MATLAB 多變量函數極值與根的問題

410578068 統計四 陳威傑
國立臺北大學統計學系
December 9, 2019

一、前言

多變量函數的定義為令 D 為 R^n 中的集合, 從 D 映至 R 的函數 f 稱為 D 上的 n 變數實函數 (real-valued function of n variables)，其中 D 為其定義域 (domain), f(D) 為其值域 (range)。其廣泛運用在工程、統計、財務等領域。上次練習，我們探討單一變量函數的極值問題，本次我們將深入探討多變量函數極值，從單一變量的極值計算，深入擴展到多個變數。

MATLAB 特殊指令與語法
指令：axis, colorbar, fcontour, fminsearch, fminsearchcon, figure, mesh, meshgrid, text
語法：指令 fminsearch 中的條件設定及雙重迴圈技巧

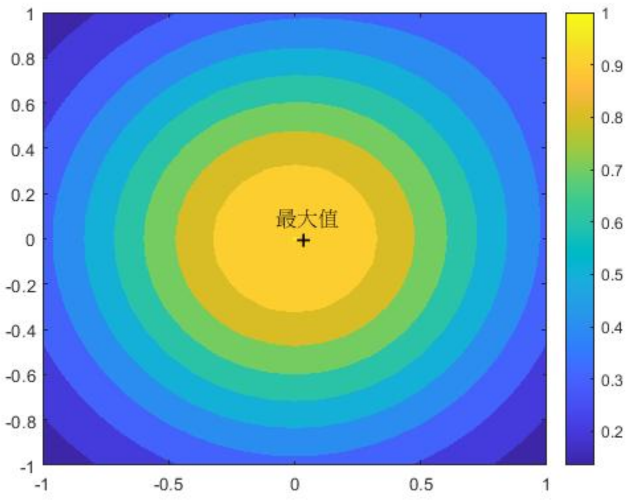
二、多變量函數繪圖

(一) 多變量函數繪圖 (1)

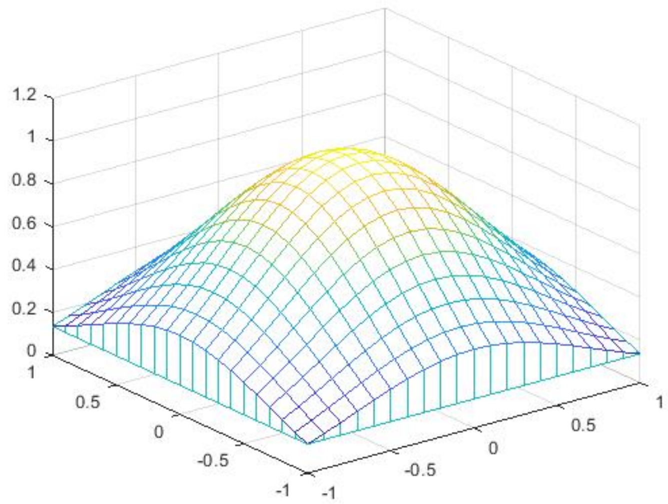
1. 函數：

$$f(x,y) = e^{(-x^2-y^2)} + 1.5e^{-(x-2)^2-(y-2)^2}$$

2. 函數等高線圖：



3. 函數立體網狀圖：



4. 函數特性：

(1) 在這個函數中，我們可以發現在（x, y）=（0.001, 0.001）時有一個最大值 1.0005。

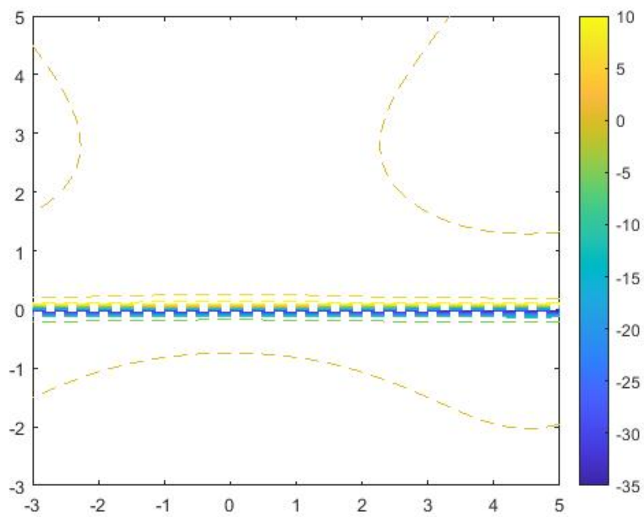
(2) 在此函數中,等高線圖形比立體網狀圖形更明確表達函數最大值的位置。

(二) 多變量函數繪圖 (2)

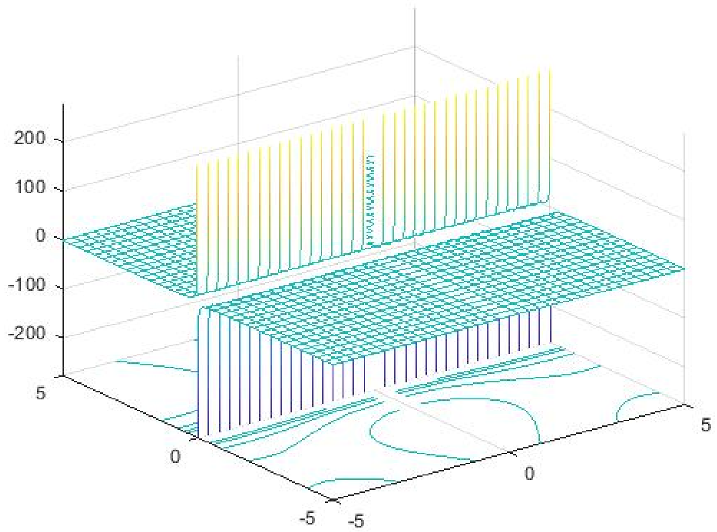
1. 函數：

$$f(x,y)=\frac{\sin(x)}{x}+\frac{\cos(y)}{y}$$

2. 函數等高線圖：



3. 函數立體網狀圖：



4. 函數特性：

(1) 我們可以發現，因為分母不能為零的關係，所以在 x=0 及 y=0 的時候並值不存在，且 x=0，y=0 時將圖形一分為二。

(2) 上半部圖形隨著 x 與 y 越接近 0，函數值越小；下半部圖形隨著 x 與 y 越接近 0，函數值越大。

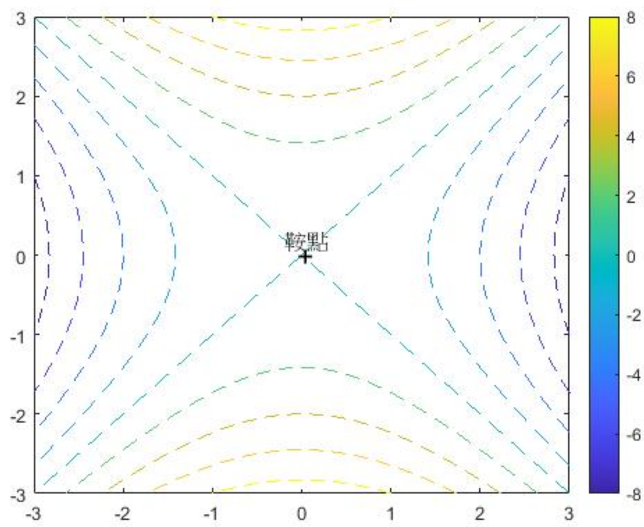
(3) 此圖形不適合用此方式解析。

(三) 多變量函數繪圖 (3)

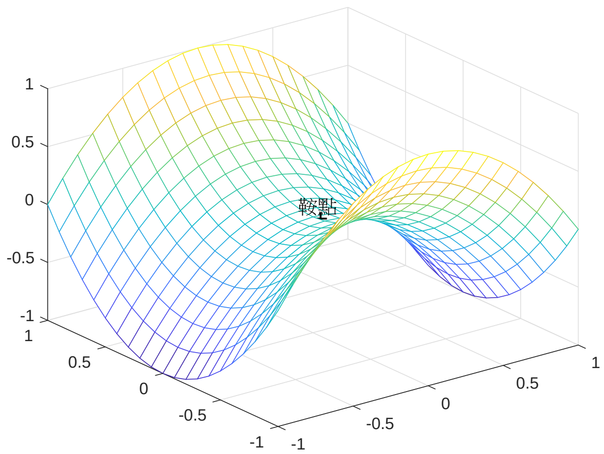
1. 函數：

$f(x,y) =- x^2 + y^2$

2. 函數等高線圖：



3. 函數立體網狀圖：



4. 函數特性：

(1) 在這個函數中，我們可以發現在（x, y）=（0, 0）時有一個鞍點。

(2) 鞍點(Saddle Point): 一個光滑函式(曲線，曲面，或超曲面)的鞍點鄰域的曲線，曲面，或超曲面，都位于這點的切線的不同邊。

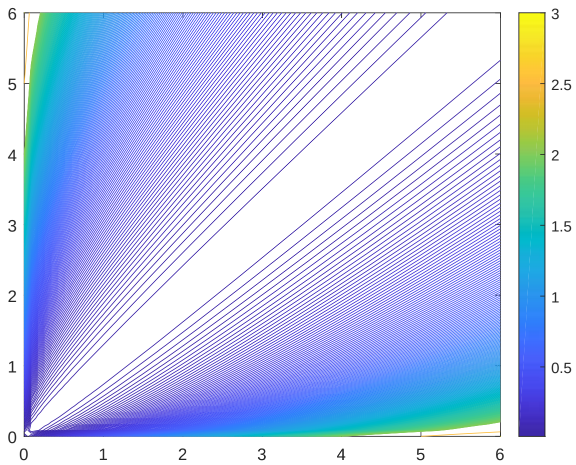
(3) 思考一個擁有兩個以上變數的函式。它的曲面在鞍點好像一個馬鞍，在某些方向往上曲，在其他方向往下曲。在一幅等高線圖裏，一般來說，當兩個等高線圈圈相交叉的地點，就是鞍點。例如，兩座山中間的山口就是一個鞍點。換句話說，可以利用地理學的觀念思考鞍點。

三、多變量函數的極值問題

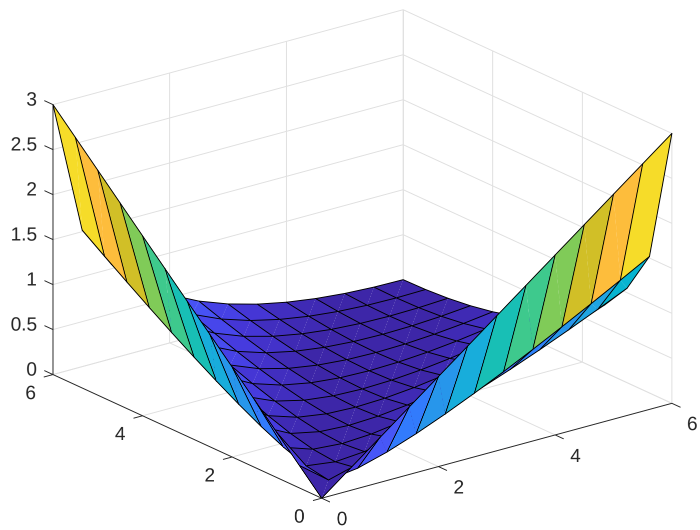
1. 函數：

$f(x,y)=\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}$，$x\geq 0, y\geq 0$

2. 函數等高線圖：



3. 函數立體網狀圖：



4. 函數特性：

(1) 此函數為算幾不等式，$f(x,y)=\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\geq 0$，$x\geq 0, y\geq 0$，當 x=y 時會出現最小值 0。

(2) 我們從圖形中可以發現當一個點離 x=y 這條線越遠的時候，其值會越大，這與算幾不等是可以整理成 $f(x,y)=\sqrt[2]{(x-y)^2}$ 之後的

性質一致。

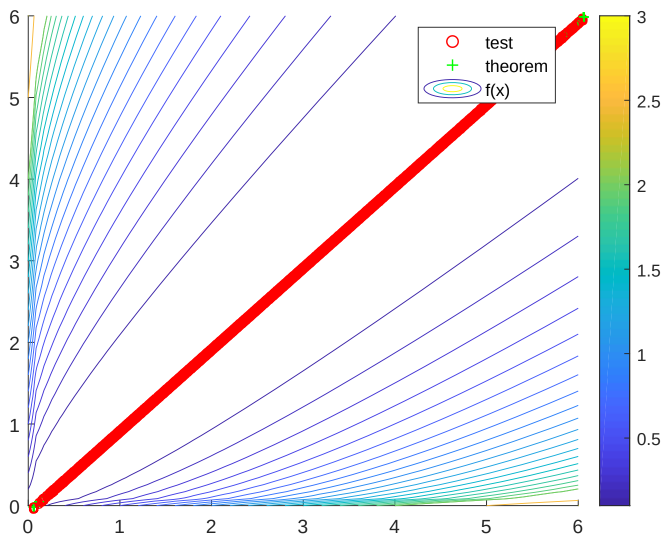
(3) 數學式推導

$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}=\frac{\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{xy}}{2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}\geq 0$$

上面的計算式中，' = ' 要成立，必須是 x, y 兩個數為正數時，才能成立，也才有討論的意 義。因此，算幾不等式成立的條件為 $x > 0, y > 0$。同時，當 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$，也就是 $x = y$ 時，$\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$ 才會成立。

5. 函數極值的實驗：
   (1) 將 x 與 y 平均切成 100 份。
   (2) 使用 fminsearch 指令尋找每一種 xy 組合最接近的最小值，並將其最小值所對應的 x', y'用紅色的「○」符號標記在等高線圖上。
   (3) 使用綠色的「+」符號繪製理論的 x, y 值（即 x=y），亦將其標記在等高線圖上。
   (4) 比較理論值與指令模擬值的差異。

6. 實驗結果:



7. 實驗結論:

我們可以發現紅色的點與綠色的點是幾乎重疊的，所以可見使用 fminsearch 指令在算幾不等式的模擬上與理論值幾乎無異。

三、限制式多變量的極值問題

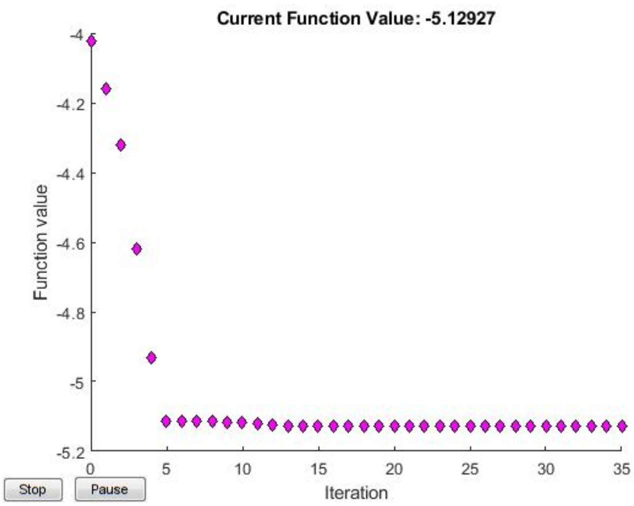
1. 函數：

$$f(x_1,x_2) = e^{(-(x_1-x_2)^2+2x_1^2)}\sin(x_2)\cos(2x_2)\text{，}-1\le x_1,x_2\le 1$$

2. 函數極值的實驗：
   (1) 將 x_1 與 x_2 平均切成 20 份。
   (2) 使用指令 fminsearch 尋找 x_1 與 x_2 組合最接近的最小值。
   (3) 其值會顯示在以下報表。
   (4) 比較理論值與指令模擬值的差異。
3. 實驗結果：

Iteration	Function-count	min f(x)	Procedure
0	1	-4.02371	
1	3	-4.16077	initial simplex
2	5	-4.32028	expand
3	7	-4.61908	expand
4	9	-4.93234	expand
5	11	-5.11529	expand
6	12	-5.11529	reflect
7	14	-5.11529	contract inside
8	16	-5.11529	contract outside
9	18	-5.11694	contract inside
10	20	-5.11829	reflect

部分實驗報表



```
x = 1×2
      0.1286   -0.3860

fval = -5.1293
exitflag = 1
output = struct with fields:
    iterations: 35
     funcCount: 67
```

4. 函數特性實驗結論：

   (1) 此函數在 ()=(0.1286, -0.3860) 有最小值 -5.12927， 與理論值接近。

   (2) 使用的演算法為 "Nelder-Mead Simplex Direct Search"， 用於優化多維無約束問題的一種數值方法，屬於更普遍的搜索算法的類別。

五、結論

在此次的練習中，學到了一個全新的觀念“鞍點”，這個觀點不僅是運用在多變量函數的麯麵圖形上，更常運用在地理學，研究山與山之間的地形。透過這次的學習，我了解到函數是可以廣泛運用在各個領域中，不是只有單純解根的作用。此外，在本次練習中學習到演算法的概念。認識到完全沒有接觸過 "Nelder-Mead Method"，看到演算法強大的威力。