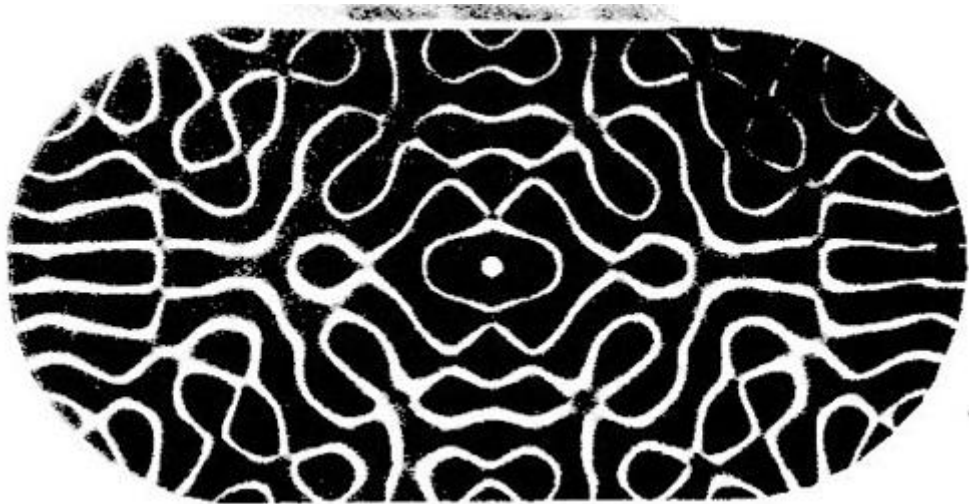


PLACAS DE CHLADNI



Computación I, 1º Grado en Física



ÍNDICE

1. Introducción

1. 1. Placas de Chladni: historia y experimentos.....	3
1.2. Carácter ondulatorio del fenómeno.....	4
1.3. Ondas sonoras.....	5

2. Objetivos.....

3. Ecuaciones y teoría

3.1. Condiciones iniciales de trabajo.....	7
3.2. Ley de Chladni y ecuación de onda. Indicaciones sobre la resolución analítica	
3.2.1. Conceptos básicos: Ley de Chladni.....	7
3.2.2. Ecuación de onda.....	7
3.3. Superposición de soluciones.....	9
3.4. Variación de las dimensiones de la placa.....	10
3.5. Ampliación del modelo bidimensional a un nuevo modelo tridimensional	
3.5.1. Introducción y construcción del modelo tridimensional.....	12
3.5.2. Ecuación de onda en tres dimensiones y superposición de soluciones.....	13
3.5.3. Superposición de soluciones.....	14

4. Resultados y discusión

4.1. Conceptos básicos.....	15
4.2. Superposición de soluciones.....	17
4.2.1. Resta de soluciones	17
4.2.2. Suma de soluciones.....	18
4.3. Variación de las dimensiones de la placa.....	19
4.3.1. Resta de soluciones.....	20
4.3.2. Suma de soluciones.....	21
4.4. Corte del cubo por un plano perpendicular a uno de los ejes	
4.4.1. Comparación del método analítico y el numérico.....	22

4.4.2. Análisis de los nodos para varios cortes perpendiculares a un mismo eje.....	23
4.4.3. Comparación entre cortes perpendiculares a distintos ejes.....	26
4.5. Corte del cubo con planos oblicuos	
4.5.1. Análisis de los nodos en planos oblicuos.....	26
4.5.2. Comparación entre cortes oblicuos semejantes respecto de los ejes.....	30
5. Conclusiones.....	31
6. Bibliografía.....	33
7. Anexo: Índice de scripts, animaciones y funciones.....	34

1. INTRODUCCIÓN

1. 1. Placas de Chladni: historia y experimentos

En el siglo XVIII el doctor en derecho, cazador de meteoritos, violinista y físico alemán Ernst Florenz Friedrich Chladni diseñó el experimento por el que es recordado: las placas de Chladni. Estudioso de la acústica, utilizó una placa metálica cuadrada y el arco de un violín para mostrar el comportamiento de las ondas sonoras al propagarse. Su experimento consistía en tomar la placa entre los dedos índice y pulgar buscando una superficie mínima de contacto y frotarla con el arco, sobre la placa se había espolvoreado previamente una sustancia granulada como la arena. Al frotar la placa se producían llamativos dibujos según con qué ángulo se apoyara el arco y cómo se sujetara la placa. El propio Chladni recogió los resultados obtenidos en su tratado *Die Akustik*, publicado en 1802.

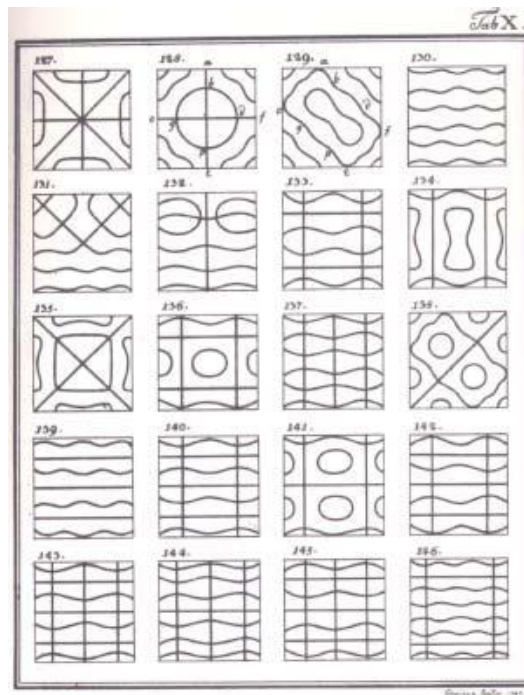


Fig.1.1. Patrones en una placa de Chladni de bordes libres.

El experimento de Chladni adquirió cierta notoriedad debido al interés que mostró el emperador Napoleón Bonaparte en el mismo. Probablemente incitado por Laplace ofreció un premio de tres mil francos a quién fuera capaz de explicar el fenómeno.

En 1817 la matemática francesa Sophie Germain (ayudada por Lagrange) encontró la ecuación diferencial que regía el fenómeno y ganó el premio. Sin embargo, su trabajo tenía serios errores en lo referente a las condiciones de contorno, en 1850 Gustav Kirchhoff señaló este hecho y resolvió el problema para un disco con borde libre utilizando valores propios. La ecuación diferencial para una placa rectangular no fue planteada hasta 1909 por Walter Ritz.

En la actualidad, el experimento de Chladni puede reproducirse utilizando un generador de frecuencias que se conecta a un altavoz o a un amplificador que a su vez están unidos a una placa metálica (cuadrada, rectangular o redonda) mediante una varilla clavada en su centro. La experiencia puede observarse en varias de sus modalidades en:

1.2. Carácter ondulatorio del fenómeno

Los patrones observados en el experimento de Chladni muestran las líneas en las cuales se acumula la arena, el motivo de que la arena quede inmóvil en esas líneas es sencillamente que se trata de los puntos en los que la placa metálica no vibra. Las líneas en las cuáles la amplitud del movimiento es cero, es decir, la vibración es nula, se conocen como líneas nodales.

Para entender qué es una línea nodal es conveniente comenzar tratando el ejemplo unidimensional y la formación de nodos. Si tomamos una cuerda, la sujetamos por sus dos extremos (esta condición de contorno hace que nuestras ondas sean estacionarias) y damos una sacudida en uno de ellos veremos cómo el movimiento se propaga hasta el otro y vuelve hacia el punto de partida. Si en lugar de dar una sacudida producimos un movimiento de oscilación con una frecuencia constante adecuada en un extremo de la cuerda conseguimos que se produzcan ondas viajeras en los dos sentidos posibles, estas interfieren entre sí dando lugar a vientres, puntos de máxima interferencia constructiva; y a nodos, puntos de interferencia destructiva y vibración nula.

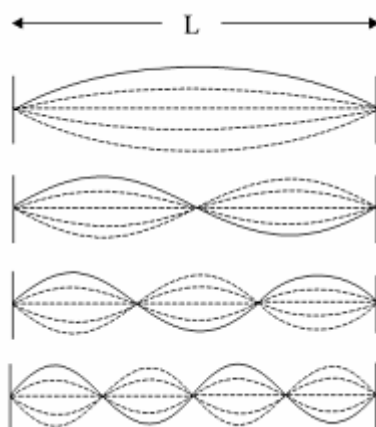


Fig. 1.2.1. Ondas estacionarias en una cuerda y formación de distinto número de nodos para distintas frecuencias.

En el caso de una placa podemos imaginar que tenemos ondas que viajan en dos direcciones que se corresponden con dos de los lados perpendiculares de la placa, si las ondas fueran por completo independientes tendríamos una serie de vientres y nodos en cada dirección de la placa. No obstante, la combinación de las ondas (según la ecuación que se verá más adelante) produce que se formen líneas nodales de vibración nula (en las que se acumula la arena) y zonas de máxima vibración (aquellas que están limpias). Al igual que en el caso de la cuerda tenemos ondas estacionarias, por estar confinadas entre los extremos de la placa, esta vez en dos dimensiones. Hay que destacar que las ondas son estacionarias a pesar de estar libres los extremos de la placa. Esta es la condición de contorno que se considera en el caso de las placas de Chladni y la que consideraremos en este proyecto.

1.3. Ondas sonoras

En el caso de nuestras placas bidimensionales tenemos una diferencia fundamental con el caso de la onda estacionaria que se propaga en una cuerda. En el ejemplo de la cuerda observamos que la propagación de la onda se produce en el eje formado por la cuerda, mientras que la oscilación se produce en un plano perpendicular a ese eje, es decir, tenemos ondas transversales. Por el contrario, en el caso de ondas sonoras como las del experimento de Chladni la vibración se produce en la misma dirección que la propagación de la onda, se trata de ondas longitudinales.

Este hecho debe tenerse en cuenta porque si tuviéramos ondas transversales viajando en x e y , que deben tener asociadas vibraciones en direcciones perpendiculares a esos ejes, podríamos encontrar vibración en cualquiera de los ejes del espacio (x , y o z). Al tener ondas longitudinales la vibración se produce en el plano de la placa y considerar un sistema bidimensional resulta adecuado.

No obstante, cuando representemos las vibraciones en la placa obtendremos gráficas en las cuales x e y corresponden a los lados de la placa y z es el eje en el que representamos (no en el que se produce) la amplitud con la que vibra cada punto de la placa, cero si es un nodo y máxima si es un vientre.

2. OBJETIVOS

El comportamiento de las ondas sobre diversas superficies representa un campo de estudio aún por profundizar y con diferentes aplicaciones. El objetivo de este proyecto es estudiar la propagación de ondas sonoras en superficies o placas de Chladni, comprender su base teórica y, ayudándonos de esta, proponer y resolver diferentes modelos idealizados que nos ayudarán a entender y predecir la Física de este fenómeno. Trataremos con placas rígidas rectangulares y con bordes libres, pues el proceso y los patrones a estudiar resultan de una dificultad adecuada para las herramientas con las que contamos.

Este proyecto tratará de representar gráficamente los patrones generados por la arena sobre la placa, siempre teniendo en cuenta el carácter idealizado de la representación en comparación con el experimento real: supondremos el sistema bidimensional y obviaremos las transformaciones iniciales que experimenta la superficie, centrándonos en simular la situación de equilibrio.

Partiendo de este sistema, evaluaremos además tanto gráfica como analíticamente los resultados al variar diferentes características del mismo: superposición de dos soluciones a la ecuación de onda y modificación de las dimensiones de la placa. Comprobaremos que todas estas situaciones generan diferentes patrones, y estudiaremos distintos valores de estas variables comentando los resultados.

El hecho de trabajar con un sistema idealizado bidimensional reduce el número de posibles sistemas a tratar en el proyecto. Para mantener el carácter longitudinal de las ondas sonoras pero también permitir un mayor abanico de posibilidades, tras modelizar los tres casos anteriores trataremos de representar la propagación de una onda en un sistema tridimensional: un cubo. Del mismo modo que en dos dimensiones, nos limitaremos a estudiar la situación de equilibrio. Buscaremos analogías entre las placas de Chladni originales y los patrones obtenidos al seccionar el cubo extrayendo planos tanto horizontales como oblicuos. Finalmente, obtendremos también diferencias y comentaremos su sentido físico.

3. ECUACIONES Y TEORÍA

3.1. Condiciones iniciales de trabajo

La propagación de ondas sonoras adquiere diferentes comportamientos dependiendo del medio o sistema que elijamos para su estudio. Anteriormente hemos indicado como objetivo la modelización de placas de Chladni: rígidas, rectangulares o cuadradas.

Para simplificar las ecuaciones a deducir y la idealización de la propagación de las ondas, también supondremos a la placa libre en sus extremos (unos bordes sujetos supondrían una modificación en el comportamiento original de la onda).

Por lo tanto, debemos recordar que a lo largo de los siguientes apartados nos referiremos siempre a placas con estas características, en las cuales estudiaremos el comportamiento de ondas sonoras longitudinales y estacionarias.

3.2. Ley de Chladni y ecuación de onda. Indicaciones sobre la resolución analítica

3.2.1. Conceptos básicos: Ley de Chladni

Ernst Chladni propuso una ley fruto de sus experimentos, conocida como *Ley de Chladni*. Si bien no es tan útil como la ecuación de onda para describir las vibraciones de sistemas, introduce varios conceptos que debemos conocer.

$$f = C(m + 2n)^2$$

Ley de Chladni.

Donde f es la vibración a la que se somete la placa, C es una constante, y m y n son el número de líneas nodales paralelas a cada una de las direcciones, x e y , que definen la superficie. Las líneas nodales están formadas por nodos, puntos en los que el medio no vibra (la amplitud es cero) característicos de las ondas estacionarias.

3.2.2. Ecuación de onda

Debido a que idealizamos el sistema de estudio con el que interaccionan las ondas considerándolo bidimensional, las fórmulas que rigen el movimiento de éstas deberán escribirse para dos dimensiones. Estas fórmulas pueden obtenerse a partir de la ecuación de onda, que es la misma para placas tanto rectangulares como circulares, por ejemplo, al ser las dos superficies bidimensionales.

La ecuación de onda en dos dimensiones corresponde a la expresión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{1}{c^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ecuación de onda en dos dimensiones.

Siendo u la función de onda, t la dimensión temporal, x e y las coordenadas espaciales y c la velocidad de la onda en el medio a considerar.

Sin embargo, esta ecuación no nos proporciona información acerca de las características vibracionales del sistema. Resolver la ecuación de ondas implica resolver tres ecuaciones diferenciales, proceso que explicaremos brevemente:

Para obtener las soluciones, utilizamos el método de separación de variables. Consiste en obtener una aproximación, usando una función producto: $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$

Separando los tres términos, obtenemos las ecuaciones diferenciales, que corresponden a las de un movimiento armónico simple: la placa vibra con un movimiento análogo al de un MAS.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + Kx^2 X(x) = 0$$

$X(x)$: Ecuación en función de x .

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Ky^2 Y(y) = 0$$

$Y(y)$: Ecuación en función de y .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

$T(t)$: Ecuación en función de t .

Siendo X , Y y T las funciones que hemos definido en el método de separación de variables, t la dimensión temporal, x e y las coordenadas espaciales y ω la frecuencia angular de la onda. Además, $Kx^2 + Ky^2 = \omega^2/c^2 \rightarrow |K| = \omega^2/c^2$, donde c es la velocidad de la onda en el medio (en nuestro caso, la placa).

Resolviendo estas tres ecuaciones obtenemos una función general:

$$u(x,y,t) = Ae^{KxX+KyY-\omega t}$$

Solución a la ecuación de onda en dos dimensiones.

Si consideramos las posibles soluciones reales, obtenemos una expresión que se corresponde a la interacción de dos ondas, una en el eje x y otra en el y :

$$u(x,y,t) = A \sin(KxX) \sin(KyY) \cos(\omega t)$$

Solución restringida a valores reales.

Aplicando la condición de que la onda se haga cero en los extremos (su amplitud tenderá a cero) y teniendo en cuenta que trabajamos con estacionarias:

$$Kx \cdot a = \pi n$$

$$Ky \cdot b = \pi m$$

Siendo $n=1,2,3,\dots$ al ser estacionarias; a y b son las dimensiones de la placa (si es cuadrada, serán iguales).

$$u(x, y, t) = A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(\omega t)$$

Donde m y n son, respectivamente, el número de líneas nodales en las direcciones OY y OX, y sin contar los nodos en el borde de la placa.

En general usaremos $m+1, n+1$ en lugar de m, n , para poder asociar $m, n=0,0$ con el modo fundamental de vibración. De esta manera, la ecuación resulta:

$$u(x, y, t) = A \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) \cos(\omega t)$$

Solución a la ecuación de onda en función de las dimensiones de la placa y del valor de los modos de vibración.

Esta última ecuación es la expresión obtenida de la ecuación de onda que usaremos como base para las representaciones en placas bidimensionales, reproduciendo diversos patrones: supondremos una frecuencia constante y modificaremos el número de líneas nodales (m, n), evaluando los cambios en la disposición de la arena en la superficie.

3.3. Superposición de soluciones

Dos modos de vibración (asociados a un determinado número de nodos m y n) se llaman degenerados cuando la frecuencia asociada al modo m, n es la misma que la asociada al n, m (se intercambia el número de nodos en cada eje): $f_{m,n} = f_{n,m}$

Esto ocurre en las placas cuadradas debido a su simetría: el número de nodos en la dirección x es el mismo que en la dirección y ; este concepto es interesante para comprender cómo funciona la superposición de soluciones $u(x, y, t)$.

Es posible superponer dos modos de vibración (esto es, dos soluciones diferentes a la ecuación de onda) a fin de generar nuevas figuras sobre la placa. Este fenómeno se debe a que, cuando superponemos dos soluciones, cada una con un valor determinado de m y de n , el resultado final ha de depender de los dos pares y, por lo tanto, las líneas nodales no corresponderán a un par m, n ni a otro sino que adquirirán una forma intermedia. En un principio, m determina la disposición nodal en una dirección, y n en la otra; esto ya no es así al superponer los dos modos: como las líneas cambian su disposición, se podrán observar cambios en la ordenación de la arena sobre la placa.

El procedimiento calcular las soluciones para la superposición de dos modos es el que sigue:

En primer lugar, escribimos las dos soluciones de la ecuación de onda. Superponerlas consiste simplemente en combinarlas, es decir, en sumarlas o restarlas. Para ello, podemos extraer factor común de $\cos(\omega t)$:

$$Za = A \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right)$$

Solución analítica a la ecuación de onda del primer modo de vibración.

$$Zb = A \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(m+1)\pi y}{b}\right)$$

Solución analítica a la ecuación de onda del segundo modo de vibración.

Es importante tener en cuenta que m de la primera solución equivale a n de la segunda, es decir, m, n de (1) equivale a n, m de (2), lo cual guarda relación con la degeneración modal.

Finalmente, como la superposición consiste en operar con las dos soluciones:

$$Z = (Za \pm Zb) \cos(\omega t)$$

Expresión final de la superposición de dos soluciones.

Dependiendo del signo entre ambas soluciones, las líneas nodales determinarán la obtención de un patrón u otro. También variando los valores de m y n podremos dibujar nuevas figuras.

Es interesante indicar que no siempre que las placas son cuadradas nos encontramos con modos degenerados. Existe un fenómeno denominado *acoplamiento de Poisson*, el cual es capaz de anular la degeneración entre los dos modos de vibración. Se trata de una interacción entre ambos modos, de manera que las oscilaciones que provocan se apoyan y refuerzan mutuamente en algunos casos (interferencia constructiva), y se oponen generando mayor rigidez en el movimiento, en otros (interferencia destructiva). En estos casos, la frecuencia con la que vibra la placa será diferente para la suma y para la resta de soluciones.

3.4. Variación de las dimensiones de la placa

La ecuación de onda para una placa rectangular es análoga a la de una cuadrada, siendo en este caso las dimensiones a y b diferentes. Los sistemas cuadrados, sin embargo, presentan características propias, como la degeneración. Para estudiar la estrecha relación entre ambos tipos de placas, podemos simular la “transformación” de un rectángulo en un cuadrado variando los valores a y b hasta que $a/b=1$.

En primer lugar, la expresión inicial que utilizamos para describir los patrones que aparecen en una placa rectangular es la deducida a partir de la ecuación de onda, introduciendo la modificación de m y n por $m+1$, $n+1$ (ver *Solución a la ecuación de onda en función de las dimensiones de la placa y del valor de los modos de vibración*)

Sin embargo, conforme las dimensiones del rectángulo se van acercando a la unidad, las líneas comienzan a cambiar, tal y como ocurría al superponer dos soluciones. En efecto, y como se ha comprobado experimentalmente (Waller, 1949, y posteriormente nuevas investigaciones en 1961), el modificar las dimensiones de un rectángulo convirtiéndolo en un cuadrado implica la superposición de dos soluciones: el primer modo será $m,0$ y el segundo $0,n$.

Dependiendo del modo inicial del que partamos en el rectángulo, el resultado o superposición final corresponderá a la suma o a la resta de modos $Za \pm Zb$. En ambos casos, los patrones observados en el cuadrado final serán idénticos a los obtenidos mediante superposición en placas cuadradas, comentados anteriormente.

Recordemos las ecuaciones Za y Zb ., cada una representaba una solución diferente asociada a un modo vibracional concreto. Al principio, cuando consideramos una placa rectangular, sólo nos será necesaria una de las dos soluciones (solo existe un modo de vibración), pero es conveniente definir las dos ya que ambas aparecerán en la expresión final.

En este caso, al igual que en la superposición en sistemas cuadrados, debemos elegir cuidadosamente m y n de modo que m,n del primer modo equivalga a n,m del segundo.

Aunque al principio tratamos de modelizar un rectángulo, para facilitar la visualización consideramos a y b iguales en todo momento, y variamos la incidencia de una solución sobre la otra mediante un factor i . Necesitamos una expresión analítica, y no podemos cambiar de placa como probablemente lo haríamos en un laboratorio. Para ir modificando gradualmente las dimensiones de la placa, recordamos la ecuación para la superposición, aunque introduciendo este nuevo factor:

$$Z = (i \cdot Za \pm Zb) \cos(\omega t)$$

$$Z = (Za \pm i \cdot Zb) \cos(\omega t)$$

Expresión final de la variación de las dimensiones de la placa.

i toma valores entre 0 (inicial) y 1 (final). En realidad podemos usar cualquiera de las dos expresiones, nuestra elección dependerá de qué modo deseamos representar inicialmente: si deseamos modelizar la transformación del modo m,n asociado a la solución Za , colocaremos i en Zb para que al principio sólo exista este modo m,n . Si queremos ver representado inicialmente el modo m',n' asociado a Zb , haremos Za cero en el instante inicial multiplicándola por i .

Por ejemplo, si deseamos comenzar con el modo asociado a la solución Zb : inicialmente $i=0$, de modo que solo existe un modo en el rectángulo, Zb . i crece entonces hasta alcanzar el 1: en este instante, ambas soluciones tienen el mismo “peso” en la expresión final, y la ecuación es análoga a la deducida para una placa cuadrada.

3.5. Ampliación del modelo bidimensional a un nuevo modelo tridimensional

3.5.1. Introducción y construcción del modelo tridimensional

Una vez comprobado que el modelo que utilizamos en dos dimensiones coincide con las predicciones teóricas y con los datos aportados por la bibliografía resulta interesante intentar ampliarlo a un campo de estudio más amplio: el espacio tridimensional.

En este apartado vamos a intentar modelizar lo que sucedería si tuviéramos un cubo de un material homogéneo en el cual se produce una vibración. Si para el caso de dos dimensiones podíamos imaginar que teníamos ondas longitudinales que se propagan en dos ejes (x e y), para este nuevo caso debemos suponer que tenemos tres dimensiones correspondientes a tres aristas del cubo perpendiculares entre sí, que se corresponden con los ejes x, y y z del espacio. En cada una de las direcciones se propagarán ondas longitudinales y estacionarias que se combinarán de forma similar a como lo hacían en el caso de las placas bidimensionales.

De nuevo es importante señalar que tratamos con ondas longitudinales, al ser así tenemos vibraciones x, y y z, cada una de ellas asociada a la onda que se propaga en la misma dirección. Si las ondas fueran transversales, a cada dirección de propagación en el espacio podrían corresponderle vibraciones en cualquier plano perpendicular a esa dirección lo que aumentaría el número de combinaciones posibles.

Trabajar con ondas en tres dimensiones resulta asequible solo si estas son longitudinales y aun así nos encontramos con un obstáculo fundamental: tenemos una función de onda que depende de tres dimensiones espaciales y una temporal, es decir, nos movemos en un espacio de soluciones de cuatro dimensiones y en el caso de la representación de la función de onda en función de sus variables necesitaríamos cinco dimensiones. Evidentemente, este tipo de representación es imposible de realizar e inobservable para el ojo humano. Por ello deberemos trabajar para tiempos constantes y valores fijos de una de las variables espaciales o utilizar animaciones para mostrar el paso del tiempo (cuarta dimensión) con una de las variables espaciales fijas. La forma de fijar estas variables consiste en tomar planos que seccionan a nuestro modelo cúbico tridimensional. Estos planos pueden corresponder a un valor constante de una de las variables (en general fijaremos z aunque la simetría del problema hace que los resultados sean los mismos al fijar cualquiera de las otras dos variables), o sea, a un plano perpendicular al eje del tipo:

$$z = k;$$

$$k \in [0, longitud\ arista]$$

También podemos cortar el cubo utilizando planos oblicuos al eje que vendrán dados por la relación de una de las variables espaciales con las otras dos, por ejemplo:

$$z = 2x + y$$

Podríamos incluso seccionar el cubo utilizando superficies que no se correspondan con planos (como $z = xy$), pero este tipo de representaciones carecen de interés pues la distribución de líneas nodales y de vientres en las mismas es difícil de entender y poco visual.

En este modelo tridimensional necesitaremos tres números de onda, uno asociado a cada dirección, para caracterizar los posibles modos de vibración. Utilizaremos la letra n para el eje x , la m para el eje y y la p para el eje z .

3.5.2. Ecuación de onda en tres dimensiones y superposición de soluciones

Para el movimiento de una onda longitudinal en tres dimensiones tenemos una ecuación diferencial similar a la de una onda en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda en tres dimensiones

Siendo u la función de onda; x, y, z las coordenadas espaciales; t la dimensión temporal y v una constante por determinar.

Para resolver la ecuación diferencial, sencillamente podemos tomar una solución análoga a la del caso de dos dimensiones y comprobar que cumple la ecuación diferencial:

$$u(x, y, z, t) = A \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{(p+1)\pi z}{c}\right) \cos(\omega t)$$

Solución a la ecuación de onda en tres dimensiones

Siendo A la amplitud (que elegiremos de forma tal que convenga a la buena observación de nuestras representaciones, ignorando si el valor se aproxima o no al real); y a, b y c las dimensiones de las aristas del cubo en los ejes x, y, z , respectivamente. Dado que se trata de un cubo podemos escribir la ecuación como:

$$u(x, y, z, t) = A \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{(p+1)\pi z}{a}\right) \cos(\omega t)$$

Desarrollando las derivadas parciales de función de onda encontramos que $u(x, y, z, t)$ es solución de la ecuación diferencial siempre que se cumpla que:

$$\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{(n+1)\pi y}{a}\right)^2 + \left(\frac{(p+1)\pi z}{a}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \omega^2$$

Condición para que la solución de la ecuación de onda en tres dimensiones sea solución

Dado que en este apartado no necesitaremos conocer explícitamente el valor de v ni el de ω nos limitaremos a señalar que tenemos la ecuación anterior como condición necesaria y utilizaremos la solución encontrada para la ecuación de onda en tres dimensiones. De nuevo podremos encontrar distintos patrones variando el número de líneas nodales.

3.5.3. Superposición de soluciones

Dado que tenemos que las soluciones a la ecuación de onda son linealmente independientes sabemos que la suma y resta de soluciones serán también soluciones. Además, puesto que el valor de la frecuencia vendrá dado por m, n y p ($f(m,n,p)$) podemos obtener la misma frecuencia combinando valores distintos de líneas nodales. De forma idéntica al caso de las placas tendremos modos degenerados, por ejemplo, tendremos la misma f en los siguientes casos:

$$f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,1)$$

La degeneración se complica bastante más para valores mayores en las líneas nodales, un ejemplo es:

$$\begin{aligned} f(5,0,0) &= f(0,5,0) = f(0,0,5) = f(1,2,2) = f(2,1,2) = f(2,2,1) = f(3,1,1) = f(1,3,1) \\ &= f(1,1,3) = f(3,2,0) = f(2,3,0) = f(3,0,2) = f(2,0,3) = f(0,3,2) \\ &= f(0,2,3) = f(4,1,0) = f(1,4,0) = f(4,0,1) = f(1,0,4) = f(0,4,1) \\ &= f(0,1,4) \end{aligned}$$

Podemos escribir esto en forma de tabla para verlo más claro teniendo en cuenta que $m+n+p=\text{constante}$, para este caso, $m+n+p=5$.

	VARIACIÓN DEL ORDEN (equivale a variar la orientación del cubo)					
VARIACIÓN DE LOS VALORES DE LAS LÍNEAS NODALES	5,0,0		0,5,0		0,0,5	
	1,2,2		2,1,2		2,2,1	
	3,1,1		1,3,1		1,1,3	
	3,2,0	3,0,2	2,3,0	0,3,2	2,0,3	0,2,3
	4,1,0	4,0,1	1,4,0	0,4,1	1,0,4	0,1,4

Igual que hacíamos en el caso bidimensional podremos superponer soluciones sumando y restando los distintos modos. Escribimos las soluciones para cada combinación de líneas nodales y las sumamos o restamos. Si lo hiciéramos para el primer ejemplo en el cual la suma de m, n y p era 1 tendríamos:

$$Z1 = A \sin\left(\frac{(1+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(0+1)\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{(0+1)\pi z}{a}\right)$$

$$Z2 = A \sin\left(\frac{(0+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(1+1)\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{(0+1)\pi z}{a}\right)$$

$$Z3 = A \sin\left(\frac{(0+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(0+1)\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{(1+1)\pi z}{a}\right)$$

$$Z = (Z1 \pm Z2 \pm Z3) \cos(\omega t)$$

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Conceptos básicos

En primer lugar y tras deducir una expresión de la solución a la ecuación de onda que permitiera modelizar un sistema bidimensional idealizado de una placa de Chladni, tratamos de representar diversas figuras, comparando nuestros resultados con los aportados por diferentes autores. Antes de comenzar con la superposición de soluciones, es necesario comprobar si la ecuación de base funciona bien en nuestro script. Tratamos de representar sobre una placa cuadrada.

$$u(x,y,t) = A \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) \cos(\omega t)$$

Como queremos obtener diferentes figuras, modificaremos los valores m,n , a fin de obtener nuevas disposiciones de líneas nodales y por lo tanto nuevos patrones. Para ello, suponemos el tiempo como una constante, aportando a t un valor arbitrario: debemos recordar que buscamos una idealización del experimento, y por lo tanto no consideramos la evolución de las figuras a una misma frecuencia a lo largo del tiempo, sino que nos centramos en el estado final de equilibrio.

El valor t ha sido definido constante. El valor de w se define conociendo su frecuencia f . Fletcher y Rossing, en *The Physics of Musical Instruments*, proporcionan diferentes valores para f según el modo de vibración a considerar. Es bien conocida la relación $\omega=2\pi f$. Así, conociendo f , podremos dar un valor experimental verídico a ω .

Como indican los miembros de *The Experimental Nonlinear Physics Group* (Universidad de Toronto) en *Chladni patterns in vibrated plates*, las dimensiones de una placa de Chladni pueden tomarse como $a=b$ (placa cuadrada)=70 cm.

De esta manera, sólo queda probar diferentes valores de m,n (diferentes modos) y estudiar los resultados:

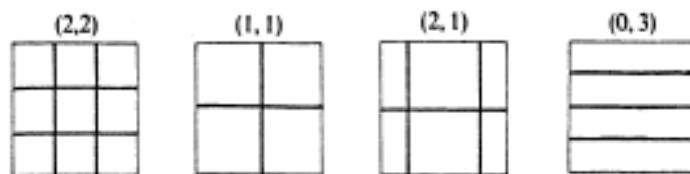
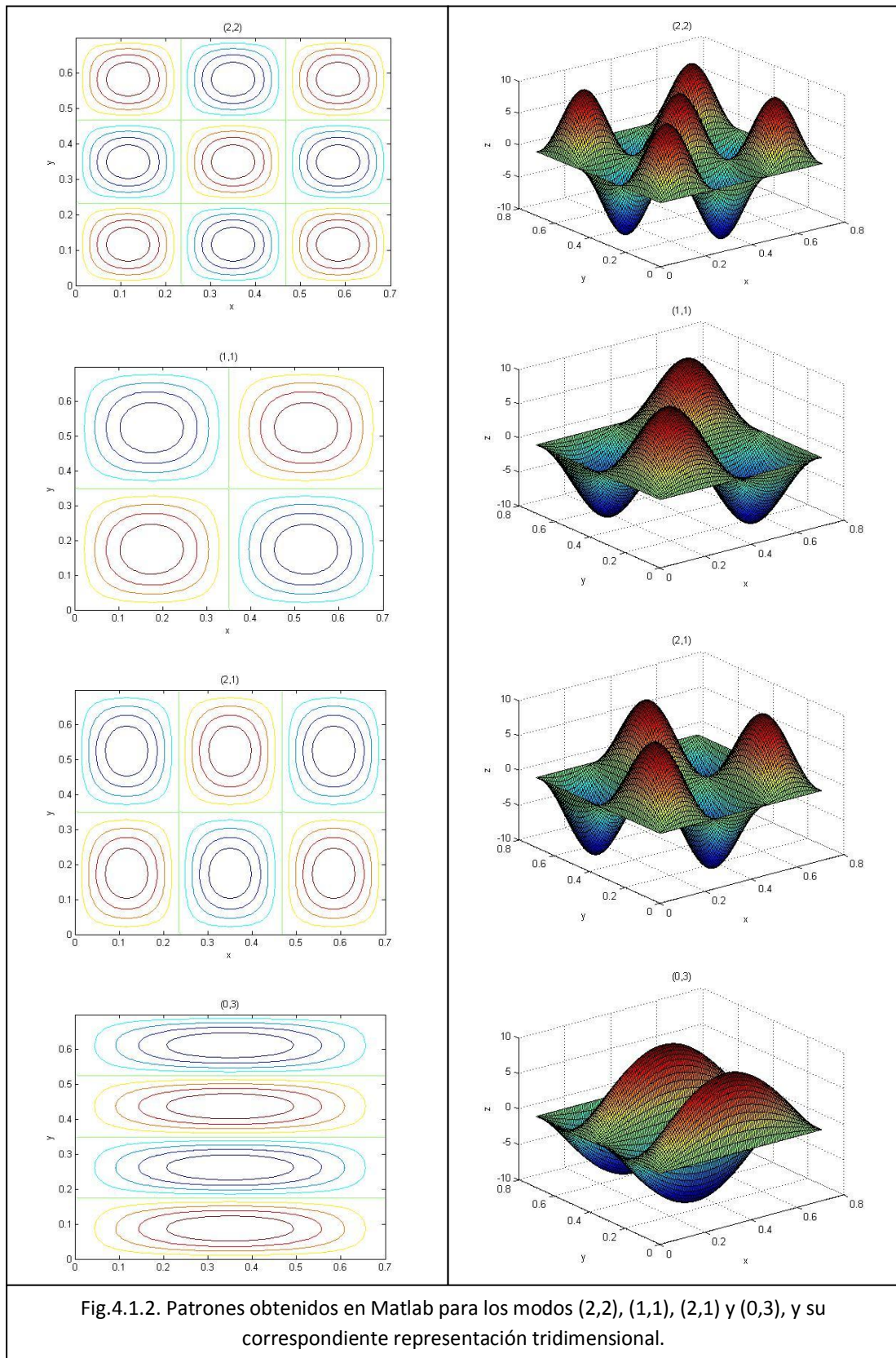


Fig.4.1.1. Patrones de vibración para diferentes modos. (Fletcher, Rossing, *The Physics of Musical Instruments*).

Observando la próxima Figura 4.1.2, podemos comprobar que las figuras de la izquierda muestran, en verde, las líneas nodales que también aparecen en la Fig.4.1.1. Conseguimos representar estas líneas obteniendo las curvas de nivel de la figuras de la derecha:



Analizando las imágenes de la izquierda en la Figura 4.1.2, podemos estudiar el efecto de la variación de los valores de m,n en el patrón final. Podemos comprobar así que m determina el número de líneas nodales en la dirección y , y n en la dirección x : si observamos la

representación bidimensional del modo (0,3), comprobamos que m es 0 y que la figura no posee líneas nodales paralelas al eje y .

Aunque hemos considerado que A también tomará un valor fijo arbitrario (que elegimos grande para poder observar bien su variación), para comprender mejor el carácter ondulatorio de la vibración, las imágenes de la derecha simulan la variación de la amplitud en cada una de las zonas donde la onda presenta un vientre. Estas imágenes no deben interpretarse como la representación de una onda transversal, sino simplemente como una modelización de la variación de A con respecto del tiempo; una prueba de que, para un tiempo arbitrario t , los diferentes puntos de la placa vibran con diferente amplitud.

La frecuencia f para cada uno de las figuras va variando, aunque no es un valor significativo a la hora de representar gráficamente: al estar afectada w (que proviene de f por un coseno), el valor de este término tomará valores desde -1 a 1, independientemente del valor de ω o el de t .

Si deseamos representar la variación de la amplitud de cada uno de los puntos de la superficie con el tiempo en lugar de fijar un instante t concreto (animaciones), debemos tener en cuenta que independientemente del intervalo de tiempo considerado, $\cos(\omega t)$ únicamente tomará valores entre -1 y 1. Por ello, es posible determinar un factor $\cos(\omega t)$, que varíe entre -1 y 1, y de esta manera para variar indirectamente t .

Mediante la Fig. 4.1.2, usando datos experimentales, hemos podido comprobar que las modelizaciones conseguidas coinciden con las aportadas con la bibliografía.

4.2. Superposición de soluciones

Fletcher y Rossing también han esquematizado los patrones obtenidos en placas cuadradas al considerar la superposición de dos modos vibracionales. Siguiendo los ejemplos expuestos en el libro, hemos representado la superposición de los modos (2,0) y (0,2) en los dos casos posibles: primero su resta, y después su suma.

De la misma manera que en el apartado anterior, hemos definido un tiempo y amplitudes arbitrarias, y una frecuencia proporcionada por los mismos autores. Como el factor $\cos(\omega t)$ solo oscila entre -1 y 1, no aporta ningún dato imprescindible y es posible obviarlo en los scripts (el resultado visual es el mismo en ambos casos, ver script 3).

4.2.1. Resta de soluciones

Estudiando en primer lugar la resta de soluciones:

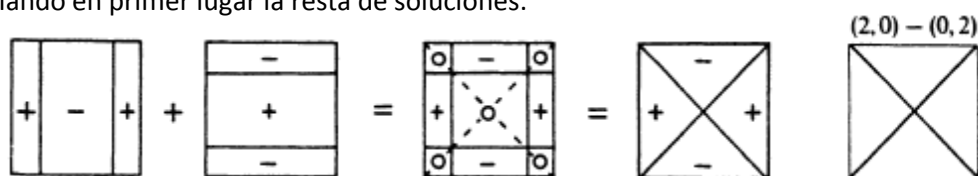
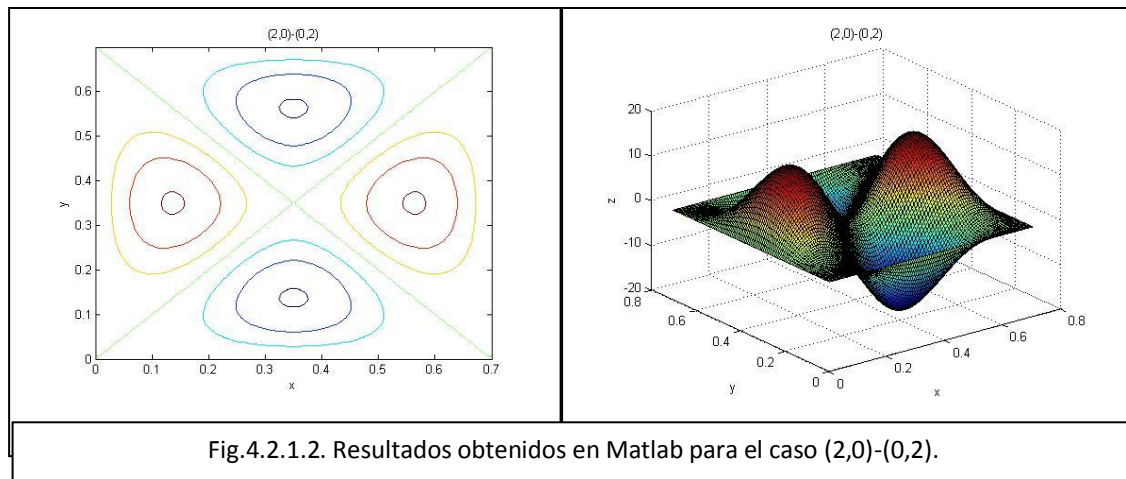


Fig.4.2.1.1. Esquema propuesto por Fletcher y Rossing para el caso (2,0)-(0,2), y patrón definitivo (a la derecha).



Comparando las figuras obtenidas con las aportadas por los autores, podemos comprobar que ambos resultados coinciden. Al ser la diferencia $m-n$ un número par, este patrón será susceptible al acoplamiento de Poisson y, por lo tanto, será no degenerado. Según se indica en *The Physics of Musical Instruments*, el acoplamiento produce en este caso una tendencia en las ondas a apoyarse y reforzarse mutuamente.

La Fig.4.2.1.1 esquematiza, para instante t concreto, la amplitud de la oscilación en cada uno de los puntos de la placa, escribiendo signos positivos y negativos dependiendo de su valor para ese valor de t , y círculos donde la amplitud se vuelve cero. Debemos recordar que se trata únicamente de una representación explicativa y que no hace referencia a la dirección de propagación de la onda (que, al ser longitudinal, no saldrá del plano de la placa). Sin embargo, se trata de un esquema interesante para comprender la interacción de ambos modos.

La Fig.4.2.1.2 muestra una disposición de colores que, como podemos comprobar, es equivalente a la detallada por Fletcher y Rossing para este caso.

4.2.2. Suma de soluciones

Tratamos ahora el otro caso posible:

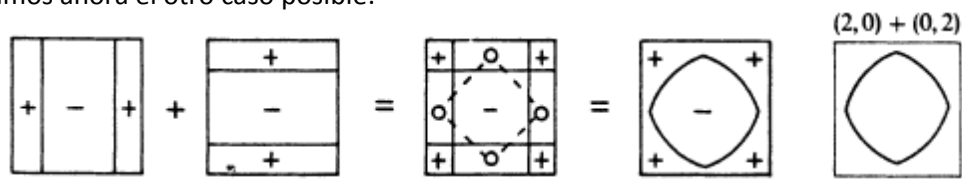
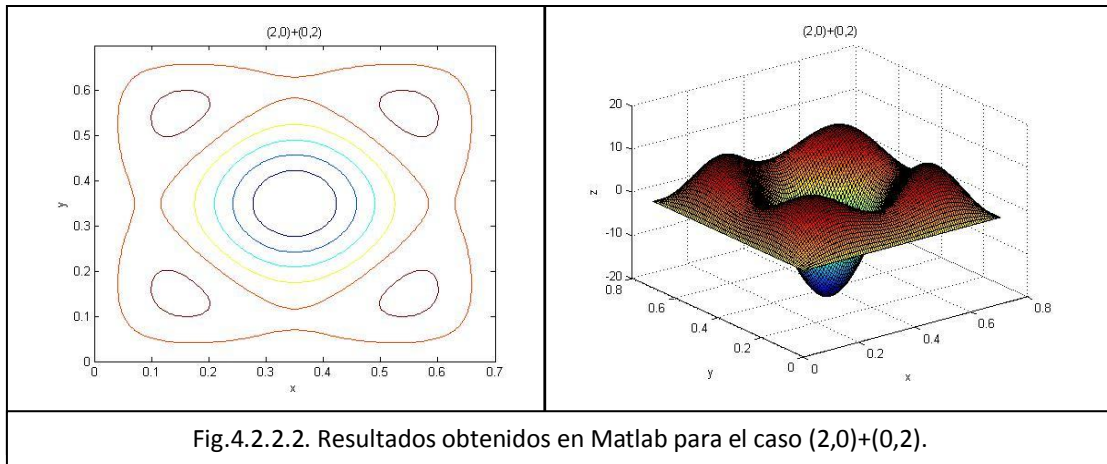


Fig.4.2.2.1. Esquema propuesto por Fletcher y Rossing para el caso $(2,0)+(0,2)$, y patrón definitivo (a la derecha).



Al comparar las líneas nodales de la Fig.4.2.2.1. con las curvas de nivel para la figura que resulta de superponer ambos modos, obtenemos el mismo resultado. Aquí podemos observar que la figura bidimensional que hemos obtenido también proporciona información, por medio de las curvas de nivel, acerca de la amplitud de oscilación de cada punto de la placa, información que concuerda con la figura tridimensional. Estos datos también coinciden con la distribución de signos mostrada en la Fig.4.2.2.1.

Si bien hasta ahora todos los resultados tridimensionales mostraban las mismas diferencias de amplitud, es interesante señalar que en este caso, la amplitud máxima a la que pueden oscilar los puntos del centro (zona azul en la Fig.4.2.2.2) es mucho mayor que la de los extremos (zona roja). Esto se debe a que, a diferencia del caso anterior, existe una región en los modos iniciales $(2,0)$ y $(0,2)$ que se ve inalterada (región central negativa, comparar Fig.4.2.1.1 y Fig.4.2.2.1).

Esta figura también es no degenerada, y en este caso el acoplamiento de Poisson provoca cierta oposición entre movimientos de onda, lo cual genera mayor rigidez o estabilidad (como podemos comprobar en la región central azul).

Fletcher y Rossing proponen más patrones, que se pueden obtener de forma sencilla aplicando un procedimiento análogo al explicado en 4.2.1 y 4.2.2, modificando únicamente las frecuencias de oscilación y los valores de los modos m,n .

4.3. Variación de las dimensiones de la placa

Partiendo de unos valores de a y b apropiados para las dimensiones de un sistema rectangular, tratamos de representar diferentes figuras, que muestren la evolución de las líneas nodales conforme se va modificando la relación entre a y b (acercándola a la unidad).

Para continuar con el ejemplo aportado en el apartado anterior, consideraremos los modos $(2,0)$ y $(0,2)$. Como la transformación de las líneas nodales de un rectángulo desemboca en la superposición de dos modos en un cuadrado, tenemos de nuevo dos casos, uno para la suma y otro para la resta.

4.3.1. Resta de soluciones

The Physics of Musical Instruments esquematiza el proceso:

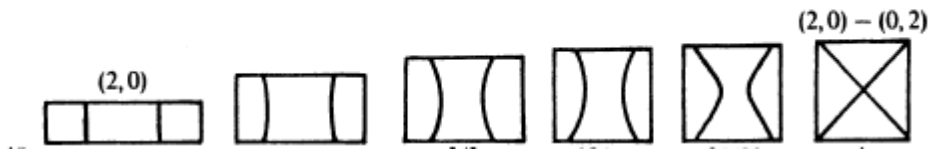


Fig.4.3.1.1. Esquema propuesto por Fletcher y Rossing para el caso $(2,0)-(0,2)$.

En nuestra modelización, obtenemos una serie de imágenes que resultan análogas a la figura anterior.

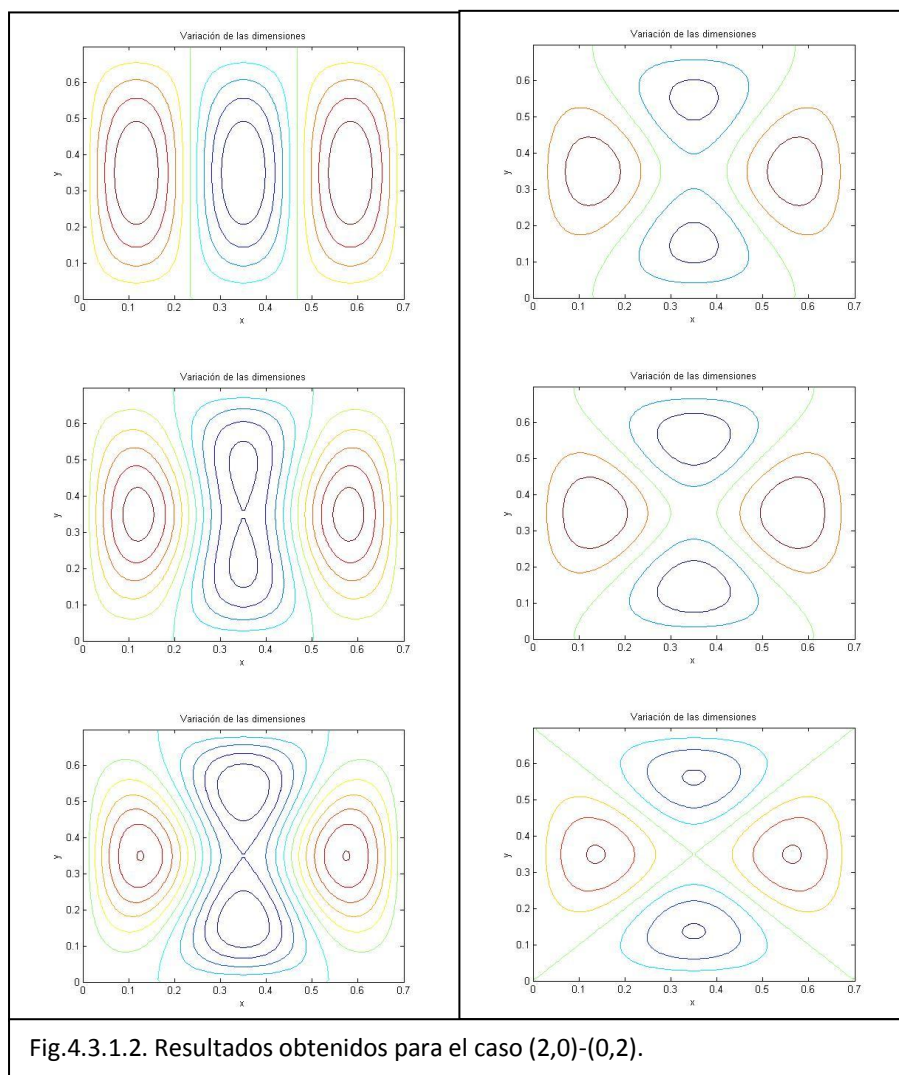


Fig.4.3.1.2. Resultados obtenidos para el caso $(2,0)-(0,2)$.

Se puede comprobar, volviendo a las figuras 3.2.1.1 y 3.2.1.2, que tanto los patrones predichos por Fletcher y Rossing como las figuras obtenidas en Matlab en el caso de una placa cuadrada coinciden con los patrones finales al variar las dimensiones de una placa rectangular.

4.3.2. Suma de soluciones

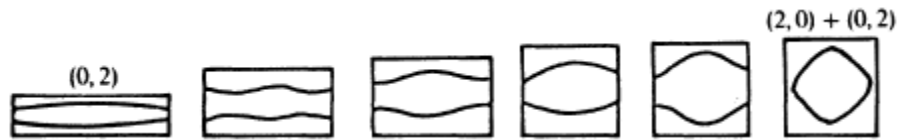


Fig.4.3.2.1. Esquema propuesto por Fletcher y Rossing para el caso $(2,0)+(0,2)$.

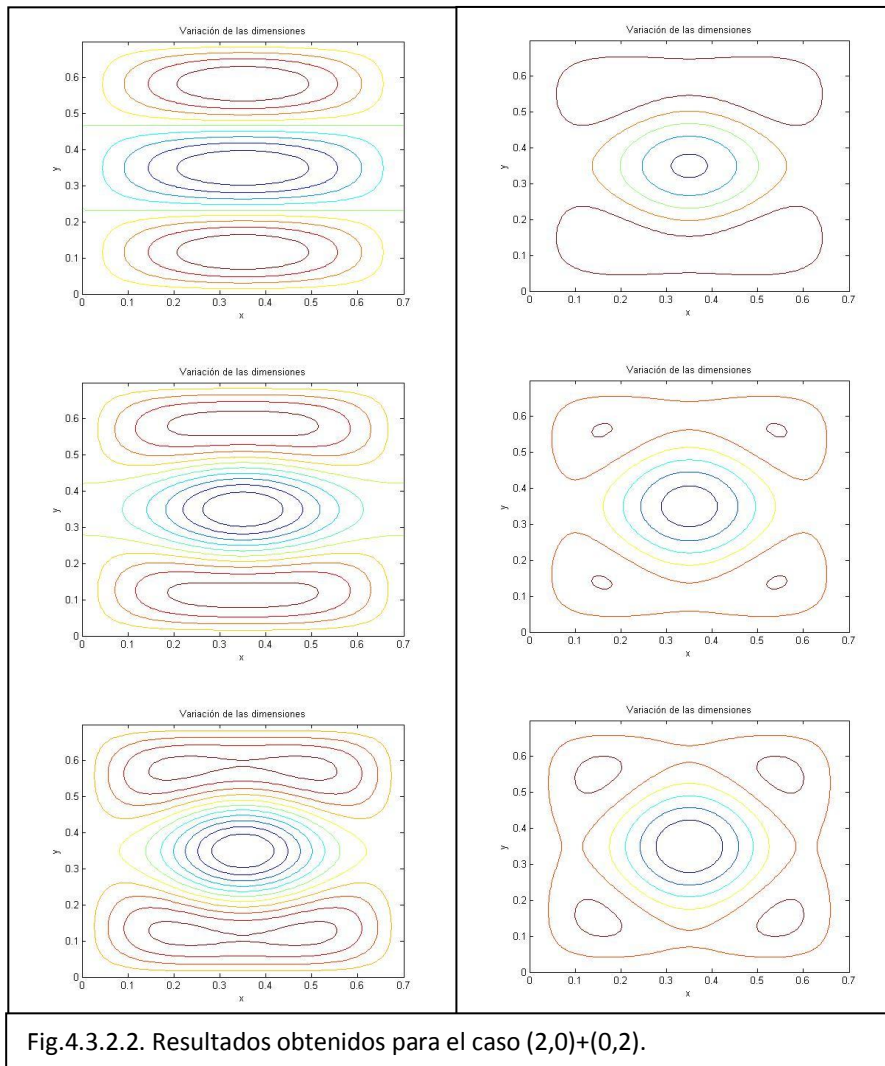


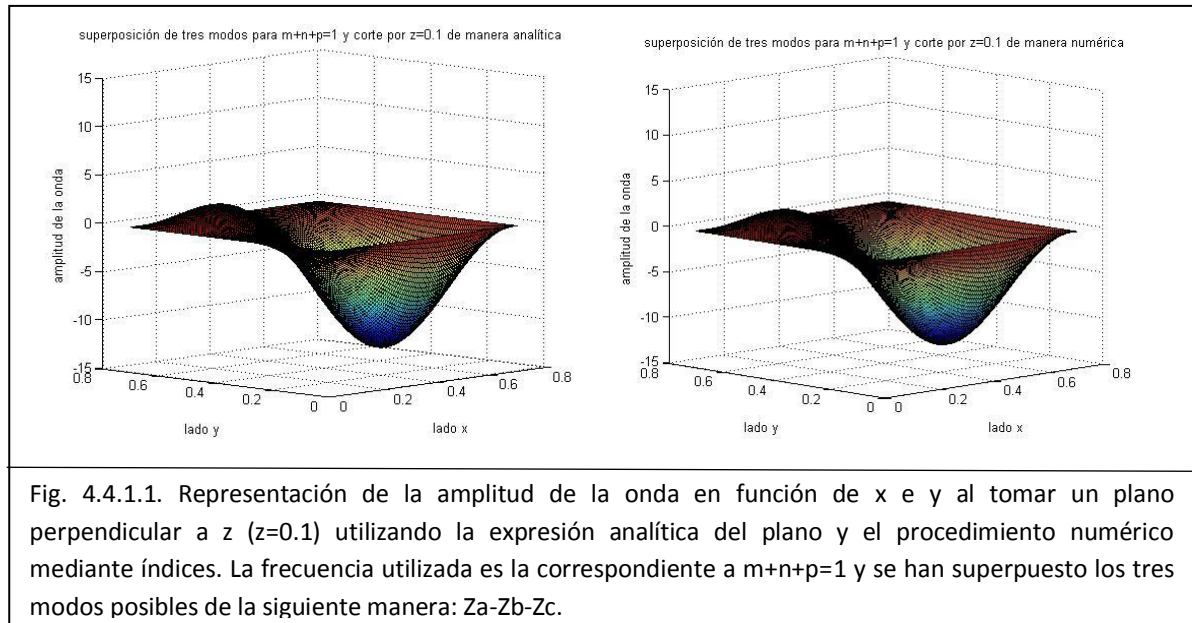
Fig.4.3.2.2. Resultados obtenidos para el caso $(2,0)+(0,2)$.

De manera análoga al apartado anterior, la suma de soluciones obtiene patrones coherentes con las predicciones de la bibliografía.

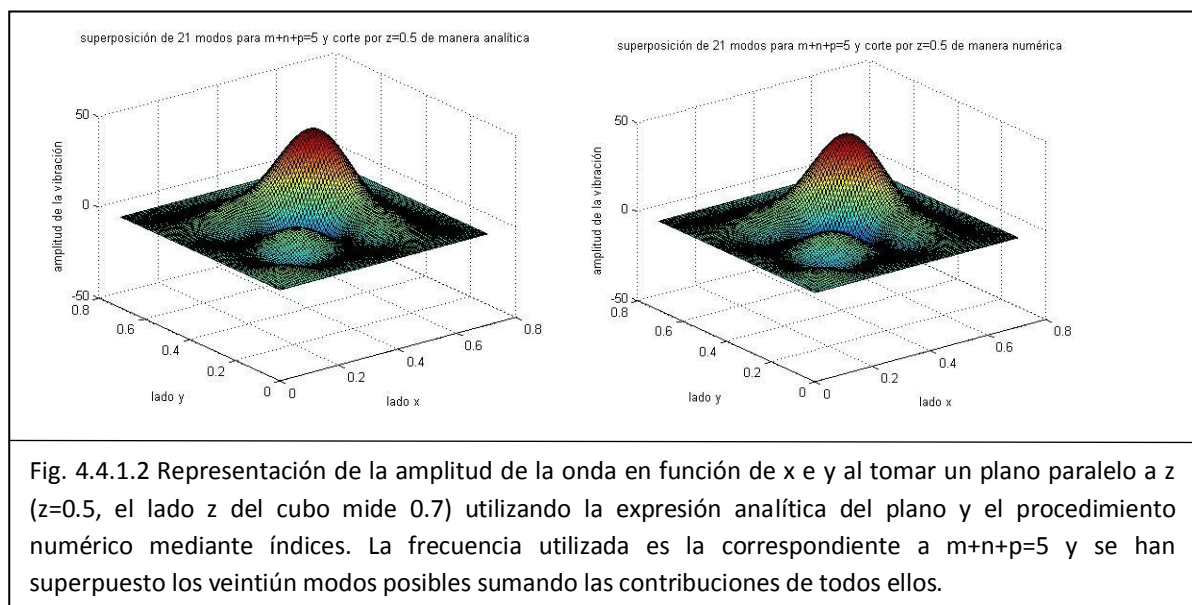
4.4. Corte del cubo por un plano perpendicular a uno de los ejes

4.4.1. Comparación del método analítico y el numérico

Podemos tomar planos paralelos a los ejes asignando a x, y o z un valor constante. Es posible hacer esto utilizando dos métodos diferentes: la expresión analítica para un plano (por ejemplo, $z=0.1$) y utilizando los índices de los vectores en Matlab (hallamos i tal que $z(i)=0.1$). En ambos casos encontramos patrones similares.



Podemos comprobar que ambos métodos funcionan también si utilizamos superposiciones propias de frecuencias con degeneraciones más complejas y distintos planos paralelos a z .



En ambos casos ha sido necesario tomar el valor adecuado del índice para el caso numérico pues al calcular i tomamos un rango en torno al cual *valor requerido del plano* $- 0.1 < z < \text{valor requerido del plano} + 0.1$

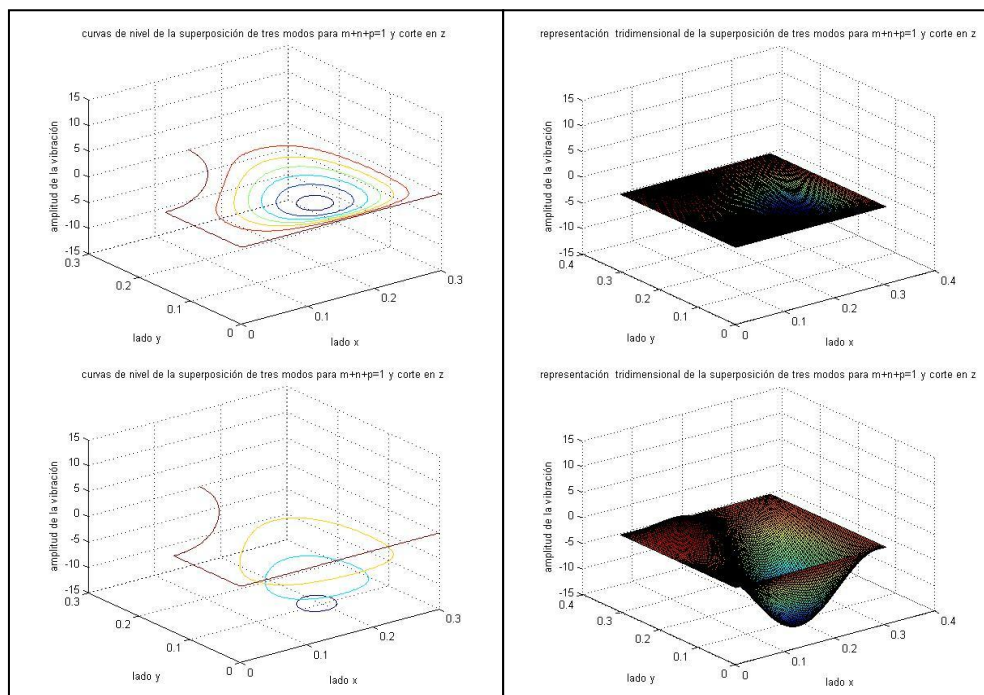
Para conseguir exactamente la misma figura tomamos el valor de i que queda en el centro del rango.

4.4.2. Análisis de los nodos para varios cortes perpendiculares a un mismo eje

Para comprender mejor el comportamiento de la onda en el interior del cubo es interesante tomar varios planos perpendiculares a un mismo eje, por ejemplo tomando varios valores de z .

Las representaciones gráficas que aparecen a continuación (correspondientes a la frecuencia para $m+n+p=1$) nos permiten ver que las zonas de vientres y nodos son similares para todos los cortes que podemos realizar fijando z (siempre que utilicemos los mismos modos, evidentemente). En este caso concreto observamos dos zonas de vientre y una línea nodal situada entre ambas, todos los cortes tienen la línea nodal de la que hablamos si bien es cierto que esta línea no coincide de forma exacta (las diferencias más claras se ven entre las tres primeras gráficas de la primera columna y las dos últimas). Llegamos a la conclusión de que en el caso en tres dimensiones tenemos superficies nodales, para nuestro ejemplo sería la superficie determinada por las líneas nodales en cada corte de z .

Añadimos además otro ejemplo con una degeneración en la frecuencia más compleja, el correspondiente a $m+n+p=5$, cuyo análisis es idéntico salvo porque, además de las superficies nodales que se forman como en el ejemplo anterior, existen superficies nodales coincidentes con algunos de los planos obtenidos al asignar valores fijos a z .



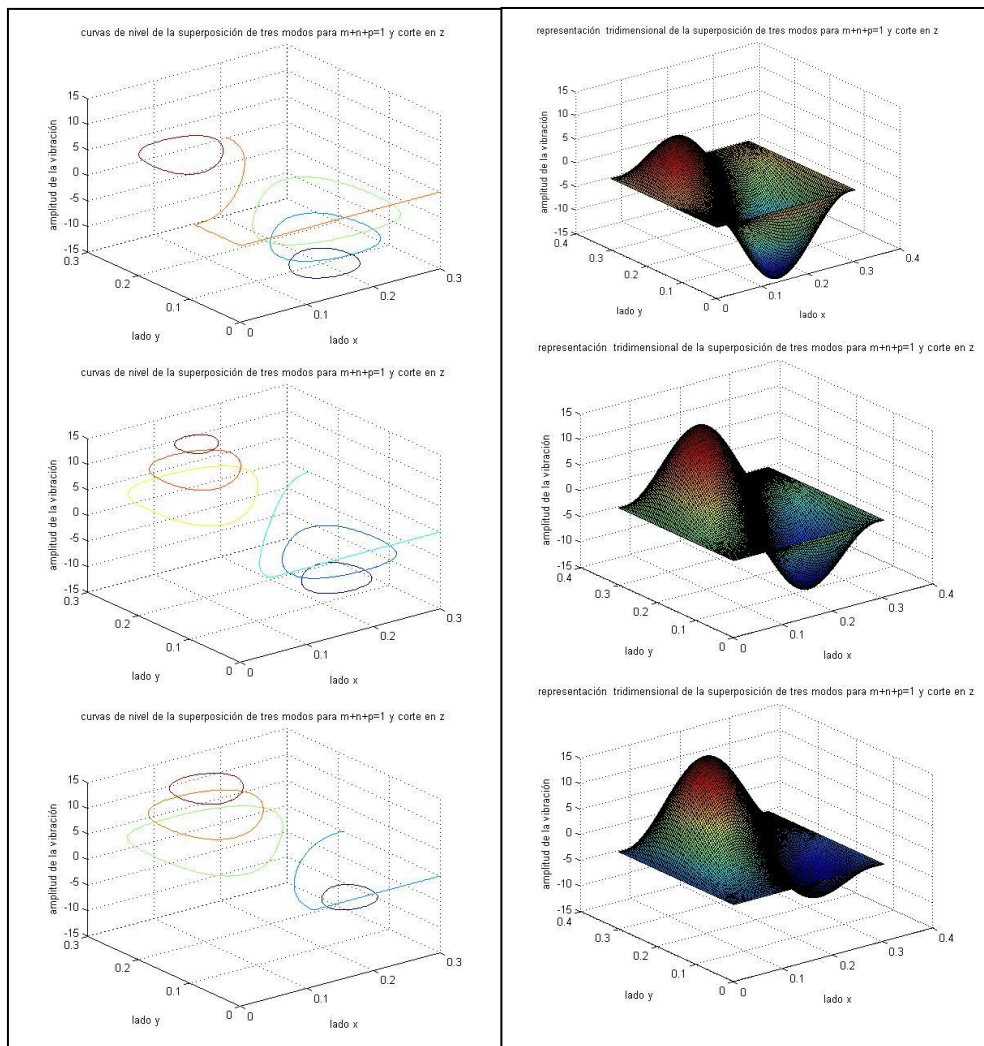


Fig.4.4.2.1. Representación de las curvas de nivel y del perfil de la superposición de los tres modos característicos de la frecuencia correspondiente a $m+n+p=1$ al combinarlos como $Z_a-Z_b-Z_c$ para diferentes valores fijos de z . Concretamente, de $z=0.01$ en las primeras figuras a $z=0.25$ en las últimas, hay que tener en cuenta que hemos considerado el lado del cubo de 0.3.

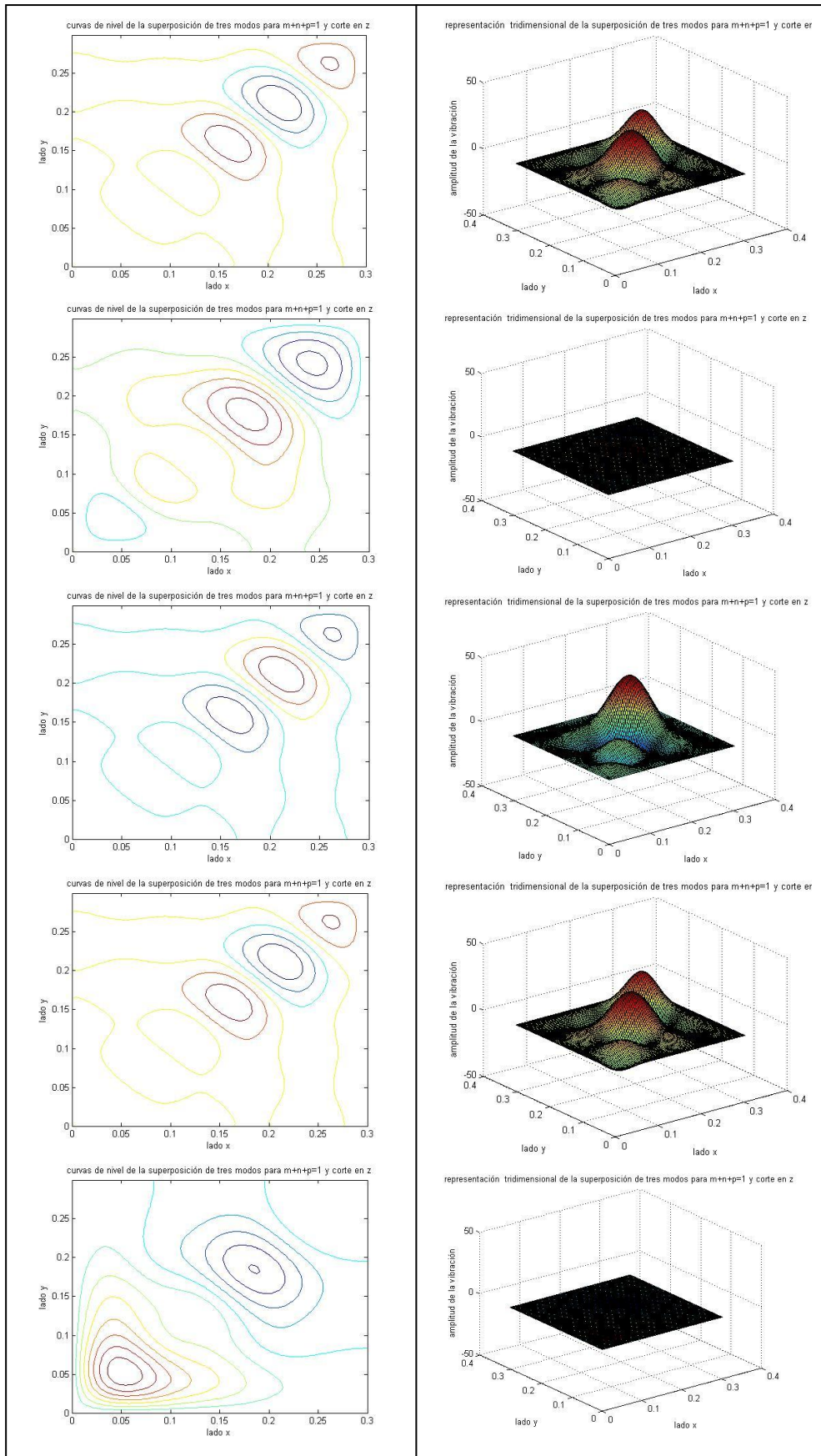
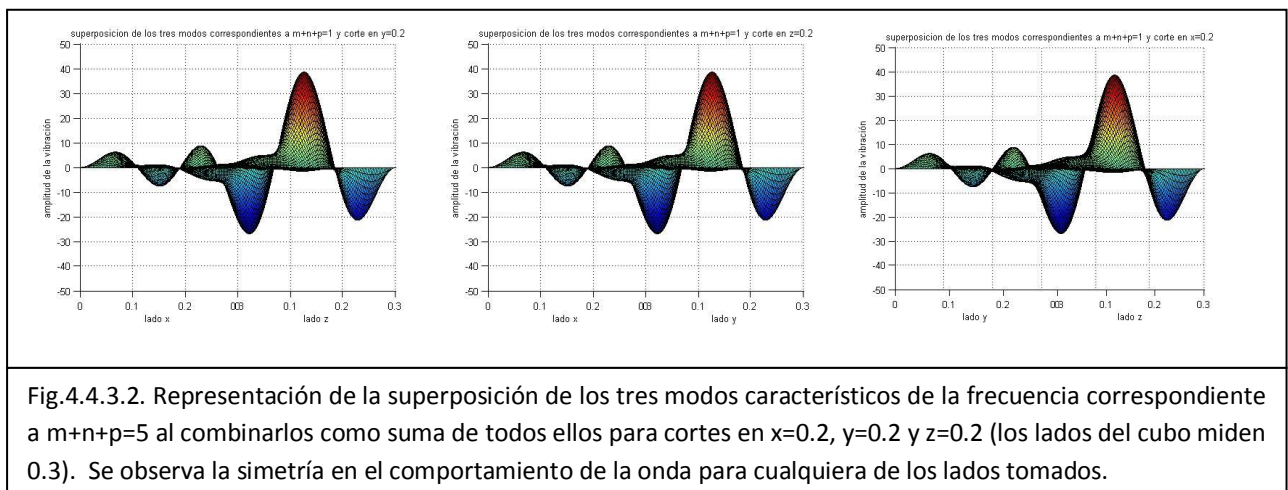
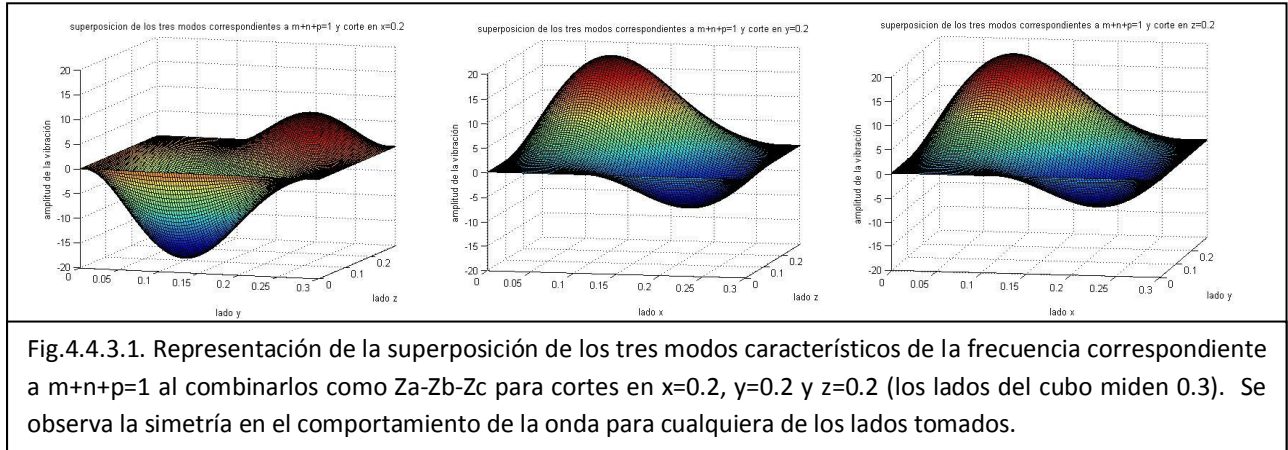


Fig.4.4.2.2. Representación de las curvas de nivel y del perfil de la superposición de los 21 modos característicos de la frecuencia correspondiente a $m+n+p=5$ al combinarlos como suma de todos ellos para diferentes valores fijos de z . Concretamente, de $z=0.01$ en las primeras figuras a $z=0.25$ en las últimas.

4.4.3. Comparación entre cortes perpendiculares a distintos ejes

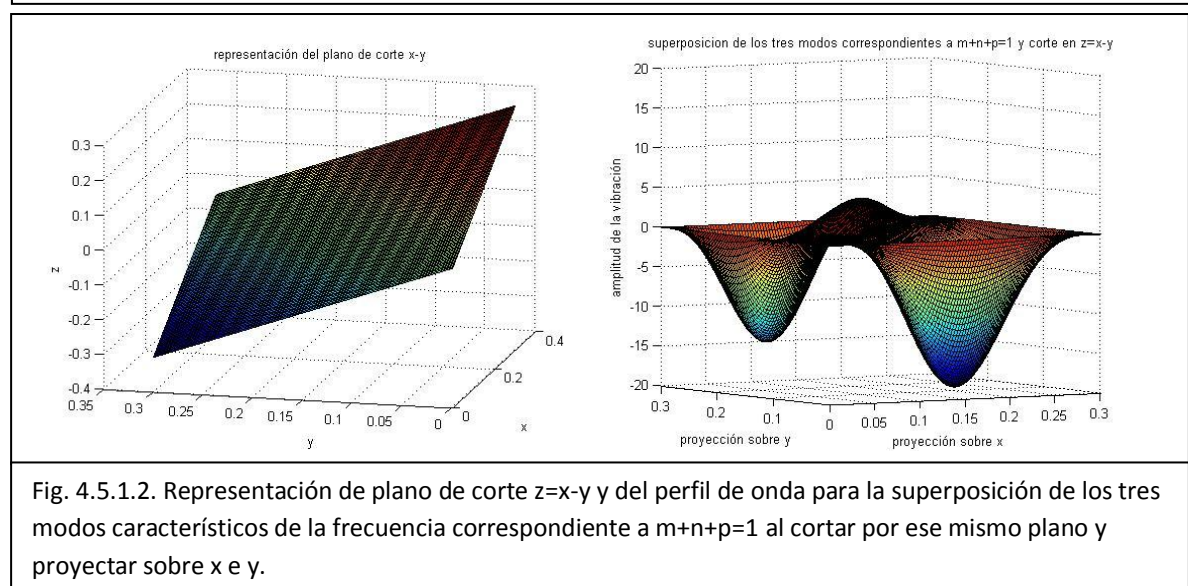
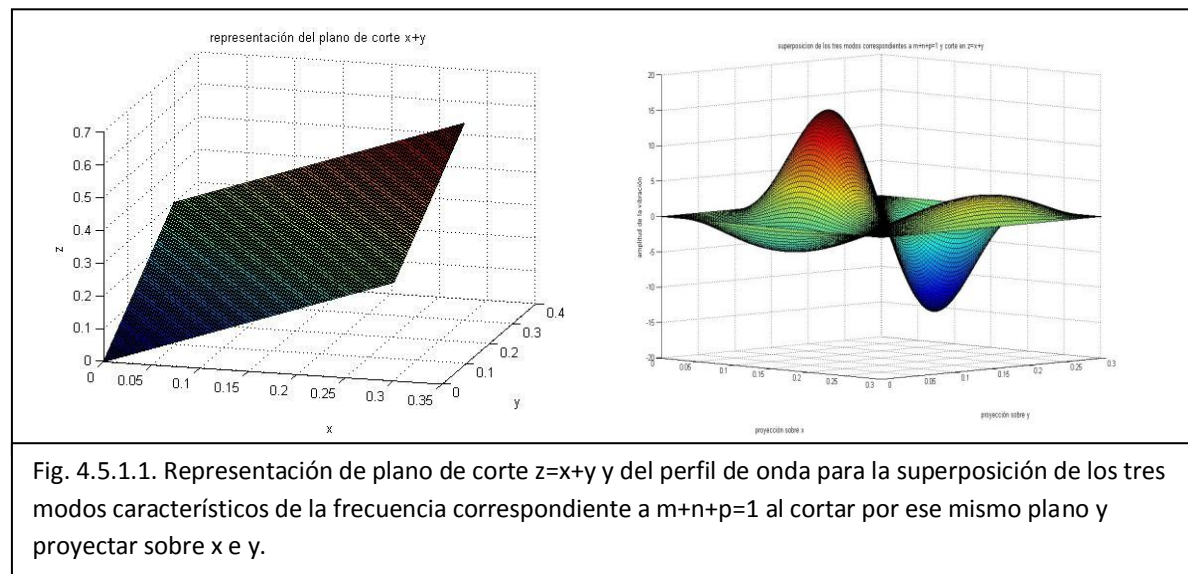
Ya en el apartado de teoría se mencionó el hecho de que existía cierta simetría en el problema, los patrones obtenidos al cortar fijando valores de z son equivalentes a los obtenidos al fijar valores de x o de y . En este apartado comprobamos este hecho de manera gráfica.



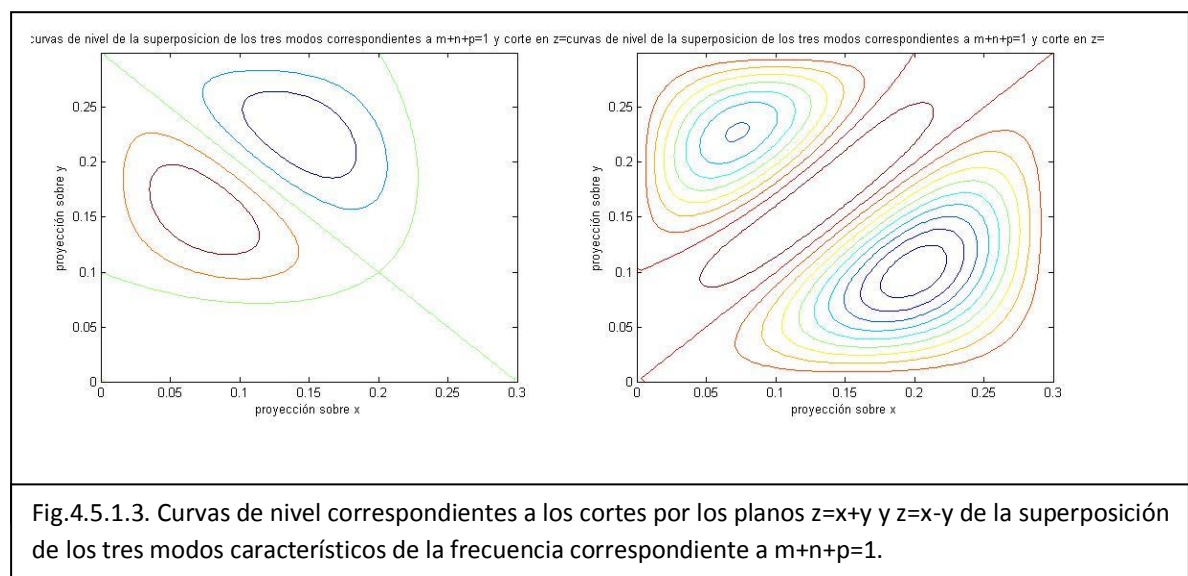
4.5. Corte del cubo con planos oblicuos

4.5.1. Análisis de los nodos en planos oblicuos

En el caso de los planos oblicuos no es posible representar los perfiles de la sondas sobre los auténticos ejes x e y ya que no podemos dibujar una onda "inclinada" o "torcida", por ello junto con cada representación de la onda añadimos una del plano por el que hemos seccionado el cubo. El perfil de la onda que veremos será la proyección de las amplitudes sobre los ejes x e y . A continuación añadimos dos ejemplos para entender el tipo de representaciones que vamos a utilizar.



Una vez visto el procedimiento podemos analizar los nodos correspondientes a las superficies anteriores utilizando las curvas de nivel, las líneas intermedias entre vientres podrían corresponder a nodos.



Para asegurarnos de que las curvas intermedias son nodos observamos si están a la altura nula de la amplitud para varios instantes de tiempo. Efectivamente, esto es lo que encontramos para el primer corte oblicuo hecho anteriormente.

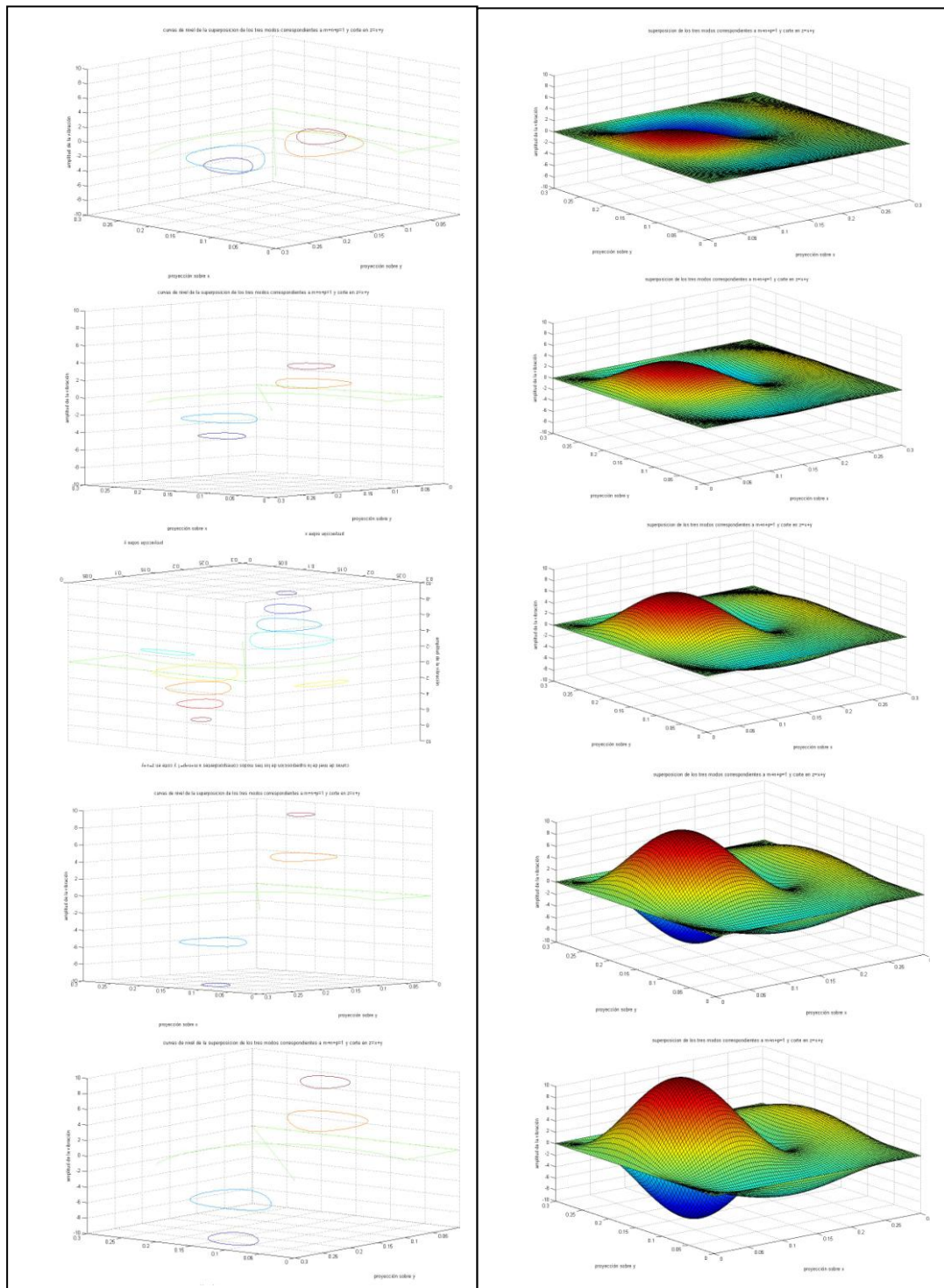


Fig.4.5.1.4. Curvas de nivel y superficies correspondientes a los cortes por los planos $z=x+y$ de la superposición de los tres modos característicos de la frecuencia correspondiente a $m+n+p=1$ para diferentes instantes del tiempo.

No es necesario repetir la prueba para nuevos planos pues es evidente que si la función de onda es nula en un punto lo será independientemente del valor del tiempo, ya que este sencillamente modula la amplitud al ir en el interior de un coseno que toma valores entre menos uno y uno.

Podemos concluir que los cortes oblicuos arrojan resultados similares a los cortes perpendiculares a un eje. En este caso también observamos líneas nodales que corresponden a superficies nodales que están contenidas en el cubo. Podemos intuir la forma de estas superficies al trasladar el plano de corte. En este caso cortamos por planos de la forma $z=x+y+i$, siendo i un número.

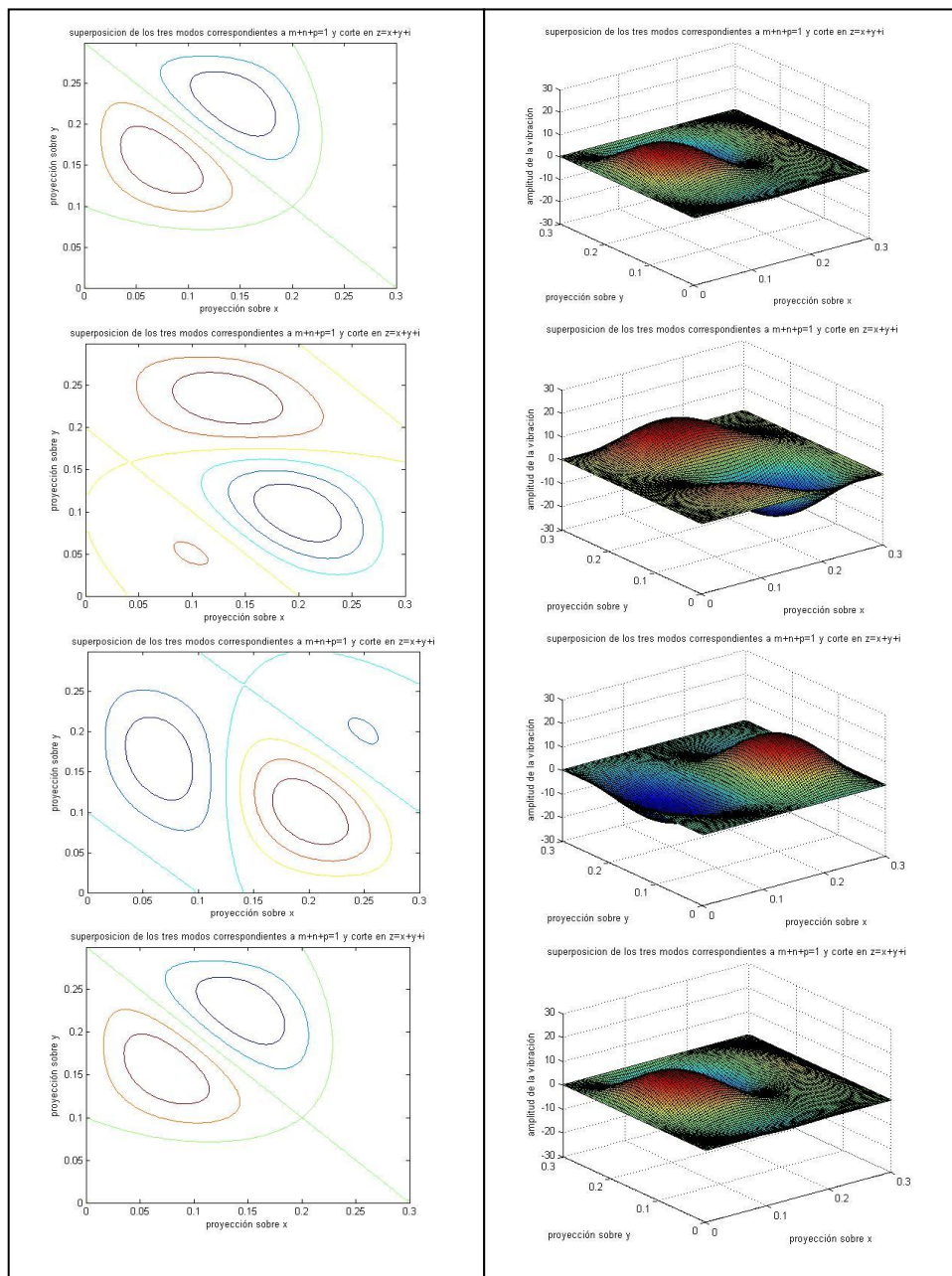


Fig 4.5.1.5. Curvas de nivel correspondientes a los cortes por los planos $z=x+y+i$ de la superposición de los tres modos característicos de la frecuencia correspondiente a $m+n+p=1$ para diferentes valores de i , lo cual corresponde a trasladar el plano.

Si bien es complejo imaginar las superficies nodales a partir de las representaciones anteriores es interesante señalar que al cortar por el mismo plano en distintas posiciones observamos que los patrones son cíclicos, se repiten cada cierta distancia. De nuevo el problema muestra su simetría al repetirse los patrones, igual que sucedía para el caso de planos perpendiculares a uno de los ejes (Fig. 4.4.2.2.).

4.5.2. Comparación entre cortes oblicuos semejantes respecto de los ejes

Igual que hicimos en el apartado 3.3.3. vamos a intentar ver cuáles son las simetrías entre los ejes.

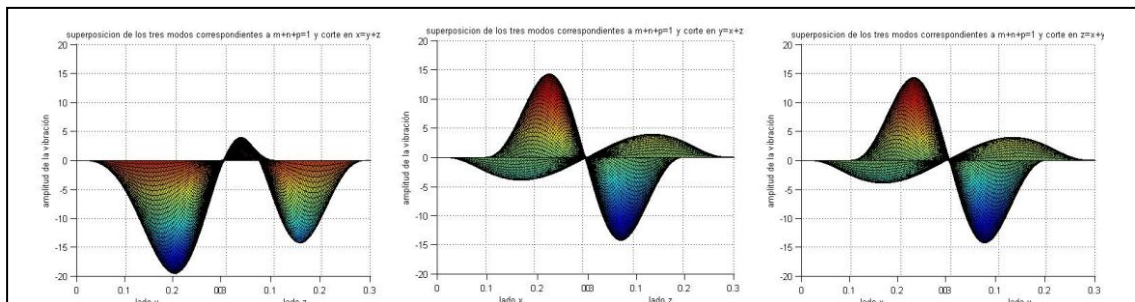


Fig.4.5.2.1. Representación de la superposición de los tres modos característicos de la frecuencia correspondiente a $m+n+p=1$ al combinarlos como $Z_a-Z_b-Z_c$ para cortes en $x=y+z$, $y=x+z$ y $z=x+y$.

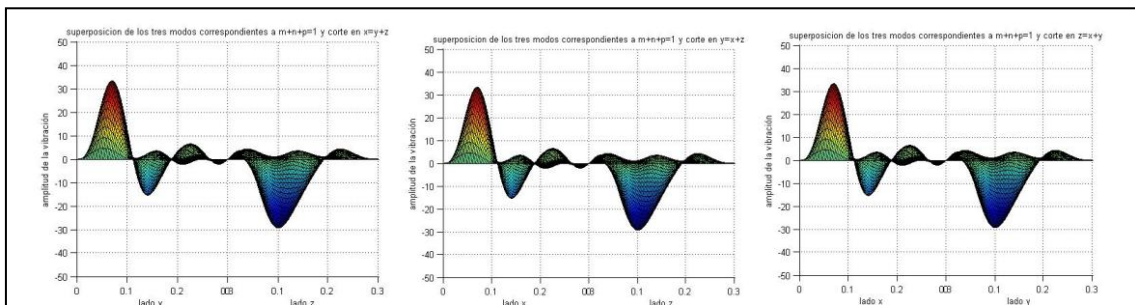


Fig.4.5.2.2. Representación de la superposición de los tres modos característicos de la frecuencia correspondiente a $m+n+p=5$ al combinarlos como suma de todos ellos para cortes en $x=y+z$, $y=x+z$ y $z=x+y$.

Observamos gracias a las representaciones que la simetría depende de los modos que tomemos y que en el caso de los planos oblicuos es más compleja (Fig. 3.4.2.1.) que en el caso de planos perpendiculares a un eje.

5. CONCLUSIONES

A partir de las representaciones podemos llegar a conclusiones tanto sobre el fenómeno de ondas estacionarias en una placa bidimensional como sobre la aproximación al comportamiento de ondas estacionarias en un cubo tridimensional. De forma análoga a como se ha hecho en el análisis de resultados podemos separar las conclusiones para las ondas bidimensionales y las tridimensionales.

En cuanto al fenómeno bidimensional, concluimos que los procedimientos computacionales encajan con las predicciones de la bibliografía, la superposición de modos arroja patrones idénticos a los encontrados en las fuentes utilizadas. Además, las herramientas generadas para esas comprobaciones permiten generar nuevos patrones para casos de superposiciones más complejas y entender varios fenómenos asociados al comportamiento de las ondas de forma fiable. Podemos observar la variación de las ondas a medida que transcurre el tiempo utilizando animaciones (que producen resultados análogos a los obtenidos en capturas fijas como las que se han plasmado en este documento) y los diferentes dibujos que se establecen al utilizar placas rectangulares en lugar de cuadradas. La visualización de estos fenómenos puede hacerse mediante superficie y curvas de nivel, mediante la combinación de ambas representaciones es sencillo ver de forma clara las zonas de líneas nodales y de vientres que se forman en las placas.

Respecto del comportamiento de ondas estacionarias confinadas en un cubo tridimensional llegamos a la conclusión de que su comportamiento es análogo al de ondas en placas bidimensionales. Igual que en el caso bidimensional las superficies y las curvas de nivel generadas permitían observar las líneas nodales, en el tridimensional podemos suponer que existen superficies nodales en las cuales la vibración es nula. Si bien la representación de estas superficies es compleja, la aproximación al fenómeno realizando diferentes cortes al cubo y observando la variación de las líneas nodales sobre esos cortes nos señala la presencia de estas superficies nodales. Para combinaciones de muchos armónicos la cantidad de superficies nodales existente es grande e imaginar las mismas es realmente complejo, sin embargo, el análisis de combinaciones de ondas con frecuencias más bajas y menor número de modos sí sirve para comprender la existencia de estas superficies. También es posible observar las variaciones respecto del tiempo y aclarar de forma gráfica lo que puede predecirse a partir de las ecuaciones: las superficies nodales se mantienen y la única variación se produce en la amplitud de los vientres.

Por otra parte, el desarrollo de este trabajo permite entender, y no solo entender sino observar de manera explícita, el paso de una dimensión (el análisis de los nodos y vientres de una onda estacionaria en una sola dimensión es extremadamente sencillo) a dos dimensiones y posteriormente a tres dimensiones. Mediante el uso de gráficas y representaciones somos capaces de imaginar realmente cuál es el comportamiento de las ondas y de encajarlo en el modelo físico dado por la ecuación de onda. Esta intuición generada a partir de un análisis con un gran componente visual nos capacita además para comprender mejor las simetrías existentes en el comportamiento de las ondas. Es lógico pensar que no tenemos una dirección privilegiada en el espacio y que el comportamiento de las ondas en cualquiera de los ejes del espacio debe ser análogo, esta idea se comprueba a nivel gráfico, aunque es cierto que la visualización para determinadas superposiciones de modos en tres dimensiones no es en absoluto sencilla pues los patrones de simetrías establecidos requieren de una intuición espacial que no siempre ejercitamos lo suficiente.

En definitiva, el modelo físico y la representación a partir del mismo coinciden con los datos experimentales y las representaciones realizadas nos facilitan el análisis y la comprensión del comportamiento de ondas estacionarias tanto en dos como en tres dimensiones: la existencia y distribución de nodos y vientres, la variación de las ondas en función del tiempo, la simetría característica de los resultados, etc. son las propiedades más destacadas de este fenómeno, estudiado por primera vez por el conocido como “padre de la acústica”.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Arango J., Escobar L., Reyes C.- *Figuras de Chladni en tambores*. Lecturas matemáticas, volumen 33 (2012)
- Biblioteca de Ingeniería de la Universidad de Sevilla – *Vibración de una placa cuadrada* <<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/60109/fichero/4.Vibraci%F3n+de+una+placa+cuadrada%252FVIBRACI%D3N+DE+UNA+PLACA+CUADRADA.pdf>>
- Experiencias de física, Universidad de Alicante – *Ondas estacionarias en una placa cuadrada: figuras de Chladni* <http://www.dfists.ua.es/experiencias_de_fisica/index08.html>
- Fletcher N.H, Rossing T. D. – *The physics os musical instruments*. Springer-Verlag (1991)
- French A. P. – *Vibraciones y ondas. Curso de física del MIT*. Reverté (2006)
- Georgi H. – *The physics of waves*. Prentice Hall (1993)
- Universidad Complutense de Madrid - *Placa de Chladni* <http://www.ucm.es/data/cont/docs/76-2013-11-08-10_01_Chladni_plate.pdf>
- University of Toronto. Experimental nonlinear physics – *Chladni patterns in vibrated plates* < <http://www.physics.utoronto.ca/nonlinear/chladni.html>>
- Wikipedia – *Ernst Chladni* < http://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni>
- Wikipedia – *Ernst Chladni* < http://es.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni>
- Basso G., Aguilera J., Alvarez Y., Morales R., Silveira J., Bruvera I - *Patrones de Chladni y factor de calidad para una tapa trasera de guitarra*. (2009)
- Marvin U. B. - *Ernst Florenz Friedrich Chladni (1756-1827) and the origins of modern meteorite research*. Meteoritos y Ciencia Planetaria 31, 545-588 (1996)

7. ANEXOS: ÍNDICE DE SCRIPTS, DE ANIMACIONES Y DE FUNCIONES

SCRIPT	FIGURA EN LA QUE SE HA USADO	CONTENIDO
1	4.1.2	Prueba de la viabilidad de la expresión utilizada como solución a la ecuación de onda. Obtención de patrones simples.
2	4.2.1.2	Superposición de dos soluciones a la ecuación de onda (resta de modos, $2,0 - 0,2$)
3	-	Comprobación de que la superposición de soluciones ofrece los mismos resultados obviando el término $\cos(\omega t)$, usando $2,0 - 0,2$
4	4.2.2.2	Superposición de dos soluciones a la ecuación de onda (suma de modos, $2,0 + 0,2$)
5	4.3.1.2	Variación de los lados de la placa (de rectangular, modo $2,0$, a cuadrada, superposición de modos: $2,0 - 0,2$)
6*	4.3.2.2	Variación de los lados de la placa (de rectangular, modo $0,2$, a cuadrada, superposición de modos: $2,0 + 0,2$)
9	4.4.1.1	Comparación del método analítico y el numérico para cortar el cubo tridimensional por un plano $z=0.1$ en el caso de la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$
10	4.4.1.2	Comparación del método analítico y el numérico para cortar el cubo tridimensional por un plano $z=0.5$ en el caso de la superposición de los veintiún modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=5$
11	4.4.2.1	Comparación de las curvas de nivel y de las superficies correspondientes a la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$ al cortar por diferentes planos perpendiculares a z
12	4.4.2.2	Comparación de las curvas de nivel y de las superficies correspondientes a la superposición de los veintiún modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=5$ al cortar por diferentes planos perpendiculares a z
13	4.4.3.1	Comparación de las superficies correspondientes a la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$ al cortar por los planos $x=0.2$, $y=0.2$ y $z=0.2$

14	4.4.3.2	Comparación de las superficies correspondientes a la superposición de los veintiún modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=5$ al cortar por los planos $x=0.2$, $y=0.2$ y $z=0.2$
15	4.5.1.1	Representación de los planos oblicuos $z=x+y$ y $z=x-y$, de las superficies y de las curvas de nivel correspondientes a la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$ al cortar por esos planos
	4.5.1.2	
	4.5.1.3	
16	4.5.1.4	Representación de las curvas de nivel correspondientes a la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$ al cortar por el plano $x+y$ en diferentes momentos del tiempo
17	4.5.1.4	Representación de las superficies correspondientes a la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$ al cortar por el plano $x+y$ en diferentes momentos del tiempo
18	4.5.1.5	Representación de las curvas de nivel correspondientes a la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$ al trasladar el plano de corte $z=x+y$
19	4.5.1.5	Representación de las superficies correspondientes a la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$ al trasladar el plano de corte $z=x+y$
20	4.5.2.1	Comparación de las superficies correspondientes a la superposición de los tres modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=1$ al cortar por los planos $x=y+z$, $y=x+y$ y $z=x+y$.
21	4.5.2.2	Comparación de las superficies correspondientes a la superposición de los veintiún modos propios de una frecuencia equivalente a $m+n+p=5$ al cortar por los planos $x=y+z$, $y=x+y$ y $z=x+y$.

(*) Los scripts 7 y 8 corresponden a animaciones y se detallarán más adelante.

ANIMACIONES

SCRIPT	CONTENIDO
7	Superposición de dos soluciones a la ecuación de onda (resta de modos, $2,0 - 0,2$)

8	Variación de los lados de la placa (de rectangular, modo $2,0$, a cuadrada, superposición de modos: $2,0 - 0,2$)
---	--

FUNCIONES

SCRIPT	CONTENIDO
tiempo01	Animación de la superposición de dos soluciones a la ecuación de onda (resta de dos modos a determinar). Evolución de la onda de un tiempo 0 al final de un ciclo.
tiempo_10	Animación de la superposición de dos soluciones a la ecuación de onda (resta de dos modos a determinar). Evolución de la onda del comienzo de un ciclo al tiempo 0.
Prueba funciones	Prueba en dos figuras de las funciones anteriores.

