Trabajo Practico #6

Objetivos

1. Aplicar la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
2. Utilizar propiedades y tablas para calcular transformadas de Laplace e inversas de funciones comunes.
3. Analizar funciones continuas a trozos y periódicas utilizando la Transformada de Laplace y la función de Heaviside.
4. Practicar la descomposición en fracciones simples para encontrar transformadas inversas de Laplace.

Desarrollo

1 Dada la función $f(t)=\begin{cases}0 & t<2\\ t & 2<t<3\\ 5 & t>3\end{cases}$, se pide calcular la transformada de Laplace de la función utilizando la definición indicando la abscisa de convergencia.

Solución

Para calcular la transformada de Laplace aplicando la defininción

$$\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_2^3 te^{-st}dt+\int_3^{\infty}5e^{-st}dt=$$

$$=-\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2}\Bigg|_2^3+\frac{5e^{-st}}{-s}\Bigg|_3^{\infty}=-\frac{e^{-3s}(3s+1)}{s^2}+\frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2}+\frac{5e^{-3s}}{s}=$$

$$=e^{-3s}\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\right)+e^{-2s}\left(\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right) \qquad s>0$$

La formula en geogebra para calcular cada termino de Laplace en dicho intervalo, está en la imagen, y es Integral (función, variable, límite inferior, límite superior) . Por ejemplo, para el intervalo (2,3) donde f vale t, sería: Integral (f, t, 2,3), habiendo previamente declarado f(t)=t. e^-st (el cuerpo de Laplace para t)

$$f(t) = t\,e^{-(st)}$$

$$= t\,e^{-st}$$

Laplace(f)

$$= \frac{1}{4\,s^2}$$

$$\int_2^3 f\,dt$$

$$= \frac{2\,s\,e^s - 3\,s + e^s - 1}{s^2\,(e^s)^3}$$

2

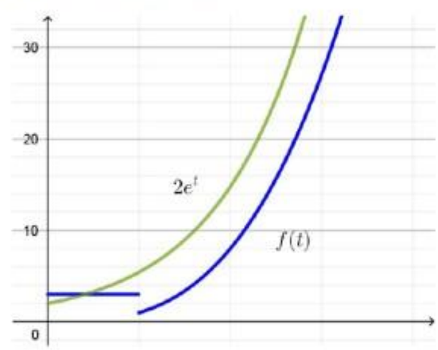
Determinar si existe la transformada de Laplace de la función.

$$f(t)=\begin{cases}3 & 0<t<1\\ t^3 & t\geq 1\end{cases}$$

y escribir la función utilizando la función escalón.

Recuerden las condiciones de suficiencia para que laplace exista: * Que la funcion sea seccionalmente continua. * Y que sea de orden exponencial, es decir que exista una funcion que en algun tramo de t (variable independiente) siempre sea mayor que mi funcion original, como en este caso2*e^2t.

La función es seccionalmente continua, solo se discontinua en el punto 1 y la discontinuidad es de salto finito. Además, es de tipo exponencial



Para escribir la función por medio de la función escalón se debe considerar

$$f(t)=3\left[U(t)-U(t-1)\right]+t^3\,U(t-1)$$

3

Dada la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\leq t\leq 3\\ 1 & 3<t\leq 5\\ t^2 & t>5\end{cases}$$

Calcular su transformada de Laplace utilizando la definición de transformada y escribir por medio de la función escalón.

Solución

Utilizando la definición,

$$\mathfrak{L}\left(f\left(t\right)\right)=\int_0^{\infty}f\left(t\right)e^{-st}dt=\int_3^{5}e^{-st}dt+\int_5^{\infty}t^2e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=3}^{t=5}-\left.\frac{e^{-st}\left(s^2t^2+2st+2\right)}{s^3}\right|_{t=5}^{t=\infty}$$

$$\mathfrak{L}\left(f\left(t\right)\right)=-\frac{e^{-5t}}{s}+\frac{e^{-3t}}{s}+\frac{e^{-5t}\left(25s^2+10s+2\right)}{s^3}=\frac{e^{-3t}}{s}+e^{-5t}\left(\frac{24}{s}+\frac{10}{s^2}-\frac{2}{s^3}\right)\qquad s>0$$

Para escribir la función por medio de la función escalón se debe considerar

$$f\left(t\right)=U\left(t-3\right)-U\left(t-5\right)+t^2\,U\left(t-5\right)$$

4

Expresar en términos de la función salto unidad la función $f(t)$, calculando posteriormente su transformada de Laplace: $f(t)=\begin{cases}0\,, & t<0\\ 2t^2, & 0\le t<3\\ 9\,, & t\ge 3\end{cases}$

Datos: $\mathfrak{L}\left[t^n\right]=\dfrac{n!}{s^{\,n+1}}$; $\mathfrak{L}\left[U\left(t-c\right)\right]=\dfrac{e^{-sc}}{s}$

5

Hallar la transformada de las siguientes funciones, utilizando la tabla y las propiedades de las transformadas de Laplace:

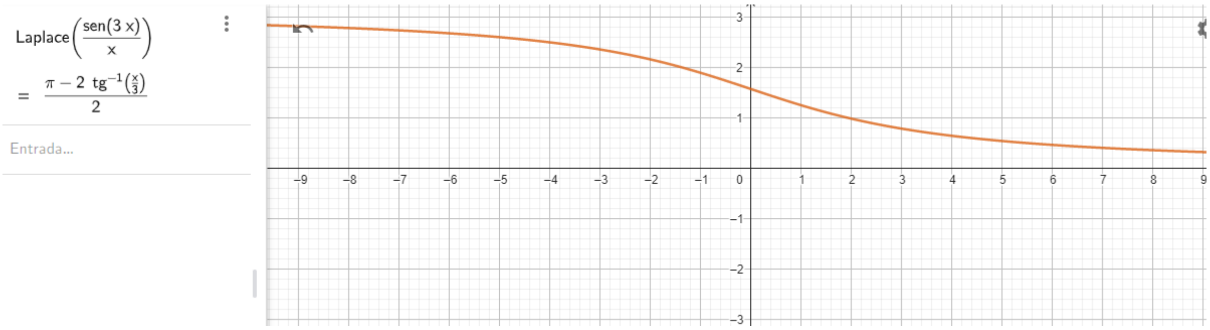
$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}3x}{x}\qquad\qquad \text{b)}\ \int_0^{x}\frac{e^t-\cos 2t}{t}dt$$

Solución

Se aplica la propiedad: $\mathfrak{L}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]=\displaystyle\int_s^{\infty}\mathfrak{L}\left(f(x)\right)(u)du$ comprobando la condición de existencia del límite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}=3$

$$\mathfrak{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]\underset{propiedad}{=}\int_s^{\infty}\left[\mathfrak{L}\left(\operatorname{sen}3x\right)\right](u)du\underset{\substack{tabla\\(u>0)}}{=}\int_s^{\infty}\frac{3}{u^2+9}du\underset{(s>0)}{=}\lim_{R\to\infty}\int_s^{R}\frac{1/3}{\left(u/3\right)^2+1}du=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{u}{3}\right]_s^R=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{s}{3},\quad s>0$$



Ejercicio 5.b Utiliza la propiedad de laplace de una integral.

b) Aplicando la propiedad: $\mathfrak{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathfrak{L}\big(f(x)\big)$, se obtiene

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}\mathfrak{L}\left[\frac{e^t - \cos 2t}{t}\right]$$

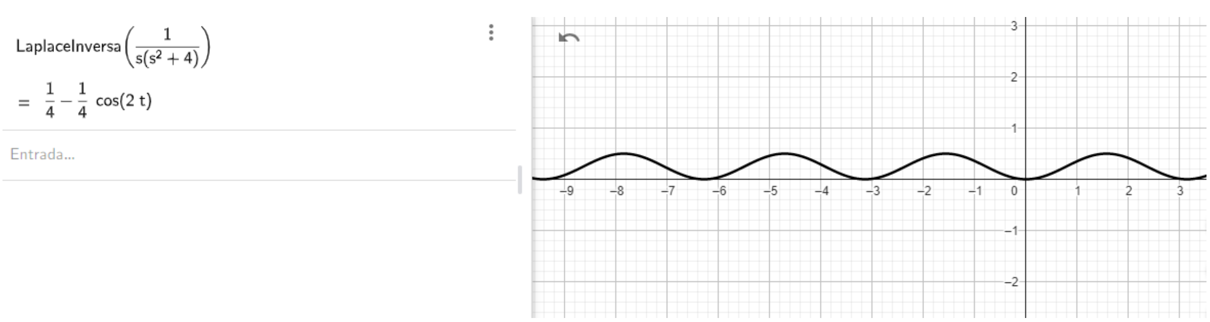
Ahora se aplica la propiedad

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - \cos 2t}{t} = 1$$

$$\frac{1}{s}\mathfrak{L}\left[\frac{e^t - \cos 2t}{t}\right] = \frac{1}{s}\int_s^\infty \left[\mathfrak{L}(e^x - \cos 2x)\right] du \underset{\substack{tabla\\(u>1)}}{=} \frac{1}{s}\int_s^\infty \left(\frac{1}{u-1} - \frac{u}{u^2+4}\right) du \underset{(s>1)}{=}$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left[\log\frac{u-1}{\sqrt{u^2+4}}\right]_s^R = -\frac{1}{s}\log\frac{s-1}{\sqrt{s^2+4}}, \qquad s>1$$

6 Calcula la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{1}{s\left(s^2+4\right)}$.



$$\text{Laplace}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ \cos(2\ t)\right)$$

$$= \quad \frac{1}{s^3 + 4\ s}$$

Solución

Para calcular la transformada inversa se descompone en fracciones simples

$$\frac{1}{s\left(s^2+4\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \qquad \Rightarrow A = 1/4 \quad B = -1/4 \quad C = 0$$

$$F\left(s\right) = \frac{1}{s\left(s^2+4\right)} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}$$

Utilizando la tabla de transformadas de Laplace elementales

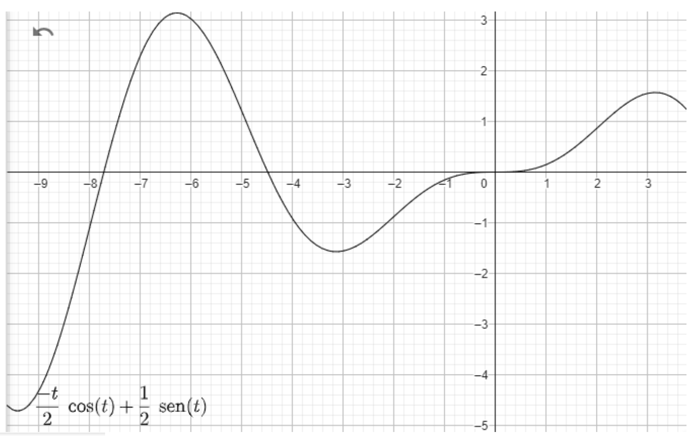
$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right) = \frac{1}{4}\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t$$

7 Calcular la transformada inversa de Laplace de la función: $F(s) = \dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^2}$.

$$\text{LaplaceInversa}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)$$

$$= \quad \frac{-t}{2}\ \cos(t) + \frac{1}{2}\ \text{sen}(t)$$

Entrada...



$$\text{Laplace}\left(\frac{1}{2}\ (\text{sen}(t) - t\ \cos(t))\right)$$

$$= \quad \frac{1}{s^4 + 2\ s^2 + 1}$$

Solución

A modo ilustrativo, abordaremos este cálculo mediante dos procedimientos distintos.

Haciendo uso de la propiedad de convolución,

$$F(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}=\mathcal{L}\left(\operatorname{sen} x\right)\mathcal{L}\left(\operatorname{sen} x\right)\underset{convolución}{=}\mathcal{L}\left(\operatorname{sen} x*\operatorname{sen} x\right)$$

luego sólo resta calcular esa convolución

$$\operatorname{sen} x*\operatorname{sen} x=\int_0^x \operatorname{sen} u\operatorname{sen}(x-u)du=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\cos(2u-x)-\cos x\right]du=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x-x\cos x\right)$$

para saber que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x-x\cos x\right)$$

Bibliografía

1. Spiegel, M. R., & Lipschutz, S. (2009). Transformadas de Laplace: Serie Schaum. McGraw-Hill Interamericana.
2. Soler, M. A., & Montenegro, S. (2009). Aplicación de las transformadas de Laplace y de Fourier al análisis de circuitos eléctricos. Editorial de la Universidad de Flores.
3. Ramírez, J. L. (2002). Transformada de Laplace y aplicaciones. Instituto Politécnico Nacional.
4. Moreno, J. (2010). La Transformada de Laplace y sus aplicaciones en ecuaciones diferenciales. Universidad Nacional de Colombia.