Tarea #4 Física numérica

Oscar Andrés Valencia Magaña

25 de octubre de 2025

1. Introducción

Buscamos presentar la solución a tres problemas físicos: el movimiento de un proyectil en un medio viscoso, un sistema de osciladores acoplados y una cuerda vibrante. En este trabajo se abordarán tanto las soluciones analíticas (deducción de las ecuaciones) como las soluciones numéricas y las gráficas obtenidas mediante programas desarrollados en Python.

2. Lanzamiento del martillo

El récord mundial para hombres en lanzamiento de martillo es de 86,74 m, establecido por Yuri Sedykh y vigente desde 1986. El martillo tiene una masa de 7,26 kg, es esférico y posee un radio de $R = 6$ cm.

La fricción sobre el martillo puede considerarse proporcional al cuadrado de la velocidad relativa al aire:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho A C_D v^2$$

donde ρ es la densidad del aire (1,2 kg/m^3) y $A = \pi R^2$ es la sección transversal del martillo.

El martillo puede experimentar, en principio, un flujo laminar con coeficiente de rozamiento $C_D = 0{,}5$ o un flujo inestable oscilante con $C_D = 0{,}75$.

(a) Resuelva la ecuación de movimiento para el lanzamiento oblicuo del martillo. Deberá transformar las EDO correspondientes a los movimientos en x y y en un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden. Considere lanzamientos desde una posición inicial $x_0 = 0$ y $y_0 = 2$ m, para un ángulo ideal $\theta = 45°$, y determine la velocidad que produce la distancia del lanzamiento del récord mundial.

Para las ecuaciones de movimiento consideremos $\vec{r} = (x, y)$ y $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = (v_x, v_y)$. Según la mecánica Newtoniana tenemos que la ecacion de movimiento es:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{F_D}$$

donde $\vec{g} = (0, -g)$ es la aceleración de

(b) Calcule y grafique la dependencia temporal de la altitud del martillo y su trayectoria $y = y(x)$ en los tres regímenes:

  i. Sin fricción
  ii. Flujo laminar
  iii. Flujo inestable oscilante

(c) En el inciso anterior, estime en qué medida la fricción influye en la distancia del lanzamiento.

3. Oscilador armónico acoplado

Considere el sistema de resortes que se muestra en la figura 1.

Sea m la masa de cada bloque (ambas iguales) y supóngase que los resortes lineales tienen constantes elásticas k (resortes exteriores) y k_c (resorte central de acoplamiento), salvo que se indique lo contrario. Denote por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos horizontales de las masas respecto a sus posiciones de equilibrio.

(a) Escriba las ecuaciones de movimiento acopladas para los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Exprese las EDOs en su forma habitual y, a continuación, transforme el sistema a un conjunto equivalente de cuatro ecuaciones de primer orden adecuado para integración numérica.

(b) Calcule las frecuencias de los modos normales de vibración del sistema (modo simétrico y modo antisimétrico), y obtenga las correspondientes relaciones entre amplitudes X_1 y X_2 para cada modo.

(c) Grafique las posiciones de las masas en función del tiempo para las condiciones iniciales siguientes:

  i. Ambas masas parten del reposo habiendo sido desplazadas la misma cantidad hacia la derecha: $x_1(0) = x_2(0) = A, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.
  ii. Ambas masas parten del reposo habiendo sido desplazadas la misma cantidad en sentidos opuestos: $x_1(0) = A,\ x_2(0) = -A, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.
  iii. Una masa parte de su posición de equilibrio y la otra de una posición desplazada hacia la derecha: $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = A, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Para cada caso, muestre las curvas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y, cuando sea útil, represente la combinación en coordenadas normales.

(d) Suponga ahora que los resortes no son lineales y que la fuerza restauradora de cada resorte tiene la forma

$$F = -k\big(x + 0{,}1\,x^3\big).$$

Repita el procedimiento del inciso (b): determine (o estime) las frecuencias / comportamientos de oscilación y compare las respuestas del sistema lineal con las del sistema no lineal. Discuta las diferencias cualitativas y cuantitativas entre ambos casos (desplazamiento- dependiente de la frecuencia, aparición de armónicos, etc.).

Figura 1: Diagrama del sistema de dos masas acopladas por resortes (figura 1).

4. Vibración de una cuerda

Oscilaciones de una cuerda

Considere una cuerda de longitud L y densidad lineal $\rho(x)$ (masa por unidad de longitud), sujeta en ambos extremos y bajo una tensión $T(x)$. Suponga que el desplazamiento transversal de la cuerda respecto a su posición de equilibrio, $y(x,t)$, es pequeño y que la pendiente $\partial y/\partial x$ también es pequeña.

(a) Considere una sección infinitesimal de la cuerda entre x y $x + \Delta x$. Notando que la diferencia en las componentes horizontales y verticales de las tensiones produce una fuerza restauradora, demuestre que, aplicando la segunda ley de Newton a esta sección, se obtiene la ecuación

$$\frac{dT(x)}{dx}\,\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + T(x)\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \;=\; \rho(x)\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.$$

(b) ¿Qué condiciones sobre $T(x)$ y $\rho(x)$ son necesarias para recuperar la ecuación de onda estándar

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \;=\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\,?$$

Explique claramente las hipótesis de homogeneidad y constancia que se requieren.

(c) ¿Qué condiciones deben imponerse (condiciones iniciales y de frontera) para que la EDP de segundo orden tenga una única solución?

(d) Utilice una malla en tiempo y espacio con pasos Δt y Δx. Denote

$$y(x_i, t_j) = y_{i,j}, \qquad x_i = i\,\Delta x, \quad t_j = j\,\Delta t.$$

Escriba la aproximación finita correspondiente para obtener una solución numérica $y_{i,j}$.

(e) Exprese las segundas derivadas temporales y espaciales en términos de diferencias finitas centradas y demuestre que, para el caso homogéneo (constantes T y ρ), esto conduce a la ecuación en diferencias

$$y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1} \;=\; \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\,\big(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}\big),$$

donde $c = \sqrt{T/\rho}$.

(f) De la ecuación anterior, despeche $y_{i,j+1}$ y escriba el algoritmo de obtención del paso temporal siguiente en la forma

$$y_{i,j+1} \;=\; 2y_{i,j} - y_{i,j-1} \;+\; \lambda^2\big(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}\big),$$

donde $\lambda = c\,\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ es el número de Courant reducido (velocidad de la malla $c_0 = \Delta x/\Delta t$ implica $\lambda = c/c_0$).

(g) ¿Cómo se implementan las condiciones iniciales y de frontera en el esquema numérico? Especifique la forma de:

- condiciones de frontera fijas (extremos sujetos: $y_{0,j} = y_{N,j} = 0$),
- condiciones de frontera libres o de radiación (si procede),
- condiciones iniciales $y_{i,0}$ y $\dot{y}_{i,0}$ (desplazamiento y velocidad inicial).

Indique además cómo calcular $y_{i,1}$ (el primer paso en tiempo) a partir de $y_{i,0}$ y $\dot{y}_{i,0}$.

(h) La condición de Courant para la estabilidad del esquema explícito es

$$\lambda = \frac{c\,\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Explique qué significa esto en términos de los pasos Δt y Δx (interpretación física y numérica).

(i) Escriba un programa (por ejemplo en Python) que implemente el esquema explicito anterior y produzca una animación del movimiento de la cuerda $y(x, t)$. Indique las decisiones prácticas importantes (elección de Δx, Δt, duración de la simulación, condiciones de frontera, normalización de ejes para la animación).

(j) Varíe los pasos Δt y Δx en su programa de modo que en algunos casos se cumpla la condición de Courant y en otros no. Describa y explique qué ocurre en cada caso (estabilidad numérica, propagación correcta de ondas cuando $\lambda \leq 1$; crecimiento no físico e inestabilidad cuando $\lambda > 1$).