Trabajo practico #5: Preliminares al modelado

Objetivos:

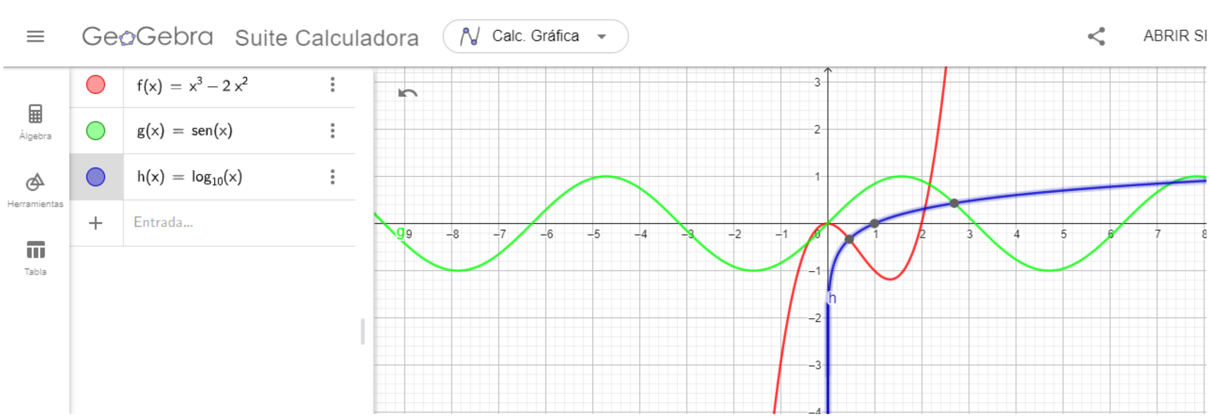
1. Comprender y aplicar conceptos de funciones básicas, tanto algebraicas como trascendentales.
2. Entender y trabajar con espacios vectoriales, sus bases generadoras y distintos tipos de espacios.
3. Analizar y clasificar transformaciones lineales, incluyendo operadores específicos en R^n y C^n[a,b].
4. Resolver ecuaciones con operadores, aplicando la teoría para encontrar soluciones en R^n y C^n[a,b].

Desarrollo:

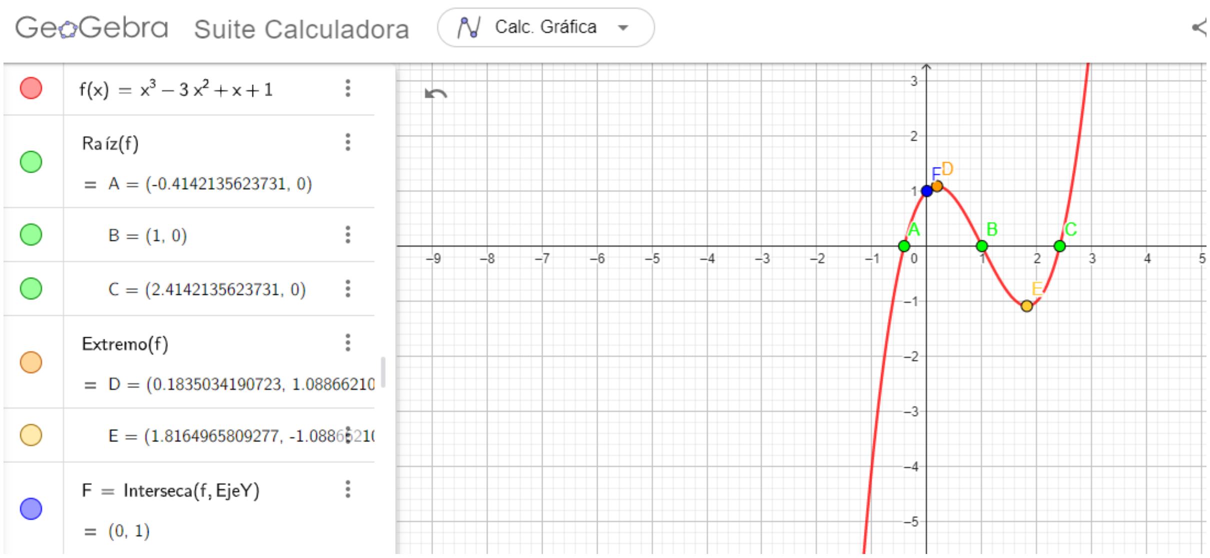
Tema 1: Funciones básicas - Algebraicas, trascendentales y estudiocon Geogebra.

1.1. Dadas las siguientes funciones, clasifíquelas como algebraicas o trascendentales y grafíquelas utilizando Geogebra: f(x) = x^3 - 2x^2, g(x) = sin(x),h(x) = log(x).

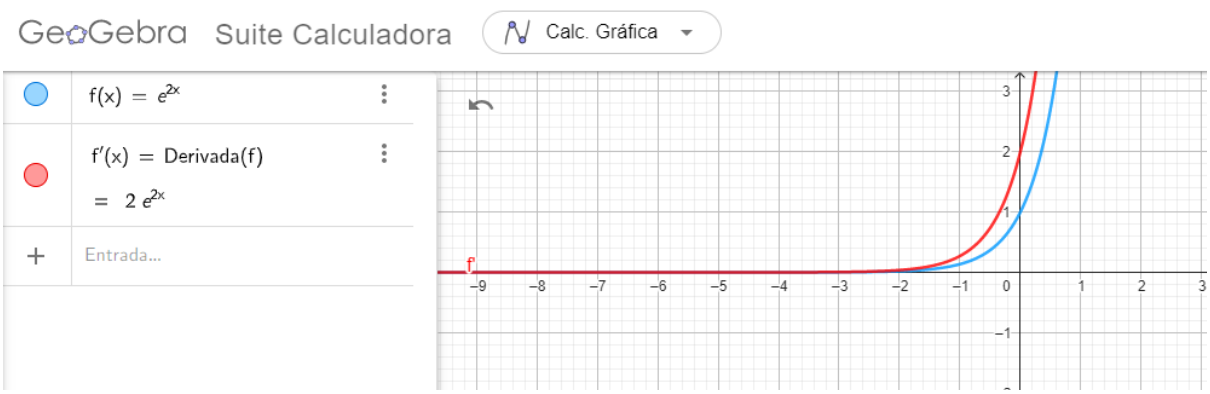
f(x) = x^3 - 2x^2 ➔ Algebraica
g(x) = sin(x) y h(x) = log(x) ➔ Trascendentales



1.2. Utilizando Geogebra, analice la función f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1. Identifique losintervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los puntos críticos.



1.3. Encuentre la derivada de la función f(x) = e^(2x) y grafique tanto la función
original como su derivada en Geogebra.



Tema 2: Espacios vectoriales

2.1. Para el espacio R^3, encuentre una base generadora y determine si los siguientes vectores son linealmente independientes: v1 = (1, 0, 2), v2 = (2, 1, 3),v3 = (3, 2, 4).

Para determinar si los vectores son linealmente independientes, primero encontraremos una base generadora del espacio R^3 que contenga los tres vectores.

Observando los vectores, podemos notar que el tercer vector, v3, es una combinación lineal de los dos primeros vectores v1 y v2, ya que:

v3 = v1 + 2v2

Por lo tanto, podemos usar los vectores v1 y v2 como una base generadora del espacio R^3.

Para verificar si los vectores v1, v2 y v3 son linealmente independientes, podemos expresar v3 como una combinación lineal de v1 y v2 y verificar si los coeficientes son únicos. Es decir, buscamos encontrar números a y b tales que:

v3 = av1 + bv2

Reemplazando los vectores con sus componentes, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales:

3 = a + 2b 2 = 2a + b 4 = 2a + 3b

Podemos resolver este sistema utilizando técnicas de álgebra lineal, como la eliminación gaussiana. Después de hacer algunas operaciones, encontramos que a = 1 y b = 1. Por lo tanto, los vectores v1, v2 y v3 no son linealmente independientes, ya que v3 es una combinación lineal de v1 y v2.

En conclusión, una base generadora del espacio R^3 que contiene los vectores v1, v2 y v3 es {v1, v2}, y los vectores v1, v2 y v3 no son linealmente independientes.

2.2. Considere el espacio P de polinomios de grado menor o igual a 2. Determine una base para este espacio y demuestre que es una base generadora.

Un polinomio de grado menor o igual a 2 tiene la forma:

p(x) = ax^2 + bx + c

donde a, b y c son constantes. El espacio P de polinomios de grado menor o igual a 2 es un subespacio vectorial de R[x], el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales.

Para encontrar una base para el espacio P, necesitamos encontrar un conjunto de vectores que sean linealmente independientes y que generen todo el espacio P.

Un conjunto de polinomios que cumple estas condiciones es:

{1, x, x^2}

Para demostrar que este conjunto es una base generadora de P, necesitamos demostrar dos cosas:

1. *Que los tres polinomios son linealmente independientes.*
2. *Que cualquier polinomio de grado menor o igual a 2 puede ser expresado como una combinación lineal de los tres polinomios.*

Para demostrar la primera propiedad, supongamos que existen números a, b y c tales que:

$a + bx + cx^2 = 0$

para todo x. Si $x = 0$, entonces $a = 0$. Si $x = 1$, entonces $b + c = 0$. Si $x = 2$, entonces $4c + 2b + a = 0$. Usando estas tres ecuaciones, podemos resolver para a, b y c y encontramos que $a = b = c = 0$. Por lo tanto, los tres polinomios son linealmente independientes.

Para demostrar la segunda propiedad, tomamos un polinomio arbitrario de grado menor o igual a 2:

$p(x) = ax^2 + bx + c$

Podemos expresar este polinomio como una combinación lineal de los tres polinomios:

$p(x) = c(1) + b(x) + a(x^2)$

Por lo tanto, el conjunto $\{1, x, x^2\}$ genera todo el espacio P.

En conclusión, $\{1, x, x^2\}$ es una base generadora del espacio P de polinomios de grado menor o igual a 2.

2.3. Dado el espacio C[a,b], encuentre una base generadora para el conjunto defunciones continuamente diferenciables en el intervalo [0,1].

El espacio C[a,b] es el espacio de todas las funciones continuas en el intervalo [a,b]. El conjunto de funciones continuamente diferenciables en el intervalo [0,1] es un subespacio vectorial de C[0,1]. Para encontrar una base generadora para este espacio, necesitamos encontrar un conjunto de funciones que sean linealmente independientes y que generen todo el espacio de funciones continuamente diferenciables.

Un conjunto de funciones que cumple estas condiciones es:

{1, x, x^2, ..., x^n, e^x}

donde n es cualquier entero no negativo. La función e^x es incluida porque cualquier función continuamente diferenciable en [0,1] puede ser escrita como una combinación lineal de potencias de x y de la función exponencial e^x.

Para demostrar que este conjunto es una base generadora del espacio de funciones continuamente diferenciables en [0,1], necesitamos demostrar dos cosas:

1. *Que las n + 1 funciones son linealmente independientes.*
2. *Que cualquier función continuamente diferenciable en [0,1] puede ser expresada como una combinación lineal de las n + 1 funciones.*

Para demostrar la primera propiedad, supongamos que existen números a0, a1, ..., an y b tales que:

a0 + a1x + a2x^2 + ... + anx^n + be^x = 0

para todo x en [0,1]. Si derivamos esta ecuación n veces, obtenemos:

b(e^x)^(n) = 0

Como e^x es siempre positiva, esto implica que b = 0. Si sustituimos esto en la ecuación original y evaluamos en x = 0, encontramos que a0 = 0. Si derivamos la ecuación original n-1 veces y evaluamos en x = 0, encontramos que a1 = 0. Continuando de esta manera, podemos demostrar que a0 = a1 = ... = an = 0. Por lo tanto, las n + 1 funciones son linealmente independientes.

Para demostrar la segunda propiedad, tomamos una función f(x) que sea continuamente diferenciable en [0,1]. Podemos escribir f(x) como:

f(x) = a0 + a1x + a2x^2 + ... + anx^n + g(x)e^x

donde g(x) es una función continuamente diferenciable en [0,1]. Podemos demostrar que g(x) existe y es única aplicando la regla de Leibniz a la función f(x) - a0 - a1x - a2x^2 - ... - anx^n.

Esta regla nos permite escribir f(x) - a0 - a1x - a2x^2 - ... - anx^n como g(x)e^x, donde g(x) es una función continuamente diferenciable en [0,1]. Por lo tanto, cualquier función continuamente diferenciable en [0,1] puede ser expresada como una combinación lineal de las n + 1 funciones.

En conclusión, {1, x, x^2, ..., x^n, e^x} es una base generadora del espacio de funciones continuamente diferenciables en el intervalo [0,1].

Tema 3: Transformaciones lineales

3.1. Dada la matriz A = [[2, -1], [1, 1]], clasifique la transformación lineal asociadaa A en R^2.

La matriz A representa una transformación lineal de R^2 en R^2. Para clasificar esta transformación, podemos analizar la acción de la matriz A sobre algunos vectores estándar de R^2:

A[1, 0] = [2, 1] A[0, 1] = [-1, 1]

Estos vectores transformados son linealmente independientes, lo que significa que la transformación lineal asociada a A es inyectiva (o sea, cada vector en el dominio tiene una única imagen en el codominio). Además, como A tiene dos columnas, que forman una base de R^2, la transformación lineal asociada a A es sobreyectiva (o sea, cada vector en el codominio tiene al menos un preimagen en el dominio). Por lo tanto, la transformación lineal asociada a A es biyectiva (o sea, es una función invertible), y se puede concluir que es un isomorfismo.

Además, como la matriz A es diagonalizable (puede ser escrita como A = PDP^-1, donde D es una matriz diagonal), se puede concluir que la transformación lineal asociada a A es una transformación lineal diagonalizable. Esto significa que la transformación lineal tiene una base de autovectores, lo que puede ser útil para hacer cálculos y análisis más detallados.

3.2. Encuentre la matriz de la transformación lineal que representa una rotación de90° en sentido antihorario en R^2.

La matriz que representa una rotación de 90° en sentido antihorario en R^2 es:

R = [[0, -1], [1, 0]]

Para demostrar esto, podemos aplicar la transformación a algunos vectores estándar de R^2:

R[1, 0] = [0, 1] R[0, 1] = [-1, 0]

Estos vectores transformados son precisamente los vectores de la base estándar de R^2, pero rotados en sentido antihorario 90°. Esto significa que la matriz R representa una rotación de 90° en sentido antihorario en R^2.

La manera de encontrar esta matriz es considerar la matriz de cambio de base que transforma la base estándar de R^2 en la base rotada en sentido antihorario 90°. Esta matriz de cambio de base es:

P = [[0, -1], [1, 0]]

y su inversa es:

P^-1 = [[0, 1], [-1, 0]]

La matriz R que representa la rotación de 90° en sentido antihorario en R^2 se obtiene aplicando la matriz de cambio de base y su inversa, de la siguiente manera:

R = P^-1 A P

donde A es la matriz que representa la transformación lineal en la base estándar de R^2 (en este caso, la matriz de la transformación lineal que representa una rotación de 90° en sentido antihorario en la base estándar es la misma que la matriz R). Realizando las operaciones correspondientes, se obtiene la matriz R que representa la rotación de 90° en sentido antihorario en R^2, que es la que se muestra arriba.

3.3. Determine la matriz de la transformación lineal que representa la derivaciónen el espacio de funciones C^1[a,b], para un intervalo [a,b] dado.

La transformación lineal que representa la derivación en el espacio de funciones continuamente diferenciables C^1[a,b] para un intervalo [a,b] dado puede ser escrita como:

D(f) = f'

donde f' es la derivada de f, que también es una función continuamente diferenciable en el intervalo [a,b].

Para encontrar la matriz de esta transformación lineal en términos de una base adecuada del espacio C^1[a,b], podemos considerar una base estándar del espacio de funciones en el intervalo [a,b], dada por:

B = {1, x, x^2, ..., x^n}

donde n es el grado máximo de las funciones en C^1[a,b]. Esta base no es adecuada para la derivación, ya que la derivada de una función polinómica puede tener un grado mayor que n. En lugar de esto, podemos considerar una base alternativa del espacio C^1[a,b], dada por:

B' = {1, x, x^2, ..., x^n, f_1, f_2, ..., f_n}

donde f_1, f_2, ..., f_n son n funciones adicionales que satisfacen las condiciones:

f_i(a) = 0 para i = 1, 2, ..., n f_i'(a) = 1 para i = 1 f_i'(x) = 0 para i = 2, 3, ..., n

Estas funciones adicionales se pueden obtener mediante el método de Gram-Schmidt, aplicado a la base B. La idea es generar una base ortogonal a partir de B, y luego normalizar los vectores resultantes para obtener una base ortonormal. Luego, se pueden construir las funciones f_i como las integrales acumuladas normalizadas de cada vector de la base ortogonal.

Con esta base B', podemos escribir la derivada de cualquier función f en términos de los elementos de la base como:

f' = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + ... + c_n x^(n-1) + d_1 f_1 + d_2 f_2 + ... + d_n f_n

donde c_1, c_2, ..., c_n y d_1, d_2, ..., d_n son constantes reales.

La matriz de la transformación lineal D en términos de la base B' puede ser obtenida al aplicar D a cada elemento de la base B'. En particular, se tiene:

D(1) = 0 D(x) = 1 D(x^2) = 2x ... D(f_1) = 0 D(f_2) = f_1 D(f_3) = f_2 ... D(f_n) = f_(n-1)

Esto nos permite escribir la matriz de la transformación lineal D en términos de la base B' como:

[0 1 0 ... 0 0 0] [0 0 2 ... 0 0 0] [0 0 0 ... 0 0 0] [...] [0 0 0 ... 0 1 0] [0 f1 0 ... 0 0 0] [0 f2

Tema 4: Ecuaciones con operadores

4.1. Dada la ecuación matricial Ax = y, con A = [[1, 2], [3, 4]] y y = [5, 6],encuentre la solución general x = xp + xh.

Para encontrar la solución general de la ecuación matricial Ax = y, necesitamos determinar tanto la solución particular (xp) como la solución homogénea (xh).

*La solución particular (xp) se puede encontrar utilizando la fórmula xp = A^(-1) * y, donde A^(-1) es la inversa de la matriz A.*

Primero, calculemos la inversa de la matriz A:

A = [[1, 2], [3, 4]]

Calculamos el determinante de A:

*det(A) = (1 * 4) - (2 * 3) = 4 - 6 = -2*

Si el determinante es distinto de cero, la matriz A es invertible.

Ahora, calculemos la matriz adjunta de A:

adj(A) = [[4, -2], [-3, 1]]

La matriz inversa de A se obtiene dividiendo la matriz adjunta por el determinante:

*A^(-1) = (1 / det(A)) * adj(A) = (1 / -2) * [[4, -2], [-3, 1]] = [[-2, 1], [3/2, -1/2]]*

A continuación, multiplicamos la matriz inversa A^(-1) por el vector y:

y = [5, 6]

*xp = A^(-1) * y = [[-2, 1], [3/2, -1/2]] * [5, 6] = [[-2 * 5 + 1 * 6], [3/2 * 5 - 1/2 * 6]] = [[-10 + 6], [15/2 - 3/2]] = [[-4], [6/2]] = [[-4], [3]]*

La solución particular xp es xp = [[-4], [3]].

Ahora, para encontrar la solución homogénea (xh), resolvemos la ecuación homogénea Axh = 0, donde 0 es el vector cero. Para ello, encontramos el espacio nulo de la matriz A.

Para encontrar el espacio nulo, resolvemos el sistema de ecuaciones homogéneas correspondiente:

Axh = 0

*[[1, 2], [3, 4]] * xh = 0*

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

xh + 2yh = 0 3xh + 4yh = 0

Podemos resolver este sistema de ecuaciones mediante el método de eliminación:

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la restamos de la segunda ecuación:

3xh + 6yh = 0 3xh + 4yh = 0

markdownCopy code

```
-2yh = 0
```

Simplificamos la ecuación:

-2yh = 0

Esto implica que yh puede tomar cualquier valor. Tomemos yh = t, donde t es un parámetro.

Sustituyendo yh = t en la primera ecuación:

xh + 2yh = 0 xh + 2t = 0 xh = -2t

La solución homogénea xh se puede expresar como un múltiplo del vector [xh, yh]:

xh = [-2t, t]

Entonces, la solución general de la ecuación matricial Ax = y es:

x = xp + xh x = [-4, 3] + [-2t, t] x = [-4 - 2t, 3 + t]

Donde t es un parámetro que puede tomar cualquier valor.

4.2. Resolver la ecuación Ax = y en el espacio C^1[a,b] utilizando el teorema dado,considerando A como el operador de derivación y y(x) = e^x.

Para encontrar la solución general de la ecuación matricial Ax = y, necesitamos determinar tanto la solución particular (xp) como la solución homogénea (xh).

*La solución particular (xp) se puede encontrar utilizando la fórmula xp = A^(-1) * y, donde A^(-1) es la inversa de la matriz A.*

Primero, calculemos la inversa de la matriz A:

A = [[1, 2], [3, 4]]

Calculamos el determinante de A:

*det(A) = (1 * 4) - (2 * 3) = 4 - 6 = -2*

Si el determinante es distinto de cero, la matriz A es invertible.

Ahora, calculemos la matriz adjunta de A:

adj(A) = [[4, -2], [-3, 1]]

La matriz inversa de A se obtiene dividiendo la matriz adjunta por el determinante:

A^(-1) = (1 / det(A)) * adj(A) = (1 / -2) * [[4, -2], [-3, 1]] = [[-2, 1], [3/2, -1/2]]

A continuación, multiplicamos la matriz inversa A^(-1) por el vector y:

y = [5, 6]

xp = A^(-1) * y = [[-2, 1], [3/2, -1/2]] * [5, 6] = [[-2 * 5 + 1 * 6], [3/2 * 5 - 1/2 * 6]] = [[-10 + 6], [15/2 - 3/2]] = [[-4], [6/2]] = [[-4], [3]]

La solución particular xp es xp = [[-4], [3]].

Ahora, para encontrar la solución homogénea (xh), resolvemos la ecuación homogénea Axh = 0, donde 0 es el vector cero. Para ello, encontramos el espacio nulo de la matriz A.

Para encontrar el espacio nulo, resolvemos el sistema de ecuaciones homogéneas correspondiente:

Axh = 0

[[1, 2], [3, 4]] * xh = 0

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

xh + 2yh = 0 3xh + 4yh = 0

Podemos resolver este sistema de ecuaciones mediante el método de eliminación:

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la restamos de la segunda ecuación:

3xh + 6yh = 0 3xh + 4yh = 0
-2yh = 0

Simplificamos la ecuación:

-2yh = 0

Esto implica que yh puede tomar cualquier valor. Tomemos yh = t, donde t es un parámetro.

Sustituyendo yh = t en la primera ecuación:

xh + 2yh = 0 xh + 2t = 0 xh = -2t

La solución homogénea xh se puede expresar como un múltiplo del vector [xh, yh]:

xh = [-2t, t]

Entonces, la solución general de la ecuación matricial Ax = y es:

x = xp + xh x = [-4, 3] + [-2t, t] x = [-4 - 2t, 3 + t]

Donde t es un parámetro que puede tomar cualquier valor.

4.3. Resolver la ecuación Ax = y en el espacio C^1[a,b] utilizando el teorema dado, considerando A como el operador de derivación y y(x) = e^x.

Para resolver la ecuación Ax = y en el espacio C^1[a, b], utilizando el teorema dado, donde A es el operador de derivación y y(x) = e^x, podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales.

El teorema establece que si A es un operador lineal y continuo en un espacio de funciones continuas, y y(x) es una función continua, entonces la ecuación Ax = y tiene una solución única en ese espacio.

En este caso, consideramos A como el operador de derivación, por lo que A(x) = d/dx(x) = 1.

La ecuación Ax = y se convierte en la ecuación diferencial:

*1*dx/dx = e^x*

Simplificando, obtenemos:

dx/dx = e^x

Integrando ambos lados de la ecuación, obtenemos:

∫ dx/dx = ∫ e^x dx

x = ∫ e^x dx

La integral de e^x es simplemente e^x, por lo que tenemos:

x = e^x + C

Donde C es una constante de integración.

Por lo tanto, la solución de la ecuación Ax = y en el espacio C^1[a, b], donde A es el operador de derivación y y(x) = e^x, es:

x = e^x + C

Esta es la solución general, donde C puede tomar cualquier valor.

4.4. Resolver la ecuación $Ax = y$ en el espacio $C^1[0,1]$ utilizando el teorema dado,considerando A como el operador de integración y $y(x) = x^2$.

Para resolver la ecuación $Ax = y$ en el espacio $C^1[0, 1]$, utilizando el teorema dado, donde A es el operador de integración y $y(x) = x^2$, podemos aplicar el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones integrales.

El teorema establece que si A es un operador lineal y continuo en un espacio de funciones continuas, y $y(x)$ es una función continua, entonces la ecuación $Ax = y$ tiene una solución única en ese espacio.

En este caso, consideramos A como el operador de integración, por lo que $A(x) = \int_{[0, x]} f(t)\, dt$.

La ecuación $Ax = y$ se convierte en la ecuación integral:

$$\int_{[0, x]} f(t)\, dt = x^2$$

Para resolver esta ecuación integral, necesitamos encontrar una función $f(x)$ cuya integral desde 0 hasta x sea igual a x^2.

Diferenciando ambos lados de la ecuación con respecto a x, obtenemos:

$$f(x) = d/dx\, (x^2)$$

$$f(x) = 2x$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ que satisface la ecuación integral es $f(x) = 2x$.

Ahora, para encontrar la solución de la ecuación $Ax = y$ en el espacio $C^1[0, 1]$, podemos integrar la función $f(x) = 2x$ para obtener la solución x:

$$\int_{[0, x]} 2t\, dt = x^2$$

Integrando, obtenemos:

$$x^2 = [t^2]_{[0, x]} = x^2 - 0^2 = x^2$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación $Ax = y$ en el espacio $C^1[0, 1]$, donde A es el operador de integración y $y(x) = x^2$, es simplemente $x = x^2$.

Esta es la solución única en el espacio $C^1[0, 1]$.

Bibliografía:

Stewart, J. (2016). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.
Larson, R., Edwards, B. H. (2013). Cálculo 1 de una variable. McGraw-Hill.
Anton, H., Rorres, C. (2014). Álgebra lineal con aplicaciones. Limusa Wiley.
Hefferon, J. (2012). Álgebra Lineal. Recuperado de http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/
Lay, D. C., Lay, S. R., McDonald, J. J. (2016). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Pearson.
Geogebra. (s.f.). Software de matemáticas. Recuperado de https://www.geogebra.org/
Strang, G. (2009). Álgebra Lineal y sus aplicaciones. Limusa Wiley.

Apostol, T. M. (1999). Cálculo, Vol. 1: Un tratamiento riguroso y moderno de laintegral y las sumas infinitas. Revert Zill, D. G. (2012). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.Cengage Learning.
Hirsch, M., Smale, S., Devaney, R. (2007). Matemática: Sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales con aplicaciones en ciencias e ingeniería. Pearson Prentice Hall