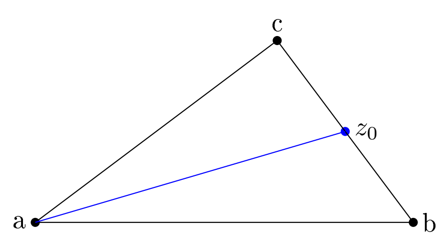
Demostración. *Vamos a dividir la demostración en casos:*



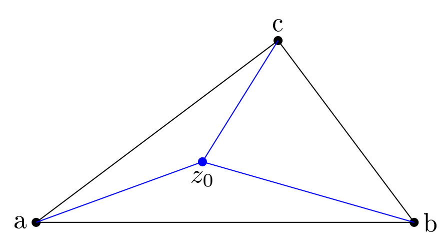
CASO 0



CASO 1



CASO 2



CASO 3

<u>CASO 0 :</u> Si $z_0 \notin \triangle$ se aplica el Teorema de Cauchy para triángulos.

<u>CASO 1 :</u> Si z_0 es un vértice de $\triangle$ llamamos Γ' a la frontera del triangulo $\triangle'$ con la misma base que $\triangle$ y con vértice z_0' cercano a z_0.

Tomando $U' = U \backslash \{z_0\}$ y aplicando el Teorema de Cauchy para triángulos se tiene que $\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0$ Ahora bien, $\int_{\Gamma'} f(z)dz \xrightarrow[z_0' \to z_0]{} \int_{\Gamma} f(z)dz$ ya que f es uniformemente continua en el compacto formado por el triangulo así que $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

<u>CASO 2 :</u> Si z_0 está en un lado del triangulo, podemos subdividirlo en dos de forma que z_0 sea vértice de ambos, pudiendo aplicar el caso 1.

<u>CASO 3 :</u> Si z_0 está en el interior del triangulo, subdividimos el triangulo en 3, de tal forma que z_0 sea vértice de los tres y aplicamos el caso 1. $\square$

Teorema 2.6 (Teorema de Cauchy extendido para regiones estrelladas). *Sea $f(z)$ una función continua en un conjunto estrellado y abierto U y analítica en $U \backslash \{z_0\}$ para algún $z_0 \in U$. Para cualquier γ camino cerrado en U se tiene que*

$f(z)$ tiene primitiva y que:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Demostración. *Análogo al teorema de Cauchy para regiones estrelladas pero usando el teorema de Cauchy extendido para triángulos.*

Colorario 2.2 (Teorema de Cauchy para convexos)**.** *Sea U un conjunto abierto y convexo, $f(x)$ continua en U, analítica en $U\backslash\{z_0\}$ para algún $z_0 \in U$ entonces para todo γ camino cerrado:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

2.4. Formula integral de Cauchy para círculos

Teorema 2.7 (Formula integral de Cauchy para círculos)**.** *Sea $f(z)$ analítica en un abierto U que contiene a un disco $\overline{D}(z_0, r)$ para $r > 0$. Entonces para cualquier $z \in D(z_0, r)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Donde $C := C(z_0, r) = \{z/|z_0 - z| = r\}$.

Demostración. *Sea $V = D(z_0, r)$ tal que $\bar{D}(z_0, r) \subset V \subset U$ y $z \in D(z_0, r)$. Sea $t > 0$ tal que $D := D(z, t) \subset D(Z_0, r)$.*

(dibujo)

$C_1 \subset V_1$ estrellado entonces tenemos que $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$, $w \in V_!$ es analítica, por lo que

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}dw = 0 \text{ y analogamente se tiene que } \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = 0$$

$$0 = \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}dw + \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_C \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_D \frac{f(w)}{w-z}dw$$
$$\Rightarrow \int_C \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_D \frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)\int_C \frac{dw}{w-z}dz + \int_C \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw$$
$$\int_C \frac{dw}{w-z} = \int_0^{2\pi} \frac{ite^{it}}{te^{it}}dt = 2\pi i$$

$f(w)$ es continua en z con lo que

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0/|w-z| < \delta \Rightarrow f(w) - f(z) < \varepsilon.$$

Tomemos $0 < t < \delta$

$$\left| \int_D \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \right| \leq 2\pi\varepsilon$$

Y como podemos hacer ε *arbitrariamente pequeño concluimos que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw \qquad \square$$

Teorema 2.8 (Formula integral de Cauchy para círculos en derivadas)**.** *Sea* $f(z)$ *analítica en un abierto* U *que contiene a un disco* $\overline{D}(z_0, r)$ *para* $r > 0$*. Entonces para cualquier* $z \in D(z_0, r)$ $\exists f^{(n)}(z),\ \forall n \in \mathbb{N}$ *y se tiene que:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Donde $C := C(z_0, r)$*.*

Demostración. *Sea* $z_0 \in D(z_0, r)$*. Veamos que* $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$*. Sea* $h \neq 0$ *suficientemente pequeño entonces:*

$$\begin{aligned}
&f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw,\ f(z+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - (z+h)} dw \\
&\Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw = \\
&= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left(\frac{1}{w - (z+h)} - \frac{1}{w - z} - \frac{h}{(w-z)^2} \right) dw = \\
&= \frac{1}{2\pi i h} \int_C \frac{f(w) h^2}{(w - z - h)(w - z)^2} dw = \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)^2} dw \xrightarrow[h \to 0]{} 0
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw$*.*

$$\begin{aligned}
&\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} - \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw = \\
&= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left(\frac{1}{(w - z - h)^2} - \frac{1}{(w-z)^2} - \frac{2h}{(w-z)^2} \right) dw = \\
&= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left(\frac{3h^2(w - z) - 2h^2}{(w - z - h)^2 (w - z)^3} \right) dw \xrightarrow[h \to o]{} 0
\end{aligned}$$

Por inducción probemos ahora que $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$*:*

$$\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}-\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw =$$
$$= \frac{k!}{2\pi ih}\int_C f(w)\left(\frac{1}{(w-z-h)^{k+1}}-\frac{1}{(w-z)^{k+1}}-\frac{(k+1)h}{(w-z)^{k+1}}\right)dw =$$
$$= \frac{k!}{2\pi ih}\int_C f(w)\left(\frac{h^2(-\binom{k+2}{2}+(k+1)\binom{k+1}{1})(w-z)^k+h^3(\binom{k+1}{2}-\cdots)}{(w-z-h)^{k+1}(w-z)^{k+2}}\right)dw \xrightarrow[h\to o]{} 0$$

Podemos concluir entonces que $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$ □

Colorario 2.3 (F.I.C)**.** *Sea* $z:0\in\mathbb{C}$ *y* $r>0$, $C:=C(z_0,r)$ *Entonces:*

$$\int_C \frac{1}{w-z}dw = \begin{cases} 2\pi i & si \quad z \text{ es interior a } C \\ 0 & si \quad z \text{ es exterior a } C \end{cases}$$

Demostración. *Si* z *es exterior a* C *entonces* $f(w)=\frac{1}{w-z}$ *es analítica en* $D(z_0,s)$ *con* $s>r$ *de forma que* $z\notin D(z_0,s)$. *Entonces por el Teorema de Cauchy para convexos* $\int_C \frac{1}{w-z}dw=0.$

Si z *es interior a* C, $f(w)=1$ *y por F.I.C entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1)}{w-z}dw = f(z)=1 \Rightarrow \int_C \frac{1)}{w-z}dw = 2\pi i$$

Colorario 2.4 (Analiticidad de las derivadas)**.** *Sea* $f(z)$ *una función analítica en un punto entonces sus derivadas de todos los ordenes son también funciones analíticas en ese punto. Además si* $f(z)$ *tiene primitiva en un abierto* U *entonces* $f(z)$ *es analítica en* U.

Demostración. *Si* f *es analítica en un punto* z_0 *entonces* $\exists r>0$ *tal que* f *es derivable en todo punto de* $D(z_0,r)$ *y por F.I.C. para las derivadas* f *es infinitamente derivable sobre* $D(Z_0,r)$. *Entonces todas las derivadas son analíticas en* z_0.

Si $f(z)$ *tiene primitiva en* U *sabemos que* $\exists F(z)$ *analítica en* U *tal que* $F'(z)=f(z)\ \forall z\in U$.

Por lo anterior, todas las derivadas de F *e¡son analíticas en* U, *en concreto* $f(x)$ *lo es.*

Colorario 2.5. *Si una funciónf*$(z)=u(x,y)+i(x,y)$ *es analítica en un punto* $z_0=u_0+iv_0$ *entonces sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todo orden en ese punto. Las partes reales e imaginarias de una función analítica en un dominio* D *son funciones armónicas en* D

Colorario 2.6. *Sea* $f(z)$ *continua en un abierto* U *y analítica en* $U\backslash\{z_0\}$ *para* $z_0\in U$ *entonces* $f(z)$ *es analítica en* U.

Demostración. *Sea* $V = D(z_0, r)$, $r > 0$ *tal que* $V \subseteq U$. *SI aplicamos el Teorema de Cauchy para convexos* $\int_\gamma fZ)dz = 0$ *para todo camino cerrado en* V. *Entonces por el Teorema de independencia de caminos* $\exists F(z)$ *primitiva de* f *en* V. *Con lo que* $f(z)$ *es analítica en* V *y en consecuencia lo es también en* U.

Definición 2.13 (Indice de un punto respecto a un camino cerrado)**.**

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Teorema 2.9 (**Primer teorema de Cauchy**)**.** *Sea* U *abierto de* $\mathbb{C}$ *y* γ *un camino cerrado,* $\forall f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *analítica,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \Leftrightarrow n(\gamma_z) = 0 \ \forall z \notin U$$

.

Teorema 2.10 (Segundo teorema de Cauchy)**.** *Sea* U *abierto de* $\mathbb{C}$ *son equivalentes:*

1. $\overline{\mathbb{C}} \backslash U$ *es conexo.*

2. $n(\gamma, z) = 0$ $\forall \gamma$ *camino cerrado en* U *y* $\forall z \in \mathbb{C} \backslash U$.

3. $int_\gamma f(z)dz = 0$ $\forall f$ *analítica en* U *y* $\forall \gamma$ *camino cerrado en* U.

4. *Si* f *es analítica entonces tiene primitiva.*

Teorema 2.11 (Fórmula integral de Cauchy general)**.** *Sea* f *analítica en un abierto* $U \in \mathbb{C}$ *y* γ *un camino cerrado en* U *tal que* $n(\gamma, z) = 0$ $\forall z \notin U$ *entonces para* $z \in U$, $z \notin \gamma^*$ *se cumple que:*

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{z - z_0} dw$$

$$f^{(n)}(z)n(\gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(z - z_0)^{+1}} dw$$

Definición 2.14. *Definimos los ciclos como sumas de la forma* $\gamma = \sum_{j=1}^{n} a_i \gamma_i$ *con* $a_j \in \mathbb{Z}$ *y* γ_j *camino cerrado.*

Teorema 2.12. *Sea* U *abierto y* γ_1 *y* γ_2 *dos caminos cerrados (o ciclos) entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z9dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \ \forall f \text{ analítica en } U \Leftrightarrow n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z) \ \forall z \in \mathbb{C} \backslash U$$

2.5. Aplicaciones de Teoría de Cauchy

Lema 2.1. *Sea $f(z)$ una función continua en U abierto convexo, supongamos que para todo triangulo $\triangle \subset U$ se tiene que si $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ entonces $f(z)$ tiene primitiva.*

Demostración. *Sea $z_0 \in U$, definimos $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw \; \forall z \in U$.*

Tomemos $h \in \mathbb{C}$ tal que $|h| \ll |z_0 - z|$ entonces:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z9\right| = \left|\frac{\int_{[z_0,z+h]} f(w)dw - \int_{[z_0,z]} f(w)dw}{h} - f(z)\right| =$$

$$\int_{[z_0,z+h]} f(w)dw) + \int_{[z+h,z]} f(w)dw) + \int_{[z,z_0]} f(w)dw = 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\int_{[z_0,z+h]} f(w)dw}{h} - \frac{\int_{[z,z+h]} f(w)dw}{h}\right| = \left|\frac{\int_{[z,z+h]} f(w)dw}{h}\right|$$

$$\leq |f(w)-f(z)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow F'(z) = f(z) \quad \square$$

Teorema 2.13 (Teorema de Morera). *Sea $f(z)$ una función continua en n abierto U, supongamos que $\forall \triangle \subset U$ tal que $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en U.*

Demostración. *Sea $z_0 \in U$ y $r > 0$ consideramos $D(z_0, r)$. Por el lema anterior f tiene primitiva en D así que f es analítica en D.*

Como z_0 es arbitrario deducimos que f es analítica en todo U.

Teorema 2.14 (Principio de reflexión de Schwarz). *Sea $f(z)$ una función analítica en el semiplano abierto $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}/\Im(z) > 0\}$ y continua en $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.*

Supongamos que $\Im(f(z)) = 0 \; \forall z \in \mathbb{R}$ entonces $f(z)$ puede ser extendida analíticamente a $\mathbb{C}$.

Demostración.

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in \mathbb{C}^- \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{\overline{f(\overline{z}+\overline{h})} - \overline{f(\overline{z})}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z}+\overline{h}) - f(\overline{z})}}{h} = \overline{f'(w)}$$

El límite existe así que es analítica $\square$.

Lema 2.2 (Estimación de Cauchy). *Sea $f(z)$ analítica en $U \supset D(z_0, R)$ y $M_f(r)$ con $0 < r < R$ entonces*

$$\left|f^{(n)}(z_0\right| \leq \frac{n!}{r^n} M_f(r) \; \forall n = 0, 1, \ldots$$

Demostración. *Por F.I.C para las derivadas*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(z-z_0)^{+1}}dw \Rightarrow \left|f^{(n)}(z_0\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(z-z_0)^{+1}}dw\right|$$
$$\leq \frac{n!}{\cancel{2\pi}}\cancel{2\pi}\,\text{máx}\left\{\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}}, w \in C(z_0,r)\right\} = \frac{n!}{r^n}M_f(z) \quad \square$$

Teorema 2.15 (Teorema de Liouville)**.** *Si $f(z)$ es una función entera y está acotada entonces es constante.*

Demostración. *Si $f(z)$ es acotada entonces $\exists M > 0/|f(z)| < M\ \forall z \in \mathbb{C}$. Por la estimación de Cauchy para $n = 1$:*

$$|f'(z)| \leq \frac{M_f(r)}{r} \leq \frac{M}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\ \forall r > 0$$

Entonces $f'(z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$ es conexo entonces f es constante. $\square$

Teorema 2.16 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Todo polinomio $P(z)$ no constante tiene al menos una raíz, es decir, existe al menos un z_0 tal que $P(z_0) = 0$.*

Demostración. *Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, n > 1$ Por R.abs., si $P(z)$ no tubiera raíces entonces $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es entera. Veamos que f está acotada:*

Sabemos que $|P(z)| \xrightarrow[|z|\to 0]{} 0 \Rightarrow \exists R > 0/|P(z)| > 1$ si $|z| > R \Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < 1$ si $|z| \leq R$. En consecuencia $f(z)$ es acotada en $\mathbb{C}$ y por el Teorema de Liouville $f(z) = cte$. $\sharp$

Colorario 2.7 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Todo polinomio $P(z)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces.*

Demostración. *Por el Teorema anterior sabemos que existe z_0 tal que $P(z_0) = 0$. Entonces podemos escribir $P(z) = (z - z_0)P_1(z)$ donde P_1 es un polinomio de grado $n - 1$.*

Si $n = 1$ hemos acabado.

Si $n > 1$ Aplicamos el proceso anterior a P_1, $P_1(z) = (z - z_1)P_2(z)$

Reiterando obtendremos que $P(z) = a_0(z - z1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$ $\square$

Teorema 2.17 (Teorema de Gauss-Lucas)**.** *Sea $P(z)$ un polinomio no constante con coeficientes complejos, los ceros de $P'(z)$ están en la clausura convexa de los ceros de $P(z)$.*

Demostración. *$P(z) = \alpha\prod_{j=1}^n (z - a_j)$, con n el grado de P y a_j sus raíces.*

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) \neq 0$ entonces

$$\frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_0 - a_j}$$

Si $P'(z_0) = 0$ *y* $P(z_0) \neq 0$ *entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_0 - a_j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{z_0} - \bar{a_j}}{|z_0 - a_j|^2} = 0 \Rightarrow z_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z_0 - a_j|^2} = a_j \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z_0 - a_j|^2}$$

Entonces podemos escribir z_0 *como* $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j a_j$ *con* $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 1$, $\alpha_j > 0$. z_0 *es baricentro de* a_j *y entonces* z_0 *está en la clausura convexa.*

Si $P'(z_0) = 0$ *y* $P(z_0) = 0$ *entonces* $z_0 = 1 \cdot z_0 + 0 \cdot \sum a_j \Rightarrow z_0$ *está en la clausura convexa.* $\square$

2.6. Principio del módulo máximo

Lema 2.3 (Propiedad del valor medio de Gauss). *Sea* $f(z)$ *analítica en* $U \supset \bar{D}(z_0, r)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ *y* $r > 0$ *entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it} dt$$

Demostración.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r} \frac{f(w)}{w - z} dw, \ \gamma(t) = z_0 + re^{it}, \ \gamma'(t) = rie^{it}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{\cancel{re^{it}}} \cancel{rie^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

$\square$

Teorema 2.18 (Principio del módulo máximo local). *Si* $f(z)$ *es analítica en un abierto* U *y supongamos que* $|f(z)|$ *tiene máximo en* $z_0 \in U$. *Entonces* $f(z)$ *es constante en un entorno de* z_0.

Demostración. *Por hipótesis sabemos que* $\exists D(z_0, r), \ r > 0$ *tal que* $|f(z)| \leq |f(z_0)| \ \forall z \in D(z_0, r)$ *Entonces se cumple que*

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \text{máx}\{|f(z_0 + re^{it} / t \in [0, 2\pi]\} \leq |f(z_0|$$

$$\Rightarrow |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it}| dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})| dt = 0$$

$$\Rightarrow |f(z_0) = |f(f(z_0 + re^{it})| \ \forall t \in [0, 2\pi] \Rightarrow |f(z_0)| = cte. \text{ en un entorno de } z_0.$$

$\square$

Colorario 2.8. *Sea* $f(z_0)$ *analítica en un abierto y conexo* U, *supongamos que* $|f(z_0)|$ *alcanza el máximo absoluto en* U, *entonces* $f(z_0)$ *tiene valor constante en* U.

Demostración. *Por hipótesis* $\exists z_0 \in U / |f(z)| \leq |f(z_0)|\ \forall z \in U$.

Sea $E = \{z \in U / f(z) = f(z_0)\}$ *al ser* $f(z)$ *continua en* U *claramente el conjunto* E *es cerrado respecto de* U *y* $z_0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$.

Sea $z \in E \Rightarrow |f(z)| = |f(z_0)| = \max\{|f(z)|\}$ *entonces por el resultdo anterior* f *es constante en un entorno de* z. *Con lo que* $\exists\ r > 0$*tal que* $D(z,r) \subset E \Rightarrow E$ *es abierto y entonces* $E = U$. □

Teorema 2.19 (Principio del módulo máximo)**.** *Sea* $f(z)$ *analítica en un conjunto abierto, conexo y acotado* U *y continua en* $Fr(U)$. *Si* $M = \max\{|f(z)|/z \in Fr(U)\}$*, se cumple que:*

1. $|f(z)| \leq M\ \forall z \in U$
2. *Si* $|f(z)| = M$ *para* $z_0 \in U$ *entonces* $f(Z) = cte.$ *en* U.

Demostración.
1. *Observamos que* $|f(z)|$ *es también continua en* $\bar{U}$ *por lo que* $|f(z)|$ *alcanza un máximo en* $\bar{U}$. *Si tal máximo se alcanza en* $Fr(U)$ *hemos terminado. Si el máimo se alcanza en* $Int(U)$ *entonces* $\exists z_0 \in U$ *tal que* $|f(z)| \leq |f(z_0)|\ \forall z \in U$ *entonces* f *es constante en* U.
2. *Si* $\exists z_0 \in U$ *tal que* $|f(z_0)| = M$ *entonces* $f(z_0)$ *es constante.* □

Teorema 2.20 (Principio del módulo mínimo)**.** *Sea* $f(z)$ *analítica en un conjunto abierto, conexo y acotado* U *y continua en* $Fr(U)$*.Supongamos* $f(z) \neq 0\ \forall z \in U$. *Si* $m = \min\{|f(z)|/z \in Fr(U)\}$*, se cumple que:*

1. $|f(z)| \geq n\ \forall z \in U$
2. *Si* $|f(z)| = n$ *para* $z_0 \in U$ *entonces* $f(Z) = cte.$ *en* U.

Demostración. *Sea* $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ *analítica en* U *y continua en* $\bar{U}$. *Vemos que* g *cumple las condiciones del módulo máximo con lo que el máximo de* g *se alcanza en la frontera y en consecuencia el mínimo de* f *también.* □

Colorario 2.9. *Sea* $f(z)$ *analítica no constante en un abierto conexo y acotado* U *y continua en* $Fr(U)$. *Si* $U(x,y) = \Re(f(z))$ *y* $v(x,y) = \Im(f(z))$ *entonces* u, v *satisfacen el principio del módulo máximo (mínimo).*

Demostración. *Sea* $g(z) = e^{f(z)}$ *analítica en* U *y continua en la frontera.* $|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{\Re(f(z)}||e^{\Im f(z)i}| = |e^u||e^{iv}| = e^u$ *como* g *satisface el principio del módulo máximo (mínimo)* u *también los cumple.*

Sea $h(z) = e^{-if(z)}$ *entonces* $|h(z)| = e^v$ *y como* h *satisface el principio del módulo máximo (mínimo)* v *también los cumple.* □

Lema 2.4 (Lema de Schwarz)**.** *Sea* $f(z)$ *una función analítica en* $D(0,1)$. *Supongamos que* $f(0) = 0$ *y* $|f(z)| \leq 1\ \forall z \in D(0,1)$ *entonces* $|f(z)| \leq |z|$ *y* $|f'(0)| \leq 1$.

Además si $\exists z_0 \in D(0,1) \backslash \{0\}$ *tal que* $|f(z_0)| = |z_0|$ *o que* $|f'(z_0)| = 1$ *entonces* $f(z) = az\ \forall z \in D(0,1)$ *, as* $\in \mathbb{C}/|a| = 1$.

Demostración.

$$Sea\ g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & si \quad z \neq 0 \\ f'(0) & si \quad z = 0 \end{cases}$$

Si $z \neq 0$ g es analítica.

Si $z = 0$ entonces g es derivable porque

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(h)}{h} - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - hf'(0)}{h^2}$$

El límite existe por analiticidad de f.

De hecho es claro que g es continua en $z = 0$ y por tanto g es analítica en $D(0,)$.

Por el P.M.Máximo $|g(z)| \leq M = \max\{|g(z)|/z \in FR(U)\}$, $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{z} \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq z\ \forall z \in D(0, 1)$.

La segunda parte de la afirmación se cumple por el apartado del P.M.-mínimo.

Definición 2.15. *Llamaremos núcleo de Poisson a la función*

$$P_r(x) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(x)} \text{ siendo } 0 \leq r < R \text{ y } x \in \mathbb{R}$$

Definición 2.16. *Llamaremos núcleo de Cauchy a la función*

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \text{ siendo } z \in D(0, R), t \in \mathbb{R}$$

Resultado: $\Re(Q_z(t)) = P_r(\theta - t)$ con $z = re^{it} \in D(0, R)$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Teorema 2.21 (Fórmula integral de Poisson). *Sea $f(z)$ analítica en $D(z_0, R)$ y continua en $\overline{D(z_0, R)}$, para $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $z = z_0 + e^{it} \in D(z_0, R)$, $0 \leq r < R$ se tiene que:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r/\theta - t)f(z_0 + Re^{it})dt$$

Si $u = \Re(f)$ entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r/\theta - t)u(z_0 + Re^{it})dt$$

Bloque 3
Series de potencias

3.1. Convergencia de Series

Definición 3.1. *Una sucesión de números complejos* $\{z_n\}_{n>=1}$ *es convergente a* $z \in \mathbb{C}$ *si* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/|z_n - z| < \varepsilon$ *si* $n > n_0$.

Definición 3.2. *Dada una serie de números complejos* $\sum_{n\geq 1} z_n$ *diremos que:*

a) *Converge a* z *si* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\left|\sum_{n=1}^{m} z_n - z\right| < \varepsilon$ *cuando* $m > n_0$.

b) *Converge absolutamente si* $\sum_{n\geq 1} |z_n| < \infty$.

Observación:

1. $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge si la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{k=1}^{n} z_k\}_{n\geq 1}$ converge, es decir, $\exists \lim_{n\to infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$.
2. Por la completitud de $\mathbb{C}$ equivale a que $\{\sum_{k=1}^{n} z_k\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy.
3. Si $z_n = x_n + iy_n$ entonces $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge si $\sum_{n\geq 1} x_n < \infty$ y $\sum_{n\geq 1} y_n < \infty$.
4. Una condición necesaria para la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} z_n$ es que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.
5. Convergencia absoluta implica convergencia.

3.1.1. Criterios de convergencia para series

1. Algunos criterios en $\mathbb{R}$: comparación, cociente y raíz funcionan para $\mathbb{C}$.
2. Dada la serie $\sum_{n\geq 1} P_n$, $P_n \geq 0$, si consideramos $A = \limsup (P_n)^{\frac{1}{n}}$ y $B = \limsup \frac{P_{n+1}}{P_n}$ se tiene que:
   a) Si $A < 1$ o $B < 1$ entonces $\sum_{n\geq 1} P_n < \infty$
   b) Si $A > 1$ o $B > 1$ entonces $\sum_{n\geq 1} P_n = \infty$

3.2. Series de potencias

Definición 3.3. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. La serie de potencias de coeficientes $\{a_n\}$ y centro z_0 es la serie funcional dada por*

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

Definición 3.4. *Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, diremos que su radio de convergencia viene dado por:*

$$r = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$$

Definición 3.5. *Dada una serie de potencias de números complejos $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, diremos que:*

1. *Converge en un punto w_0 si $\sum_{n\geq 0} a_n(w_0-z_0)^n$ converge. En caso contrario diremos que no converge a w_0.*
2. *Converge absolutamente en un punto w_0 si $\sum_{n\geq 0} |a_n(w_0-z_0)^n| < \infty$.*
3. *Converge uniformemente sobre un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ a una función $f(w)$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \left|\sum_{n\geq 0} a_n(w-z_0)^n - f(w)\right| < \varepsilon\ \forall n > n_0,\ \forall w \in S$$

La elección de n_0 sólo depende del valor del valor de ε y es independiente del punto w que se tome de S.

Teorema 3.1 (Teorema de Abel)**.** *Dada una serie de potencias de números complejos $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, supongamos que converge para $z_1 \in \mathbb{C}$ y llamaremos $r = |z_1 - z_0|$ entonces la serie converge absolutamente en todo $D(z_0, r)$ y uniformemente en todo compacto de $D(z_0, r)$ a la función suma $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$.*

Demostración. *Sea $z \in D/z_0, r)$ entonces $\sum_{n\geq 0} |a_n(z-z_0)^n| = \sum_{n\geq 0} \left|a_n \frac{(z-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n}(z_1-z_0)^n\right|$.*

Dado que $\sum_{n\geq 0} a_n(z_1-z_0)^n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n(z_1-z_0)^n = 0$ y $\exists M > 0 / |a_n(z_1-z_0)^n| < M\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n(z_1-z_0)^n| \leq M \sum_{n\geq 0} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ *que converge por ser serie geométrica de razón menor que 1.*

Tomemos ahora $k \subset D(z_0, r)$ un conjunto compacto, y sea $z' \in D(z_0, r)$ talque $k \subset \bar{D}(z_0, r') \subset D(z_0, r)$ con $r' = |z' - z_0|$. Así si $z \in k$ tenemos que $\sum_{n\geq 0} |a_n(z-z_0)^n| < \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n < \infty\ \forall z \in K$.

Sea ahora $N_1 \in \mathbb{N}$ y $w \in k$ entonces:

$$\left|\sum_{j=0}^{N_1-1} a_j(w-z_o)^j - \sum_{j\geq 0} a_j(w-z_0)^j\right| = \left|\sum_{j\geq N_1} a_j(w-z_0)^j\right| =$$

$$= \lim_{N_2 to\infty}\left|\sum_{j=N_1}^{N_2} a_j(w-z_0)^j\right| \leq \lim_{N_2\to\infty}\sum_{j=N_1}^{N_2}|a_j||w-z_0|^j \leq$$

$$\leq lim_{N_2\to infty}\sum_{j=N_1}^{N_2}|a_j||z'-z_0|^j \leq \sum_{n\geq 0}|a_n||z'-z_0|^n < \infty$$

Los restos de la serie cumplen la definición de convergencia uniforme. $\square$

Teorema 3.2. *Consideremos la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ y r su radio de convergencia, consideremos el disco $D := F(z_0, r)$.*

1. *La serie converge absolutamente $\forall z \in D$.*

2. *La serie converge uniformemente en todo compacto de D.*

3. *La serie no converge sea cual sea z tal que $|z-z_0| > r$.*

Demostración. *Recordemos que $r = \left(\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$.*

1. *Sea $z \in D$, observemos que*

$$\limsup |a_n(z-z_0)^n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}|z-z_0| = |z-z_0|r^{-1} = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$$

   Por criterio de la raíz hay convergencia absoluta con $z \in D$.

2. *La convergencia uniforme en todo compacto de D se deduce por el teorema de Abel.*

3. *Por reducción al absurdo, tomemos que la serie converge para algún $z'/|z'-z_0| > r$.*

   Por el teorema de Abel la serie también convergería en $z \in D(z_0, r')$ con $r? = |z'-z_0|$.

   En particular converge $\forall z/|z-z_0 < r'$, es decir, también converge en $z/r < |z-z_0|z|'-z_0|$ lo que supone una contradicción ya que

$$\limsup |a_n(z-z_0)^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{z-z_0|}{r} > 1 \ \sharp$$

3.3. Teorema de Taylor y de la convergencia analítica

Teorema 3.3 (Taylor). *Sea $f(z)$ analítica en $D(z_0, r)$ para $z_0 \in \mathbb{C}$ t $r > 0$ entonces para todo $z \in D(z_0, r)$, $f(Z)$ admite la representación en serie:*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Demostración. *Sea $r_1 / 0 < r_1 < r$, $C_1 := \{z / |z - z_0| = r_1\}$, $z \in D(z_0, r_1)$ entonces:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z - (z - z_0)} dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi io}\int_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} dw$$

Para $s \neq 1$ tenemos que $\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + \cdots s^{n-1} + \frac{s^n}{1-s}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - w_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{w - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(w - z_0)^2} + \cdots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(w - z_0)^{n-1}} + \frac{\left(\frac{z - z_0}{w - w_0}\right)^n}{1 - \frac{z - z_0}{w - w_0}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{w - w_0}\right)} = \frac{1}{w} + \cdots + \frac{1}{(w - z_0)^n}(z - z_0)^{n-1} + \frac{1}{(w - z)(w - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n$$

por F.C.D. $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

$$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + P_n(z)$$

con $P_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z)(w - z_0)^{n+1}} dw$

Para concluir solo queda demostrar que $|P_n(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Tomemos $M = \text{máx}_{z \in C_1}\{|f(w)|\}$, $|z - z_0| = r_2 < r_1$, $|w - z| = |w - z_0 - (z - z_0)| \geq r_1 - r_2$, tenemos que

$$|P_n(z)| \leq \frac{r_2^n}{2\pi} \frac{M}{r_1^{n+1}(r_0 - r_1} 2\pi r_1 = \frac{M}{r_1 - r_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \square$$

Teorema 3.4 (Convergencia analítica). *Sea $\{f_n(z)\}_n$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto U tal que $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente sobre los compactos de U, entonces $f(z)$ es analítica en U y $f_n^{(p)}(z)$ converge uniformemente a $f^{(p)}(z)$ sobre los compactos de U.*

Demostración. *Veamos que $f(z)$ es continua:*

$$\text{Sea } \varepsilon > 0,\ N \in \mathbb{N} \ / |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3 \ \forall n > N,\ \forall z \in U$$

$$\text{Sea } z_0 \in U \Rightarrow \exists \delta > 0 \ / \ |f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3 \text{ si } |z - z_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z9 - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < varepsilon$$

Entonces $f(z)$ es continua en z_0. Y si tomamos k un compacto de U y Γ la frontera de $\triangle$ tenemos que

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz = 0 \xrightarrow{T^a \ Morera} f(z) \text{ es analítica en } k \Rightarrow \text{ es analítica en } U.$$

Sea $r > 0$ y $z_0 \in U$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ y $C := C(z_0, r)$ entonces

$$f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{p+1}} dw,\ \forall z \in D(z_0, r)$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $N_1 \in \mathbb{N}$: $f_n(z)$ es continua uniformemente en $\overline{D(z_0, r_1)}$ con $0 < r_1 < r$ entonces se cumple que $\forall z \in \overline{D(z_0, r_1)}$

$$\left| f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z) \right| \leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(r - r_1)^{p+1}} \ \forall n > N$$

Entonces $f_n^{(p)}(z)$ tiende a $f^{(p)}(z)$ sobre los compactos de U. □

Definición 3.6 (Serie de Taylor). *Si $f(z)$ es analítica en $D(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

se llama serie de Taylor de f centrada en z_0. Si $z_0 = 0$ se llama serie de MacLaurin.

Teorema 3.5 (Recíproco del Teorema de Taylor). *Sea $f(z)$ una función definida en $D(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, si $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ para todo $z \in D(z_0, r)$ entonces f es analítica en $D(z_0, r)$.*

Demostración. *Es claro que el radio de convergencia de la serie es mayor o igual que r, entonces la serie converge uniformemente sobre compactos de $D(z_0, r)$.con lo que si tomamos $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$ vemos como el límite uniforme de $f_n(z)$ es $f(z)$ y por el teorema de convergencia analítica f es analítica en $D(z_0, r)$.* □

Teorema 3.6 (Unicidad de coeficientes). *Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ una función definida en $D(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, entonces*

1. $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
2. $f(z)$ *es indefinidamente derivable en* $D(z_0, r)$ *y* $f^{(p)}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n n(n-1)\ldots(n-p+1)(z-z_0)^{n-p},\ p \in \mathbb{N}$.

Demostración. *Dado que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente en todo compacto de $D(z_0, r)$, por el teorema de convergencia analítica $\{fN^{(p)}\}$ converge uniformemente en todo compacto de $D(z_0, r)$a $f^{(p)}(z_0)$.*

Ahora para probar 1, hacemos $z = z_0$ en la igualdad de 2:

$$f^{(p)}(z_0) = \sum_{n\geq 0} a_n n(n-1)\ldots(n-p+1)(z_0-z_0)^{n-p}$$

$$\Rightarrow f^{(p)}(z_0) = a_p p! \Rightarrow a_p = \frac{f^{(p)}}{p!}\ \ p \in \mathbb{N}$$

3.4. Principio de prolongación analítica

Definición 3.7. *Sea $f(z)$ una función definida en U entonces el conjunto de ceros de $f(z)$ se denota como $Z(f) = \{z \in U / f(Z) = 0\}$.*

Si $f(z)$ es analítica en z_0, diremos que $f(z)$ tiene un cero de orden $m \geq 1$ si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ con $a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$.

También de forma equivalente $f(z)$ tiene un cero en z_0 de orden $m \geq 1$ cuando $f(Z) = (z-z_0)^m g(z)$ con $g(z)$ analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Lema 3.1. *Sea $f(z)$ analítica en un abierto U y denotamos por A el conjunto d los puntos de acumulación de $Z(f)$ en U, entonces A es abierto y cerrado en U.*

Demostración.

$$A = \{z \in U / \ \lim z_n = z,\ z_n \in Z(f),\ z_n \neq z_m\}$$

Observamos en primer lugar que $z \in A$ implica que $z \in Z(f)$.

Veamos que A es cerrado. Consideramos $\{w_n\} \subset A$ tal que $\{w_n\}_n \to w$ y probemos que $w \in A$. Esto es cierto ya que $w_n \in Z(f)$ y $w_n \neq w\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos que A es abierto, viendo que todo punto de A es interior. Sea $z_0 \in A$ y consideramos $f(z) = \sum_n a_n(z-z_0)^n$ válido para $D(z_0, r)$,$r > 0$ entonces $Dz_0, r) \subset U$.

Como $z_0 \in A \Rightarrow z_0 \in Z(f),\ f(z_0) = 0$ y supongamos que $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$, si $f(Z) = (z-z_0)^m g(z)$ con g analítica y $g(z_0) \neq 0$.

Entonces z_0 no es un punto aislado de $Z(f)$. $\sharp$

Concluimos entonces que $a_n = 0 \forall n \in N \Rightarrow f(z) = 0\ \forall z \in D(z_0, r) \subset A \Rightarrow A$ es abierto. $\square$

Teorema 3.7 (Principio de identidad). *Sea $f(z)$ analítica en un conjunto abierto y conexo U. Supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n\geq 1}$ de puntos distintos en U tal que $\exists \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in U$ con $f(z_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $f(z) = 0 \forall z \in U$.*

Demostración. *Sea $A = \{z \in U /\ \lim z_n = z,\ z_n \in Z(f),\ z_n \neq z_m\}$ entonces $A \neq \emptyset$ y por el lema anterior $A = U$ y entonces $f(z) = 0\ \forall z \in U$.*

Colorario 3.1 (Principio de prolongación analítica). *Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en un abierto U y conexo.*

Si $f(z) = g(z)\ \forall z \in S$ y $S \subset U$ es un conjunto con al menos un punto de acumulación de U entonces $f(z) = g(z)\ \forall z \in U$.

Demostración. *Tomemos $h(z) = f(z) - g(z)$, analítica en U.*

Vemos que $h(z) = 0\ \forall z \in S$ con lo que $Z(f)$ tiene punto de acumulación en S.

Y por el teorema anterior $h(z) =\ \ \forall z \in U$, es decir, $f(z) = g(z)\ \forall z \in U$. $\square$.

3.5. Series de Laurent

Definición 3.8. *DEcimos que $f(z)$ tiene una singularidad en z_0 si $f(z)$ no es analítica en z_0 pero sí loes en algún punto de todo entorno de z_0.*

Esta singularidad se dice que es aislada si existe un entorno perforado de z_0 donde $f(z)$ es analítica. En caso contrario diremos que z_0 es una singularidad no aislada.

Lema 3.2. *Sea $f(z)$ analítica en un abierto U, con $\{z \in \mathbb{C}/r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\} \subset U$. Consideremos $C_j = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| = r_j\}$, $j = 1, 2$ Entonces $\forall z/r_1 < |z - z_0| < r_2$ tenemos qe*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

Demostración. *Sea $\gamma = C_2 - C_1$ un ciclo.*

Observamos que si $z_1 \notin U$ y $|z_1 - z_0| > r_2$ entonces $n(\gamma, z_1) = n(C_2, z_1) - n(C_1, z_1) = 0$. Y si $z_1 \notin U$ y $|z_1 - z_0| < r_1$ entonces $n(\gamma, z_1) = 1 - 1 = 0$.

Con lo que $n(\gamma, z) = 0\ \forall z \notin U$ y por F.I.C.:

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

Y para cualquier z_0 *en la corona se tiene que* $n(\gamma, z_0) = n(C_2, z_0) - n(C_1, z_0) = 1 - 0 = 1.$ $\square$

Teorema 3.8 (Teorema de Laurent)**.** *Sea* $f(z)$ *analítica en la corona* $U = \{z \in \mathbb{C}/S_1 \leq |z - z_0| \leq S_2\}$ *con* $0 \leq S1 \leq S2 \leq \infty$ *y algún* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Para todo* $z \in U$ *se tiene que:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{infty} an(z - z_0)^n, \ a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Con $C = (C(z_0, r)$ *y* $S_1 < r < S2$.

Demostración. *Consideremos* $C_j = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| = r_j\}$, $j = 1, 2$ *con* $S_1 < r_1 < r_2 < S_2$. *Entonces* $\forall z/|z - z_0| < r$ *tenemos que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

y análogo al teorema de Taylor:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Obtenemos $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$.

Por el teorema de Abel f *converge absolutamente en* $D(z_0, r_2)$ *y uniformemente sobre compactos de* D. *Dado que* $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$ *aplicamos lo mismo para* C_1*:*

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Obtenemos $b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$.

De esta forma podemos escribir $f(z)$ *como* $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n \geq 0} b_n(z - z_0)^n$ *con lo que*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n \ \forall z \in U$$

$\square$

Proposición 3.1. *Sea* z_0 *una singularidad aislada de* $f(z)$ *entonces*

1. z_0 *es una singularidad evitable* $\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. z_0 *es un polo de orden* $m \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^m \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$

Demostración. *1.*

$$z_0 \text{ es evitable } \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0$$

2.

$$z_0 \text{ es polo de orden } m \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$
$$\Leftrightarrow g(z) = f(z)(z-z_0)^m = a_{-m} + aa_{m-1}(z-z_0) + \ldots \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} g(z) = a_{-m} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

Definición 3.9.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

Serie de Laurent centrada en z_0.

Definición 3.10. *Sea z_0 una singularidad de la función $f(z)$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ su serie de Laurent centrada en z_0:*

1. *$f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0 si $aN = 0\ \forall n < 0$.*
2. *$f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si m es el mayor natural de forma que $a_{-m} \neq 0$.*
3. *$f(z)$ tiene una singularidad esencial si existen infinitos $a_{-m} \neq 0$.*

Lema 3.3. *Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$ entonces z_0 es una singularidad evitable si y solo si (z) está acotada en un entorno perforado de z_0.*

Demostración. *Primero demostraremos ($\Rightarrow$).*

Supongamos que z_0 es singularidad evitable. Entonces podemos redefinir la función para que sea analítica en un entorno de z_0 con lo que f es acotada en un entorno perforado de z_0.

Demostremos ahora ($\Leftarrow$).

Supongamos que $f(z)$ está acotada en un entorno perforado de z_0. Entonces $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = 0$ y entonces $g(z) = f(z)(z-z_0)$ tiene una singularidad evitable en z_0.

Entonces podemos escribir $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z) = \frac{a_0}{a-a_0} + a_1 + a_2(z-z_0) + \cdots$

Por tanto, es o bien polo simple de f o singularidad evitable de f (si $a_0 = 0$). Pero como f está acotada z_0 no puede ser polo de$f$ así que concluimos que z_0 es singularidad evitable de f. $\square$

Teorema 3.9 (Casorati-Weierstrass). *Si $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 entonces $F(D(z_0, \varepsilon\backslash\{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir, la imagen de cualquier entorno perforado de z_0 es denso en $\mathbb{C}$.*

Demostración. *Sea $w \in \mathbb{C}$ y $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ veamos que $g(z)$ no está acotada en cualquier entorno perforado.*

Supongamos, por reducción al absurdo, que g está acotada en un $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ para algún $r > 0$. Sabemos que $g(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0 por ser acotada. Entonces podemos definir una función $g_1(z)$ tal que sea analítica en $D(z_0, r)$ con $g_1(z_0) \neq 0$.

Sea m el orden del 0 de g en z_0:

$$g(z) = (z - z_0)^m g_1(z) = \frac{1}{f(z) - w} \Rightarrow (z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m w + \frac{1}{g_1(z)}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{(g_1(z_0)} \Rightarrow z_0 \text{ es polo de orden } m \text{ de } f \ \sharp$$

Vemos como $g(z)$ no está acotada en ningún entorno perforado de z_0 y en conclusión $f(z) \to w$ $\forall w \in \mathbb{C}$. □

Proposición 3.2 (Clasificación de singularidades). *Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$ entonces:*

1. *z_0 es evitable $\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.*
2. *z_0 es polo de orden $m \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^m \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$.*
3. *z_0 es esencial $\Leftrightarrow \nexists \lim_{z \to z_0} |f(z)|$.*

Demostración. *Con anterioridad hemos demostrado 1 y la implicación hacia la derecha de 2,demostremos ahora la implicación hacia la izquierda:*

2.($\Leftarrow$) Si $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty \Rightarrow f(z)$ po está acotada en un entorno perforado de z_0, entonces es polo o singularidad esencial y por el Teorema de Casorati-Weierstrass z_0 no es singularidad esencial $\Rightarrow$ es polo.

Dado que una singularidad solo puede ser evitable, polo o esencial, demostrados 1. y 2. podemos demostrar 3. por descarte. □

Definición 3.11. *Diremos que $f(z)$ tiene una singularidad en ∞ si $f(z)$ es analítica en $\{z \in \mathbb{C}/|z| > r\}$ para algún $r > 0$. El tipo de singularidad de $f(z)$ en ∞ se define como el tipo de singularidad de $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ en $z = 0$.*

Proposición 3.3. *Sea $f(z)$ una función entera entonces:*

1. *z_0 es evitable $\Leftrightarrow f(z)$ es constante.*

2. z_0 *es un polo* $\Leftrightarrow f(z)$ *es un polinomio no constante.*

3. z_0 *es esencial* $\Leftrightarrow f(z)$ *no es un polinomio.*

Demostración. *1.*$(\Leftarrow)$ *Si* $f(z) = cte.$ *entonces* $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = cte.$ *y* $z = 0$ *es una singularidad evitable de* $g(z) \Rightarrow z = \infty$ *es singularidad evitable de* $f(z)$.

$(\Rightarrow)$ *Si* ∞ *es evitable en* $f(z)$ *entonces* $z = 0$ *lo es de* $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ *por lo que* $g(z)$ *es acotada en un entorno perforado de* $z = 0 \Rightarrow f(z)$ *es acotada en* $\mathbb{C}$ *y por el teorema de Liouville* f *es constante.*

2. ∞ *es un polo de* $f \Leftrightarrow z = 0$ *es polo de* $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ *entonces* $\lim_{z\to 0} |g(z)| = \infty$. *Además*

$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{1}{z^n} \Leftrightarrow 0$ *es polo de* $g \Leftrightarrow a_n = 0\ \forall n \geq m,\ m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(Z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$.

Por lo que $f(z)$ *es un polinomio, no constante (por 1).*

3. Es consecuencia de 1 y 2.

Bloque 4

Teoría de residuos

Definición 4.1. *Sea z_0 una singularidad aislada de una función $f(z)$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ su desarrollo de Laurent centrada en en z_0 entonces decimos que a_{-1} es el residuo de $f(z)$ en z_0 y se denota por* $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

Observación: Si z_0 es una singularidad evitable entonces $Res(f, z_0) = 0$. Si z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$, $\exists r > 0$ tal que $f(z)$ es analítica en $\{z \in \mathbb{C}/0z|z - z_0| < r\}$ y su desarrollo de Laurent presenta unos coeficientes que vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad C = C(Z_0, r)$$

En particular $n = -1 \longrightarrow a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w)dw$ y entonces vemos como

$$\int_C f(w)dw = 2\pi i Res(f, z_0)$$

Proposición 4.1. *Si $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 entonces* $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z)$ *con $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$.*

En particular si z_0 es polo simple $Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$

Demostración. *Sea z_0 un polo de orden $m \geq 1$ de $f(z)$ entonces* $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Notemos que z_0 es una singularidad evitable de $g(z)$ entonces podemos escribir $g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{z - z_0} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \cdots$$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = b_{m-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z)$$

Y para $m = 1$ tenemos que $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$. $\square$

Proposición 4.2. *Si $f(z)$ es analítica en z_0, no idénticamente constante y tiene un = de orden m en el punto z_0 entonces $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en z_0 y $\mathrm{Res}(g, z_0) = m$.*

Demostración. *Dado que z_0 es cero de orden m de $f(z)$ entonces $f(z) = (z-z_0)^m f_1(z)$ con $f_1(z_0) \neq 0$ analítica. Y entonces $f'(z) = m(z-z_0)^{m-1}f_1(z) + (z-z_0)^m f_1'(z)$.*

$$g(z) = \frac{m(z-z_0)^{m-1}f_1(z) + (z-z_0)^m f_1'(z)}{(z-z_0)^m f_1(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

Y al ser $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ analítica, z_0 es un polo simple de g y $\mathrm{Res}(g, z_0) = m$. □

4.1. Teorema de los residuos

Teorema 4.1 (Teorema de los residuos)**.** *Sea $f(z)$ analítica en un abierto U excepto, a lo sumo, en $w_1, \dots, w_n$ que son singularidades aisladas. Entonces para todo γ camino cerrado tal que $n(\gamma, z_0) \neq 0$ $\forall z \notin U$ y con $w_j \notin \gamma^*, j = 1, \dots, n$ se tiene que:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j\geq 1} n(\gamma, w_j)\mathrm{Res}(f, w_j)$$

Demostración (por hacer)**.**

Lema 4.1 (Lema de Jordan)**.** *Sea f analítica en el semicírculo $\Gamma_R = \{z/Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ y sea $M(R) = \max\{|f(z)|/z \in \Gamma_R\}$. Si $a > 0 \Rightarrow$*

$$\left|\int_\Gamma f(z)e^{iaz}dz\right| \leq \frac{\pi M(R)}{a}(1 - e^{-aR})$$

Demostración.

$$\left|\int_\Gamma f(z)e^{iaz}dz\right| = \left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{iaRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta\right| \int_0^\pi \underset{*}{\leq} \int_0^\pi \underbrace{|f(Re^{i\theta})|}_{\leq M(R)} e^{-aR\sin\theta}Rd\theta$$

$$\leq RM(R)\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}d\theta = 2RM(R)\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta$$

$$\underset{**}{\leq} 2RM(R)\int_0^{\pi/2} e^{-aR\frac{2}{\pi}\theta}d\theta = \frac{\pi M(R)}{a}(1 - e^{-aR})$$

$$* \left|e^{iaRe^{i\theta}}\right| = \left|e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| = e^{-aR\sin\theta}\left|e^{iaR\cos\theta}\right| = e^{-aR\sin\theta}$$

$**$ *Si llamamos $g(\theta) = \sin\theta - \frac{2}{\pi}\theta$ con $\theta \in [0, \pi/2]$*

Vemos como $g(0) = g(\pi/2) = 0$, $g'(\theta) = \cos\theta - \frac{2}{\pi}$, $g''(\theta) = -\sin\theta \leq 0$.

Entonces $g(\theta) \geq 0$ $\forall\theta \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$. □

Proposición 4.3. *Sea $f(z)$ una función analítica en $\{z/|z| > r, \Im(z) \geq 0\} \forall r > 0$ y consideremos el arco semicircular de centro 0 y radio R positivamente orientado dado por $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C}/z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. [falta completar]*

4.2. Consecuencias del Teorema de los Residuos

Proposición 4.4 (Principio del argumento). *Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto U y no idénticamente nula en ninguna componente conexa de U, si γ es el camino cerrado en $U \backslash Z(f)$ tal que $n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \notin U \Rightarrow$*

$$n(f \circ \gamma, 0) = \sum_{w \in Z(f)} m(f, w) n(\gamma, w)$$

Con $m(f, w)$ el orden del cero de w.

Demostración.

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

La función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ analítica en U excepto en $Z(f)$. Así por el teorema de los residuos, obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{w \in Z(f)} n(\gamma, w) \text{Res}(\frac{f'(z)}{f(z)}, w) = 2\pi i \sum_{w \in Z(f)} n(\gamma, w) m(f, w)$$

Por otra parte sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, por definición de índice

$$\begin{aligned} n(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \square \end{aligned}$$

>

Teorema 4.2 (Teorema de Rouché). *Sean $f(Z)$ $yg(z)$ dos funciones analíticas en un abierto U y no idénticamente nulas en ninguna componente conexa de$U$, consideramos γ un camino cerrado en U tal que $n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \notin U$.*

$$\begin{aligned} &Si \ |f(z) - g(z)| < |f(z)| \ \forall z \in \gamma^* \Rightarrow \\ &\sum_{w \in Z(f)} m(f, w) n(\gamma, w) = \sum_{w \in Z(g)} m(g, w) n(\gamma, w) \end{aligned}$$

Demostración. *Por la desigualdad supuesta observamos en primer lugar que γ no pasa por ningún cero de Ff. Así podemos definir $h(z) = 1 + \frac{g(z)-f(z)}{f(z)}$ en un cierto entorno de γ^*.*

Además si $z \in \gamma^*$ entonces $|h(z) - 1| = \frac{|g(z)-f(z)|}{|f(z)|} < 1 \; \forall z \in \gamma^*$.

Es decir, la curva $h \circ \gamma$está incluida en $D(1, 1)$ y, por tanto, no le da vueltas al origen, $n(h \circ \gamma, 0) = 0$.

Por otra parte $h(z)f(z) = g(z)$ por lo tanto

$$n(g \circ \gamma, 0) = n((h \cdot f) \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(h(z)f(z))'}{h(z)f(z)} dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)dz} \right) = \cancelto{0}{n(h \circ \gamma, 0)} + n(f \circ \gamma, 0) = n(f \circ \gamma, 0)$$

Entonces por el principio del argumento podemos concluir que

$$\sum_{w \in Z(f)} m(f, w) n(\gamma, w) = \sum_{w \in Z(g)} m(g, w) n(\gamma, w).$$

□

Teorema 4.3 (Teorema de Hurwitz)**.** *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones analíticas es un abierto U que converge uniformemente sobre los compactos de U a una función $f(z)$.*

Consideremos $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ y asumimos que $f(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z - z_0| = r$, entonces

$$\exists N \in \mathbb{N} / f_n(z) \text{ tiene el mísmo número de ceros que } f(z) \text{ en } D(z_0, r) \; \forall n \geq N$$

Demostración. *Observemos que f es analítica en U.*

Consideremos $\varepsilon = \min\{|f(z)| \,/\, |z - z_0| = r\} > 0$.

Por la convergencia uniforme, $\exists N \in N$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|\,, \; \forall z \in C(z_0, r)$.

Por el teorema de Rouché, tomando $g(z) = f_n(z)$ vemos como f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(z_0, r)$. □

Proposición 4.5. *Sea $f(z)$ una función analítica no constante en cada componente conexa de un abierto U y con un cero de orden m en z_0 entonces*

1. *$\exists \varepsilon > 0$ tal que $\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subset U$ tal que $f(z)$ y $f'(z)$ no se anulan en $D(z_0, \varepsilon) \backslash \{z_0\}$.*
2. *Si $p = \min\{|f(z)| \,/\, |z - z_0| = r\}$ con $\varepsilon > 0$ verificando el apartado anterior y con w tal que $0 < |w| < p$ entonces existen m puntos distintos en $D(z_0, \varepsilon)$ de imagen w.*

3. *Existe un abierto V con $z_0 \in V$ tal que si $z \in V \backslash \{z_0\} \subset U$ entonces $f(z) \neq 0$ y existe exactamente m puntos $w_k \in V \backslash \{z_0\}$ tal que $f(w_k) = f(z)$, $k = 1, 2, \ldots, m$.*

Demostración. ***1.*** *Por reducción al absurdo supongamos que no existe $\varepsilon > 0$ tal que se cumplan las condiciones.*

Entonces z_0 es punto de acumulación de ceros de $f(z)$ o $f'(z)$ y por el principio de identidad $f(z) = 0$ o $f^{\text{`}\prime}(z) = 0$ con lo que f es constante.$\sharp$

2. *Sea $p = \text{mín}\{|f(z)| \,/\, |z - z_0| = r\}$, $w \in \mathbb{C}/0 < |w| < p$ y sea $g(z) = f/z) - w$*

Entonces $|w| < p \leq |f(z)|\ \forall z \in \gamma = C(z_0, \varepsilon)$, $|w| = |f(z) - g(z)|$.

Por el teorema de Rouché, f y g tienen el mismo número de ceros en $D(z_0, \varepsilon)$ si $f(z) = w$ tiene exactamente m ceros.

Además todos estos ceros son distintos ya que en caso contrario $f' = 0$.

3. *Tomemos ε y p de los apartados anteriores. Entonces , sea $V = D(z_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(D(0, p)) \ni z_0$ y $V \subset D(z_0, \varepsilon)$.*

Por la elección de varepsilon, $f(z) \neq 0\ \forall z \in V \backslash \{z_0\}$.

Además, si $z \in V \backslash \{z_0\}$ entonces se tiene que $0 < |f(z)| < p$ y por el apartado 2. $w = f(z)$ y existen m puntos $w_0, \ldots, w_m$ en $D(z_0, \varepsilon)$ de imagen w con $0 < |w| < p$ y entonces, por definición de V, los puntos w_k están en V para $k = 1, 2, \ldots, m$. □

Teorema 4.4 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto U y no idénticamente constante en ninguna componente conexa de V. Si V es un abierto de U entonces $f(V)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.*

Demostración. *Sea V un abierto de U y $z_0 \in V$ veamos que $f(z_0)$ es interior a $f(V)$.*

Consideremos $g(z) = f(z) - z_0$ analítica en U y no idénticamente constante en ninguna componente conexa y con $g(z_0) = 0$, y sea $m \geq 1$ el orden del cero de gg.

Tomemos $\varepsilon > 0$ y por la proposición anterior, con $D(z_0, \varepsilon) \subset V$.

Entonces $\forall w \in D(0, p) \backslash \{z_0\} \exists m$ puntos $w_1, w_2 \ldots, w_m$ en $D(0, p)$ tal que $g(w_k) = w$.

Por tanto $D(0, p) \subset g(V)$ o equivalentemente $D(f(z_0), p) \subset f(V)$ con lo que $f(z_0)$ es interior a $f(V)$ y $f(V)$ es abierto. □

Proposición 4.6. *Sea $f(z)$ una función analítica en z_0*

- *Si $f\text{`}(z_0) \neq 0$ entonces existe un entorno donde $f(z)$ es inyectiva.*

- *Si $f'(z_0) = 0$ entonces $f(z)$ no es inyectiva en ningún entorno de z_0.*

Demostración. *1. Supongamos $f'(z_0) \neq 0$ y consideremos $g(z) = f(z) - f(z_0)$ analítica en z_0 con $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$.*

Así por el apartado 3 de la proposición anterior existe un abierto $V \ni z :_0$ tal que $\forall z \in V \backslash \{z_0\}$ existe un únicow $\in V \backslash \{z_0\}$ de imagen $g(z)$ entonces f es inyectiva en V.

2. Supongamos que $f'(z_0) = 0$ entonces $g(z) = f(z) - f(z_0)$ analítica en z_0 y $g(z_0) = g'(z_0) = 0$.Es decir z_0 es un cero de orden mayor que 2. Y por el apartado anterior g no es inyectiva y por lo tanto f tampoco. □

Teorema 4.5. *Sea $f(z)$ una función analítica e inyectiva en un abierto U entonces $f^{-1}(z)$ es analítica en el abierto $f(U)$.*

Demostración. *Por el teorema de la función abierta, $f(U)$ es un conjunto abierto si U es abierto, por tanto $f^{-1} : f(U) \longleftrightarrow U$ está bien definida en un conjunto abierto.*

Veamos que f^{-1} es analítica en $f(U)$. Veamos que f^{-1} es derivable en todo punto de $f(U)$.

Sea $w_0 \in f(U)$:

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = lim_{z \to z_0)} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} * = \frac{1}{f'(z_0)}$$

$$\left[\begin{array}{ll} f(z) = w & \Rightarrow f^{-1}(w) = z \\ f(z_0) = w_0 & \Rightarrow f^{-1}(w_0) = z_0 \\ f^{-1}(z) & = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \end{array} \right]$$

Bloque 5

Funciones enteras

Definición 5.1 (Convergencia de productos infinitos)**.** *Sea* $z_1, z_2, \dots z_n$ *una sucesión de números complejos no nulos. Consideremos* $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$. *Si existe*

$displaystyle lim_{n\to\infty} p_n = p$ *con* $p \neq 0$ *diremos que el producto infinito* $\prod_{n\geq 1} z_n$ *converge a* p. *En caso contrario diremos que el producto no converge.*

Si un producto infinito tiene una cantidad finita de términos iguales a 0 *y el resto verifica la definición anterior, también diremos que* $\prod_{n\geq 1} z_n$ *converge. De hecho , si existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $\prod_{n\geq m+1} z_n$ *verifica la definición inicial, se dice que el producto* $\prod_{n\geq 1} z_n$ *es convergente a* $p = z_1 z_2 \cdots z_m \prod_{n\geq m+1} z_n$.

Definición 5.2. *LLamaremos factores canónicos o elementales a las funciones*

$$E_0(z) = 1 - z$$

y

$$E_m(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m}\right), \ m \in \mathbb{N}$$

Propiedades

- $E_m(z)$ es una función entera para cada $m = 0, 1, 2, \dots$
- $E_m(z)$ tiene un único cero simple en $z = 1$ para cada $m = 0, 1, 2, \dots$
- si $|z|$ entonces $\lim\limits_{m\to\infty} E_m(z) = (1-z)exp(-log(1-z)) = 1$.
- Para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que

$$|1 - E_m(z)| \leq |z|^{m_1} \text{ para } z \text{ tal que } |z| \leq 1.$$

Teorema 5.1. *Sea* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de números complejos no nulos tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. *Si* $m_n \geq 1$, *el producto* $f(z) = \prod_{n\geq 1} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ *es una función entera cuyos ceros vienen dados por* $a_1, a_2, \dots$.

Definición 5.3. *Sea* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de números complejos no nulos tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$*. El coeficiente*

$$\mu = \text{ínf}\{k > 0 / \sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^k} < \infty\}$$

se conoce como exponente de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

Teorema 5.2. *Sea* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de números complejos no nulos tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ *y su exponente de convergencia sea* $\mu < \infty$*. Si* h *es un entero no negativo tal que* $h > \mu - 1$*, entonces el producto infinito* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_h\left(\frac{z}{a_n}\right)$ *define una función entera cuyos ceros vienen dados por* $a_1, a_2, \ldots$.

Cuando μ *es entero y* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} < \infty$ *podemos tomar* $h = \mu - 1$.

Teorema 5.3 (Factorización de Weierstrass)**.** *Sea* $f(z)$ *una función entera no idénticamente nula con un cero en* $z = 0$ *de orden* $m \in N \cup \{0\}$*(tomamos m=0 si* $f(0) \neq 0$*) y otros ceros* $a_1, a_2, \ldots$ *repetidos según su multiplicidad. Entonces*

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n\geq 1} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

para una cierta función entera $g(z)$ *y enteros* $m_n \geq n - 1$.

En general, si el exponente de convergencia es finito podemos tomar $m_n = h > \mu - 1$.

Definición 5.4. *Diremos que una función* $f(z)$ *es meromorfa en un abierto* U *cuando* $F(z)$ *es analítica en* U *excepto posiblemente en singularidades aisladas que son polos.*

Colorario 5.1. *Una función* $f(z)$ *es meromorfa en* $\mathbb{C}$ *si, y silo si,* $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ *con* $g(z)$ *y* $h(z)$ *funciones enteras y siendo* $h(z)$ *no idénticamente nula.*

Demostración. *Si* $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ *con* $g(z)$ *y* $h(z)$ *funciones enteras y siendo* $h(z)$ *no idénticamente nula, entonces* $f(z)$ *es meromorfa donde los polos de* $f(z)$ *son los ceros de la función* $h(z)$.

Recíprocamente, si $f(z)$ *es meromorfa, denotemos por* $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *a sus polos. Utilizando el teorema de factorización de Weierstrass, construimos una función entera* $h(Z)$ *cuyos ceros sean justamente los polos* b_n*,. En tal caso, la función* $g(z) := f(z)h(z)$ *presenta singularidades evitables en los puntos* b_n *y al eliminarlas se consigue una función entera. Luego* $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$. □

Definición 5.5. *dada* $f(z)$ *una función entera, denotaremos orden (u orden de crecimiento) de* $f(z)$ *al valor* $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$ *donde*

$$\lambda_1 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r}$$

y

$$\lambda_2 = \text{ínf}\{a \geq 0/\ \exists r > 0 \text{ tal que } |f(z)| \leq e^{|z|^a}\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash B(0,r)\}$$

Demostración. *Veamos que efectivamente $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Primero demostremos que $\lambda_1 \geq \lambda_2$: Si $\lambda_1 = \infty$ es trivial por lo que supondremos $\lambda_1 < \infty$.

Por definición de λ_1, dado $\varepsilon > 0$ $\exists r_0 > 0$ / $\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} \leq \lambda_1 + \varepsilon$ $\forall r \geq r_0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln\ln M_f(r) \leq (\lambda_1+\varepsilon)\ln r \Rightarrow \ln\ln M_f(r) \leq \ln r^{(\lambda_1+\varepsilon)} \\
&\Rightarrow \ln M_f(r) \leq r^{(\lambda_1+\varepsilon)} \Rightarrow M_f(r) \leq e^{r^{\lambda_1+\varepsilon}} \\
&si\ \ |z| = r \Rightarrow |f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda_1+\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Y como podemos escoger ε de forma arbitraria, $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Primero demostremos que $\lambda_2 \geq \lambda_1$: Si $\lambda_2 = \infty$ es trivial por lo que supondremos $\lambda_2 < \infty$.

Por la definición de λ_2 dado $\varepsilon > 0$, $\exists r > 0$ suficientemente grande tal que $|f(z)| \geq e^{|z|^{\lambda_2+\varepsilon}}$ $\forall z \in \mathbb{C}\backslash D(0,r)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln|f(z)| \leq |z|^{\lambda_2+\varepsilon} \Rightarrow \ln\ln|f(z)| \leq (\lambda_2+\varepsilon)\ln|z| \\
&si\ \ |z| = r \Rightarrow \ln\ln M_f(r) \leq (\lambda_2+\varepsilon)\ln r \Rightarrow \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} \leq \lambda_2+\varepsilon
\end{aligned}$$

Y como podemos escoger ε de forma arbitraria, $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

Con lo que concluimos que $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Nota

Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una función entera no constante, entonces el orden de $f(z)$ viene también dado por

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{-\ln|a_n|^{1/n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}$$

Ejemplos

- El orden de un polinomio es 0.
- El orden de $e^{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}$ con $a_n \neq 0$ es n.
- El orden de e^{e^z} es ∞.
- El orden de $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ es 1.

Proposición 5.1. *Sea $f(z)$ una función entera no constante de orden finito λ. Sean $a_1, a_2, \ldots$ los ceros de $f(z)$ repetidos según su multiplicidad. Entonces $\mu \leq \lambda$, donde μ es el exponente de convergencia asociado a esta sucesión.*

Teorema 5.4 (Factorización de Hadamard)**.** *Sea $f(z)$ una función entera de orden finito λ con un cero en $z = 0$ de orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y otros ceros $a_1, a_2, \ldots$ repetidos según su multiplicidad. Entonces*

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n \geq 1} E_{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que λ y

$$h = \begin{cases} \mu - 1 & \text{si } \mu \in \mathbb{Z}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} < \infty \\ \mu & \text{si } \mu \in \mathbb{Z}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} = \infty \\ [\mu] & \text{si } \mu \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Siendo μ el exponente de convergencia asociado a $\{a_n\}$.