

Análisis de variable compleja

Óscar Riquelme Moya

Departamento de física aplicada
Universidad de Alicante

18 de septiembre de 2022

Índice general

1. El cuerpo de los números complejos.	5
1.1. Los números complejos	5
1.2. Analiticidad	6
1.3. Algunas funciones elementales	7
1.3.1. Función exponencial	7
1.3.2. Función Logarítmica	8
1.3.3. Funciones potencia	8
1.3.4. Funciones trigonométricas e hiperbólicas	9
2. Integración en \mathbb{C}	11
2.1. Preliminares topológicos	11
2.2. Integración sobre caminos	11
2.3. Teoremas de Cauchy para determinadas regiones	15
2.4. Formula integral de Cauchy para círculos	18
2.5. Aplicaciones de Teoría de Cauchy	22
2.6. Principio del módulo máximo	24
3. Series de potencias	27
3.1. Convergencia de Series	27
3.1.1. Criterios de convergencia para series	27
3.2. Series de potencias	28
3.3. Teorema de Taylor y de la convergencia analítica	30
3.4. Principio de prolongación analítica	32
3.5. Series de Laurent	33

4. Teoría de residuos	39
4.1. Teorema de los residuos	40
4.2. Consecuencias del Teorema de los Residuos	41
5. Funciones enteras	45

Bloque 1

El cuerpo de los números complejos.

1.1. Los números complejos

Definición 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Definimos la parte real de z como $\Re(z) = \text{Re}(z) = a$ y la parte imaginaria de z como $\Im(z) = \text{Im}(z) = b$

$\alpha = \arctan(\frac{b}{a}) \longrightarrow$ Argumento principal: $(-\pi, \pi)$

Forma trigonométrica: $z = a + bi = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

Forma exponencial: $z = a + bi = |z|e^{i\alpha}$

$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0, b > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } a = 0, b < 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) & \text{si } a > 0, b > 0 \\ -\arctan(\frac{-b}{a}) & \text{si } a > 0, b < 0 \\ -\arctan(\frac{b}{-a}) + \pi & \text{si } a < 0, b > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{si } a < 0, b < 0 \\ 0 & \text{si } a > 0, b = 0 \\ \pi & \text{si } a < 0, b = 0 \end{cases}$$

Formula de Moivre: $z^n = (re^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha} = r^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$

1.2. Analiticidad

$$\text{Sea } \begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

Definición 1.2 (Límite). Definimos el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 como:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta / \text{ si } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Definición 1.3 (Continuidad). f es continua en $z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta / \text{ si } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Definición 1.4 (Derivabilidad). f es derivable en $z_0 \Leftrightarrow$

$$\exists f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Definición 1.5 (Analiticidad). Sea $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, diremos que f es analítica en U cuando exista un entorno de U donde f es derivable en todo punto.

Definición 1.6. Se dice que una función f es entera si es analítica en todo \mathbb{C} .

Teorema 1.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemman). Sea $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en el abierto U , entonces se satisface: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \forall (x_0, y_0) \in U$

Demostración. Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in U \Rightarrow \exists f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$

Tomamos $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h + y_0 i) - f(x_0 + y_0 i)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)) + (v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0))i}{h} &= \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)i & \end{aligned}$$

Sea $k \in \mathbb{R}$, tomamos $h = ik$:

$$\begin{aligned} \lim_{h=ik \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + (y_0 + y)i) - f(x_0 + y_0 i)}{ik} &= \\ \lim_{h=ik \rightarrow 0} \frac{(u(x_0, (y_0 + y)) - u(x_0, y_0)) + (v(x_0, (y_0 + y)) - v(x_0, y_0))i}{ik} &= \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)i + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)i & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)i &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)i \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 1.2. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ definida en U abierto tal que existen las parciales primeras de u y v en un entorno de $(x_0, y_0) \in U$ y son continuas, entonces si se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0) entonces f es derivable en $z_0 = x_0 + y_0i$.

Proposición 1.1 (Cauchy-Riemann en coordenadas polares).

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0), \quad \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = -\frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \theta_0) \\ \Rightarrow f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)i = \left(\frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \theta_0) + i \frac{\partial v}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \right) (\cos \theta - i \sin \theta)\end{aligned}$$

1.3. Algunas funciones elementales

1.3.1. Función exponencial

Sea $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $z = x + iy \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\begin{aligned}e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3!}i + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \dots\right) = \cos y + i \sin y \\ e^x + e^{iy} &= e^{x+iy} \Rightarrow e^z = e^x (\cos y + i \sin y)\end{aligned}$$

Propiedades

1. $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$
2. $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
3. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
4. $(e^z)^n = e^{zn}$
5. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
6. $e^z = 1 \Leftrightarrow e^x e^{iy} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 2\pi k \Leftrightarrow z = 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$
7. $\nexists \lim_{z \rightarrow 0} e^z$

1.3.2. Función Logarítmica

$$e^w = z \Leftrightarrow \log z = w \text{ con } z \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Si } z = 1 \Rightarrow e^w = 1 \Leftrightarrow w = 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}.$$

Definición 1.7 (Logaritmo principal). Sea $z \neq 0$, entonces el logaritmo principal de z , denotado por Log , viene definido por $\text{Log} z = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z)$ donde $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Denotamos por $\log(z)$ al conjunto de elementos $w \in \mathbb{C}$ de forma que $e^w = z$.

Definición 1.8. Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ Definimos $\log_{\theta_0} z = \ln|z| + i\theta$ con $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$.

Podemos ver como $\text{Log} z = \log_{-\pi} z$.

Propiedades

1. $\log(1) = \{2\pi ki, k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\log(-1) = \{(2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$
3. $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ pero no siempre se cumple que $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$.
4. $\text{Log} z$ es una función continua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
5. $\text{Log} z$ es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\frac{d}{dz} \text{Log} z = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

6. $e^{\log_{\theta_0} z} = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
7. $\log_{\theta_0} e^z = z \quad \forall z \in \{x + iy/\theta_0 \leq y \leq \theta_0 + 2\pi\}$

1.3.3. Funciones potencia

Definición 1.9. Sea $z \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tomaremos por definición z^α , llamada potencia de exponente arbitrario α , como el conjunto de todos los valores dados por:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

Nota: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$.

Definición 1.10. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tomaremos por definición a^z , llamada la función exponencial general, como el conjunto de todos los valores dados por:

$$a^z = e^{z \log a}$$

Nota: Para obtener ramas uniformes de la función exponencial basta con fijar uno de los valores del logaritmo. Cuando se toma $\text{Log} z$ se llama rama principal.

1.3.4. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

$$\begin{array}{rcl}
 e^{it} = \cos t + i \sin t & & \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\
 & \implies & \\
 e^{-it} = \cos t - i \sin t & & \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{i(e^{it} - e^{-it})} \\
 \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\
 \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{e^{it} - e^{-it}}
 \end{aligned}$$

1. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$
2. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
3. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
4. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
5. $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = \pi ki, k \in \mathbb{Z}$
6. $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}(2k + 1), k \in \mathbb{Z}$
7. $\sinh z = -\sin(iz)$
8. $\cosh z = \cos(iz)$
- Tomando $z = x + iy$:
9. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
10. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
11. $|\cos z| \geq |\cos x|$
12. $|\sin z| \geq |\sin x|$

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \\
\sin z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} & \sinh z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \\
\cos z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} & \cosh z &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!}
\end{aligned}$$

Definición 1.11. Se dice que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica en un dominio D si tiene derivadas parciales segundas continuas en todo punto de D y satisface la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en todo punto de D .

Definición 1.12. Se dice que $v(x, y)$ es una conjugada armónica de $u(x, y)$ en $D \subset \mathbb{R}^2$ si ambas son armónicas y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D , es decir, existe una función compleja $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en D .

Proposición 1.2. Sea $u(x, y)$ una función armónica en D y consideremos U una región rectangular contenida en D entonces existe una conjugada armónica de $u(x, y)$ en U .

Demostración. Sea $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ donde $P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$ y $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$. Como $u(x, y)$ es armónica entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ que es una ecuación diferencial exacta y existe $v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$dv = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x}$$

con lo que $v(x, y)$ es conjugada armónica de $u(x, y)$. \square

Bloque 2

Integración en \mathbb{C}

2.1. Preliminares topológicos

Definición 2.1 (Entorno perforado). Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ llamamos entorno perforado al conjunto abierto definido por $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ para algún $\varepsilon > 0$.

Definición 2.2 (Conjunto conexo). Llamamos conjunto conexo al conjunto abierto (cerrado) del plano que no puede ser escrito como unión disjunta de dos conjuntos no vacíos abiertos (cerrados).

Definición 2.3 (Conjunto poligonalmente conexo). Decimos que P es un conjunto poligonalmente conexo si cada par de puntos de P pueden ser unidos mediante un polígono contenido en P .

Definición 2.4 (Conjunto estrellado). Decimos que E es un conjunto estrellado si $\exists a \in E / [a, z] \subset E \ \forall z \in E$.

Definición 2.5 (Conjunto convexo). Decimos que C es un conjunto convexo si $[z, w] \subset C \ \forall z, w \in C$.

Definición 2.6 (Conjunto simplemente conexo). Decimos que S es un conjunto simplemente conexo cuando cualquier camino cerrado en S puede deformarse de forma continua hasta convertirse en un punto sin salirse de S .

2.2. Integración sobre caminos

Definición 2.7. Llamamos curva a una aplicación continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ con $a < b$ tal que a un número real t le corresponde un número complejo.

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

La traza o trayectoria de la curva $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t), t \in [a, b]\}$ será representado por γ^* .

Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva es cerrada.

Definición 2.8. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva, si $\gamma(t) \neq \gamma(s) \forall t \neq s$ excepto, a lo sumo, en los extremos, la curva será llamada un arco simple o arco simple de Jordan.

Definición 2.9. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva, se dice que es diferenciable con continuidad, $\mathcal{C}^1([a, b])$, cuando γ es diferenciable y presenta derivada continua en $[a, b]$. Además, γ es diferenciable con continuidad a trozos cuando $[a, b]$ se puede descomponer en un número finito de subintervalos sobre los que γ es diferenciable con continuidad.

Definición 2.10. Llamaremos camino a una curva diferenciable con continuidad a trozos.

Definición 2.11. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f(z)$ una función continua en γ^* , definimos la integral compleja de $f(z)$ a lo largo de γ por:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Parametrizaciones comunes

Intervalo $[z_1, z_2]$: $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$ con $t \in [0, 1]$.

Circunferencia de centro z_0 y radio r $C(z_0, r)$: $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$

Proposición 2.1. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f(z), g(z)$ funciones continuas en γ^* entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. La integral sobre un camino es invariante de parametrizaciones.
2. $\int_{\gamma} (f(z) + g(z))dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma} g(z)dz$
3. $\int_{\gamma} cf(z)dz = c \int_{\gamma} f(z)dz, c \in \mathbb{C}$
4. $\int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$ donde $-\gamma$ es el camino opuesto definido por $(-\gamma)(t) = \gamma(b + a - t) \forall t \in [a, b]$
5. Si β es otro camino tal que $\gamma + \beta$ está definido y $f(z)$ es también continua en $(\gamma + \beta)^*$ entonces:

$$\int_{\gamma + \beta} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\beta} f(z)dz$$

Proposición 2.2. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f(z)$ una función continua en γ^* , entonces:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq M_f(\gamma)L(\gamma)$$

Con $M_f(\gamma) = \max\{|f(z)|, z \in \gamma^*\}$ y $L(\gamma)$ la longitud de γ .

Demostración.

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq M_f(\gamma) \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M_f(\gamma) L(\gamma)$$

Definición 2.12. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un abierto U , diremos que $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una primitiva de f en U cuando $F(z)$ es analítica en U y $F'(z) = f(z) \forall z \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.1 (Extensión del 2º teorema fundamental del cálculo). Supongamos que $f(z)$ es una función continua en un conjunto abierto U y que $F(z)$ es una primitiva de f en U . Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un camino en U entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z) \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$$

En particular, bajo las hipótesis anteriores si γ es un camino cerrado: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Demostración. Sea $G(t) = F(\gamma(t))$ con $t \in [a, b]$ entonces $G(t)$ es continua en $[a, b]$ y $G'(t) = F'(\gamma(t)) \gamma'(t)$ con lo que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b G'(t) dt = G(t) \Big|_a^b = F(\gamma(t)) \Big|_a^b$$

□

Colorario 2.1 (Funciones constantes). Supongamos que $f(z)$ es analítica en un abierto y conexo U y además $F'(z) = 0 \forall z \in U$ entonces $f(z)$ es constante en U .

Demostración. Sean z_1 y z_2 en U . Dado que U es conexo, existe un camino poligonal $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ que los une tal que $\gamma(a) = z_1$ y $\gamma(b) = z_2$. Por el teorema anterior tenemos que

$$0 = \int_{\gamma} f'(z) dz = f(z_2) - f(z_1) \Rightarrow f(z_2) = f(z_1) \Rightarrow f \text{ es constante} \quad \square$$

Teorema 2.2 (Independencia de caminos). Supongamos que $f(z)$ es una función continua en el conjunto abierto y conexo U . Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. $\int_{\gamma} f(z) dz$ es independiente de la trayectoria de γ .
2. $\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \forall \gamma$ cerrado.
3. $f(z)$ admite una primitiva en U .

Demostración. $\underline{1} \Leftrightarrow \underline{2}$

Sea γ_1 un camino en U que une z_1 y z_2 , sea γ_2 otro camino en U que une z_1 y z_2 .

Consideremos $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ un camino cerrado, entonces:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Si $\int_{\gamma} f(z)dz$ entonces la integral sobre γ_1 es igual a la integral sobre γ_2 con lo que es independiente del camino.

De la misma forma, si la integral es independiente del camino entonces $\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$.

$\underline{3} \Rightarrow \underline{1}$

Por el 2º Teorema fundamental del Cálculo.

$\underline{1} \Rightarrow \underline{3}$

Fijemos $z_0 \in \mathbb{C}$ y consideremos γ_z un camino en U que une z_0 con z , siendo $z \in U$.

Sea $F(z) = \int_{\gamma_z} f(s)ds$, por hipótesis $F(z)$ no depende del camino. Veamos que F es analítica y $F' = f \forall z \in U$.

Dado que U es abierto, podemos tomar $w \in U$ suficientemente próximo a z con $w \neq z$. Entonces si consideramos γ al camino que une z_0 consigo mismo pasando por γ_z , $[z, w]$ y $-\gamma_w$. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_z} f(z)dz + \int_{[z, w]} f(z)dz + \int_{-\gamma_w} f(z)dz = 0$$

Por tanto $F(w) - F(z) = \int_{\gamma_w} f(z)dz - \int_{\gamma_z} f(z)dz = \int_{[z, w]} f(z)dz$ y al ser $\int_{[z, w]} 1ds = z - w$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f(z)}{w - z} \int_{[z, w]} ds = \frac{1}{w - z} \int_{[z, w]} f(z)ds \Rightarrow \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \\ &= \frac{\int_{[z, w]} f(z)ds}{w - z} - \frac{1}{w - z} \int_{[z, w]} f(z)ds = \frac{\int_{[z, w]} (f(s) - f(z))ds}{w - z} \end{aligned}$$

El módulo tiende a 0 por ser f continua cuando $w \rightarrow z$, entonces

$$F'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z)$$

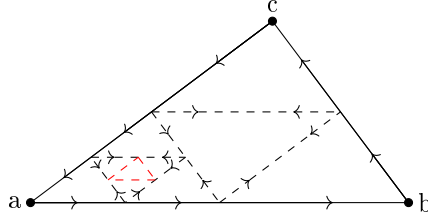
□

2.3. Teoremas de Cauchy para determinadas regiones

Teorema 2.3 (Teorema de Cauchy para triángulos). *Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto U . Para cualquier triángulo ($\Delta = \text{int}(\Delta \cup \text{Fr}(\Delta))$) contenido en U se tiene que:*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \text{ donde } \Gamma = \text{Fr}(\Delta)$$

Demostración. Sea Γ_0 el camino de la frontera del triángulo, podemos subdividir este en 4, teniendo 4 subtriángulos con fronteras $\Gamma_{0,1}, \dots, \Gamma_{0,4}$, y este proceso lo podemos repetir las veces que queramos. Podemos verlo gráficamente así:



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z)dz &= \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_{0,j}} f(z)dz \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma_1} f(z)dz \right| \leq \\ &4^2 \left| \int_{\Gamma_2} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Gamma_n} f(z)dz \right| \end{aligned}$$

$$\Gamma_k = \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \left| \int_{\Gamma_{k,j}} f(z)dz \right| \right\}$$

Sea $\bar{V}_n = V_n \cup \Gamma_n$ entonces tenemos que $\bar{V}_n \subset \bar{V}_{n-1} \subset \dots \subset \bar{V}_1$. Y por el teorema de Cantor debe existir un z_0 tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{z_0\}$$

f es analítica en U entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{ si } |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

$$\forall z \in U, g(z) := f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0), \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \\ |g(z)| \leq \varepsilon |z - z_0| \text{ si } |z - z_0| < \delta$$

Dado $\delta > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} / \bar{V}_n \subset D(z_0, \delta)$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_n} z dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2} + \frac{z_3^2 - z_2^2}{2} + \frac{z_1^2 - z_3^2}{2} = 0, \int_{\Gamma_n} C dz = 0, \forall C \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma_n} g(z) dz \right| \leq M_g(\Gamma_n) L(\Gamma_n)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma_n} f(z) dz \right| \leq M_{\varepsilon|z-z_0|}(\Gamma_n) L(\Gamma_n) \leq \varepsilon L(\Gamma_n)^2 \leq \varepsilon \left(\frac{1}{2^n} L(\Gamma) \right)^2$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \varepsilon \left(\frac{1}{2^n} L(\Gamma) \right)^2 = \varepsilon L(\Gamma)^2$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = 0 \text{ porque podemos hacer } \varepsilon \text{ tan pequeño como queramos. } \quad \square$$

Teorema 2.4 (Teorema de Cauchy para regiones estrelladas). *Sea $f(z)$ una función analítica en un conjunto estrellado y abierto U . Para cualquier γ camino cerrado en U se tiene que:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Demostración. *Al ser una región estrellada sabemos que $\exists z_0 \in U$ tal que $[z_0, z] \in U \forall z \in U$.*

Sea $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w) dw$ y veamos que $F'(z_1) = f(z_1) \forall z_1 \in U$.

Sea $z \in U$, $z \neq z_0$, $z_1 \neq z \Rightarrow$

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_0, z]} f(w) dw - \int_{[z_0, z_1]} f(w) dw}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_0, z]} f(w) dw + \int_{[z_1, z_0]} f(w) dw}{z - z_1}$$

Por el Teorema de Cauchy para triángulos, tomando $\Gamma = [z_0, z] \cup [z, z_1] \cup [z_1, z_0]$ vemos que $\int_{\Gamma} f(w) dw = 0$. Con lo que

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = \frac{\int_{[z_1, z]} f(w) dw}{z - z_1}$$

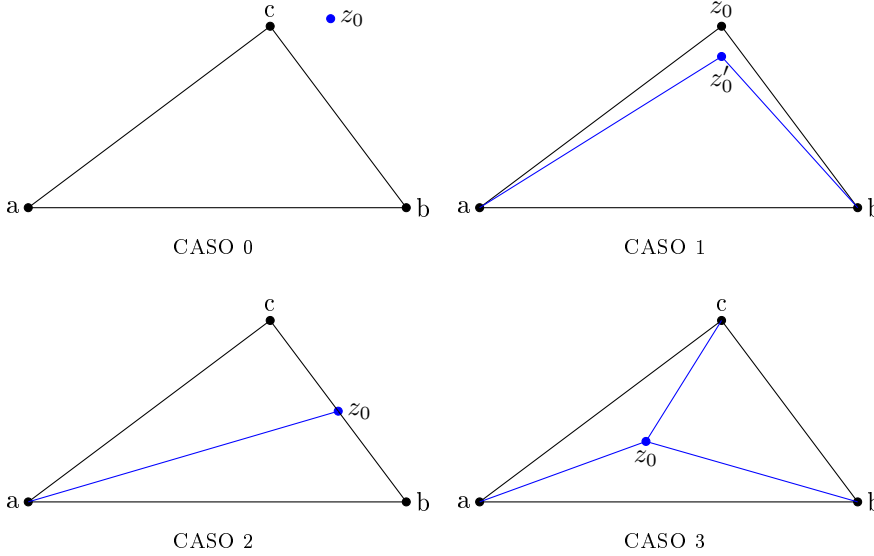
$$\left| \frac{\int_{[z_1, z]} f(w) dw}{z - z_1} - f(z_1) \right| \leq M_f(\gamma) \frac{|z - z_1|}{|z - z_1|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \\ \Rightarrow \left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \Rightarrow F'(z_1) = f(z_1)$$

Podemos concluir que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo γ camido cerrado. \square

Teorema 2.5 (Teorema de Cauchy extendido para triángulos). Sea $f(z)$ una función continua en un abierto U y analítica en $U \setminus \{z_0\}$ para algún $z_0 \in U$, para cualquier Δ contenido en U se tiene que:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \text{ donde } \Gamma = Fr(\Delta)$$

Demostración. Vamos a dividir la demostración en casos:



CASO 0: Si $z_0 \notin \Delta$ se aplica el Teorema de Cauchy para triángulos.

CASO 1: Si z_0 es un vértice de Δ llamamos Γ' a la frontera del triángulo Δ' con la misma base que Δ y con vértice z'_0 cercano a z_0 .

Tomando $U' = U \setminus \{z_0\}$ y aplicando el Teorema de Cauchy para triángulos se tiene que $\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0$. Ahora bien, $\int_{\Gamma'} f(z)dz \xrightarrow{z'_0 \rightarrow z_0} \int_{\Gamma} f(z)dz$ ya que f es uniformemente continua en el compacto formado por el triángulo así que $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

CASO 2: Si z_0 está en un lado del triángulo, podemos subdividirlo en dos de forma que z_0 sea vértice de ambos, pudiendo aplicar el caso 1.

CASO 3: Si z_0 está en el interior del triángulo, subdividimos el triángulo en 3, de tal forma que z_0 sea vértice de los tres y aplicamos el caso 1. \square

Teorema 2.6 (Teorema de Cauchy extendido para regiones estrelladas). Sea $f(z)$ una función continua en un conjunto estrellado y abierto U y analítica en $U \setminus \{z_0\}$ para algún $z_0 \in U$. Para cualquier γ camino cerrado en U se tiene que

$f(z)$ tiene primitiva y que:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Demostración. Análogo al teorema de Cauchy para regiones estrelladas pero usando el teorema de Cauchy extendido para triángulos.

Colorario 2.2 (Teorema de Cauchy para convexos). Sea U un conjunto abierto y convexo, $f(x)$ continua en U , analítica en $U \setminus \{z_0\}$ para algún $z_0 \in U$ entonces para todo γ camino cerrado:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

2.4. Formula integral de Cauchy para círculos

Teorema 2.7 (Formula integral de Cauchy para círculos). Sea $f(z)$ analítica en un abierto U que contiene a un disco $\bar{D}(z_0, r)$ para $r > 0$. Entonces para cualquier $z \in D(z_0, r)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Donde $C := C(z_0, r) = \{z/|z_0 - z| = r\}$.

Demostración. Sea $V = D(z_0, r)$ tal que $\bar{D}(z_0, r) \subset V \subset U$ y $z \in D(z_0, r)$. Sea $t > 0$ tal que $D := D(z, t) \subset D(z_0, r)$.

(dibujo)

$C_1 \subset V_1$ estrellado entonces tenemos que $g(w) = \frac{f(w)}{w - z}$, $w \in V_1$ es analítica, por lo que

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0 \text{ y análogamente se tiene que } \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_D \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &\Rightarrow \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_D \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \int_C \frac{dw}{w - z} dz + \int_C \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \\ &\int_C \frac{dw}{w - z} = \int_0^{2\pi} \frac{ite^{it}}{te^{it}} dt = 2\pi i \end{aligned}$$

$f(w)$ es continua en z con lo que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |w - z| < \delta \Rightarrow f(w) - f(z) < \varepsilon.$$

Tomemos $0 < t < \delta$

$$\left| \int_D \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \right| \leq 2\pi\varepsilon$$

Y como podemos hacer ε arbitrariamente pequeño concluimos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \square$$

Teorema 2.8 (Formula integral de Cauchy para círculos en derivadas). Sea $f(z)$ analítica en un abierto U que contiene a un disco $\overline{D}(z_0, r)$ para $r > 0$. Entonces para cualquier $z \in D(z_0, r)$ $\exists f^{(n)}(z)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y se tiene que:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Donde $C := C(z_0, r)$.

Demostración. Sea $z_0 \in D(z_0, r)$. Veamos que $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$. Sea $h \neq 0$ suficientemente pequeño entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad f(z + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - (z + h)} dw \\ \Rightarrow \frac{f(z + h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left(\frac{1}{w - (z + h)} - \frac{1}{w - z} - \frac{h}{(w - z)^2} \right) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C \frac{f(w)h^2}{(w - z - h)(w - z)^2} dw = \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)^2} dw \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Veamos ahora que $f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^3} dw$.

$$\begin{aligned} \frac{f'(z + h) - f'(z)}{h} &= \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^3} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left(\frac{1}{(w - z - h)^2} - \frac{1}{(w - z)^2} - \frac{2h}{(w - z)^3} \right) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(w) \left(\frac{3h^2(w - z) - 2h^2}{(w - z - h)^2(w - z)^3} \right) dw \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Por inducción probemos ahora que $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$:

$$\begin{aligned}
& \frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} - \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \\
& = \frac{k!}{2\pi i h} \int_C f(w) \left(\frac{1}{(w-z-h)^{k+1}} - \frac{1}{(w-z)^{k+1}} - \frac{(k+1)h}{(w-z)^{k+1}} \right) dw = \\
& = \frac{k!}{2\pi i h} \int_C f(w) \left(\frac{h^2(-\binom{k+2}{2}) + (k+1)\binom{k+1}{1}(w-z)^k + h^3(\binom{k+1}{2} - \dots)}{(w-z-h)^{k+1}(w-z)^{k+2}} \right) dw \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$. \square

Colorario 2.3 (F.I.C). Sea $z : 0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, $C := C(z_0, r)$ Entonces:

$$\int_C \frac{1}{w-z} dw = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } z \text{ es interior a } C \\ 0 & \text{si } z \text{ es exterior a } C \end{cases}$$

Demostración. Si z es exterior a C entonces $f(w) = \frac{1}{w-z}$ es analítica en $D(z_0, s)$ con $s > r$ de forma que $z \notin D(z_0, s)$. Entonces por el Teorema de Cauchy para convexos $\int_C \frac{1}{w-z} dw = 0$.

Si z es interior a C , $f(w) = 1$ y por F.I.C entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w-z} dw = f(z) = 1 \Rightarrow \int_C \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i$$

Colorario 2.4 (Analiticidad de las derivadas). Sea $f(z)$ una función analítica en un punto entonces sus derivadas de todos los ordenes son también funciones analíticas en ese punto. Además si $f(z)$ tiene primitiva en un abierto U entonces $f(z)$ es analítica en U .

Demostración. Si f es analítica en un punto z_0 entonces $\exists r > 0$ tal que f es derivable en todo punto de $D(z_0, r)$ y por F.I.C. para las derivadas f es infinitamente derivable sobre $D(z_0, r)$. Entonces todas las derivadas son analíticas en z_0 .

Si $f(z)$ tiene primitiva en U sabemos que $\exists F(z)$ analítica en U tal que $F'(z) = f(z) \forall z \in U$.

Por lo anterior, todas las derivadas de F eson analíticas en U , en concreto $f(x)$ lo es.

Colorario 2.5. Si una función $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ es analítica en un punto $z_0 = u_0 + i v_0$ entonces sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todo orden en ese punto. Las partes reales e imaginarias de una función analítica en un dominio D son funciones armónicas en D

Colorario 2.6. Sea $f(z)$ continua en un abierto U y analítica en $U \setminus \{z_0\}$ para $z_0 \in U$ entonces $f(z)$ es analítica en U .

Demostración. Sea $V = D(z_0, r)$, $r > 0$ tal que $V \subseteq U$. SI aplicamos el Teorema de Cauchy para convexos $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado en V . Entonces por el Teorema de independencia de caminos $\exists F(z)$ primitiva de f en V . Con lo que $f(z)$ es analítica en V y en consecuencia lo es también en U .

Definición 2.13 (Índice de un punto respecto a un camino cerrado).

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Teorema 2.9 (Primer teorema de Cauchy). Sea U abierto de \mathbb{C} y γ un camino cerrado, $\forall f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow n(\gamma, z) = 0 \quad \forall z \notin U$$

Teorema 2.10 (Segundo teorema de Cauchy). Sea U abierto de \mathbb{C} son equivalentes:

1. $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ es conexo.
2. $n(\gamma, z) = 0 \quad \forall \gamma$ camino cerrado en U y $\forall z \in \mathbb{C} \setminus U$.
3. $\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad \forall f$ analítica en U y $\forall \gamma$ camino cerrado en U .
4. Si f es analítica entonces tiene primitiva.

Teorema 2.11 (Fórmula integral de Cauchy general). Sea f analítica en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y γ un camino cerrado en U tal que $n(\gamma, z) = 0 \quad \forall z \notin U$ entonces para $z \in U$, $z \notin \gamma^*$ se cumple que:

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z - w} dw$$

$$f^{(n)}(z)n(\gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(z - w)^{n+1}} dw$$

Definición 2.14. Definimos los ciclos como sumas de la forma $\gamma = \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j$ con $a_j \in \mathbb{Z}$ y γ_j camino cerrado.

Teorema 2.12. Sea U abierto y γ_1 y γ_2 dos caminos cerrados (o ciclos) entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad \forall f \text{ analítica en } U \Leftrightarrow n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$$

2.5. Aplicaciones de Teoría de Cauchy

Lema 2.1. Sea $f(z)$ una función continua en U abierto convexo, supongamos que para todo triángulo $\triangle \subset U$ se tiene que si $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ entonces $f(z)$ tiene primitiva.

Demostración. Sea $z_0 \in U$, definimos $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w)dw \quad \forall z \in U$.

Tomemos $h \in \mathbb{C}$ tal que $|h| \ll |z_0 - z|$ entonces:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{\int_{[z_0, z+h]} f(w)dw - \int_{[z_0, z]} f(w)dw}{h} - f(z) \right| = \\ &= \left| \frac{\int_{[z_0, z+h]} f(w)dw}{h} + \int_{[z+h, z]} f(w)dw + \int_{[z, z_0]} f(w)dw - f(z) \right| = \\ &\Rightarrow \left| \frac{\int_{[z_0, z+h]} f(w)dw}{h} - \frac{\int_{[z, z+h]} f(w)dw}{h} \right| = \left| \frac{\int_{[z, z+h]} f(w)dw}{h} \right| \\ &\leq |f(w) - f(z)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow F'(z) = f(z) \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 2.13 (Teorema de Morera). Sea $f(z)$ una función continua en n abierto U , supongamos que $\forall \triangle \subset U$ tal que $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en U .

Demostración. Sea $z_0 \in U$ y $r > 0$ consideramos $D(z_0, r)$. Por el lema anterior f tiene primitiva en D así que f es analítica en D .

Como z_0 es arbitrario deducimos que f es analítica en todo U .

Teorema 2.14 (Principio de reflexión de Schwarz). Sea $f(z)$ una función analítica en el semiplano abierto $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} / \Im(z) > 0\}$ y continua en $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.

Supongamos que $\Im(f(z)) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$ entonces $f(z)$ puede ser extendida analíticamente a \mathbb{C} .

Demostración.

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \mathbb{C}^- \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{h}) - f(\bar{z})}}{h} = \overline{f'(w)}$$

El límite existe así que es analítica \square .

Lema 2.2 (Estimación de Cauchy). Sea $f(z)$ analítica en $U \supset D(z_0, R)$ y $M_f(r)$ con $0 < r < R$ entonces

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{r^n} M_f(r) \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

Demostración. Por F.I.C para las derivadas

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(z-w)^{n+1}} dw \Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(z-w)^{n+1}} dw \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \max \left\{ \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}}, w \in C(z_0, r) \right\} = \frac{n!}{r^n} M_f(z) \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 2.15 (Teorema de Liouville). Si $f(z)$ es una función entera y está acotada entonces es constante.

Demostración. Si $f(z)$ es acotada entonces $\exists M > 0 / |f(z)| < M \forall z \in \mathbb{C}$. Por la estimación de Cauchy para $n = 1$:

$$|f'(z)| \leq \frac{M_f(r)}{r} \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \forall r > 0$$

Entonces $f'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$ como \mathbb{C} es conexo entonces f es constante. \square

Teorema 2.16 (Teorema fundamental del álgebra). Todo polinomio $P(z)$ no constante tiene al menos una raíz, es decir, existe al menos un z_0 tal que $P(z_0) = 0$.

Demostración. Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, n > 1$ Por R.abs., si $P(z)$ no tuviera raíces entonces $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es entera. Veamos que f está acotada:

Sabemos que $|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \exists R > 0 / |P(z)| > 1$ si $|z| > R \Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < 1$ si $|z| \leq R$. En consecuencia $f(z)$ es acotada en \mathbb{C} y por el Teorema de Liouville $f(z) = cte.$ \sharp

Colorario 2.7 (Teorema fundamental del álgebra). Todo polinomio $P(z)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces.

Demostración. Por el Teorema anterior sabemos que existe z_0 tal que $P(z_0) = 0$. Entonces podemos escribir $P(z) = (z - z_0)P_1(z)$ donde P_1 es un polinomio de grado $n - 1$.

Si $n = 1$ hemos acabado.

Si $n > 1$ Aplicamos el proceso anterior a P_1 , $P_1(z) = (z - z_1)P_2(z)$

Reiterando obtendremos que $P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ \square

Teorema 2.17 (Teorema de Gauss-Lucas). Sea $P(z)$ un polinomio no constante con coeficientes complejos, los ceros de $P'(z)$ están en la clausura convexa de los ceros de $P(z)$.

Demostración. $P(z) = \alpha \prod_{j=1}^n (z - a_j)$, con n el grado de P y a_j sus raíces.

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) \neq 0$ entonces

$$\frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_0 - a_j}$$

Si $P'(z_0) = 0$ y $P(z_0) \neq 0$ entonces

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{z_0 - a_j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\bar{z}_0 - \bar{a}_j}{|z_0 - a_j|^2} = 0 \Rightarrow z_0 \sum_{j=1}^n \frac{1}{|z_0 - a_j|^2} = a_j \sum_{j=1}^n \frac{1}{|z_0 - a_j|^2}$$

Entonces podemos escribir z_0 como $\sum_{j=0}^n \alpha_j a_j$ con $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 1$, $\alpha_j > 0$. z_0 es baricentro de a_j y entonces z_0 está en la clausura convexa.

Si $P'(z_0) = 0$ y $P(z_0) = 0$ entonces $z_0 = 1 \cdot z_0 + 0 \cdot \sum a_j \Rightarrow z_0$ está en la clausura convexa. \square

2.6. Principio del módulo máximo

Lema 2.3 (Propiedad del valor medio de Gauss). Sea $f(z)$ analítica en $U \supset D(\bar{z}_0, r)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Demostración.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad \gamma'(t) = rie^{it}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

\square

Teorema 2.18 (Principio del módulo máximo local). Si $f(z)$ es analítica en un abierto U y supongamos que $|f(z)|$ tiene máximo en $z_0 \in U$. Entonces $f(z)$ es constante en un entorno de z_0 .

Demostración. Por hipótesis sabemos que $\exists D(z_0, r)$, $r > 0$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D(z_0, r)$ Entonces se cumple que

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max\{|f(z_0 + re^{it})| : t \in [0, 2\pi]\} \leq |f(z_0)|$$

$$\Rightarrow |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})| dt = 0$$

$$\Rightarrow |f(z_0)| = |f(z_0 + re^{it})| \quad \forall t \in [0, 2\pi] \Rightarrow |f(z_0)| = \text{cte. en un entorno de } z_0.$$

\square

Colorario 2.8. Sea $f(z_0)$ analítica en un abierto y conexo U , supongamos que $|f(z_0)|$ alcanza el máximo absoluto en U , entonces $f(z_0)$ tiene valor constante en U .

Demostración. Por hipótesis $\exists z_0 \in U / |f(z)| \leq |f(z_0)| \forall z \in U$.

Sea $E = \{z \in U / f(z) = f(z_0)\}$ al ser $f(z)$ continua en U claramente el conjunto E es cerrado respecto de U y $z_0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$.

Sea $z \in E \Rightarrow |f(z)| = |f(z_0)| = \max\{|f(z)|\}$ entonces por el resultdo anterior f es constante en un entorno de z . Con lo que $\exists r > 0$ tal que $D(z, r) \subset E \Rightarrow E$ es abierto y entonces $E = U$. \square

Teorema 2.19 (Principio del módulo máximo). Sea $f(z)$ analítica en un conjunto abierto, conexo y acotado U y continua en $Fr(U)$. Si $M = \max\{|f(z)| / z \in Fr(U)\}$, se cumple que:

1. $|f(z)| \leq M \forall z \in U$
2. Si $|f(z)| = M$ para $z_0 \in U$ entonces $f(z) = \text{cte.}$ en U .

Demostración. 1. Observamos que $|f(z)|$ es también continua en \bar{U} por lo que $|f(z)|$ alcanza un máximo en \bar{U} . Si tal máximo se alcanza en $Fr(U)$ hemos terminado. Si el máximo se alcanza en $Int(U)$ entonces $\exists z_0 \in U$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)| \forall z \in U$ entonces f es constante en U .

2. Si $\exists z_0 \in U$ tal que $|f(z_0)| = M$ entonces $f(z_0)$ es constante. \square

Teorema 2.20 (Principio del módulo mínimo). Sea $f(z)$ analítica en un conjunto abierto, conexo y acotado U y continua en $Fr(U)$. Supongamos $f(z) \neq 0 \forall z \in U$. Si $m = \min\{|f(z)| / z \in Fr(U)\}$, se cumple que:

1. $|f(z)| \geq m \forall z \in U$
2. Si $|f(z)| = m$ para $z_0 \in U$ entonces $f(z) = \text{cte.}$ en U .

Demostración. Sea $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ analítica en U y continua en \bar{U} . Vemos que g cumple las condiciones del módulo máximo con lo que el máximo de g se alcanza en la frontera y en consecuencia el mínimo de f también. \square

Colorario 2.9. Sea $f(z)$ analítica no constante en un abierto conexo y acotado U y continua en $Fr(U)$. Si $U(x, y) = \Re(f(z))$ y $v(x, y) = \Im(f(z))$ entonces u, v satisfacen el principio del módulo máximo (mínimo).

Demostración. Sea $g(z) = e^{f(z)}$ analítica en U y continua en la frontera. $|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{\Re(f(z))}| |e^{\Im(f(z))i}| = |e^u| |e^{iv}| = e^u$ como g satisface el principio del módulo máximo (mínimo) u también los cumple.

Sea $h(z) = e^{-if(z)}$ entonces $|h(z)| = e^v$ y como h satisface el principio del módulo máximo (mínimo) v también los cumple. \square

Lema 2.4 (Lema de Schwarz). Sea $f(z)$ una función analítica en $D(0, 1)$. Supongamos que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1 \forall z \in D(0, 1)$ entonces $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$.

Además si $\exists z_0 \in D(0, 1) \setminus \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ o que $|f'(z_0)| = 1$ entonces $f(z) = az \forall z \in D(0, 1)$, $a \in \mathbb{C} / |a| = 1$.

Demostración.

$$\text{Sea } g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Si $z \neq 0$ g es analítica.

Si $z = 0$ entonces g es derivable porque

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(h)}{h} - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - hf'(0)}{h^2}$$

El límite existe por analiticidad de f .

De hecho es claro que g es continua en $z = 0$ y por tanto g es analítica en $D(0, 1)$.

Por el P.M. Máximo $|g(z)| \leq M = \max\{|g(z)|/z \in FR(U)\}$, $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{z} \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq z \forall z \in D(0, 1)$.

La segunda parte de la afirmación se cumple por el apartado del P.M.-mínimo.

Definición 2.15. Llamaremos núcleo de Poisson a la función

$$P_r(x) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(x)} \text{ siendo } 0 \leq r < R \text{ y } x \in \mathbb{R}$$

Definición 2.16. Llamaremos núcleo de Cauchy a la función

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \text{ siendo } z \in D(0, R), t \in \mathbb{R}$$

Resultado: $\Re(Q_z(t)) = P_r(\theta - t)$ con $z = re^{it} \in D(0, R)$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Teorema 2.21 (Fórmula integral de Poisson). Sea $f(z)$ analítica en $D(z_0, R)$ y continua en $\overline{D}(z_0, R)$, para $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $z = z_0 + e^{it} \in D(z_0, R)$, $0 \leq r < R$ se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r/\theta - t) f(z_0 + Re^{it}) dt$$

Si $u = \Re(f)$ entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r/\theta - t) u(z_0 + Re^{it}) dt$$

Bloque 3

Series de potencias

3.1. Convergencia de Series

Definición 3.1. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n \geq 1}$ es convergente a $z \in \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / |z_n - z| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

Definición 3.2. Dada una serie de números complejos $\sum_{n \geq 1} z_n$ diremos que:

- a) Converge a z si $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / |\sum_{n=1}^m z_n - z| < \varepsilon$ cuando $m > n_0$.
- b) Converge absolutamente si $\sum_{n \geq 1} |z_n| < \infty$.

Observación:

1. $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge si la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{k=1}^n z_k\}_{n \geq 1}$ converge, es decir, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$.
2. Por la completitud de \mathbb{C} equivale a que $\{\sum_{k=1}^n z_k\}_{n \geq 1}$ es de Cauchy.
3. Si $z_n = x_n + iy_n$ entonces $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge si $\sum_{n \geq 1} x_n < \infty$ y $\sum_{n \geq 1} y_n < \infty$.
4. Una condición necesaria para la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} z_n$ es que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.
5. Convergencia absoluta implica convergencia.

3.1.1. Criterios de convergencia para series

1. Algunos criterios en \mathbb{R} : comparación, cociente y raíz funcionan para \mathbb{C} .
2. Dada la serie $\sum_{n \geq 1} P_n$, $P_n \geq 0$, si consideramos $A = \limsup (P_n)^{\frac{1}{n}}$ y $B = \limsup \frac{P_{n+1}}{P_n}$ se tiene que:
 - a) Si $A < 1$ o $B < 1$ entonces $\sum_{n \geq 1} P_n < \infty$
 - b) Si $A > 1$ o $B > 1$ entonces $\sum_{n \geq 1} P_n = \infty$

3.2. Series de potencias

Definición 3.3. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión en \mathbb{C} . La serie de potencias de coeficientes $\{a_n\}$ y centro z_0 es la serie funcional dada por

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

Definición 3.4. Dada una serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, diremos que su radio de convergencia viene dado por:

$$r = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$$

Definición 3.5. Dada una serie de potencias de números complejos $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, diremos que:

1. Converge en un punto w_0 si $\sum_{n \geq 0} a_n (w_0 - z_0)^n$ converge. En caso contrario diremos que no converge a w_0 .
2. Converge absolutamente en un punto w_0 si $\sum_{n \geq 0} |a_n (w_0 - z_0)^n| < \infty$.
3. Converge uniformemente sobre un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ a una función $f(w)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \left| \sum_{n \geq 0} a_n (w - z_0)^n - f(w) \right| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, \quad \forall w \in S$$

La elección de n_0 sólo depende del valor de ε y es independiente del punto w que se tome de S .

Teorema 3.1 (Teorema de Abel). Dada una serie de potencias de números complejos $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, supongamos que converge para $z_1 \in \mathbb{C}$ y llamaremos $r = |z_1 - z_0|$ entonces la serie converge absolutamente en todo $D(z_0, r)$ y uniformemente en todo compacto de $D(z_0, r)$ a la función suma $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$.

Demostración. Sea $z \in D(z_0, r)$ entonces $\sum_{n \geq 0} |a_n (z - z_0)^n| = \sum_{n \geq 0} \left| a_n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} (z_1 - z_0)^n \right|$.

Dado que $\sum_{n \geq 0} a_n (z_1 - z_0)^n$ converge entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z_1 - z_0)^n = 0$ y $\exists M > 0 / |a_n (z_1 - z_0)^n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} |a_n (z - z_0)^n| \leq M \sum_{n \geq 0} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$ que converge por ser serie geométrica de razón menor que 1.

Tomemos ahora $K \subset D(z_0, r)$ un conjunto compacto, y sea $z' \in D(z_0, r)$ talque $K \subset \bar{D}(z_0, r') \subset D(z_0, r)$ con $r' = |z' - z_0|$. Así si $z \in K$ tenemos que $\sum_{n \geq 0} |a_n (z - z_0)^n| < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n < \infty \quad \forall z \in K$.

Sea ahora $N_1 \in \mathbb{N}$ y $w \in k$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=0}^{N_1-1} a_j(w - z_0)^j - \sum_{j \geq 0} a_j(w - z_0)^j \right| = \left| \sum_{j \geq N_1} a_j(w - z_0)^j \right| = \\ & = \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=N_1}^{N_2} a_j(w - z_0)^j \right| \leq \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=N_1}^{N_2} |a_j| |w - z_0|^j \leq \\ & \leq \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=N_1}^{N_2} |a_j| |z' - z_0|^j \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| |z' - z_0|^n < \infty \end{aligned}$$

Los restos de la serie cumplen la definición de convergencia uniforme. \square

Teorema 3.2. Consideremos la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ y r su radio de convergencia, consideremos el disco $D := F(z_0, r)$.

1. La serie converge absolutamente $\forall z \in D$.
2. La serie converge uniformemente en todo compacto de D .
3. La serie no converge sea cual sea z tal que $|z - z_0| > r$.

Demostración. Recordemos que $r = \left(\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$.

1. Sea $z \in D$, observemos que

$$\limsup |a_n(z - z_0)^n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} |z - z_0| = |z - z_0| r^{-1} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

Por criterio de la raíz hay convergencia absoluta con $z \in D$.

2. La convergencia uniforme en todo compacto de D se deduce por el teorema de Abel.
3. Por reducción al absurdo, tomemos que la serie converge para algún $z'/|z' - z_0| > r$.

Por el teorema de Abel la serie también convergería en $z \in D(z_0, r')$ con $r' = |z' - z_0|$.

En particular converge $\forall z/|z - z_0| < r'$, es decir, también converge en $z/r < |z - z_0|z' - z_0|$ lo que supone una contradicción ya que

$$\limsup |a_n(z - z_0)^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z - z_0|}{r} > 1 \#$$

3.3. Teorema de Taylor y de la convergencia analítica

Teorema 3.3 (Taylor). *Sea $f(z)$ analítica en $D(z_0, r)$ para $z_0 \in \mathbb{C}$ t $r > 0$ entonces para todo $z \in D(z_0, r)$, $f(z)$ admite la representación en serie:*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Demostración. *Sea $r_1/0 < r_1 < r$, $C_1 := \{z/|z - z_0| = r_1\}$, $z \in D(z_0, r_1)$ entonces:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z - (z - z_0)} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} dw \end{aligned}$$

Para $s \neq 1$ tenemos que $\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1} + \frac{s^n}{1-s}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} &= 1 + \frac{z - z_0}{w - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(w - z_0)^2} + \dots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(w - z_0)^{n-1}} + \frac{\left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \\ \Rightarrow \frac{1}{(w - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} &= \frac{1}{w - z_0} + \dots + \frac{1}{(w - z_0)^n} (z - z_0)^{n-1} + \frac{1}{(w - z_0)(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{por F.C.D. } \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \\ \Rightarrow f(z) &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + P_n(z) \\ \text{con } P_n(z) &= \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z_0 (w - z_0)^{n+1}} dw \end{aligned}$$

Para concluir solo queda demostrar que $|P_n(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Tomemos $M = \max_{z \in C_1} \{|f(w)|\}$, $|z - z_0| = r_2 < r_1$, $|w - z| = |w - z_0 - (z - z_0)| \geq r_1 - r_2$, tenemos que

$$|P_n(z)| \leq \frac{r_2^n}{2\pi} \frac{M}{r_1^{n+1} (r_0 - r_1)} 2\pi r_1 = \frac{M}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \square$$

3.3. TEOREMA DE TAYLOR Y DE LA CONVERGENCIA ANALÍTICA 31

Teorema 3.4 (Convergencia analítica). Sea $\{f_n(z)\}_n$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto U tal que $f_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente sobre los compactos de U , entonces $f(z)$ es analítica en U y $f_n^{(p)}(z)$ converge uniformemente a $f^{(p)}(z)$ sobre los compactos de U .

Demostración. Veamos que $f(z)$ es continua:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} / |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3 \quad \forall n > N, \quad \forall z \in U$$

$$\text{Sea } z_0 \in U \Rightarrow \exists \delta > 0 / |f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3 \text{ si } |z - z_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \text{varepsilonpsilon}$$

Entonces $f(z)$ es continua en z_0 . Y si tomamos k un compacto de U y Γ la frontera de Δ tenemos que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz = 0 \xrightarrow{\text{Morera}} f(z) \text{ es analítica en } k \Rightarrow \text{ es analítica en } U.$$

Sea $r > 0$ y $z_0 \in U$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ y $C := C(z_0, r)$ entonces

$$f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{p+1}} dw, \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $N_1 \in \mathbb{N}$: $f_n(z)$ es continua uniformemente en $\overline{D(z_0, r_1)}$ con $0 < r_1 < r$ entonces se cumple que $\forall z \in \overline{D(z_0, r_1)}$

$$\left| f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z) \right| \leq \frac{p!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(r - r_1)^{p+1}} \quad \forall n > N$$

Entonces $f_n^{(p)}(z)$ tiende a $f^{(p)}(z)$ sobre los compactos de U . \square

Definición 3.6 (Serie de Taylor). Si $f(z)$ es analítica en $D(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

se llama serie de Taylor de f centrada en z_0 . Si $z_0 = 0$ se llama serie de MacLaurin.

Teorema 3.5 (Recíproco del Teorema de Taylor). Sea $f(z)$ una función definida en $D(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, si $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in D(z_0, r)$ entonces f es analítica en $D(z_0, r)$.

Demostración. Es claro que el radio de convergencia de la serie es mayor o igual que r , entonces la serie converge uniformemente sobre compactos de $D(z_0, r)$. con lo que si tomamos $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$ vemos como el límite uniforme de $f_n(z)$ es $f(z)$ y por el teorema de convergencia analítica f es analítica en $D(z_0, r)$. \square

Teorema 3.6 (Unicidad de coeficientes). Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ una función definida en $D(z_0, r)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, entonces

1. $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
2. $f(z)$ es indefinidamente derivable en $D(z_0, r)$ y $f^{(p)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n n(n-1) \dots (n-p+1)(z - z_0)^{n-p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente en todo compacto de $D(z_0, r)$, por el teorema de convergencia analítica $\{f^{(p)}\}$ converge uniformemente en todo compacto de $D(z_0, r)$ a $f^{(p)}(z_0)$.

Ahora para probar 1, hacemos $z = z_0$ en la igualdad de 2:

$$\begin{aligned} f^{(p)}(z_0) &= \sum_{n \geq 0} a_n n(n-1) \dots (n-p+1)(z_0 - z_0)^{n-p} \\ &\Rightarrow f^{(p)}(z_0) = a_p p! \Rightarrow a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \quad p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

3.4. Principio de prolongación analítica

Definición 3.7. Sea $f(z)$ una función definida en U entonces el conjunto de ceros de $f(z)$ se denota como $Z(f) = \{z \in U / f(z) = 0\}$.

Si $f(z)$ es analítica en z_0 , diremos que $f(z)$ tiene un cero de orden $m \geq 1$ si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ con $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$.

También de forma equivalente $f(z)$ tiene un cero en z_0 de orden $m \geq 1$ cuando $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z)$ analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Lema 3.1. Sea $f(z)$ analítica en un abierto U y denotamos por A el conjunto de los puntos de acumulación de $Z(f)$ en U , entonces A es abierto y cerrado en U .

Demostración.

$$A = \{z \in U / \lim z_n = z, z_n \in Z(f), z_n \neq z_m\}$$

Observamos en primer lugar que $z \in A$ implica que $z \in Z(f)$.

Veamos que A es cerrado. Consideramos $\{w_n\} \subset A$ tal que $\{w_n\}_n \rightarrow w$ y probemos que $w \in A$. Esto es cierto ya que $w_n \in Z(f)$ y $w_n \neq w \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos que A es abierto, viendo que todo punto de A es interior. Sea $z_0 \in A$ y consideramos $f(z) = \sum_n a_n(z - z_0)^n$ válido para $D(z_0, r)$, $r > 0$ entonces $D(z_0, r) \subset U$.

Como $z_0 \in A \Rightarrow z_0 \in Z(f)$, $f(z_0) = 0$ y supongamos que $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$, si $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con g analítica y $g(z_0) \neq 0$.

Entonces z_0 no es un punto aislado de $Z(f)$. \sharp

Concluimos entonces que $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z) = 0 \forall z \in D(z_0, r) \subset A \Rightarrow A$ es abierto. \square

Teorema 3.7 (Principio de identidad). Sea $f(z)$ analítica en un conjunto abierto y conexo U . Supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n \geq 1}$ de puntos distintos en U tal que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in U$ con $f(z_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $f(z) = 0 \forall z \in U$.

Demostración. Sea $A = \{z \in U / \lim z_n = z, z_n \in Z(f), z_n \neq z_m\}$ entonces $A \neq \emptyset$ y por el lema anterior $A = U$ y entonces $f(z) = 0 \forall z \in U$.

Colorario 3.1 (Principio de prolongación analítica). Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en un abierto U y conexo.

Si $f(z) = g(z) \forall z \in S$ y $S \subset U$ es un conjunto con al menos un punto de acumulación de U entonces $f(z) = g(z) \forall z \in U$.

Demostración. Tomemos $h(z) = f(z) - g(z)$, analítica en U .

Vemos que $h(z) = 0 \forall z \in S$ con lo que $Z(f)$ tiene punto de acumulación en S .

Y por el teorema anterior $h(z) = 0 \forall z \in U$, es decir, $f(z) = g(z) \forall z \in U$. \square .

3.5. Series de Laurent

Definición 3.8. Decimos que $f(z)$ tiene una singularidad en z_0 si $f(z)$ no es analítica en z_0 pero sí lo es en algún punto de todo entorno de z_0 .

Esta singularidad se dice que es aislada si existe un entorno perforado de z_0 donde $f(z)$ es analítica. En caso contrario diremos que z_0 es una singularidad no aislada.

Lema 3.2. Sea $f(z)$ analítica en un abierto U , con $\{z \in \mathbb{C} / r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\} \subset U$. Consideremos $C_j = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r_j\}$, $j = 1, 2$ Entonces $\forall z / r_1 < |z - z_0| < r_2$ tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Demostración. Sea $\gamma = C_2 - C_1$ un ciclo.

Observamos que si $z_1 \notin U$ y $|z_1 - z_0| > r_2$ entonces $n(\gamma, z_1) = n(C_2, z_1) - n(C_1, z_1) = 0$. Y si $z_1 \notin U$ y $|z_1 - z_0| < r_1$ entonces $n(\gamma, z_1) = 1 - 1 = 0$.

Con lo que $n(\gamma, z) = 0 \forall z \notin U$ y por F.I.C.:

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Y para cualquier z_0 en la corona se tiene que $n(\gamma, z_0) = n(C_2, z_0) - n(C_1, z_0) = 1 - 0 = 1$. \square

Teorema 3.8 (Teorema de Laurent). *Sea $f(z)$ analítica en la corona $U = \{z \in \mathbb{C} / S_1 \leq |z - z_0| \leq S_2\}$ con $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \infty$ y algún $z_0 \in \mathbb{C}$. Para todo $z \in U$ se tiene que:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\text{infy}} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Con $C = (C(z_0, r))$ y $S_1 < r < S_2$.

Demostración. Consideremos $C_j = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r_j\}$, $j = 1, 2$ con $S_1 < r_1 < r_2 < S_2$. Entonces $\forall z / |z - z_0| < r$ tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

y análogo al teorema de Taylor:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

$$\text{Obtenemos } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

Por el teorema de Abel f converge absolutamente en $D(z_0, r_2)$ y uniformemente sobre compactos de D . Dado que $\left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ aplicamos lo mismo para C_1 :

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

$$\text{Obtenemos } b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

De esta forma podemos escribir $f(z)$ como $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n \geq 0} b_n(z - z_0)^n$ con lo que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in U$$

\square

Proposición 3.1. *Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$ entonces*

1. z_0 es una singularidad evitable $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. z_0 es un polo de orden m $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Demostración. 1.

$$z_0 \text{ es evitable} \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0$$

2.

$$\begin{aligned} z_0 \text{ es polo de orden } m &\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &\Leftrightarrow g(z) = f(z)(z-z_0)^m = a_{-m} + a_{-m-1}(z-z_0) + \dots \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_{-m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Definición 3.9.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Serie de Laurent centrada en z_0 .

Definición 3.10. Sea z_0 una singularidad de la función $f(z)$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ su serie de Laurent centrada en z_0 :

1. $f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0 si $a_n = 0 \quad \forall n < 0$.
2. $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si m es el mayor natural de forma que $a_{-m} \neq 0$.
3. $f(z)$ tiene una singularidad esencial si existen infinitos $a_{-m} \neq 0$.

Lema 3.3. Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$ entonces z_0 es una singularidad evitable si y solo si $f(z)$ está acotada en un entorno perforado de z_0 .

Demostración. Primero demostraremos (\Rightarrow).

Supongamos que z_0 es singularidad evitable. Entonces podemos redefinir la función para que sea analítica en un entorno de z_0 con lo que f es acotada en un entorno perforado de z_0 .

Demostremos ahora (\Leftarrow).

Supongamos que $f(z)$ está acotada en un entorno perforado de z_0 . Entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0) = 0$ y entonces $g(z) = f(z)(z-z_0)$ tiene una singularidad evitable en z_0 .

Entonces podemos escribir $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z) = \frac{a_0}{z-z_0} + a_1 + a_2(z-z_0) + \dots$

Por tanto, es o bien polo simple de f o singularidad evitable de f (si $a_0 = 0$). Pero como f está acotada z_0 no puede ser polo así que concluimos que z_0 es singularidad evitable de f . \square

Teorema 3.9 (Casorati-Weierstrass). *Si $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 entonces $F(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$ es denso en \mathbb{C} para todo $\varepsilon > 0$, es decir, la imagen de cualquier entorno perforado de z_0 es denso en \mathbb{C} .*

Demostración. Sea $w \in \mathbb{C}$ y $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ veamos que $g(z)$ no está acotada en cualquier entorno perforado.

Supongamos, por reducción al absurdo, que g está acotada en un $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ para algún $r > 0$. Sabemos que $g(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0 por ser acotada. Entonces podemos definir una función $g_1(z)$ tal que sea analítica en $D(z_0, r)$ con $g_1(z_0) \neq 0$.

Sea m el orden del 0 de g en z_0 :

$$g(z) = (z - z_0)^m g_1(z) = \frac{1}{f(z) - w} \Rightarrow (z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m w + \frac{1}{g_1(z)}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{g_1(z_0)} \Rightarrow z_0 \text{ es polo de orden } m \text{ de } f \#$$

Vemos como $g(z)$ no está acotada en ningún entorno perforado de z_0 y en conclusión $f(z) \rightarrow w \forall w \in \mathbb{C}$. \square

Proposición 3.2 (Clasificación de singularidades). *Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$ entonces:*

1. z_0 es evitable $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. z_0 es polo de orden m $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. z_0 es esencial $\Leftrightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$.

Demostración. Con anterioridad hemos demostrado 1 y la implicación hacia la derecha de 2, demostremos ahora la implicación hacia la izquierda:

2. (\Leftarrow) Si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty \Rightarrow f(z)$ no está acotada en un entorno perforado de z_0 , entonces es polo o singularidad esencial y por el Teorema de Casorati-Weierstrass z_0 no es singularidad esencial \Rightarrow es polo.

Dado que una singularidad solo puede ser evitable, polo o esencial, demostrados 1. y 2. podemos demostrar 3. por descarte. \square

Definición 3.11. Diremos que $f(z)$ tiene una singularidad en ∞ si $f(z)$ es analítica en $\{z \in \mathbb{C} / |z| > r\}$ para algún $r > 0$. El tipo de singularidad de $f(z)$ en ∞ se define como el tipo de singularidad de $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ en $z = 0$.

Proposición 3.3. *Sea $f(z)$ una función entera entonces:*

1. z_0 es evitable $\Leftrightarrow f(z)$ es constante.

2. z_0 es un polo $\Leftrightarrow f(z)$ es un polinomio no constante.

3. z_0 es esencial $\Leftrightarrow f(z)$ no es un polinomio.

Demostración. 1. (\Leftarrow) Si $f(z) = \text{cte.}$ entonces $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \text{cte.}$ y $z = 0$ es una singularidad evitable de $g(z) \Rightarrow z = \infty$ es singularidad evitable de $f(z)$.

(\Rightarrow) Si ∞ es evitable en $f(z)$ entonces $z = 0$ lo es de $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ por lo que $g(z)$ es acotada en un entorno perforado de $z = 0 \Rightarrow f(z)$ es acotada en \mathbb{C} y por el teorema de Liouville f es constante.

2. ∞ es un polo de $f \Leftrightarrow z = 0$ es polo de $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ entonces $\lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| = \infty$. Además

$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{z^n} \Leftrightarrow 0$ es polo de $g \Leftrightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq m, \ m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$.

Por lo que $f(z)$ es un polinomio, no constante (por 1).

3. Es consecuencia de 1 y 2.

Bloque 4

Teoría de residuos

Definición 4.1. Sea z_0 una singularidad aislada de una función $f(z)$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ su desarrollo de Laurent centrada en z_0 entonces decimos que a_{-1} es el residuo de $f(z)$ en z_0 y se denota por $\text{Res}(f, z_0)$.

Observación: Si z_0 es una singularidad evitable entonces $\text{Res}(f, z_0) = 0$. Si z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$, $\exists r > 0$ tal que $f(z)$ es analítica en $\{z \in \mathbb{C}/0 < |z - z_0| < r\}$ y su desarrollo de Laurent presenta unos coeficientes que vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad C = C(z_0, r)$$

En particular $n = -1 \rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w) dw$ y entonces vemos como

$$\int_C f(w) dw = 2\pi i \text{Res}(f, z_0)$$

Proposición 4.1. Si $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 entonces $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z)$ con $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$.

En particular si z_0 es polo simple $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

Demostración. Sea z_0 un polo de orden $m \geq 1$ de $f(z)$ entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Notemos que z_0 es una singularidad evitable de $g(z)$ entonces podemos escribir $g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{z - z_0} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots$$

$$\text{Res}(f, z_0) = b_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z)$$

Y para $m = 1$ tenemos que $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$. \square

Proposición 4.2. Si $f(z)$ es analítica en z_0 , no idénticamente constante y tiene un cero de orden m en el punto z_0 entonces $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en z_0 y $\text{Res}(g, z_0) = m$.

Demostración. Dado que z_0 es cero de orden m de $f(z)$ entonces $f(z) = (z - z_0)^m f_1(z)$ con $f_1(z_0) \neq 0$ analítica. Y entonces $f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} f_1(z) + (z - z_0)^m f_1'(z)$.

$$g(z) = \frac{m(z - z_0)^{m-1} f_1(z) + (z - z_0)^m f_1'(z)}{(z - z_0)^m f_1(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

Y al ser $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ analítica, z_0 es un polo simple de g y $\text{Res}(g, z_0) = m$. \square

4.1. Teorema de los residuos

Teorema 4.1 (Teorema de los residuos). Sea $f(z)$ analítica en un abierto U excepto, a lo sumo, en w_1, \dots, w_n que son singularidades aisladas. Entonces para todo γ camino cerrado tal que $n(\gamma, z_0) \neq 0 \forall z \notin U$ y con $w_j \notin \gamma^*, j = 1, \dots, n$ se tiene que:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n n(\gamma, w_j) \text{Res}(f, w_j)$$

Demostración (por hacer).

Lema 4.1 (Lema de Jordan). Sea f analítica en el semicírculo $\Gamma_R = \{z/Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ y sea $M(R) = \max\{|f(z)|/z \in \Gamma_R\}$. Si $a > 0 \Rightarrow$

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi M(R)}{a} (1 - e^{-aR})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) e^{iaz} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \int_0^{\pi} \leq \int_0^{\pi} \underset{\leq M(R)}{|f(Re^{i\theta})|} e^{-aR \sin \theta} R d\theta \\ &\leq RM(R) \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \theta} d\theta = 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta \\ &\underset{**}{\leq} 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-aR \frac{2}{\pi} \theta} d\theta = \frac{\pi M(R)}{a} (1 - e^{-aR}) \end{aligned}$$

$$* \left| e^{iaRe^{i\theta}} \right| = \left| e^{iaR(\cos \theta + i \sin \theta)} \right| = e^{-aR \sin \theta} \left| e^{iaR \cos \theta} \right| = e^{-aR \sin \theta}$$

** Si llamamos $g(\theta) = \sin \theta - \frac{2}{\pi} \theta$ con $\theta \in [0, \pi/2]$

Vemos como $g(0) = g(\pi/2) = 0$, $g'(\theta) = \cos \theta - \frac{2}{\pi}$, $g''(\theta) = -\sin \theta \leq 0$.

Entonces $g(\theta) \geq 0 \forall \theta \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow \sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$. \square

Proposición 4.3. Sea $f(z)$ una función analítica en $\{z/|z| > r, \Im(z) \geq 0\} \forall r > 0$ y consideremos el arco semicircular de centro 0 y radio R positivamente orientado dado por $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C}/z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. [falta completar]

4.2. Consecuencias del Teorema de los Residuos

Proposición 4.4 (Principio del argumento). Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto U y no idénticamente nula en ninguna componente conexa de U , si γ es el camino cerrado en $U \setminus Z(f)$ tal que $n(\gamma, z) = 0 \forall z \notin U \Rightarrow$

$$n(f \circ \gamma, 0) = \sum_{w \in Z(f)} m(f, w) n(\gamma, w)$$

Con $m(f, w)$ el orden del cero de w .

Demostración.

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

La función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ analítica en U excepto en $Z(f)$. Así por el teorema de los residuos, obtenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{w \in Z(f)} n(\gamma, w) \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, w\right) = 2\pi i \sum_{w \in Z(f)} n(\gamma, w) m(f, w)$$

Por otra parte sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, por definición de índice

$$\begin{aligned} n(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \square \end{aligned}$$

>

Teorema 4.2 (Teorema de Rouché). Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas en un abierto U y no idénticamente nulas en ninguna componente conexa de U , consideramos γ un camino cerrado en U tal que $n(\gamma, z) = 0 \forall z \notin U$.

$$\begin{aligned} \text{Si } |f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma^* \Rightarrow \\ \sum_{w \in Z(f)} m(f, w) n(\gamma, w) &= \sum_{w \in Z(g)} m(g, w) n(\gamma, w) \end{aligned}$$

Demostración. Por la desigualdad supuesta observamos en primer lugar que γ no pasa por ningún cero de Ff . Así podemos definir $h(z) = 1 + \frac{g(z)-f(z)}{f(z)}$ en un cierto entorno de γ^* .

Además si $z \in \gamma^*$ entonces $|h(z) - 1| = \frac{|g(z)-f(z)|}{|f(z)|} < 1 \ \forall z \in \gamma^*$.

Es decir, la curva $h \circ \gamma$ está incluida en $D(1, 1)$ y, por tanto, no le da vueltas al origen, $n(h \circ \gamma, 0) = 0$.

Por otra parte $h(z)f(z) = g(z)$ por lo tanto

$$\begin{aligned} n(g \circ \gamma, 0) &= n((h \cdot f) \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(h(z)f(z))'}{h(z)f(z)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz + \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = \underbrace{n(h \circ \gamma, 0)}_0 + n(f \circ \gamma, 0) = n(f \circ \gamma, 0) \end{aligned}$$

Entonces por el principio del argumento podemos concluir que

$$\sum_{w \in Z(f)} m(f, w)n(\gamma, w) = \sum_{w \in Z(g)} m(g, w)n(\gamma, w).$$

□

Teorema 4.3 (Teorema de Hurwitz). Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un abierto U que converge uniformemente sobre los compactos de U a una función $f(z)$.

Consideremos $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ y asumimos que $f(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z - z_0| = r$, entonces

$\exists N \in \mathbb{N}/f_n(z)$ tiene el mismo número de ceros que $f(z)$ en $D(z_0, r) \ \forall n \geq N$

Demostración. Observemos que f es analítica en U .

Consideremos $\varepsilon = \min\{|f(z)| / |z - z_0| = r\} > 0$.

Por la convergencia uniforme, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|$, $\forall z \in C(z_0, r)$.

Por el teorema de Rouché, tomando $g(z) = f_n(z)$ vemos como f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(z_0, r)$. □

Proposición 4.5. Sea $f(z)$ una función analítica no constante en cada componente conexa de un abierto U y con un cero de orden m en z_0 entonces

1. $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subset U$ tal que $f(z)$ y $f'(z)$ no se anulan en $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.
2. Si $p = \min\{|f(z)| / |z - z_0| = r\}$ con $\varepsilon > 0$ verificando el apartado anterior y con w tal que $0 < |w| < p$ entonces existen m puntos distintos en $D(z_0, \varepsilon)$ de imagen w .

3. Existe un abierto V con $z_0 \in V$ tal que si $z \in V \setminus \{z_0\} \subset U$ entonces $f(z) \neq 0$ y existe exactamente m puntos $w_k \in V \setminus \{z_0\}$ tal que $f(w_k) = f(z)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Demostración. 1. Por reducción al absurdo supongamos que no existe $\varepsilon > 0$ tal que se cumplan las condiciones.

Entonces z_0 es punto de acumulación de ceros de $f(z)$ o $f'(z)$ y por el principio de identidad $f(z) = 0$ o $f'(z) = 0$ con lo que f es constante. $\#$

2. Sea $p = \min\{|f(z)| / |z - z_0| = r\}$, $w \in \mathbb{C} / 0 < |w| < p$ y sea $g(z) = f(z) - w$

Entonces $|w| < p \leq |f(z)| \quad \forall z \in \gamma = C(z_0, \varepsilon)$, $|w| = |f(z) - g(z)|$.

Por el teorema de Rouché, f y g tienen el mismo número de ceros en $D(z_0, \varepsilon)$ si $f(z) = w$ tiene exactamente m ceros.

Además todos estos ceros son distintos ya que en caso contrario $f' = 0$.

3. Tomemos ε y p de los apartados anteriores. Entonces, sea $V = D(z_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(D(0, p)) \ni z_0$ y $V \subset D(z_0, \varepsilon)$.

Por la elección de varepsilon, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\}$.

Además, si $z \in V \setminus \{z_0\}$ entonces se tiene que $0 < |f(z)| < p$ y por el apartado 2. $w = f(z)$ y existen m puntos w_0, \dots, w_m en $D(z_0, \varepsilon)$ de imagen w con $0 < |w| < p$ y entonces, por definición de V , los puntos w_k están en V para $k = 1, 2, \dots, m$. \square

Teorema 4.4 (Teorema de la aplicación abierta). Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto U y no idénticamente constante en ninguna componente conexa de V . Si V es un abierto de U entonces $f(V)$ es un abierto de \mathbb{C} .

Demostración. Sea V un abierto de U y $z_0 \in V$ veamos que $f(z_0)$ es interior a $f(V)$.

Consideremos $g(z) = f(z) - z_0$ analítica en U y no idénticamente constante en ninguna componente conexa y con $g(z_0) = 0$, y sea $m \geq 1$ el orden del cero de g .

Tomemos $\varepsilon > 0$ y por la proposición anterior, con $D(z_0, \varepsilon) \subset V$.

Entonces $\forall w \in D(0, p) \setminus \{0\} \exists m$ puntos w_1, w_2, \dots, w_m en $D(0, p)$ tal que $g(w_k) = w$.

Por tanto $D(0, p) \subset g(V)$ o equivalentemente $D(f(z_0), p) \subset f(V)$ con lo que $f(z_0)$ es interior a $f(V)$ y $f(V)$ es abierto. \square

Proposición 4.6. Sea $f(z)$ una función analítica en z_0

- Si $f'(z_0) \neq 0$ entonces existe un entorno donde $f(z)$ es inyectiva.
- Si $f'(z_0) = 0$ entonces $f(z)$ no es inyectiva en ningún entorno de z_0 .

Demostración. 1. Supongamos $f'(z_0) \neq 0$ y consideremos $g(z) = f(z) - f(z_0)$ analítica en z_0 con $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$.

Así por el apartado 3 de la proposición anterior existe un abierto $V \ni z_0$ tal que $\forall z \in V \setminus \{z_0\}$ existe un único $w \in V \setminus \{z_0\}$ de imagen $g(z)$ entonces f es inyectiva en V .

2. Supongamos que $f'(z_0) = 0$ entonces $g(z) = f(z) - f(z_0)$ analítica en z_0 y $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. Es decir z_0 es un cero de orden mayor que 2. Y por el apartado anterior g no es inyectiva y por lo tanto f tampoco. \square

Teorema 4.5. Sea $f(z)$ una función analítica e inyectiva en un abierto U entonces $f^{-1}(z)$ es analítica en el abierto $f(U)$.

Demostración. Por el teorema de la función abierta, $f(U)$ es un conjunto abierto si U es abierto, por tanto $f^{-1} : f(U) \longleftrightarrow U$ está bien definida en un conjunto abierto.

Veamos que f^{-1} es analítica en $f(U)$. Veamos que f^{-1} es derivable en todo punto de $f(U)$.

Sea $w_0 \in f(U)$:

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

$$\left[\begin{array}{ll} f(z) = w & \Rightarrow f^{-1}(w) = z \\ f(z_0) = w_0 & \Rightarrow f^{-1}(w_0) = z_0 \\ f^{-1}(z) & = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \end{array} \right]$$

Bloque 5

Funciones enteras

Definición 5.1 (Convergencia de productos infinitos). Sea z_1, z_2, \dots, z_n una sucesión de números complejos no nulos. Consideremos $p_n = \prod_{k=1}^n z_k$. Si existe

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ con $p \neq 0$ diremos que el producto infinito $\prod_{n \geq 1} z_n$ converge a p . En caso contrario diremos que el producto no converge.

Si un producto infinito tiene una cantidad finita de términos iguales a 0 y el resto verifica la definición anterior, también diremos que $\prod_{n \geq 1} z_n$ converge. De hecho, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{n \geq m+1} z_n$ verifica la definición inicial, se dice que el producto $\prod_{n \geq 1} z_n$ es convergente a $p = z_1 z_2 \cdots z_m \prod_{n \geq m+1} z_n$.

Definición 5.2. Llamaremos factores canónicos o elementales a las funciones

$$E_0(z) = 1 - z$$

y

$$E_m(z) = (1 - z) \exp \left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m} \right), \quad m \in \mathbb{N}$$

Propiedades

- $E_m(z)$ es una función entera para cada $m = 0, 1, 2, \dots$
- $E_m(z)$ tiene un único cero simple en $z = 1$ para cada $m = 0, 1, 2, \dots$
- si $|z| < 1$ entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} E_m(z) = (1 - z) \exp(-\log(1 - z)) = 1$.
- Para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que

$$|1 - E_m(z)| \leq |z|^{m+1} \quad \text{para } z \text{ tal que } |z| \leq 1.$$

Teorema 5.1. Sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos no nulos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Si $m_n \geq 1$, el producto $f(z) = \prod_{n \geq 1} E_{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)$ es una función entera cuyos ceros vienen dados por a_1, a_2, \dots

Definición 5.3. Sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos no nulos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. El coeficiente

$$\mu = \inf \left\{ k > 0 / \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^k} < \infty \right\}$$

se conoce como exponente de convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Teorema 5.2. Sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos no nulos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ y su exponente de convergencia sea $\mu < \infty$. Si h es un entero

no negativo tal que $h > \mu - 1$, entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} E_h \left(\frac{z}{a_n} \right)$ define una función entera cuyos ceros vienen dados por a_1, a_2, \dots .

Cuando μ es entero y $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} < \infty$ podemos tomar $h = \mu - 1$.

Teorema 5.3 (Factorización de Weierstrass). Sea $f(z)$ una función entera no idénticamente nula con un cero en $z = 0$ de orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (tomamos $m=0$ si $f(0) \neq 0$) y otros ceros a_1, a_2, \dots repetidos según su multiplicidad. Entonces

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n \geq 1} E_{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)$$

para una cierta función entera $g(z)$ y enteros $m_n \geq n - 1$.

En general, si el exponente de convergencia es finito podemos tomar $m_n = h > \mu - 1$.

Definición 5.4. Diremos que una función $f(z)$ es meromorfa en un abierto U cuando $F(z)$ es analítica en U excepto posiblemente en singularidades aisladas que son polos.

Colorario 5.1. Una función $f(z)$ es meromorfa en \mathbb{C} si, y solo si, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ con $g(z)$ y $h(z)$ funciones enteras y siendo $h(z)$ no idénticamente nula.

Demostración. Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ con $g(z)$ y $h(z)$ funciones enteras y siendo $h(z)$ no idénticamente nula, entonces $f(z)$ es meromorfa donde los polos de $f(z)$ son los ceros de la función $h(z)$.

Recíprocamente, si $f(z)$ es meromorfa, denotemos por $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ a sus polos. Utilizando el teorema de factorización de Weierstrass, construimos una función entera $h(z)$ cuyos ceros sean justamente los polos b_n . En tal caso, la función $g(z) := f(z)h(z)$ presenta singularidades evitables en los puntos b_n y al eliminarlas se consigue una función entera. Luego $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$. \square

Definición 5.5. dada $f(z)$ una función entera, denotaremos orden (u orden de crecimiento) de $f(z)$ al valor $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$ donde

$$\lambda_1 = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln M_f(r))}{\ln r}$$

y

$$\lambda_2 = \inf\{a \geq 0 / \exists r > 0 \text{ tal que } |f(z)| \leq e^{|z|^a} \forall z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r)\}$$

Demostración. Veamos que efectivamente $\lambda_1 = \lambda_2$.

Primero demostremos que $\lambda_1 \geq \lambda_2$: Si $\lambda_1 = \infty$ es trivial por lo que supondremos $\lambda_1 < \infty$.

Por definición de λ_1 , dado $\varepsilon > 0 \exists r_0 > 0 / \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \leq \lambda_1 + \varepsilon \forall r \geq r_0$.

$$\Rightarrow \ln \ln M_f(r) \leq (\lambda_1 + \varepsilon) \ln r \Rightarrow \ln \ln M_f(r) \leq \ln r^{(\lambda_1 + \varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \ln M_f(r) \leq r^{(\lambda_1 + \varepsilon)} \Rightarrow M_f(r) \leq e^{r^{\lambda_1 + \varepsilon}}$$

$$\text{si } |z| = r \Rightarrow |f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda_1 + \varepsilon}}$$

Y como podemos escoger ε de forma arbitraria, $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Primero demostremos que $\lambda_2 \geq \lambda_1$: Si $\lambda_2 = \infty$ es trivial por lo que supondremos $\lambda_2 < \infty$.

Por la definición de λ_2 dado $\varepsilon > 0, \exists r > 0$ suficientemente grande tal que $|f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda_2 + \varepsilon}} \forall z \in \mathbb{C} \setminus D(0, r)$.

$$\Rightarrow \ln |f(z)| \leq |z|^{\lambda_2 + \varepsilon} \Rightarrow \ln \ln |f(z)| \leq (\lambda_2 + \varepsilon) \ln |z|$$

$$\text{si } |z| = r \Rightarrow \ln \ln M_f(r) \leq (\lambda_2 + \varepsilon) \ln r \Rightarrow \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \leq \lambda_2 + \varepsilon$$

Y como podemos escoger ε de forma arbitraria, $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

Con lo que concluimos que $\lambda_1 = \lambda_2$. \square

Nota

Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una función entera no constante, entonces el orden de $f(z)$ viene también dado por

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{-\ln |a_n|^{1/n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \left(\frac{1}{|a_n|} \right)}$$

Ejemplos

- El orden de un polinomio es 0.
- El orden de $e^{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}$ con $a_n \neq 0$ es n .
- El orden de e^{e^z} es ∞ .
- El orden de $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ es 1.

Proposición 5.1. *Sea $f(z)$ una función entera no constante de orden finito λ . Sean a_1, a_2, \dots los ceros de $f(z)$ repetidos según su multiplicidad. Entonces $\mu \leq \lambda$, donde μ es el exponente de convergencia asociado a esta sucesión.*

Teorema 5.4 (Factorización de Hadamard). *Sea $f(z)$ una función entera de orden finito λ con un cero en $z = 0$ de orden $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y otros ceros a_1, a_2, \dots repetidos según su multiplicidad. Entonces*

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n \geq 1} E_{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que λ y

$$h = \begin{cases} \mu - 1 & \text{si } \mu \in \mathbb{Z}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} < \infty \\ \mu & \text{si } \mu \in \mathbb{Z}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|a_n|^\mu} = \infty \\ [\mu] & \text{si } \mu \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Siendo μ el exponente de convergencia asociado a $\{a_n\}$.