MATLAB 單變量函數的根與極值問題

410578068 統計四 陳威傑
國立臺北大學統計學系

November 25, 2019

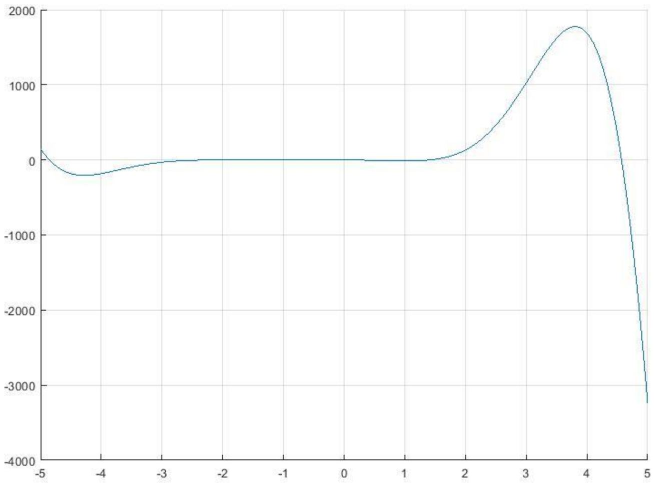
一、前言

函數是代數領域中很重要的一部分，不同的函數都有其獨特的地方，我們可以從他的斜率看出他是的遞增或是遞減，也可以從函數的二次微分看出他是凹向上 (Concave Up) 還是凹向下 (Concave Down) ；我們可以從函數的極值是否存在知道它是否為有限，也可以去尋找函數的根去解方程式。

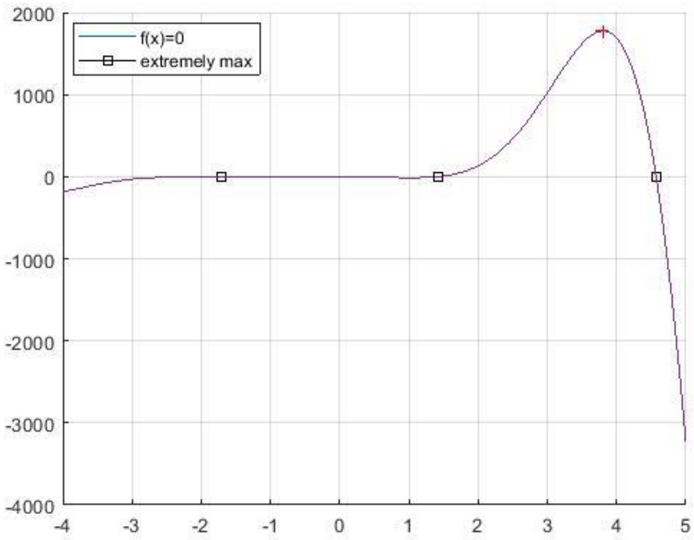
二、單變量函數

(一)、使用 fzero 指令解單變量函數的根

1. 函數：$f(x) = \cos(x)(1+x)^5$
   (1) 函數圖形:



我們將上圖形的X軸範圍縮小成 [-4，5] 繪製新的圖形。



(2) 函數的根及相對極小值：

x1 =	x2 =	x3 =	f_max =
-1.7124	1.4292	4.5708	1.7752e+03

(3) 函數特性:

(a) 函數極限：$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，不為有界函數。

(b) $f(x) = 0, x = -1.7124$，-1.4292，4.5708，與圖二所顯示的位置相近。

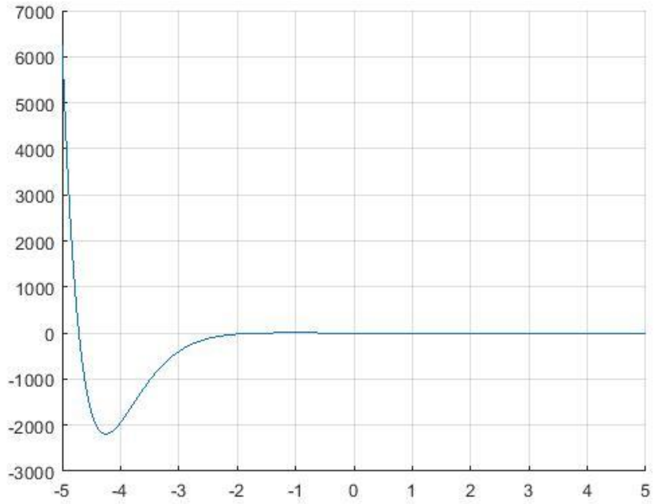
(c) $\max f(x) \fallingdotseq 1.7752e+03, x = 3.8$，與圖二所顯示的位置相近。

(4) 特殊指令

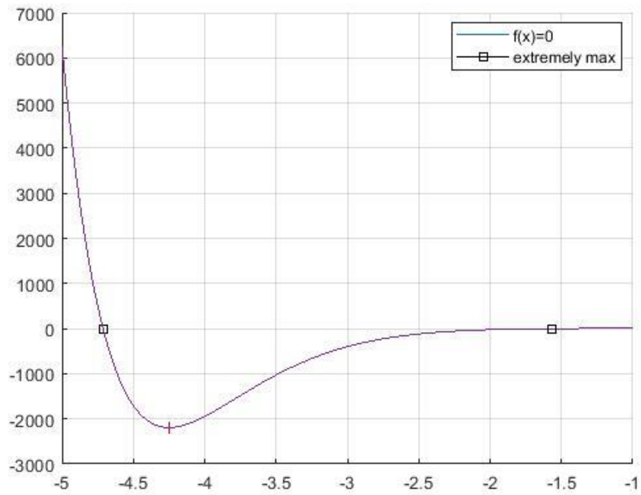
此題是尋找最大值，使用 fminbnd 是尋找最小值，必須作轉換。

2. 函數：$f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{-2x}$

(1) 函數圖形:



我們將上圖形的X軸範圍縮小成 [-5，-1] 繪製新的圖形。



(2) 函數的根及相對極小值：

x1 =	x2 =	x3 =	f_min =
-4.7124	-1.5708	-4.2487	-2.1924e+03

(3) 函數特性:

(a) 函數極限：$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，不為有界函數。

(b) $f(x) = 0, x = -4.7124$，-1.5708，與圖二所顯示的位置相近。

(c) $\min f(x) ≒ -2.1924e + 03, x = -4.2487$，與圖二所顯示的位置相近。

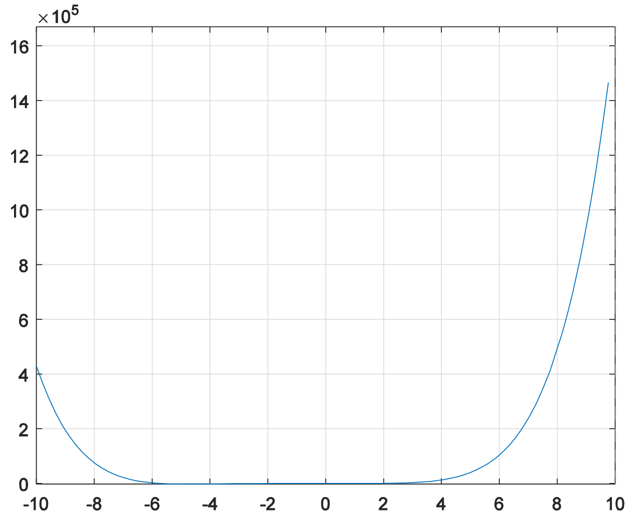
(4) 特殊指令

使用fzero指令尋找根以及使用fminbnd尋找最小值和圖形所呈現的

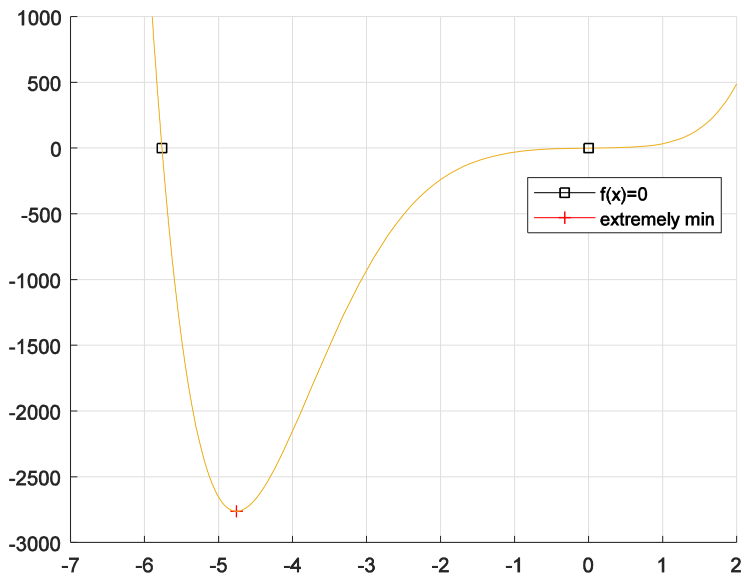
結果相近。

3. 函數：$f(x) = x(1+x)^5 - (1-x)^5 + 1$

(1) 函數圖形:



我們將上圖形的X軸範圍縮小成 [-7，2] 繪製新的圖形。



(2) 函數的根及相對極小值：

f_x_0_1 =	f_x_0_2 =	f_x_min =	f_min =
-5.7659	0	-4.7585	-2.7621e+03

(3) 函數特性:

(a) 函數極限：$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，不為有界函數。

(b) $f(x) = 0, x = 0, -5.7659$，與圖二所顯示的位置相近。

(c) $\min f(x) \doteqdot -2.7621e+03, x = -4.7585$，與圖二所顯示的位置相近。

(4) 特殊指令

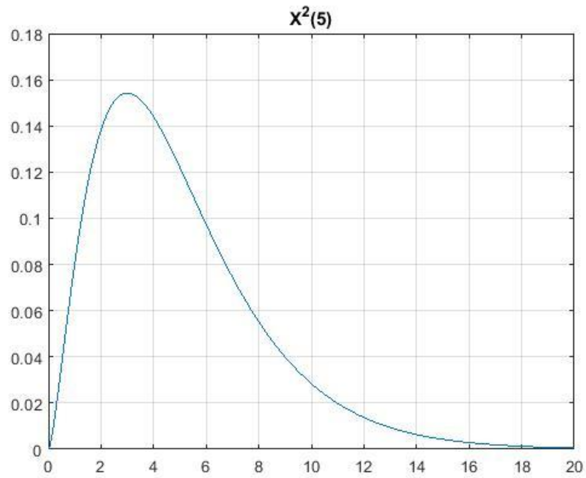
使用fzero指令尋找根以及使用fminbnd尋找最小值和圖形所呈現的結果相近。

(二)、使用最大概似函數求母體分配參數

1. 母體分配：

本題使用卡方分配來進行模擬，並以 $X^2{}_{(5)}$ 為例，其機率密度函數為:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}-1} e^{\frac{-5}{2}}$$



2. 最大概似法（Maximum Likelihood Estimation，縮寫為 MLE）

若 $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n \sim X^2(\theta)$，令$g(\theta) = -\ln \prod_{i=1}^{n} X_i$ ，$\theta' = (g'(\theta) = 0 | g''(\theta) > 0)$，其中$\theta'$即為$\theta$的最大估計值。

3. 最小平方法（Least Squares Estimation，縮寫為 LSE）

若 $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n \sim X^2(\theta)$，令$w(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(X_I - \bar{X})^2$ ，$\theta' = (w'(\theta) = 0 | w''(\theta) > 0)$，其中$\theta'$即為$\theta$的最大估計值。

4. 實驗設計

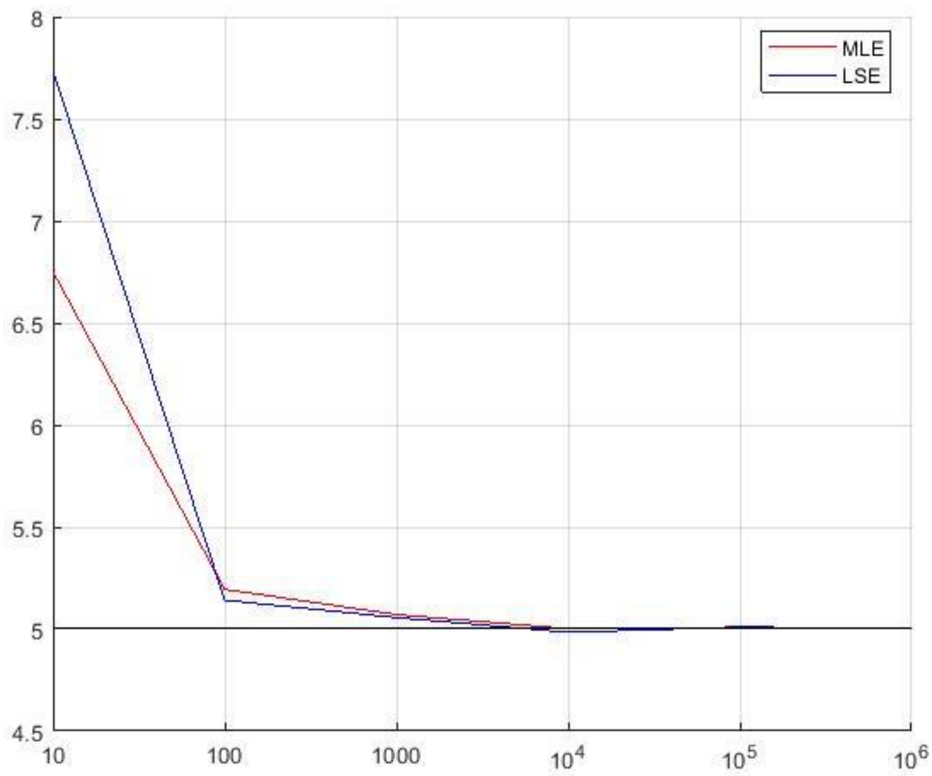
(1) 從 $X^2{}_{(5)}$ 中取 10^a 個樣本數(a=1、2、3、4、5、6)，並使用最大概似估計法及最小平方法計算所得到的 θ估計值。

(2) 繪製不同樣本數及方法下的θ估計值。

(3) 比較不同的參數跟抽樣數與實際理論分配的差異。

5. 實驗結果

	N					
	10	100	1000	10000	100000	1000000
MLE	6.7512	5.1944	5.0709	5.0017	5.009	5.0006
LSE	7.7355	5.1415	5.0559	4.9841	5.01	5.0015



6. 特殊指令及實驗結論

(1) fminbnd 之功能是在特定區間尋找單一變數之函數之最小值。

(2) 我們可以發現隨著樣本數變大，用最大概似法與最小平方法所估計出來的估計值會越接近母體實際參數值。

(3) ticks 之功能是沿 x 軸和 y 軸更改刻度坐標值。

三、結論

函數是代數領域中重要的一部分，透過此次練習加以了解各種函數性質與最大概似法及最小平方法的應用，也學會ticks，fminbnd，fzeros等MATLAB指令。